Algebra III - Abstraktna algebra, 12.02.2018.

1. (a) Naj bosta a in b dve celi števili, in naj bo $d = \gcd(a, b)$. Naj bo $H = \{am + bn \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. Pokaži, da je

$$H = d\mathbb{Z}.$$

(b) Določi vse podgrupe grupe $(\mathbb{Z}, +)$.

Re.

(a) $H \subseteq d\mathbb{Z}$: $h \in H \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}$ t.d. $h = am + bn$, $d = \gcd(a, b) \Rightarrow d|a$ in $d|b \Rightarrow d|h \Rightarrow h \in d\mathbb{Z}$.
$d\mathbb{Z} \subseteq H$: $\ell \in d\mathbb{Z} \Rightarrow ... \Rightarrow \ell \in H$.

(b) $k\mathbb{Z}\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

2. (a) Pokaži, da grupi $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nista izomorfni.

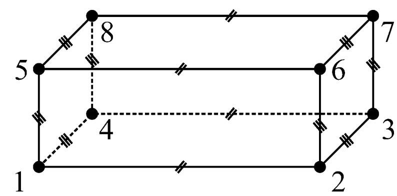
(b) Dana je grupa S_7. Določi maksimalen red elementov v grupi S_7 (torej navečji možen red, ki ga nek element grupe S_7 dejansko ima). Določi število elementov reda 10 grupe S_7.

Re.

(a) $\mathbb{Z}$ je ciklična. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle$.

(b) $12 = \operatorname{lcm}(3, 4) = \operatorname{lcm}(4, 3)$, $\dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{5} \cdot \dfrac{2 \cdot 1}{2} = 504$.

3. Naj bo $\mathcal{O}$ grupa vseh simetrij kvadra (kuboida) (rotacija, zrcaljenje, drsno zrcaljenje,...). Grupa $\mathcal{O}$ deluje na množici $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ ogljišč kvadra. Določi stabilizator ogljišča v_1 glede na to delovanje. Določi stabilizator množice $\{v_1, v_8\}$ glede na to delovanje. Uporabi orbita-stabilizator izrek in izračunaj $|\mathcal{O}|$. Katera znana grupa je izomorfna grupi O?



Re.

$|\mathcal{O}| = 16$, $\mathcal{O} \cong D_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathcal{O}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$,
$\mathcal{O}_{\{1,8\}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$.

4. Naj bo G enostavna grupa reda 1188. Koliko elemntov reda 11 je v G?

Re.

$12 \cdot 10 = 120$.

Več na `http://osebje.famnit.upr.si/~penjic/`