Algebra III - Abstraktna algebra, 12.01.2018.

1. Poišči indeks podgrupe $\langle 3\rangle$ v grupi $\mathbb{Z}_{24}$. Poišči indeks podgrupe $\langle(2,3)\rangle$ v grupi $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$. Napiši Cayley-evo tabelo za kvocientno grupo $\mathbb{Z}_{24}/\langle 3\rangle$.

Re.

$\langle 3\rangle = \{0,3,6,9,12,15,18,21\}$, $|\langle 3\rangle| = 8$, $[\mathbb{Z}_{24} : \langle 3\rangle] = 3$.

$\langle(2,3)\rangle = \{(0,0),(2,3)\}$, $|\langle(2,3)\rangle| = 2$, $[\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 : \langle(2,3)\rangle] = 12$.

$+$	$\langle 3\rangle$	$1+\langle 3\rangle$	$2+\langle 3\rangle$
$\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$1+\langle 3\rangle$	$2+\langle 3\rangle$
$1+\langle 3\rangle$	$1+\langle 3\rangle$	$2+\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$
$2+\langle 3\rangle$	$2+\langle 3\rangle$	$\langle 3\rangle$	$1+\langle 3\rangle$

2. (a) Naj bo G grupa reda 77 in naj bo H podgrupa grupe G reda 11. Pokaži, da je H edinka grupe G.

(Spomnimo se: Za končne podgrupe H in K grupe G velja

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

kjer je $HK = \{hk \mid h \in H,\, k \in K\}$.)

(b) Naj bosta H in K edinki grupe G, tako da velja $H \cap K = \{e\}$, $|H| = p$ (p je praštevilo) in $|K| = 4$. Če je $HK = G$, potem pokaži, da je G abelska.

(Spomnimo se: Če sta H in K edinki grupe G in če je $H \cap K = \{e\}$, potem je $hk = kh$ za vsak $h \in H$ in $k \in K$).

Re.

(a) 11 deli 77, $\exists a$ t.d. $|a| = 11$, $|\langle a\rangle| = 11$, $H := \langle a\rangle$.

Če je $|K| = 11$ in $H \neq K$ potem $|H \cap K| = 1$, $7 = |G| \geq |HK| = 121$, protislovje.

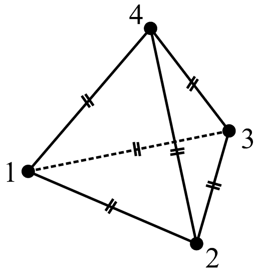
Obstaja natanko ena grupa reda 11. $\forall g \in G$, gHg^{-1} je podgrupa reda 11,... $\Rightarrow H \lhd G$.

(b) $|H| = p$, p je praštevilo $\Rightarrow H$ je abelska.

$|K| = 4 \Rightarrow$ bodisi $K \cong \mathbb{Z}_4$ ali $K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \Rightarrow K$ je abelska.

$g_1g_2 = (h_1k_1)(h_2k_2) = ... = (h_2h_1)(k_1k_2) = ... = (h_2k_2)(h_1k_1) = g_2g_1 \qquad \Rightarrow \qquad G$ je abelska.

3. Naj bo $\mathcal{O}$ grupa vseh simetrij tetraedra (rotacija, zrcaljenje, drsno zrcaljenje,...). Grupa $\mathcal{O}$ deluje na množici $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ogljišč tetraedra. Določi stabilizator ogljišča v_1 glede na to delovanje. Uporabi orbita-stabilizator izrek in izračunaj $|\mathcal{O}|$.



Re.

$|\mathcal{O}| = |\mathcal{O}1| \cdot |\mathcal{O}_1| = 4|\mathcal{O}_1|, \qquad |\mathcal{O}_1| = |\mathcal{O}_1 2| \cdot |\mathcal{O}_{12}| = 3|\mathcal{O}_{12}|, \qquad |\mathcal{O}_{12}| = |\mathcal{O}_{12}3| \cdot \mathcal{O}_{123} = 2 \cdot 1$

$\Rightarrow |\mathcal{O}| = 24 \Rightarrow |\mathcal{O}_1| = 6$,

$\mathcal{O}_1 =$

$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\right\}.$$

4. Naj bo G enostavna grupa reda 168. Koliko elemntov reda 7 je v G?

Re.

$|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, $|G| = 7 \cdot 24$, $\gcd(7, 24) = 1 \Rightarrow$ obstaja najmanj ena podgrupa H reda 7, H je Sylowa 7 podgrupa.

$|G| = 7 \cdot 24$, $\gcd(7, 24) = 1 \Rightarrow$ število Sylowih 7-podgrup je oblike $1 + 7m$, $1 + 7m$ deli $168 \Rightarrow$ ...
število Sylowih 7-podgrup je $8 \Rightarrow$ obstaja $7 + 7 \cdot 6 = 49$ elementov reda 7.

Več na `http://osebje.famnit.upr.si/~penjic/`