Algebra III - Abstraktna algebra, 29.08.2017.

1. (a) Naj bo S množica moči $n \in \mathcal{N}$. Koliko različnih binarnih operacij lahko definiramo na množici S?

(b) Dokažite, da tvorijo vse matrike oblike

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

grupo za običajno operacijo množenja matrik.

Re.
(a) $|S| = n \Rightarrow |S \times S| = n^2$. Vsak od n^2 elementov se lahko preslika v n različnih elementov; $n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^{n^2} \Rightarrow$ obstaja n^{n^2} različnih binarnih operacij.
(b) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$;
$\begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;
$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

2. Podane so naslednje permutacije:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \ \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Zapišite ciklične dekompozicije permutacij.

(b) Permutacije izrazite kot produkt transpozicij.

(c) Izračunajte $\alpha\beta$, $\beta\alpha$, $\alpha^{-1}\beta$, $\beta\alpha^2$, $(\alpha\beta)^{-2}$, $\alpha\beta\alpha^3$, $\gamma^{-1}\beta\gamma^{-1}$ in $\gamma\beta^2\alpha$.

Re.
$\alpha = (1234)$, $\beta = (23)$, $\gamma = (12)(34)$, $\delta = (132)$.
$\alpha = (14)(13)(12)$, $\beta = (23)$, $\gamma = (12)(34)$, $\delta = (12)(13)$.
$\alpha\beta = (124)$, $\beta\alpha = (134)$, $\alpha^{-1}\beta = (143)$, $\beta\alpha^2 = (1243)$, $(\alpha\beta)^{-2} = (124)$, $\alpha\beta\alpha^3 = (34)$, $\gamma^{-1}\beta\gamma^{-1} = (14)$ in $\gamma\beta^2\alpha = (24)$.

3. (a) Poišči odseke podgrupe $\langle 4 \rangle$ v grupi $\mathbb{Z}_{12}$ in konstruiraj Cayley-evo tabelo za kvocientno grupo $\mathbb{Z}_{12}/\langle 4 \rangle$.

(b) Če obstaja, poišči kak netrivialni homomorfizem $\varphi : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_4$.

Re.
(a) $\{0, 4, 8\}, \{1, 5, 9\}, \{2, 6, 10\}, \{3, 7, 11\}$,

$+$	$\langle 4\rangle$	$1+\langle 4\rangle$	$2+\langle 4\rangle$	$3+\langle 4\rangle$
$\langle 4\rangle$	$\langle 4\rangle$	$1+\langle 4\rangle$	$2+\langle 4\rangle$	$3+\langle 4\rangle$
$1+\langle 4\rangle$	$1+\langle 4\rangle$	$2+\langle 4\rangle$	$3+\langle 4\rangle$	$\langle 4\rangle$
$2+\langle 4\rangle$	$2+\langle 4\rangle$	$3+\langle 4\rangle$	$\langle 4\rangle$	$1+\langle 4\rangle$
$3+\langle 4\rangle$	$3+\langle 4\rangle$	$\langle 4\rangle$	$1+\langle 4\rangle$	$2+\langle 4\rangle$

(b) Naj bo $\varphi(1) = a$.
$12 = 1 + 1 + ... + 1 = 0$, $\varphi(0) = \varphi(12) = \varphi(1 + ... + 1) = \varphi(1) + ... + \varphi(1) = 12a = 0$. Če je $a = 1$, potem $\varphi(j) = j$ je homomorfizem.

4. Diederska grupa $G = D_6$ na naraven način deluje na množici oglišč pravilnega 6-kotnika, označimo jo z $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Enako velja za njene podgrupe $H = \langle\rho\rangle$, $K = \langle\tau\rangle$ in $L = \langle\tau\rho\rangle$ kjer je $\rho = (123456)$ in $\tau = (26)(35)$.

(a) Poišči orbite delovanj grup G, H, K in L na X!

(b) Spomnimo se: Delovanje je tranzitivno, če za poljubna $x_1, x_2 \in X$, obstaja $g \in G$, da je $x_1 = g * x_2$. Katera izmed delovanj G, H, K in L so tranzitivna?

(c) Spomnimo se: Delovanje je zvesto, če $\forall g \in G : g * x = x \ \forall x \in X \Rightarrow g = e$. Je delovanje G na X zvesto? Kaj pa ostala delovanja?

Re.

(a) Orbite delovanj grup G je X; orbite delovanj grup H je X; orbite delovanj grup K so $\{1\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 5\}$ in $\{4\}$; orbite delovanj grup L so $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$ in $\{3, 4\}$.

(b) H in K sta tranzitivna, K in L nista.

(c) Vse štiri grupe so zvesta.