Univerza na Primorskem
Pedagoška fakulteta Koper

Geometrija

Istvan Kovacs in Klavdija Kutnar

Koper, 2007

PREDGOVOR

Pričujoče študijsko gradivo je povzeto po naslednjih knigah

- *Richard S. Millman, George D. Parker, Geometry, A metric Approach with Models, Springer-Verlag, 1991*
- *L. Szabó, Konvex Geometria, ELTE Jegyzet, Budapest 1996*
- *I. Reiman, Fejezetek az elemi geometriából, Tankönyvkiadó, Budapest 1987*

in je namenjeno študentom Geometrije, ki je umeščena v učni načrt 3. letnika univerzitetnega študijskega programa Matematika in računalništvo na Pedagoški fakulteti Koper Univerze na Primorskem.

Študijsko gradivo ne želi biti vseobsegajoče: v prvi vrsti naj ga študent uporabi kot dopolnilo k zapiskom s predavanj in seminarjev. Če se bo uporabnik z njegovo pomočjo dokopal do novih matematičnih spoznanj, je njegov namen dosežen.

Kazalo

Poglavje 1

Incidenčne in metrične geometrije

1.1 Definicije in modeli incidenčne geometrije

V tem razdelku so definirali notaciji abstraktne geometrije in incidenčne geometrije. Po definicijah je podanih nekaj primerov, ki bodo služili kot modeli teh geometrij. Najpomembnejši izmed le teh sta *Kartezična ravnina* in *Poincarejeva ravnina*.

Definicija 1. *Geometrija* je množica točk $\mathcal{S}$ in množica premic $\mathcal{L}$ skupaj z relacijami med točkami in premicami.

Definicija 2. *Abstraktna geometrija* $\mathcal{A}$ je množica $\mathcal{S}$, katere elemente imenujemo *točke* , skupaj z naborom $\mathcal{L}$ nepraznih podmnožic množice $\mathcal{S}$, ki jih imenujemo *premice*, tako da velja:

(i) Za poljubni dve točki $A, B \in \mathcal{S}$ obstaja premica $l \in \mathcal{L}$, tako da $A \in \mathcal{L}$ in $B \in \mathcal{L}$.

(ii) Vsaka premica ima vsaj dve točki.

Če je $\mathcal{A} = \{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ abstraktna geometrija ter $P \in \mathcal{S}$, $l \in \mathcal{L}$ in $P \in l$, pravimo, da *točka* P *leži na premici* l, ali da l *gre skozi* P. V tem jeziku se prvi aksiom abstraktne geometrije glasi: Vsak par točk leži na neki premici.

Pozor. Premice niso nujno ravne (glej Trditev 5).

Trditev 3. Naj bo $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Množico premic definiramo kot sledi. *Vertikalna premica* je poljubna podmnožica množice $\mathbb{R}^2$ oblike

$$L_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\},$$

kjer je a fiksno realno število. *Ne-vertikalna premica* je poljubna podmnožica množice $\mathbb{R}^2$ oblike

$$L_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\},$$

kjer sta m in b fiksni realni števili. Naj bo $\mathcal{L}_E$ množica vseh vertikalnih in ne-vertikalnih premic. Potem je $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$ abstraktna geometrija.

Dokaz. DN. Pomoč: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ in $b = y_2 - mx_2$. □

Definicija 4. Abstraktna geometrija $\mathcal{C} = \{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$ iz Trditve 3 se imenuje *kartezična ravnina.*

Trditev 5. Naj bo $\mathcal{S} = \mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. Množico premic definiramo kot sledi. Premica *tipa I* je poljubna podmnožica množice $\mathbb{H}$ oblike

$${}_aL = \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid x = a\} = \{(a, y) \in \mathbb{R} \mid y > 0\},$$

kjer je a fiksno realno število. Premica *tipa II* je poljubna podmnožica množice $\mathbb{H}$ oblike

$${}_cL_r = \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid (x - c)^2 + y^2 = r^2\},$$

kjer sta c in r fiksni realni števili in $r > 0$. Naj bo $\mathcal{L}_H$ množica vseh premic tipa I in tipa II. Potem je $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$ abstraktna geometrija.

Dokaz. DN. Pomoč: $c = \frac{y_2^2-y_1^2+x_2^2-x_1^2}{2(x_2-x_1)}$ in $r = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}$. □

Definicija 6. Abstraktna geometrija $\mathcal{H} = \{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H\}$ iz Trditve 5 se imenuje *Poincarejeva ravnina.*

Definicija 7. *Enotska krožnica* v $\mathbb{R}^3$ je

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 = 1\}.$$

Ravnina v $\mathbb{R}^3$ je množica

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + dy + cz = d\},$$

kjer so a, b, c, d fiksna realna števila in števila a, b, c niso vsa enaka nič.

Če je v Definiciji 7 konstanta $d = 0$, potem gre ravnina skozi izhodišče $(0, 0, 0)$.

Definicija 8. *Great krožnica* (great circle), $\mathcal{G}$, sfere S^2 je presečišce sfere S^2 z ravnino, ki gre skozi izhodišče. Torej, $\mathcal{G}$ je great krog, če obstajajo števila $a, b, c \in \mathbb{R}$, ki niso vsa enaka nič, tako da je

$$\mathcal{G} = \{(x, y, z) \in S^2 \mid ax + by + cz = 0\}.$$

Trditev 9. Naj bo $\mathcal{S} = S^2$ in naj bo $\mathcal{L}_R$ množica great krožnic v S^2. Potem je $\{S^2, \mathcal{L}_R\}$ abstraktna geometrija.

Dokaz. DN. □

Definicija 10. Abstraktna geometrija $\{S^2, \mathcal{L}_R\}$ v Trditvi 9 se imenuje *Riemannova sfera.*

Definicija 11. Abstraktna geometrija $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ je *incidenčna geometrija*, če velja:

(i) poljubni dve različni točki ležita na eni sami skupni premici.

(ii) obstajajo tri točke $A, B, C \in \mathcal{S}$, ki ne ležijo na isti premici.

Notacija. Če je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ incidenčna geometrija in $P, Q \in \mathcal{S}$, bomo enolično premico, na kateri ležita P in Q, označevali z $l = PQ$.

Definicija 12. Množica točk $\mathcal{P}$ je *kolinearna*, če obstaja premica l, tako da je $\mathcal{P} \subset l$. V nasprotnem primeru pravimo, da je $\mathcal{P}$ je *nekolinearna.*

Drugi aksiom incidenčne geometrije lahko zapišemo tudi takole: Obstajajo tri nekolinearne točke.

Trditev 13. Kartezična ravnina $\mathcal{C}$ je incidenčna geometrija.

Dokaz. DN. □

Trditev 14. Poincarejeva ravnina $\mathcal{H}$ je incidenčna geometrija.

Dokaz. DN. □

Definicija 15. Če sta l_1 in l_2 premici v abstraktni geometriji, potem je premica l_1 *vzporedna* premici l_2 (pišemo $l_1 \,||\, l_2$), če $l_1 = l_2$ ali $l_1 \cap l_2 = \emptyset$.

Posledica 16. V incidenčni geometriji sta dve premici vzporedni ali pa se sekata v natanko eni točki.

Vaje.

1. Poišči Poincarejevo premico skozi

   (i) točki $(1, 2)$ in $(3, 4)$;

   (ii) točki $(2, 1)$ in $(4, 3)$.

2. Poišči sferično premico (great krožnico) skozi

   (i) točki $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}})$ in $(1, 0, 0)$;

   (ii) točki $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ in $(0, -1, 0)$.

3. Na primeru pokaži, da v Poincarejevi ravnini obstajajo vsaj tri nekolinearne točke.

4. V kartezični ravnini poišči vse premice skozi $(0, 1)$, ki so vzporedne z vertikalno premico L_6.

5. V Poincarejevi ravnini poišči vse premice, ki gredo skozi $(0,1)$ in so vzporedne premici ${}_6L$ (obstaja jih neskončno mnogo).

6. Naj bo $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$ in $J_{a,b,c} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by = c\}$, kjer $a,b,c \in \mathbb{R}$. Naj bo $\mathcal{L}_J$ množica vseh takih $J_{a,b,c}$, da je vsaj en od a in b različen od nič. Dokaži, da je $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_J\}$ incidenčna geometrija.

7. Naj bo $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ in naj bo $\mathcal{L}$ možica vseh kartezičnih premic, ki ležijo v $\mathcal{S}$. Pokaži, da $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ ni incidenčna geometrija.

8. Dokaži, da Riemannova sfera ni incidenčna geometrija.

9. Dokaži oziroma navedi protiprimer:

   (i) Naj bosta $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{L}_1\}$ in $\{\mathcal{S}_2, \mathcal{L}_2\}$ abstraktni geometriji. Naj bo $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ in $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Tedaj je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ abstraktna geometrija.

   (ii) Naj bosta $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{L}_1\}$ in $\{\mathcal{S}_2, \mathcal{L}_2\}$ abstraktni geometriji. Naj bo $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ in $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Tedaj je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ abstraktna geometrija.

10. Naj bo $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ abstraktna geometrija. Če sta premici l_1 in l_2 v $\mathcal{L}$ vzporedni, pišemo $l_1 \sim l_2$. Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija. Če je $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ kartezična ravnina, lahko vsak ekvivalenčni razred karakteriziramo z realnim številom ali neskončnostjo. Katero je to število?

11. Obstaja končna geometrija s 7 točkami, v kateri ima vsaka premica natanko 3 točke. Poišči to geometrijo. Koliko premic ima?

1.2 Metrična geometrija

Definicija 17. *Razdaljna funkcija* na množici $\mathcal{S}$ je funkcija $d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, tako da za vsaka $P, Q \in \mathcal{S}$ velja

(i) $d(P,Q) \geq 0$;

(ii) $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$; in

(iii) $d(P,Q) = d(Q,P)$.

V naslednji definiciji bomo spoznali razdaljno funkcijo za kartezično geometrijo.

Definicija 18. Naj bo $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$, $P = (x_1, y_1)$ in $Q = (x_2, y_2)$. *Evklidska razdalja* je definirana z naslednjim predpisom

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Domača naloga. Dokaži, da je d_E iz Definicije 18 res razdaljna funkcija.

Definicija 19. Naj bosta $P = (x_1, y_1)$ in $Q = (x_2, y_2)$ točki Poincarejeve ravnine $\mathcal{H}$. Tedaj je *Poincarejeva razdalja* d_H dana s predpisom

$$d_H(P,Q) = \begin{cases} \mid \ln(\frac{y_2}{y_1}) \mid, & \text{če } x_1 = x_2 \\ \mid \ln(\frac{\frac{x_1-c+r}{y_1}}{\frac{x_2-c+r}{y_2}}) \mid, & \text{če } P \text{ in } Q \text{ ležita na } {}_cL_r \end{cases} .$$

Domača naloga. Dokaži, da je d_H iz Definicije 19 razdaljna funkcija.

Sledi definicija taxi razdalje. Ime razdalje prihaja iz problema taxista, ki vozi po pravokotni cestni mreži. Taxi razdalja meri razdaljo, ki bi jo moral taxi prevoziti od točke P do točke Q, če ne bi bilo enosmernih ulic.

Definicija 20. Če sta $P = (x_1, y_1)$ in $Q = (x_2, y_2)$ točki v $\mathbb{R}^2$, je *taxi razdalja* (taxicab distance) med njima definirana s predpisom

$$d_T(P,Q) = \mid x_1 - x_2 \mid + \mid y_1 - y_2 \mid .$$

Trditev 21. Taxi razdalja je razdaljna funkcija na $\mathbb{R}^2$.

DOKAZ. Vaje. □

Funkciji d_E in d_T sta obe razdaljni funkciji na množici $\mathbb{R}^2$. V splošnem lahko neka množica premore več različnih razdaljnih funkcij. Torej, če želimo govoriti o lastnostih razdalje na neki množici, moramo določiti tako množico kot tudi razdaljno funkcijo.

Definicija 22. Naj bo l premica v incidenčni geometriji $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$. Predpostavimo, da obstaja razdaljna funkcija d na $\mathcal{S}$. Funkcija $f : l \to \mathbb{R}$ je *merilo (ali koordinatni sistem) za* l, če velja

(i) f je bijekcija;

(ii) za vsak par točk P in Q na premici l velja:

$$\mid f(P) - f(Q) \mid = d(P,Q). \tag{1.1}$$

Enačba (1.1) se imenuje *enačba merila*, $f(P)$ pa imenujemo *koordinata točke* P *glede na* f.

Definicija 23. Incidenčna geometrija $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ skupaj z razdaljno funkcijo d zadošča *merilni zahtevi* (Ruler Postulate), če ima vsaka premica $l \in \mathcal{L}$ merilo. V tem primeru $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ imenujemo *metrična geometrija.*

Trditev 24. Kartezična ravnina z evklidsko razdaljo je metrična geometrija.

DOKAZ. DN. □

Definicija 25. *Evklidska ravnina* je geometrija $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_E\}$.

Trditev 26. Funkcija d_H je razdaljna funkcija za Poincarejevo ravnino in $\{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H, d_H\}$ je metrična geometrija.

Dokaz. DN. (*Namig.* Uporabi hiperbolične funkcije: $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ in $\operatorname{sech}(t) = \frac{1}{\cosh(t)} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}$.)
□

Trditev 27. Kartezična ravnina s taxi razdaljo $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_T\}$ je metrična geometrija. Imenujemo jo *taxi ravnina.*

Dokaz. Vaje. □

Za konec razdelka navajamo tabelo standardnih meril za nekatere metrične geometrije.

Model	*Tip premice*	*Standardno merilo*
Evklidska ravnina	$L_a = \{(a, x) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$	$f(a, y) = y$
	$L_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\}$	$f(x, y) = x\sqrt{1 + m^2}$
Poincarejeva ravnina	${}_aL = \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid x = a\}$	$f(a, y) = \ln y$
	${}_cL_r = \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid (x - c)^2 + y^2 = r^2\}$	$f(x, y) = \ln(\frac{x-c+r}{y})$
taxi ravnina	$L_a = \{(a, x) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$	$f(a, y) = y$
	$L_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\}$	$f(x, y) = (1+ \mid m \mid)x$

Vaje.

1. Dokaži, da za vsak t velja
   (i) $[\cosh(t)]^2 - [\sinh(t)]^2 = 1$;
   (ii) $[\tanh(t)]^2 + [\operatorname{sech}(t)]^2 = 1$.

2. Naj bo l ne-vertikalna premica $L_{2,3}$ v Evklidski ravnini $\mathcal{C}$ z evklidsko razdaljo d_E. Pokaži, da predpis $f((x, y)) = \sqrt{5}x$ določa merilo f premice l in poišči koordinate točke $R = (1, 5)$ glede na f.

3. V Evklidski ravnini poišči
   (i) koordinate točke $(2, 3)$ glede na premico $x = 2$;
   (ii) koordinate točke $(2, 3)$ glede na premico $y = -4x + 11$.

   (Pozor. Obstaja več pravilnih odgovorov.)

4. Poišči koordinate točke $(2, 3)$ glede na premico $y = -4x + 11$ v taxi ravnini.

5. Poišči koordinate točke $(2, 3)$ v Poincarejevi ravnini glede na
   (i) premico $(x - 1)^2 + y^2 = 10$;
   (ii) premico $x = 2$.

6. Poišči Poincarejevo razdaljo med točkama
   (i) $(1, 2)$ in $(3, 4)$;

(ii) $(2, 1)$ in $(4, 3)$.

7. Dokaži, da je funkcija $g : {}_aL \to \mathbb{R}$ dana s predpisom $g(a, y) = \ln(y)$ bijekcija in da zadošča merilnim zahtevam. Pokaži, da je inverz funkcije g dan s predpisom $g^{-1}(t) = (a, e^t)$.

8. Poišči točko P na premici $L_{2,-3}$ v Evklidski ravnini, katere koordinata je -2.

9. Poišči točko P na premici $L_{2,-3}$ v taxi ravnini, katere koordinata je -2.

10. Poišči točko P na premici ${}_{-3}L_{\sqrt{7}}$ v Poincarejevi ravnini, katere koordinata je $\ln 2$.

11. Na $\mathbb{R}^2$ definiramo razdaljo d^* z naslednjim predpisom

$$d^*(P,Q) = \begin{cases} d_E(P,Q), & \text{če } d_E(P,Q) \le 1 \\ 1, & \text{če } d_E(P,Q) > 1 \end{cases}.$$

(i) Ali je d^* razdaljna funkcija?
(ii) Poišči in skiciraj vse točke $P \in \mathbb{R}^2$, za katere velja $d^*((0,0), P) \le 2$.
(iii) Poišči in skiciraj vse točke $P \in \mathbb{R}^2$, za katere velja $d^*((0,0), P) = 2$.

12. Naj bo d^* razdaljna funkcija iz naloge 11. Dokaži, da ne obstaja incidenčna geometrija na $\mathbb{R}^2$, tako da je $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}, d^*\}$ metrična geometrija. (*Namig.* Predpostavi nasprotno, torej da obstaja merilo $f : l \to \mathbb{R}$ in da obstaja točka $P_0 \in l$, ki ima koordinato nič. Poglej si vse točke na premici l s koordinato ± 2.)

13. Naj bosta d_0 in d_1 razdaljni funkciji na $\mathcal{S}$. Dokaži, da je tudi $sd_0 + td_1$ razdaljna funkcija na $\mathcal{S}$, kjer $s \ge 0$ in $t > 0$.

1.3 Posebni koordinatni sistemi

Izrek 28. Naj bo f koordinatni sistem za premico l v metrični geometriji. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in $\epsilon = \pm 1$. Tedaj je $h_{a,\epsilon} : l \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom

$$h_{a,\epsilon}(P) = \epsilon(f(P) - a)$$

koordinatni sistem za l.

DOKAZ. Predavanja. □

Izrek 29. *(Ruler Placement Theorem)* Naj bo l premica v metrični geometriji in naj bosta A in B točki, ki ležita na premici l. Potem obstaja tak koordinatni sistem g za l, da je $g(A) = 0$ in $g(B) > 0$.

DOKAZ. Predavanja. □

Definicija 30. Naj bo $l = AB$. Če je $g : l \to \mathbb{R}$ koordinatni sistem za l, za katerega velja, da je $g(A) = 0$ in $g(B) > 0$, potem g imenujemo *koordinatni sistem z izhodiščem A in B pozitivnim.*

Izrek 31. Naj bo l premica v metrični geometriji. Naj bosta $g : l \to \mathbb{R}$ in $f : l \to \mathbb{R}$ koordinatna sistema za l. Potem obstajata $a \in \mathbb{R}$ in $\epsilon = \pm 1$, tako da velja: $g(P) = \epsilon(f(P) - a)$ za vse točke $P \in l$.

Dokaz. Predavanja. □

Vaje.

1. V Evklidski ravnini poišči tako merilo f, da velja $f(P) = 0$ in $f(Q) > 0$, kjer je
   (i) $P = (2, 3)$ in $Q = (2, -5)$;
   (ii) $P = (2, 3)$ in $Q = (4, 0)$.
2. V Poincarejevi ravnini poišči tako merilo f, da velja $f(P) = 0$ in $f(Q) > 0$, kjer je
   (i) $P = (2, 3)$ in $Q = (2, 1)$;
   (ii) $P = (2, 3)$ in $Q = (-1, 6)$.
3. V taxi ravnini poišči tako merilo f, da velja $f(P) = 0$ in $f(Q) > 0$, kjer je
   (i) $P = (2, 3)$ in $Q = (2, -5)$;
   (ii) $P = (2, 3)$ in $Q = (4, 0)$.
4. Naj bosta P in Q točki v metrični geometriji. Pokaži, da obstaja točka M, za katero velja: $M \in PQ$ in $d(P, M) = d(M, Q)$.
5. Dokaži, da ima premica v metrični geometriji neskončno mnogo točk.
6. Naj bo funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana s predpisom $g(s) = s/(\mid s \mid +1)$. Pokaži, da je g bijekcija.

Poglavje 2

Vmesnost in elementarne slike

2.1 Alternativni opis kartezične geometrije

Definicija 32. Naj bo $A = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ in $B = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Potem:

(i) $A + B = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$;

(ii) $rA = (rx_1, ry_1) \in \mathbb{R}^2$;

(iii) $A - B = A + (-1)B = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$;

(iv) $\langle A, B\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 \in \mathbb{R}$;

(v) $\| A \| = \sqrt{\langle A, A\rangle} \in \mathbb{R}$.

Trditev 33. Za vse $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ in $r, s \in \mathbb{R}$ velja:

(i) $A + B = B + A$;

(ii) $r(A + B) = rA + rB$;

(iii) $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$;

(iv) $\langle A + B, C\rangle = \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$;

(v) $\| A \| > 0$, če $A \neq (0, 0)$;

(vi) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

(vii) $(r + s)A = rA + sA$;

(viii) $\langle rA, B\rangle = r\langle A, B\rangle$;

(ix) $\| rA \| = | r | \cdot \| A \|$.

Dokaz. DN. □

Z uporabo opisane notacije lahko na $\mathbb{R}^2$ vpeljemo incidenčno geometrijo, če definiramo premico L_{AB} skozi različni točki A in B s predpisom

$$L_{AB} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid X = A + t(B - A) \text{ za nek } t \in \mathbb{R}\}.$$

Trditev 34. Naj bo $\mathcal{L}'$ nabor vseh podmnožic množice $\mathbb{R}^2$ oblike L_{AB}. Potem je $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}'\}$ kartezična ravnina in zato incidenčna geometrija.

DOKAZ. DN. □

Trditev 35. Če sta $A, B \in \mathbb{R}^2$, potem je $d_E(A,B) = || A - B ||$.

DOKAZ. DN. □

Trditev 36. Če je L_{AB} kartezična premica, je funkcija $f : L_{AB} \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom

$$f(A + t(B - A)) = t \; || \; B - A \; ||$$

merilo za $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_E\}$.

DOKAZ. DN. □

Trditev 37. *(Cauchy-Schwarz Inequality)* Če sta $X, Y \in \mathbb{R}^2$, je

$$| \langle X, Y \rangle | \;\leq\; || \, X \, || \cdot || \, Y \, || \; .$$

Še več, enakost drži natanko tedaj, ko je $Y = (0,0)$ ali $X = tY$ za nek $t \in \mathbb{R}$.

DOKAZ. DN. □

Definicija 38. Razdaljna funkcija d na $\mathcal{S}$ zadošča *trikotniški neenakosti*, če

$$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$$

za vse $A, B, C \in \mathcal{S}$.

Trditev 39. Evklidska razdalja funkcija d_E zadošča trikotniški neenakosti.

DOKAZ. DN. □

VAJE.

1. Dokaži trditve tega razdelka.

2.2 Vmesnost

Definicija 40. Točka B leži *med* točko A in točko C, če so A, B in C različne kolinearne točke v metrični geometriji $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ in velja

$$d(A,B) + d(B,C) = d(A,C).$$

Notacija. V metrični geometriji $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$: $A - B - C$ pomeni, da B leži med A in C.

Domača naloga. Definicijo razdaljne funkcije (Definicija 17) zapiši v zgoraj navedeni notaciji.

Primer. Naj bodo $A = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B = (0,1)$ in $C = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ točke Poincarejeve ravnine. Pokaži, da $A - B - C$.

Izrek 41. Če $A - B - C$, potem $C - B - A$.

Dokaz. DN. □

Definicija 42. Če so x, y in z realna števila, potem pravimo, da število y leži *med* x in z (pišemo $x * y * z$), če

$$x < y < z \text{ ali } z < y < x.$$

Izrek 43. Naj bo l premica in f koordinatni sistem za l. Če so A, B in C točke, ki ležijo na premici l, s koordinatami x, y in z, potem

$$A - B - C \Leftrightarrow x * y * z.$$

Dokaz. DN. □

Posledica 44. Če so dane tri točke, ki ležijo na isti premici, natanko ena izmed njih leži med drugima dvema.

Dokaz. DN. □

Trditev 45. V Evklidski ravnini je $A - B - C$ natanko tedaj, ko obstaja število t, $0 < t < 1$, tako da velja $B = A + t(C - A)$.

Dokaz. DN. □

Izrek 46. Če sta A in B različni točki metrične geometrije, potem velja:

(i) obstaja točka C, za katero velja $A - B - C$, in

(ii) obstaja točka D, za katero velja $A - D - B$.

Dokaz. DN. □

Definicija 47. $A - B - C - D$ pomeni, da $A - B - C$, $A - B - D$, $A - C - D$ in $B - C - D$.

Vaje.

1. Naj bodo $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ in $C = (x, y)$ tri kolinearne točke v Evklidski ravnini in naj bo $x_1 < x_2$. Dokaži, da

$$A - C - B \Leftrightarrow x_1 < x < x_2.$$

2. Naj bo $A = (4, 7)$, $B = (1, 1)$ in $C = (2, 3)$. Dokaži, da je v taxi ravnini $A - C - B$.

2.3 Daljice in poltrak

Definicija 48. Naj bosta A in B različni točki v metrični geometriji $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$. Potem je *daljica* od točke A do točke B množica

$$\overline{AB} = \{C \in \mathcal{S} \mid A - C - B \text{ ali } C = A \text{ ali } C = B\}.$$

Primer. Naj točki $A = (x_1, y_1)$ in $B = (x_2, y_2)$ ležita na premici ${}_cL_r$ v Poincarejevi ravnini. Naj bo $x_1 < x_2$. Dokaži, da je

$$\overline{AB} = \{C = (x, y) \in {}_cL_r \mid x_1 \leq x \leq x_2\}.$$

Definicija 49. Naj bo $\mathcal{A}$ podmnožica metrične geometrije. Točka $B \in \mathcal{A}$ je *bežna točka* glede na $\mathcal{A}$, če obstajata $X, Y \in \mathcal{A}$, za kateri velja $X - B - Y$. V nasprotnem primeru pravimo, da je točka B *ekstremna točka* glede na $\mathcal{A}$.

Koncept ekstremne točke in naslednji izrek nam omogočata definiranje končne točke daljice.

Izrek 50. Če sta A in B točki metrične geometrije, sta edini ekstremni točki daljice $\overline{AB}$ točki A in B. Če je $\overline{AB} = \overline{CD}$, potem je $\{A, B\} = \{C, D\}$.

Dokaz. DN. $\square$

Definicija 51. *Končni točki* daljice $\overline{AB}$ sta točki A in B. *Dolžina* daljice $\overline{AB}$ je $AB = d(A, B)$.

Definicija 52. Če sta A in B različni točki metrične geometrije $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$, potem je *poltrak* od točke A do točke B množica

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{C \in \mathcal{S} \mid A - B - C\}.$$

Trditev 53. V Evklidski ravnini, sta daljica in poltrak dana z naslednjimi predpisi:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \{C \in \mathbb{R}^2 \mid C = A + t(B - A) \text{ za nek } t,\ 0 \leq t \leq 1\}, \\ \overrightarrow{AB} &= \{C \in \mathbb{R}^2 \mid C = A + t(B - A) \text{ za nek } t \geq 0\}. \end{aligned}$$

Dokaz. DN. $\square$

Izrek 54. V metrični geometriji velja:

(i) če je $C \in \overrightarrow{AB}$ in $C \neq A$, potem je $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$;

(ii) če je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, potem je $A = C$.

Dokaz. DN. $\square$

Definicija 55. *Vozlišče* (ali *začetna točka* ali oglišče) poltraka $\overrightarrow{AB}$ je točka A.

Izrek 56. Naj bosta A in B različni točki v metrični geometriji. Potem obstaja merilo $f : AB \to \mathbb{R}$, za katerega velja:

$$\overrightarrow{AB} = \{X \in AB \mid f(X) \geq 0\}.$$

DOKAZ. DN. $\square$

Definicija 57. Dve daljici $\overline{AB}$ in $\overline{CD}$ v metrični geometriji sta *skladni* ali *kongruentna* (pišemo $\overline{AB} \cong \overline{CD}$), če sta enakih dolžin. Torej

$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad \Leftrightarrow \quad d(A,B) = d(C,D).$$

Izrek 58. *(Konstrukcija daljice)* Naj bo $\overrightarrow{AB}$ poltrak in $\overline{PQ}$ daljica v metrični geometriji. Potem obstaja enolično določena točka $C \in \overrightarrow{AB}$, za katero velja $\overline{PQ} \cong \overline{AC}$.

DOKAZ. DN. $\square$

Primer. V Poincarejevi ravnini naj bo $A = (0,2)$, $B = (0,1)$, $P = (0,4)$ in $Q = (7,3)$. Poišči tako točko $C \in \overrightarrow{AB}$, da bo veljalo $\overline{AC} \cong \overline{PQ}$.

Izrek 59. *(Dodatek daljice)* V metrični geometriji velja: če je $A - B - C$, $P - Q - R$, $\overline{AB} = \overline{PQ}$ in $\overline{BC} = \overline{QR}$, potem je $\overline{AC} = \overline{PR}$.

DOKAZ. DN. $\square$

Izrek 60. *(Substrakcija daljice)* V metrični geometriji velja: če je $A - B - C$, $P - Q - R$, $\overline{AB} = \overline{PQ}$ in $\overline{AC} = \overline{PR}$, potem je $\overline{BC} = \overline{QR}$.

DOKAZ. DN. $\square$

VAJE.

1. Dokaži, da v taxi ravnini velja: če je $A = (-\frac{5}{2}, 2)$, $B = (\frac{1}{2}, 2)$, $C = (2,2)$, $P = (0,0)$, $Q = (2,1)$ in $R(3, \frac{3}{2})$, potem je $A - B - C$ in $P - Q - R$. Pokaži tudi, da je $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\overline{BC} \cong \overline{QR}$ in $\overline{AC} \cong \overline{PR}$. Nariši skice.

2. Naj bodo $A = (0,0)$, $B = (\frac{1}{10}, 1)$ in $C = (1,1)$ točke v $\mathbb{R}^2$ z maksimalno razdaljo
$$d_S(P,Q) = \max\{\mid x_1 - x_2 \mid, \mid y_1 - y_2 \mid\}.$$
Dokaži, da je $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Nariši skico daljic.

3. V Poincarejevi ravnini naj bo $P = (1,2)$ in $Q = (1,4)$. Če je $A = (0,2)$ in $B = (1, \sqrt{3})$, poišči tako točko $C \in \overrightarrow{AB}$, da bo veljalo $\overline{AC} \cong \overline{PQ}$.

2.4 Koti in trikotniki

Definicija 61. Če so A, B in C nekolinearne točke v metrični geometriji, potem je *kot* $\angle ABC$ množica

$$\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}.$$

Lema 62. V metrični geometriji je točka B edina ekstremna točka kota $\angle ABC$.

Dokaz. DN. $\square$

Definicija 63. *Vrh* (vozlišče, oglišče) kota $\angle ABC$ v metrični geometriji je točka B.

Definicija 64. Če je $\{A, B, C\}$ množica nekolinearnih točk v metrični geometriji, potem je *trikotnik* ABC množica

$$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}.$$

Lema 65. V metrični geometriji velja: če so A, B in C nekolinearne točke, potem je točka A ekstremna točka trikotnika $\triangle ABC$.

Dokaz. DN. $\square$

Izrek 66. V metrični geometriji velja: če je $\triangle ABC = \triangle DEF$, potem je $\{A, B, C\} = \{D, E, F\}$.

Dokaz. DN. $\square$

Definicija 67. V metrični geometriji so vozlišča (oglišča) trikotnika $\triangle ABC$ točke A, B in C. *Stranice* (robovi, povezave) trikotnika $\triangle ABC$ pa so daljice $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ in $\overline{BC}$.

Vaje.

1. Dokaži, da v metrični geometriji velja: če so A, B in C nekolinearne, potem je

$$\overline{AB} = AB \cap \triangle ABC.$$

Poglavje 3

Seperacija ravnine

3.1 Aksiomi seperacije ravnine

Definicija 68. Naj bo $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrična geometrija in naj bo $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$. Tedaj je podmnožica $\mathcal{S}_1$ *konveksna*, če je za poljubni točki $P, Q \in \mathcal{S}_1$ daljica $\overline{PQ}$ podmnožica množice $\mathcal{S}_1$.

Definicija 69. Pravimo, da metrična geometrija $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ zadošča *aksiomu seperacije ravnine* (PSA), če za vsako premico $l \in \mathcal{L}$ obstajata dve podmnožici H_1 in H_2 množice $\mathcal{S}$ (imenujemo ju *polravnine določene s premico* l), za kateri velja:

(i) $\mathcal{S} - l = H_1 \cup H_2$;

(ii) H_1 in H_2 sta konveksni in $H_1 \cap H_2 = \emptyset$;

(iii) če je $A \in H_1$ in $B \in H_2$, potem je $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$.

Primeri. Evklidska ravnina, Poincarejeva ravnina in taxi ravnina zadoščajo PSA aksiomu.

Lastnosti metrične geometrije $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$, ki zadošča PSA aksiomu:

(L1) Naj bo l premica v metrični geometriji. Če tako H_1 in H_2 kot tudi H_1' in H_2' zadoščata PSA aksiomu za premico l, potem je bodisi $H_1 = H_1'$ (in $H_2 = H_2'$) bodisi $H_1 = H_2'$ (in $H_2 = H_1'$).

(L2) Naj bosta $A, B \in \mathcal{S}$ točki, ki ne ležita na dani premici l. Potem

- **(i)** A in B ležita na nasprotnih straneh premice l natanko tedaj, ko je $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$.
- **(ii)** A in B ležita na enaki strani premice l natanko tedaj, ko je $A = B$ ali $\overline{AB} \cap l = \emptyset$.

(L3) Naj bo $l \in \mathcal{L}$. Če sta točki P in Q na nasprotnih straneh premice l in če sta tudi točki Q in R na nasprotnih straneh premice l, potem točki P in R ležita na enaki strani premice l.

(L4) Naj bo $l \in \mathcal{L}$. Če točki P in Q ležita na nasprotnih straneh premice l in če sta točki Q in R na enaki strani premice l, potem točki P in R ležita na nasprotnih straneh premice l.

(L5) Naj bo $l \in \mathcal{L}$ in naj bo H_1 polravnina določena s premico l. Če je H_1 tudi polravnina določena s premico l', potem je $l = l'$.

VAJE.

1. Dokaži oziroma navedi protiprimer.
   (i) Naj bosta $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ konveksni podmnožici v metrični geometriji. Tedaj je množica $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ tudi konveksna.
   (ii) Naj bosta $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ konveksni podmnožici v metrični geometriji. Tedaj je množica $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ tudi konveksna.

2. Naj bo l premica v metrični geometriji $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$, ki zadošča PSA aksiomu. Pišemo $P \sim Q$, če točki P in Q ležita na enaki strani premice l. Dokaži, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $\mathcal{S} - l$. Določi ekvivalenčne razrede te relacije.

3. Na Kartezični ravnini $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E\}$ definiramo razdaljo kot sledi. Naj bo funkcija $f : L_0 \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom

$$f(0, y) = \begin{cases} y, & \text{če } y \text{ ni celo število} \\ -y, & \text{če } y \text{ celo število} \end{cases} .$$

   (i) Dokaži, da je f bijekcija.

   Za vse druge premice v $\mathbb{R}^2$ vzemimo Evklidsko merilo. Nabor teh bijekcij določa razdaljno funkcijo d_N. Glede na razdaljno funkcijo d_N je $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_N\}$ metrična geometrija.

   (ii) Dokaži oziroma navedi protiprimer: Množica $\{(0, y) \mid \frac{1}{2} \le y \le \frac{3}{2}\}$ je v Evklidski ravnini konveksna v $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_N\}$ pa ne.
   (iiii) Naj bo $A = (0, \frac{1}{2})$ in $B = (0, \frac{3}{2})$. Poišči daljico $\overline{AB}$ v $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_N\}$. Pokaži, da je ta množica konveksna v $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_N\}$, v Evklidski ravnini pa ne.
   (iiiii) Pokaži, da $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_N\}$ ne zadošča PSA aksiomu. (*Namig.* Poglej si premico $l = L_{0,1}$ in tri točke $(0, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{3}{2})$ in $(1, \frac{1}{2})$.)

3.2 PSA za Evklidsko in Poincarejevo ravnino

Notacija. Če je $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, potem je $X^\perp = (-y, x) \in \mathbb{R}^2$ (beremo X *pravokotno*).

Lema 70. (i) Če je $X \in \mathbb{R}^2$, potem je $\langle X, X^\perp \rangle = 0$.

(ii) Če je $X \in \mathbb{R}^2$ in $X \neq (0, 0)$, potem $\langle Z, X^\perp \rangle = 0$ implicira, da je $Z = tX$ za nek $t \in \mathbb{R}$.

DOKAZ. $\square$

Trditev 71. Če sta P in Q različni točki v $\mathbb{R}^2$, je

$$PQ = \{A \in \mathbb{R}^2 \mid \langle A - P, (Q - P)^{\perp} \rangle = 0\}.$$

DOKAZ. $\square$

Naj bo $l = PQ$ Evklidska premica. Potem sta

$$\begin{aligned} H^+ &= \{A \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (A - P), (Q - P)^{\perp} \rangle > 0\}, \text{ in} \\ H^- &= \{A \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (A - P), (Q - P)^{\perp} \rangle < 0\} \end{aligned}$$

Evklidski polravnini določeni s premico l. Če je $l = {}_aL$ premica v Poincarejevi ravnini, sta

$$\begin{aligned} H_+ &= \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid x > a\}, \text{ in} \\ H_- &= \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid x < a\} \end{aligned}$$

Poincarejevi polravnini določeni s premico l. Če pa je $l = {}_cL_r$ premica v Poincarejevi ravnini, sta Poincarejevi polravnini določeni s premico l definirani takole:

$$\begin{aligned} H_+ &= \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid (x - c)^2 + y^2 > r^2\}, \text{ in} \\ H_- &= \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid (x - c)^2 + y^2 < r^2\}. \end{aligned}$$

VAJE.

1. Dokaži, da je Evklidska polravnina H^- konveksna.

2. Naj bo l premica v Evklidski ravnini in naj velja, da je $A \in H^+$ in $B \in H^-$. Pokaži, da je $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$, na sledeči način: Naj bo

$$g(t) = \langle A + t(B - A) - P, (Q - P)^{\perp} \rangle,$$

kjer $t \in \mathbb{R}$. Določi $g(0)$ in $g(1)$, dokaži, da je g zvezna in nato dokaži, da je $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$.

3. Dokaži, da v taxi ravnini $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_T\}$ velja:

   (i) Če so $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ in $C = (x_3, y_3)$ kolinearne točke, vendar ne ležijo na vertikalni premici, potem je

   $$A - B - C \Leftrightarrow x_1 * x_2 * x_3.$$

   (ii) Taxi ravnina zadošča PSA aksiomu.

3.3 Pascheve geometrije

Definicija 72. Metrična geometrija zadošča *Paschevi zahtevi* (PP), če za vsako premico l, vsak trikotnik $\triangle ABC$ in vsako točko $D \in l$, ki leži med A in B, $(A - D - B)$, velja:

$$l \cap \overline{AC} \neq \emptyset \ \text{ ali } l \cap \overline{BC} \neq \emptyset.$$

Izrek 73. *(Pasch's theorem)* Če metrična geometrija zadošča PSA aksiomu, potem zadošča tudi PP zahtevi.

DOKAZ. Predavanja. □

Definicija 74. *Pascheva geometrija* je metrična geometrija, ki zadošča PSA aksiomu.

Izrek 75. Naj bo $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrična geometrija, ki zadošča PP zahtevi. Naj bodo A, B in C nekolinearne točke in l premica, ki ne vsebuje nobene od točk A, B in C. Potem l ne seka vseh treh stranic trikotnika $\triangle ABC$.

DOKAZ. DN. □

Izrek 76. Če metrična geometrija zadošča PP zahtevi, potem zadošča tudi PSA aksiomu.

DOKAZ. DN. □

Primer. *Missing Strip ravnina* je abstraktna geometrija $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ dana z

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \,\text{ali}\, 1 \leq x\}, \\ \mathcal{L} &= \{l \cap \mathcal{S} \mid l \,\text{je kartezična premica in}\, l \cap \mathcal{S} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Za vajo (glej vajo 1 tega razdelka) boste pokazali, da je Missing Strip ravnina incidenčna geometrija. Da Missing Strip ravnina postane metrična geometrija pa moramo za vsako njeno premico definirati merilo. Če je $l = L_{m,b}$ ne-vertikalna premica, je standardno Evklidsko merilo dano s predpisom $f_l(x,y) = x\sqrt{1+m^2}$. Tega merila ne moremo uporabiti za premico $l \cap \mathcal{S}$ v Missing Strip ravnini, saj v tem primeru f_l ni bijekcija ($f_l(l \cap \mathcal{S})$ izpusti interval $[0, \sqrt{1+m^2})$). Zato definiramo novo funkcijo $g_l : l \cap \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$g_l(x,y) = \begin{cases} f_l(x,y), & \text{če } x < 0 \\ f_l(x,y) - \sqrt{1+m^2}, & \text{če } x \geq 1 \end{cases}.$$

VAJE.

1. Dokaži, da je Missing Strip ravnina incidenčna geometrija.

2. Naj bo $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}\}$ Missing Strip ravnina in $l = L_{m,b}$. Dokaži, da je funkcija $g_l : l \cap \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, ki smo jo definirali zgoraj, bijekcija.
3. Dokaži: Missing Strip ravnina ni Pascheva geometrija.
4. Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik in P točka v metrični geometriji, ki zadošča PSA aksiomu. Dokaži, da obstaja premica skozi točko P, ki vsebuje natanko dve točki trikotnika $\triangle ABC$.

3.4 Notranjost in Crossbarov izrek

Izrek 77. V Paschevi geometriji velja: če je $\mathcal{A}$ neprazna konveksna množica, ki ne seka premice l, potem vse točke v $\mathcal{A}$ ležijo na enaki strani premice l.

Dokaz. DN. □

Definicija 78. *Notranjost poltraka* $\overrightarrow{AB}$ v metrični geometriji je množica $int(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} - \{A\}$. *Notranjost daljice* $\overline{AB}$ je množica $int(\overline{AB}) = \overline{AB} - \{A, B\}$.

Izrek 79. Naj bo $\mathcal{A}$ premica, poltrak, daljica, notranjost poltraka ali pa notranjost daljice v Paschevi geometriji. Če je l premica, za katero velja $\mathcal{A} \cap l = \emptyset$, potem cel $\mathcal{A}$ leži na isti strani premice l. Če obstaja točka B, za katero velja $A - B - C$ in $AC \cap l = \{B\}$, potem $int(\overrightarrow{BA})$ in $int(\overline{BA})$ ležita na enaki strani premice l, medtem ko $int(\overrightarrow{BA})$ in $int(\overrightarrow{BC})$ ležita na nasprotnih straneh premice l.

Dokaz. Vaje. □

Izrek 80. *(Z izrek)* V Paschevi geometriji velja naslednje: če točki P in Q ležita na nasprotnih straneh premice AB, potem $\overrightarrow{BP} \cap \overrightarrow{AQ} = \emptyset$. Velja tudi $\overline{BP} \cap \overline{AQ} = \emptyset$.

Dokaz. DN. □

V Paschevi geometriji je *notranjost* kota $\angle ABC$ (pišemo $int(\angle ABC)$) presek tiste strani premice AB, ki vsebuje C, s stranjo premice BC, ki vsebuje A.

Lastnosti Pascheve geometrije:

(P1) Če je $\angle ABC = \angle A'B'C'$, potem je $int(\angle ABC) = int(\angle A'B'C')$.

(P2) Točka $P \in int(\angle ABC)$ natanko tedaj, ko točki A in P ležita na enaki strani premice BC in ko točki C in P ležita na enaki strani premice BA.

(P3) Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v Paschevi geometriji. Če $A - P - C$, potem $P \in int(\angle ABC)$ in torej $int(\overline{AC}) \subset int(\angle ABC)$.

(P4) (Crossbarov izrek) Če $P \in int(\angle ABC)$, potem $\overrightarrow{BP}$ seka $\overline{AC}$ v enolično določeni točki F, za katero velja $A - F - C$.

(P5) Če je $\overline{CP} \cap AB = \emptyset$, potem je $P \in int(\angle ABC)$ natanko tedaj, ko točki A in C ležita na nasprotnih straneh premice BP.

(P6) Če je $A - B - D$, potem je $P \in int(\angle ABC)$ natanko tedaj, ko je $C \in int(\angle DBP)$

VAJE.

1. Dokaži, da v Paschevi geometriji velja: če je $P \in int(\angle ABC)$, potem je $int(\overrightarrow{BP}) \subset int(\angle ABC)$.
2. Dokaži, da v Paschevi geometriji velja: če je $P \in int(\angle ABC)$ in $D \in \overrightarrow{AP} \cap \overrightarrow{BC}$, potem je $A - P - D$.
3. Dokaži, da v Paschevi geometriji velja: če je $\overline{CP} \cap AB = \emptyset$, potem je $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP}$ ali $P \in int(\angle ABC)$ ali pa $C \in int(\angle ABP)$.
4. Dokaži, da v Paschevi geometriji velja:
   (i) $int(\angle ABC)$ je konveksna množica;
   (ii) $int(\triangle ABC)$ je konveksna množica;
   (iii) $int(\triangle ABC) = int(\angle ABC) \cap int(\angle BCA) \cap int(\angle CAB)$;
   (iv) $int(\triangle ABC) = \{P \mid \text{obstaja taka točka}\, D, \text{ da je } B - D - C \text{ in } A - P - D\}$.
5. Dokaži oziroma navedi protiprimer:

   V Paschevi geometriji velja: če je $l \cap int(\angle ABC) \neq \emptyset$, potem je $l \cap \angle ABC \neq \emptyset$.

3.5 Konveksni štirikotniki

Definicija 81. Naj bo $\mathcal{A} = \{A, B, C, D\}$ množica štirih točk v metrični geometriji, tako da nobene tri točke v $\mathcal{A}$ niso kolinearne. Če se noben par notranjosti $int(\overline{AB})$, $int(\overline{BC})$, $int(\overline{CD})$ in $int(\overline{DA})$ ne seka, potem je

$$\square ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$$

štirikotnik.

Izrek 82. Naj bo $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ metrična geometrija. Če je $\square ABCD = \square PQRS$, potem je $\{A, B, C, D\} = \{P, Q, R, S\}$. Še več, če je $A = P$, potem je $C = R$ in $B = Q$ ali $B = S$. Torej so stranice, koti in diagonale štirikotnika $\square ABCD$ iste kot pri štirikotniku $\square PQRS$.

DOKAZ. DN. $\square$

Definicija 83. Štirikotnik $\square ABCD$ v Paschevi geometriji je *konveksni štirikotnik*, če vsaka stranica v celoti leži v polravnini določeni z njej nasprotno stranico.

Izrek 84. V Paschevi geometriji je štirikotnik $\square ABCD$ konveksen natanko tedaj, ko je vrh vsakega kota vsebovano v notranjosti nasprotnega kota.

DOKAZ. DN. $\square$

Izrek 85. V Paschevi geometriji se diagonali konveksnega štirikotnika sečeta.

DOKAZ. DN. $\square$

Izrek 86. Naj bo $\square ABCD$ štirikotnik v Paschevi geometriji. Če je $BC \parallel AD$, je $\square ABCD$ konveksni štirikotnik.

DOKAZ. DN. $\square$

VAJE.

1. Dokaži, da v Paschevi geometriji velja:
   (i) Štirikotnik $\square ABCD$ je konveksen natanko tedaj, ko nobena stranica ne seče premice določene z njej nasprotno stranico.
   (ii) Če se diagonali štirikotnika $\square ABCD$ sečeta, je $\square ABCD$ konveksen.

2. Dokaži oziroma navedi protiprimer:

   Za poljuben štirikotnik $\square ABCD$ v Paschevi geometriji velja, da je bodisi $\overline{AB} \cap CD = \emptyset$ bodisi $AB \cap \overline{CD} = \emptyset$.

3. Dokaži oziroma navedi protiprimer:

   Naj bo $\square ABCD$ štirikotnik v Paschevi geometriji, za katerega velja $AB \cap CD = \{E\}$, $AC \cap BD = \{F\}$ in $AD \cap BC = \{G\}$. Tedaj točke E, F in G niso kolinearne.

Poglavje 4

Merjenje kotov

4.1 Merilo kota

Definicija 87. Naj bo r_0 fiksno pozitivno realno število. V Paschevi geometriji, je *velikost kota (kotomer) osnovan na* r_0 taka funkcija m iz množice vseh kotov na množico realnih števil, da velja:

(i) (*Konstrukcija kota*) Če je $\angle ABC \in \mathcal{A}$, potem je $0 < m(\angle ABC) < r_0$.

(ii) (*Konstrukcija poltraka*) Če $\overline{BC}$ leži na robu polravnine H_1 in je ϑ realno število, za katero velja $0 < \vartheta < r_0$, potem obstaja enolično določen poltrak $\overrightarrow{BA}$ z $A \in H_1$ in $m(\angle ABC) = \vartheta$.

(iii) (*Vsota kotov*) Če je $D \in int(\angle ABC)$, potem velja:

$$m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = m(\angle ABC).$$

Če je $r_0 = 180$, funkcijo m iz zgornje definicije imenujemo *stopinjsko merilo*, če pa $r_0 = \pi$, funkcijo m imenujemo *radiansko merilo.* Vedno bomo uporabljali stopinjsko merilo ($r_0 = 180$).

Definicija 88. *Protractor geometrija* $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d, m\}$ je Pascheva geometrija $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ skupaj s funkcijo velikosti kotov m.

Definicija 89. Naj bo $\overrightarrow{BA}$ poltrak v Poincarejevi ravnini, kjer je $B = (x_B, y_B)$ in $A = (x_A, y_A)$. Potem je *Evklidska tangenta* na $\overrightarrow{BA}$ v točki B

$$T_{BA} = \begin{cases} (0, y_A - y_B), & \text{če je premica } AB \text{ tipa I} \\ (y_B, c - x_B), & \text{če je premica } AB \text{ tipa } {}_I IcL_r \text{ in } x_B < x_A \\ -(y_B, c - x_B), & \text{če je premica } AB \text{ tipa } {}_I IcL_r \text{ in } x_B > x_A \end{cases}.$$

Evklidski tangentni poltrak na $\overrightarrow{BA}$ je Evklidski poltrak $\overrightarrow{BA'}$, kjer je $A' = B + T_{BA}$.

Primeri:

(i) V Evklidski ravnini je *Evklidska velikost kota* $\angle ABC$ definirana s predpisom

$$m_E(\angle ABC) = \arccos\left(\frac{\langle A-B, C-B\rangle}{|| A-B || \cdot || C-B ||}\right).$$

(ii) V Poincarejevi ravnini je *velikost kota* $\angle ABC$ definirana s predpisom

$$m_H(\angle ABC) = m_E(\angle A'BC') = \arccos\left(\frac{\langle T_{BA}, T_{BC}\rangle}{|| T_{BA} || \cdot || T_{BC} ||}\right).$$

Izrek 90. Evklidska ravnina $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_E, m_E\}$, Poincarejeva ravnina $\{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H, d_H, m_H\}$ in taxi ravnina $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_T, m_E\}$ so protractor geometrije. , ,

Dokaz. DN. □

Vaje.

1. Naj bodo A, B in C točke v Poincarejevi ravnini $\mathcal{H}$. Poišči vsoto notranjih kotov trikotnika $\triangle ABC$, če je

   (i) $A = (0,1)$, $B = (0,5)$ in $C = (3,4)$;
   (ii) $A = (0,5)$, $B = (0,3)$ in $C = (2,\sqrt{21})$;
   (iii) $A = (5,1)$, $B = (8,4)$ in $C = (1,3)$.

2. Naj bo m_E Evklidska velikost kota v Evklidski ravnini. Pokaži, da je m_E funkcija velikosti kota tudi v taxi ravnini.

3. Naj bo m funkcija velikosti kota za $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ osnovana na α. Naj bo $t > 0$ in definiraj m_t z naslednjim predpisom

$$m_t(\angle ABC) = t \cdot m(\angle ABC).$$

   Dokaži, da je m_t funkcija velikosti kota za $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$. Na kateri vrednosti je osnovana funkcija m_t?

4.2 Pravokotnost in skladnost kotov

Najprej ponovimo nekaj standardnih teminologij:

(i) *Ostri kot* je kot manjši od 90.

(ii) *Pravi kot* je kot, ki meri 90.

(iii) *Topi kot* je kot, ki meri več kot 90.

(iv) Dva kota sta si *suplementarena*, če je njuna vsota enaka 180.

(v) Dva kota sta si *komplementarna*, če je njuna vsota enaka 90.

(vi) Kota $\angle ABC$ in $\angle CBD$ tvorita *linearni par*, če je $A - B - D$.

(vii) Kota $\angle ABC$ in $\angle A'BC'$ tvorita *vertikalni par*, če je njuna unija par dveh sekajočih se premic (z drugimi besedami: $\angle ABC$ in $\angle A'BC'$ tvorita vertikalni par, če je $A - B - A'$ in $C - B - C'$ ali $A - B - C'$ in $C - B - A'$).

(viii) Dve premici l in l' sta si *pravokotni* (pišemo: $l \perp l'$), če $l \cup l'$ vsebuje pravi kot. Dva poltraka oziroma daljici sta si pravokotni, če sta premici, ki ju določata pravokotni.

Vaje. Dokaži: Če sta C in D točki v protractor geometriji, ki ležita na enaki strani premice AB, in je $m(\angle ABC) < m(\angle ABD)$, je $C \in int(\angle ABD)$.

Izrek 91. *(Izrek o linearnem paru)* Če $\angle ABC$ in $\angle CBD$ tvorita linearni par v protractor geometriji, sta si suplementarna.

Dokaz. DN. □

Lastnosti protractor geometrije:

(PR1) Če A in D ležita na nasprotnih straneh premice BC in je $m(\angle ABC) + m(\angle CBD) = 180$, je $A - B - D$ in kota tvorita linearni par.

(PR2) Naj bo l dana premica in $B \in l$. Potem obstaja premica l', ki je pravokotna na premico l in vsebuje B.

(PR3) Vsaka daljica $\overline{AB}$ ima enolično določeno *simetralo*, t.j. premico $l \perp \overline{AB}$, za katero velja $l \cap \overline{AB} = \{M\}$, kjer je M sredinska točka daljice $\overline{AB}$.

(PR4) Vsak kot $\angle ABC$ ima enolično določeno *simetralo*, t.j. poltrak $\overrightarrow{BD}$, kjer $D \in int(\angle ABC)$ in $m(\angle ABD) = m(\angle DBC)$.

Vaja. V Poincarejevi ravnini poišči premico, ki gre skozi točko $B = (3, 4)$ in je pravokotna na premico ${}_0L_5$.

Spomnimo se, da sta dve daljici skladni, če sta enakih dolžin. V definiciji 92 pa bomo spoznali skladnost kotov.

Definicija 92. V protractor geometriji $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d, m\}$ je kot $\angle ABC$ skladen kotu $\angle DEF$ (pišemo $\angle ABC \cong \angle DEF$), če je $m(\angle ABC) = m(\angle DEF)$.

S pomočjo skladnosti kotov lahko nekaj zgornjih lastnosti protractor geometrije zapišemo tudi takole:

(Pro1) *(Izrek o verikalnem kotu)* Če $\angle ABC$ in $\angle A'BC'$ v protractor geometriji tvorita vertikalni par, potem je $\angle ABC \cong \angle A'BC'$.

(Pro2) *(Izrek o konstrukciji kota)* V protractor geometriji velja: Naj bo $\angle ABC$ in $\overrightarrow{ED}$, ki leži na robu polravnine H_1. Potem obstaja enolični poltrak $\overrightarrow{EF}$, za katerega velja, da je $F \in H_1$ in $\angle ABC \cong \angle DEF$.

(Pro3) *(Izrek o vsoti kotov)* V protractor geometriji velja: Naj bo $D \in int(\angle ABC)$, $S \in int(\angle PQR)$, $\angle ABD \cong \angle PQS$ in $\angle DBC \cong \angle SQR$. Potem $\angle ABC \cong \angle PQR$.

(Pro4) *(Izrek o razliki kotov)* V protractor geometriji velja: Naj bo $D \in int(\angle ABC)$, $S \in int(\angle PQR)$, $\angle ABD \cong \angle PQS$ in $\angle ABC \cong \angle PQR$. Potem je $\angle DBC \cong \angle SQR$.

VAJE.

1. V Poincarejevi ravnini $\mathcal{H}$ poišči simitralo kota $\angle ABC$, če je
   (i) $A = (0, 5)$, $B = (0, 3)$ in $C = (2, \sqrt{21})$;
   (ii) $A = (1, 3)$, $B = (1, \sqrt{3})$ in $C = (\sqrt{3}, 1)$;
   (iii) $A = (0, 1)$, $B = (2, 1)$ in $C = (1, 3)$.
2. Dokaži, da je v protractor geometriji kot $\angle ABC$ pravokoten natanko tedaj, ko obstaja točka D, za katero velja $D - B - C$ in $\angle ABC \cong \angle ABD$.
3. V taxi ravnini naj bo $A = (0, 2)$, $B = (0, 0)$, $C = (2, 0)$, $Q = (-2, 1)$, $R = (-1, 0)$ in $S = (0, 1)$. Pokaži, da velja: $\overline{AB} \cong \overline{QR}$, $\angle ABC \cong \angle QRS$ in $\overline{BC} \cong \overline{RS}$. Ali je $\overline{AC} \cong \overline{QS}$?
4. Dokaži oziroma navedi protiprimer:

   Trisektor kota $\angle ABC$ je tak poltrak $\overrightarrow{BD}$, kjer $D \in int(\angle ABC)$, da velja: $m(\angle ABD) = \frac{1}{3}m(\angle ABC)$ ali $m(\angle CBD) = \frac{1}{3}m(\angle ABC)$. Za vsak kot $\angle ABC$ v protractor geometriji obstajata natanko dva trisektorja.

4.3 Merjenje kotov v Evklidski in Poincarejevi ravnini

V tem razdelku bomo pokazali, da Evklidska in Poincarejeva funkcija velikosti kota, ki smo ju definirali v podpoglavju 4.1 res zadoščata aksiomom funkcije velikosti kota.

Definicija 93. Naj bo $f(t)$ funkcija, ki je zvezna za $c \le t < d$. Potem nepravi integral $\int_c^d f(t)df$ *konvergira*, če obstaja limita $\lim_{b\to d^-} \int_c^b f(t)dt$. V tem primeru pišemo $\lim_{b\to d^-} \int_c^b f(t)dt = \int_c^d f(t)df$.

Izrek 94. Nepravi integral $\int_0^1 dt/\sqrt{1-t^2}$ konvergira.

DOKAZ. DN. □

Izrek 95. Funkcija $I(x)$ dana s predpisom

$$I(x) = \frac{p}{2} - \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \text{kjer } -1 \le x \le 1,$$

je bijekcija iz $[-1, 1]$ na $[0, p]$.

DOKAZ. DN. □

Definicija 96. *Cosine funkcija* $c : [0, p] \to [-1, 1]$ je inverzna funcija funkcije $I : [-1, 1] \to [0, p]$, ki smo jo definirali v zgornem izreku. *Sine* funkcija $s : [0, p] \to [0, 1]$ je funkcija dana s predpisom

$$s(\theta) = \sqrt{1 - c^2(\theta)}, \text{ kjer } c^2(\theta) = (c(\theta))^2.$$

Izrek 97. Funkciji $c(\theta)$ in $s(\theta)$ sta odvedljivi za $0 < \theta < p$.

DOKAZ. DN. □

Naslednja trditev govori o Evklidski tangenti v Poincarejevi ravnini, ki smo jo spoznali v razdelku 4.1 (Definicija 89). Ponovimo: če je $\overrightarrow{BA}$ poltrak v Poincarejevi ravnini, kjer $B = (x_B, y_B)$ in $A = (x_A, y_A)$, je *Evklidska tangenta* na $\overrightarrow{BA}$ v točki B

$$T_{BA} = \begin{cases} (0, y_A - y_B), & \text{če je premica } AB \text{ tipa I} \\ (y_B, c - x_B), & \text{če je premica } AB \text{ tipa } {}_I IcL_r \text{ in } x_B < x_A \\ -(y_B, c - x_B), & \text{če je premica } AB \text{ tipa } {}_I IcL_r \text{ in } x_B > x_A \end{cases}$$

Evklidski tangentni poltrak na $\overrightarrow{BA}$ pa je Evklidski poltrak $\overrightarrow{BA'}$, kjer je $A' = B + T_{BA}$.

Trditev 98. Naj bo $\overrightarrow{BA}$ Ponicarejev poltrak in naj bo $\overrightarrow{BA'}$ Evklidska tangenta.

(i) Potem se tista stran Ponicarejeve premice AB, ki vsebuje C, ujema s tisto stranjo Evklidske premice BA', ki vsebuje $C' = B + T_{BC}$.

(ii) (*Konstrukcija kota*) Predpostavimo, da $\overrightarrow{BA}$ leži na robu neke polravnine H_1 in naj bo $0 < \theta < 180$. Potem obstaja enolično določen poltrak $\overrightarrow{BC}$ v $\mathbb{H}$, kjer je $C \in H_1$ in $m_H(\angle ABC) = \theta$.

DOKAZ. DN. □

Trditev 99. *(Vsota kotov)* V Poincarejevi ravnini velja: če je $D \in int(\angle ABC)$, potem je $m_H(\angle ABD) + m_H(\angle DBC) = m_H(\angle ABC)$.

DOKAZ. DN. □

VAJE.

1. Naj bo $A = (2, 1)$, $B = (3, -2)$ in $C = (-1, 3)$. Izračunaj $m_E(\angle ABC)$.
2. Naj bo $B = (x_B, y_B) \in \mathbb{H}$ in $T = (t_1, t_2) \neq (1, 1)$. Pokaži, da v $\mathbb{H}$ obstaja enolično določen poltrak $\overrightarrow{BA}$, za katerega velja: $T_{AB} = \lambda T$ za nek $\lambda > 0$.

Poglavje 5

Nevtralna geometrija

5.1 SAS aksiom (Side-angle-side aksiom)

Definicija 100. Naj bosta $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ dva trikotnika v protractor geometriji in naj bo $f : \{A, B, C\} \to \{D, E, F\}$ bijekcija med oglišči teh dveh trikotnikov. Potem pravimo, da je f *kongruenca*, če velja:

$$\overline{AB} \cong \overline{f(A)f(B)},\ \overline{BC} \cong \overline{f(B)f(C)},\ \overline{CA} \cong \overline{f(C)f(A)}$$

in

$$\angle CAB \cong \angle f(C)f(A)f(B),\ \angle ABC \cong \angle f(A)f(B)f(C),\ \angle BCA \cong \angle f(B)f(C)f(A).$$

Pravimo, da sta trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ *skladna* (ali *kongruentna*), če obstaja kongruenca $f : \{A, B, C\} \to \{D, E, F\}$. Če za kongruenco f velja, da je $f(A) = D$, $f(B) = E$ in $f(C) = F$, pišemo $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Definicija 101. Pravimo, da protractor geometrija zadošča *Side-angle-side* aksiomu (SAS), če za poljubna trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$, za katera velja $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle ABC \cong \angle EDF$ in $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, velja tudi $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Definicija 102. *Nevtralna geometrija* (ali *absolutna geometrija*) je protractor geometrija, ki zadošča SAS aksiomu.

Primer. Evklidska ravnina in Poincarejeva ravnina zadoščata SAS aksiomu. Taxi ravnina pa ne zadošča SAS aksiomu.

Pravimo, da je trikotnik *enakokraki*, če sta v njem vsaj dve stranici skladni. Trikotnik je *enakostranični*, če so v njem vse stranice skladne. V enakokrakem trikotniku $\triangle ABC$, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, kota $\angle CAB$ in $\angle ABC$ imenujemo *bazna kota*.

Izrek 103. *(Pons Asinorum)* V nevtralni geometriji sta bazna kota enakokrakega trikotnika skladna.

DOKAZ. DN. □

VAJE.

1. Dokaži, da je skladnost ekvivalenčna relacija na množici vseh trikotnikov protractor geometrije.

2. Pokaži, da je v Poincarejevi ravnini $\triangle ABD \cong \triangle CBD$, kjer je $A = (0, 1)$, $B = (0, 2)$, $C = (0, 4)$ in $D = (1, \sqrt{3})$.

3. Naj bo $A = (0, 2)$, $B = (1, 1)$, $C = (0, 3)$ in $D = (1, 0)$. Ali je $\triangle ABD \cong \triangle CBD$?

4. Naj bo $\square ABCD$ tak štirikotnik v nevtralni geometriji, da je $\overline{CD} \cong \overline{CB}$ in je poltrak $\overrightarrow{CA}$ simetrala kota $\angle DCB$. Dokaži, da je $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.

5. Navedi primer enakokrakega trikotnika v taxi ravnini, v katerem bazna kota nista kongruentna.

5.2 Osnovni izreki trikotniške skladnosti

Definicija 104. Protractor geometrija zadošča *Angle-side-angle aksiomu* (ASA aksiom), če za poljubna trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$, za katera velja $\angle CAB \cong \angle EDF$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ in $\angle ABC \cong \angle DEF$, velja tudi $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Izrek 105. Nevtralna geometrija zadošča ASA aksiomu.

Dokaz. DN. □

Izrek 106. Velja obrat Pons Asinorum izreka (glej izrek 103).

Dokaz. DN. □

Definicija 107. Protractor geometrija zadošča *Side-side-side aksiomu* (SSS aksiom), če za poljubna trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$, za katera velja $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ in $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, velja tudi $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Izrek 108. Nevrtalna geometrija zadošča SSS aksiomu.

Dokaz. DN. □

Izrek 109. Če protractor geometrija zadošča ASA aksiomu, potem zadošča tudi SAS aksiomu, in je torej nevtralna geometrija.

Dokaz. DN. □

Izrek 110. Naj bo l premica in $B \notin l$ točka nevtralne geometrije. Potem obstaja vsaj ena premica skozi B, ki je pravokotna na premico l.

Dokaz. DN. □

Vaje.

1. Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v nevtralni geometriji, za katerega velja: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $A - D - E - C$ in $\angle ABD \cong CBE$. Pokaži, da je $\overline{DB} \cong \overline{EB}$.

2. Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v nevtralni geometriji, za katerega velja: $A - D - E - C$, $\overline{AD} \cong \overline{EC}$ in $\angle CAB \cong ACB$. Pokaži, da je $\angle ABE \cong \angle CBD$.

3. Naj bo $\square ABCD$ štirikotnik v nevtralni geometriji, za katerega velja: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ in $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Pokaži, da je $\angle DAB \cong \angle BCD$ in $\angle ABC \cong \angle CDA$.

4. Naj bo $\square ABCD$ štirikotnik v nevtralni geometriji, za katerega velja: $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ in $\overline{AD} \cong \overline{CD}$. Pokaži, da je $BD \perp AC$ in da se premici AC in BD sekata na sredini daljice $\overline{AC}$.

5. Dokaži oziroma navedi protiprimer:

   Naj bosta C in D točki, ki ležita na enaki strani premice AB. Če je $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ in $\overline{BC} \cong \overline{BD}$, potem je $C = D$.

5.3 Izrek o zunanjem kotu in posledice

Definicija 111. V metrični geometriji pravimo, da je daljica $\overline{AB}$ manjša od daljice $\overline{CD}$ (pišemo $\overline{AB} < \overline{CD}$), če je dolžina daljice $\overline{AB}$ krajša od dolžine daljice $\overline{CD}$. Oznaka $\overline{AB} \leq \overline{CD}$ pomeni, da je bodisi $\overline{AB} < \overline{CD}$ bodisi $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Podobno definiramo $\overline{AB} > \overline{CD}$ in $\overline{AB} \geq \overline{CD}$.

Definicija 112. V metrični geometriji pravimo, da je kot $\angle ABC$ manjši od kota $\angle DEF$ (pišemo $\angle ABC < \angle DEF$), če je $m(\angle ABC) < m(\angle DEF)$. Oznaka $\angle ABC \leq \angle DEF$ pomeni, da je bodisi $\angle ABC < \angle DEF$ bodisi $\angle ABC \cong \angle DEF$. Podobno definiramo $\angle ABC > \angle DEF$ in $\angle ABC \geq \angle DEF$.

Definicija 113. Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v protractor geometriji. Če je $A - C - D$, potem je $\angle BCD$ *zunanji kot* trikotnika $\triangle ABC$. Kota $\angle CAB$ in $\angle CBA$ pa sta nasprotna notranja kota zunanjega kota $\angle BCD$.

Izrek 114. *(Izrek o zunanjem kotu)* V nevtralni geometriji je vsak zunanji kot trikotnika $\triangle ABC$ večji od obeh njegovih nasprotnih notranjih kotov.

Dokaz. DN. $\square$

Vaja. Pokaži, da v nevtralni geometriji velja: Naj bo P dana točka in l dana premica. Potem obstaja natanko ena premica, ki gre skozi točko P in je pravokotna na premico l.

Izrek 115. *(Side-Angle-Angle, SAA)* Naj bosta $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ taka trikotnika v nevtralni geometriji, da je $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle CAB \cong \angle FDE$ in $\angle BCA \cong \angle EFD$. Potem je $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Dokaz. DN. $\square$

Izrek 116. Če dva kota nekega trikotnika v nevtralni geometriji nista skladna, tudi nasprotni stranici teh dveh kotov nista skladni. Daljša stranica leži nasproti večjega kota.

Dokaz. DN. $\square$

Izrek 117. *(Trikotniška neenakost)* V nevtralni geometriji je dolžina ene stranice trikotnika strogo manjša od vsote dolžin drugih dveh stranic.

DOKAZ. DN. □

VAJE.

1. Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v nevtralni geometriji in naj bo $D \in int(\triangle ABC)$. Pokaži, da velja:

$$d(A,D) + d(D,C) < d(A,B) + d(B,C) \text{ in } \angle ADC > \angle ABC.$$

2. Pokaži, da mora v nevtralni geometriji trikotnik s topim kotom imeti dva ostra kota.

3. Dokaži oziroma navedi protiprimer:

   Naj bo $\triangle ABC$ tak trikotnik v nevtralni geometriji, da sta notranji simetrali kota $\angle CAB$ in kota $\angle BCA$ skladni. Tedaj je $\triangle ABC$ enakostraničen.

   (*Namig.* Predpostavi, da sta kota $\angle CAB$ in $\angle BCA$ skladna in si oglej sliko 5.1, kjer $\overline{AQ} \cong \overline{CP}$. V čem sta si podobna $\angle AQD$ in $\angle CPE$?)

Slika 5.1:

4. Naj bosta $P = (-1,1)$ in $Q = (1,1)$ točki in $l = \{(x,y) \mid y = x\}$ premica v taxi ravnini. Pokaži, da naslednja trditev ne velja.

   Naj bo l premica, $Q \in l$ in $P \notin l$, potem velja:
   (i) če je $PQ \perp l$, potem je $d_T(P,Q) \leq d_T(P,R)$ za vse $R \in l$;
   (ii) če je $d_T(P,Q) \leq d_T(P,R)$ za vse $R \in l$, potem je $PQ \perp l$.

Poglavje 6

Krožnice in tangente

Definicija 118. Če je C točka v metrični geometriji $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d\}$ in je $r > 0$, množico

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_r(C) = \{P \in \mathcal{S} \mid d(P, C) = r\}$$

imenujemo *krožnica s središčem C in polmerom r.* Če sta A in B različni točki krožnice $\mathcal{C}$, potem $\overline{AB}$ imenujemo *tetiva* krožnice $\mathcal{C}$. Če središče Cležni na tetivi $\overline{AB}$, tetivo $\overline{AB}$ imenujemo *premer* krožnice $\mathcal{C}$. Za poljubno točko $Q \in \mathcal{C}$ daljici $\overline{CQ}$ pravimo *polmer* krožnice $\mathcal{C}$.

Izrek 119. *(Izrek dveh krožnic)* Naj bosta $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_b(A)$ in $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_a(B)$ krožnici v nevtralni geometriji. Če je $d(A, B) = c$ in je vsako izmed števil a, b in c manjše od vsote drugih dveh števil, se krožnici $\mathcal{C}_1$ in $\mathcal{C}_2$ sekata v natanko dveh točkah. Še več, ti dve točki ležita na nasprotnih straneh premice AB.

Dokaz. DN. □

Vaje.

1. Dokaži: Če protractor geometrija zadošča SSS aksiomu, trikotniški neenakosti in izreku dveh krožnic (kjer izpustimo pogoj nevtralne geometrije), potem zadošča tudi SAS aksiomu in je v resnici tudi nevtralna geometrija.

2. Pokaži, da ima v nevtralni geometriji krožnica z radijem r tetivo dolžine c natanko tedaj, ko je $0 < c < 2r$.

3. V Evklidski ravnini načrtaj tak trikotnik $\triangle ABC$, da bo $d_E(A, B) = 4$, $d_E(A, C) = 4$ in $d_E(B, C) = 2$.

4. Ali v taxi ravnini obstaja tak trikotnik $\triangle ABC$, da je $d_T(A, B) = 4$, $d_T(A, C) = 4$ in $d_T(B, C) = 2$. Če obstaja, trikotnik tudi načrtaj.

5. V Poincarejevi ravnini načrtaj tak trikotnik $\triangle ABC$, da bo $d_H(A, B) = \ln 4$, $d_H(A, C) = \ln 3$ in $d_H(B, C) = \ln 2$.

Poglavje 7

Teorija vzporednosti

7.1 Obstoj vzporednih premic

Definicija 120. Naj bodo l, l_1 in l_2 tri različne premice. Pravimo, da je premica l *transverzala* premic l_1 in l_2, če l seka tako l_1 kot l_2, vendar v različnih točkah.

Definicija 121. Naj bo GH transverzala premic AC in DF v metrični geometriji. Naj bo $AC \cap GH = \{B\}$ in $DF \cap GH = \{E\}$. Če za točke C, D, E, F, G in H velja

(i) $A - B - C$, $D - E - F$ in $G - B - E - H$,

(ii) A in D ležita na isti strani premice GH,

potem sta $\angle ABE$ in $\angle FEB$ *par alternirajočih notranjih kotov* ter $\angle ABG$ in $\angle DEB$ *par pripadajočih kotov.*

Izrek 122. Naj bosta l_1 in l_2 premici v nevtralni geometriji. Če obstaja taka transverzala l premic l_1 in l_2, da sta alternirajoča kota skladna, potem obstaja premica l', ki je pravokotna na premico l_1 in premico l_2.

Dokaz. DN. □

Izrek 123. Naj bosta l_1 in l_2 premici v nevtralni geometriji. Če imata l_1 in l_2 skupno pravokotnico, potem je l_1 vzporedna s premico l_2. Oziroma, če obstaja taka transverzala premic l_1 in l_2, da sta alternirajoča kota skladna, je $l_1 || l_2$.

Dokaz. DN. □

Po zgornjem izreku (Izrek 123) sta premici l_1 in l_2, ki imata skupno pravokotnico, vzporedni. Ali velja obrat? Torej, ali drži, da imata premici, ki sta vzporedni, skupno pravokotnico? Odgovor je: ne vedno.

Primer. V Poincarejevi ravnini sta premici ${}_0L$ in ${}_1L_1$ vzporedni, vendar nimata skupne pravokotnice.

Izrek 124. Naj bo l premica in $P \notin l$ v nevtralni geometriji. Potem skozi točko P obstaja premica l', ki je vzporedna s premico l.

DOKAZ. DN. □

V zgornjem izreku (Izrek 124) nismo trdili, da je l' enolično določena premica, ki gre skozi P in je vzporedna premici l.

Primer. Prepričaj se, da v Poincarejevi ravnini obstaja več kot ena premica skozi točko $P = (3, 4)$, ki je vzporedna s premico ${}_{-5}L$.

Definicija 125. Naj bo BC poljubna transverzala premic DC in AB v protractor geometriji $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d, m\}$, tako da velja:

(i) A in D ležita na isti strani premice BC;

(ii) $m(\angle ABC) + m(\angle BCD) < 180$.

Če se AB in CD sečeta v točki E na tisti strani premice BC, na kateri ležita A in D, potem pravimo, da protractor geometrija $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d, m\}$ zadošča *peti Evklidski zahtevi* (*Euclid's Fifth Postulate*) EFP.

Izrek 126. Naj bo l premica in $P \notin l$ v nevtralni geometriji, ki zadošča EFP. Potem skozi točko P obstaja enolično določena premica l', ki je vzporedna s premico l.

DOKAZ. DN. □

Definicija 127. Incidenčna geometrija zadošča *Evklidski lastnosti vzporednosti* (*Euclidean Parallel Property*) EPP, če za vsako premico l in vsako točko P obstaja enolično določena premica skozi točko P, ki je vzporedna s premico l.

Primer. Evklidska ravnina in taxi ravnina zadoščata EPP, Poincarejeva ravnina pa ne zadošča EPP.

Izrek 128. Če nevtralna geometrija zadošča EPP, potem zadošča tudi EFP.

DOKAZ. DN. □

VAJE.

1. Naj bo l transverzala premic l_1 in l_2 v protractor geometriji. Dokaži, da sta alternirajoča notranja kota skladna natanko tedaj, ko sta skladna pripadajoča kota.

2. Naj bo l transverzala premic l_1 in l_2 v nevtralni geometriji, tako da sta pripadajoča kota skladna. Dokaži, da je $l_1 || l_2$.

3. Naj bo BC skupna pravokotnica premic AB in CD v nevtralni geometriji. Dokaži: če je l transverzala premic AB in CD, ki vsebuje razpolovišče daljice $\overline{BC}$, potem sta alternirajoča notranja kota skladna.

4. V Poincarejevi ravnini poišči premici l_1 in l_2, ki imata skupno pravokotnico in transverzalo l, za katero alternirajoča notranja kota nista skladna. (Torej obrat Izreka 122 ne velja).

5. Pokaži, da sta v Poincarejevi ravnini različni premici tipa I vzporedni, vendar nimata skupne pravokotnice.

6. Z uporabo vektorske notacije za Evklidsko ravnino dokaži:

$$L_{AB}||L_{CD} \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}: A - B = \lambda(C - D).$$

7. Naj bo $\square ABCD$ štirikotnik v nevtralni geometriji. Dokaži: če je $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ in $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, potem je $AB||CD$ in $AD||BC$.

8. Naj bo $\square ABCD$ štirikotnik v Poincarejevi ravnini $\mathcal{H}$ in naj bo $A = (0, 15)$, $B = (12, 9)$, $C = (12, 5)$ in $D = (0, 13)$.

   (i) Dokaži, da je $AB||CD$ in $AD||BC$.

   (ii) Dokaži, da je $\overline{AB} \ncong \overline{CD}$. (Torej obrat prejšnje naloge v nevtralni geometriji ne velja.)

9. Naj bo $l = {}_2L_5$ premica in $P = (1, 2)$ točka v Poincarejevi ravnini. Poišči premico l', ki gre skozi točko P in je vzporedna s premico l.

10. Naj bo $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d, m\}$ nevtralna geometrija, ki zadošča EPP. Dokaži: če je $l_1||l_2$ in je l transverzala premic l_1 in l_2, potem sta alternirajoča notranja kota skladna.

11. Dokaži oziroma navedi protiprimer:

    Missing Strip ravnina zadošča EPP.

12. Dokaži oziroma navedi protiprimer:

    Naj bo $\square ABCD$ tak štirikotnik v nevtralni geometriji, da je $AD||BC$ in $\angle ABC \cong \angle ADC$. Tedaj je $AB||CD$.

7.2 Saccherijevi štirikotniki

Definicija 129. Štirikotnik $\square ABCD$ v protractor geometriji je *Saccherijev štirikotnik*, če sta $\angle BAD$ in $\angle ADC$ pravokotna in $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Saccherijev štirikotnik $\square ABCD$ označujemo z $\square_s ABCD$. *Spodnja osnovnica* štirikotnika $\square_s ABCD$ je $\overline{AD}$, *zgornja osnovnica* štirikotnika $\square_s ABCD$ je $\overline{BC}$, *nogi* štirikotnika $\square_s ABCD$ sta $\overline{AB}$ in $\overline{CD}$, *spodnja bazna kota* sta $\angle BAD$ in $\angle ADC$, ter *zgornja bazna kota* sta $\angle ABC$ in $\angle BCD$.

Izrek 130. V nevtralni geometriji je Saccherijev štirikotnik $\square_s ABCD$ konveksni štirikotnik.

DOKAZ. DN. $\square$

Definicija 131. Dva konveksna štirikotnika v protractor geometriji sta *skladna*, če so pripadajoče stranice in koti skladni. Oznaka: $\square ABCD \cong \square EFGH$.

Izrek 132. V nevtralni geometriji velja: če je $\overline{AD} \cong \overline{PS}$ in $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, potem je $\square_s ABCD \cong \square_s PQRS$.

DOKAZ. DN. $\square$

Posledica 133. Če je $\square_s ABCD$ Saccherijev štirikotnik v nevtralni geometiji, potem je $\square_s ABCD \cong \square_s DCBA$ in $\angle ABC \cong \angle BCD$.

DOKAZ. DN. $\square$

Naslednji izrek je posplošitev trikotniške neenakosti.

Izrek 134. *(Polygon Inequality)* Naj bo $n \geq 3$. Če so P_1, P_2,..., P_n točke v nevtralni geometriji, potem je

$$d(P_1, P_n) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) + \cdots + d(P_{n-1}, P_n).$$

DOKAZ. DN. $\square$

Izrek 135. Naj bo $\square_s ABCD$ Saccherijev štirikotnik v nevtralni geometiji, potem je $\overline{BC} \geq \overline{AD}$.

DOKAZ. DN. $\square$

Izrek 136. Naj bo $\square_s ABCD$ Saccherijev štirikotnik v nevtralni geometiji, potem je $\angle ABD \leq \angle BDC$.

DOKAZ. DN. $\square$

Izrek 137. V nevtralni geometriji je vsota ostrih kotov pravokotnega trikotnika manjša ali enaka 90.

DOKAZ. DN. $\square$

Izrek 138. *(Saccheri's theorem)* V nevtralni geometriji je vsota notranjih kotov trikotnika manjša ali enaka 180.

DOKAZ. DN. $\square$

Izrek 139. *(Evklidska vsota kotov)* V nevtralni geometriji, ki zadošča EPP, je vsota notranjih kotov trikotnika enaka 180.

DOKAZ. DN. $\square$

Definicija 140. Štirikotnik $\square ABCD$ je *paralelogram*, če je $AB||CD$ in $AD||BC$. Štirikotnik $\square ABCD$ je *pravokotnik*, če so vsi koti štirikotnika pravokotni. Pravokotnik $\square ABCD$ je kvadrat, če so stranice med seboj skladne.

Izrek 141. V nevtralni geometriji je Saccherijev štirikotnik paralelogram.

DOKAZ. DN. $\square$

Definicija 142. Množica točk $\mathcal{A}$ v nevtralni geometriji se imenuje *enakorazdaljna množica* glede na premico l, če je $d(l, A)$ enaka za vse $A \in \mathcal{A}$.

Izrek 143. Naj bo $\square ABCD$ štirikotnik v nevtralni geometriji s pravim kotom v oglišču A in oglišču D. Če je $\overline{AB} > \overline{DC}$, potem je $\angle ABC < \angle DCB$.

Dokaz. DN. $\square$

Vaje.

1. Naj bodo $A = (0, 2)$, $B = (1, \sqrt{3})$, $C = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ in $D = (0, 1)$ točke v Poincarejevi ravnini. Pokaži, da je $\square ABCD$ Saccherijev štirikotnik in da je $\overline{BC} > \overline{AD}$.

2. Za Saccherijev štirikotnik iz prejšnje naloge pokaži, da je $m_H(\angle ABC) \leq 90$.

3. Dokaži, da sta v nevtralni geometriji diagonali Saccherijevega štirikotnika skladni.

4. Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v nevtralni geometriji. Na dva različna načina pokaži, da je $m(\angle CAB) + m(\angle ABC) < 180$.

5. Naj bo $\square ABCD$ konveksni štirikotnik v nevtralni geometriji. Dokaži, da je
$$m(\angle BAD) + m(\angle ABC) + m(\angle BCD) + m(\angle ADC) \leq 360.$$

6. Naj bodo A, B in C točke v nevtralni geometriji, ki ležijo na krožnici s središčem D. Dokaži: če je $D \in int(\triangle ABC)$, je $m(\angle ABC) < \frac{1}{2}m(\angle ADC)$.

7. Naj bosta A in B točki v nevtralni geometriji, ki ležita na koržnici $\mathcal{C}$ s središčem D. Dokaži: če je CB taka tangenta krožnice $\mathcal{C}$, da A in C ležita na isti strani premice BD, je $m(\angle CBA) \geq \frac{1}{2}m(\angle BDA)$.

8. Dokaži, da je v Paschevi geometriji paralelogram konveksni štirikotnik.

9. Štirikotnik $\square ABCD$ imenujemo *Lambertov štirikotnik* (oznaka $\square_l ABCD$), če so $\angle BAD$, $\angle ABC$ in $\angle BCD$ pravi koti. Dokaži, da je Lambertov štirikotnik $\square_l ABCD$ paralelogram in konveksni štirikotnik.

10. Dokaži, da v nevtralni geometriji velja:

    (i) če je $\square_l ABCD$ in $m(\angle ADC) < 90$, je $\overline{DB} > \overline{AC}$;

    (ii) če je $\square_l ABCD$ in $m(\angle ADC) = 90$, je $\overline{DB} \cong \overline{AC}$.

11. Pravimo, da je štirikotnik $\square ABCD$ *enakokotni*, če je $\angle BAD \cong \angle ABC \cong \angle BCD \cong \angle ADC$. Dokaži oziroma navedi protiprimer:

    V nevtralni geometriji je enakokotni štirikotnik konveksen.

7.3 Kritična funkcija

Izrek 144. Naj bo l premica v nevtralni geometriji in naj bo $P \notin l$. Naj bo D presečišče premice l in pravokotnice na premico l, ki gre skozi točko P. Če je $m(\angle DPC) \geq 90$, je $\overrightarrow{PC} \cap l = \emptyset$.

Dokaz. DN. □

Definicija 145. Če je $\mathcal{B}$ množica realnih števil, je $r \in \mathbb{R}$ *najmanjša zgornja meja* (*least upper bound*) množice $\mathcal{B}$, če velja:

(i) $b \leq r$ za vsak $b \in \mathcal{B}$;

(ii) če je $s < r$, potem obstaja tak element $b_s \in \mathcal{B}$, da je $s < b_s$.

Oznaka: lub$\mathcal{B}$.

Primer. Naj bo $\mathcal{B} = \{-(1/n) \mid n \text{ je pozitivno število}\}$. Prepričaj se, da je lub$\mathcal{B} = 0$.

Definicija 146. Naj bo l premica v nevtralni geometriji, $P \notin l$ in D presečišče premice l in pravokotnice na premico l, ki gre skozi točko P. Naj bo

$K(P, l) = \{r \in \mathbb{R} \mid \text{obstaja tak poltrak } \overrightarrow{PC}\text{, da je } \overrightarrow{PC} \cap l \neq \emptyset \text{ in } r = m(\angle DPC)\}$.

Kritično število za P in l je

$$r(P, l) = \text{lub}K(P, l).$$

Izrek 147. Naj bo $P \notin l$ točka v nevtralni geometriji in naj bo D presečišče pravokotnice na premico l, ki gre skozi P, in premice l. Če je $m(\angle DPC) \geq r(P, l)$, je $\overrightarrow{PC} \cap l = \emptyset$. Če je $m(\angle DPC) < r(P, l)$, je $\overrightarrow{PC} \cap l \neq \emptyset$.

Dokaz. DN. □

Posledica 148. Naj bo l premica v nevtralni geometriji in naj bo P točka, ki ne leži na l. Potem skozi P obstaja več kot ena premica, ki je vzporedna s premico l natanko tedaj, ko $r(P, l) < 90$.

Dokaz. DN. □

Primer. Naj bo $P = (a, b) \in \mathcal{H}$, kjer $a > 0$. Če je $l =_0 L$, poišči $r(P, l)$.

Izrek 149. Naj bosta P in P' točki v nevtralni geometriji in naj bosta l in l' taki premici, da je $P \notin l$ in $P' \notin l$. Če je $d(P, l) = d(P', l')$, potem je $r(P, l) = r(P', l')$.

Dokaz. DN. □

Definicija 150. *Kritična funkcija* nevtralne geometrije je funkcija $\Pi\colon \{t \mid t > 0\} \to \{r \mid 0 < r \leq 90\}$ dana s predpisom

$$\Pi(t) = r(P, l),$$

kjer je l poljubna premica in P poljubna točka, ki je od premice l oddaljena za t.

Izrek 151. V nevtralni geometriji je kritična funkcija nenaraščujoča, t.j.

$$\text{če je } t' > t, \text{ potem je } \Pi(t') \leq \Pi(t).$$

Dokaz. DN. □

Izrek 152. V nevtralni geometriji velja:

$$\text{če je } \Pi(a) < 90, \text{ potem je } \Pi(a/2) < 90.$$

Dokaz. DN. □

Izrek 153. V nevtralni geometriji velja: če je za neko realno število a funkcija $\Pi(a) < 90$, potem je $\Pi(t) < 90$ za vse $t > 0$.

Dokaz. DN. □

Izrek 154. *(All or none theorem)* V nevtralni geometriji velja: če obstajata premica l' in točka $P' \notin l'$, tako da skozi P' obstaja enolična premica, ki je vzporedna s premico l', potem velja EPP.

Dokaz. DN. □

Definicija 155. Nevtralna geometrija zadošča *hiperbolični lastnosti vzporednosti* (HPP), če za vsako premico l in vsako točko $P \notin l$, skozi točko P obstaja več kot ena premica vzporedna s premico l.

Definicija 156. *Evklidska geometrija* je nevtralna geometrija, ki zadošča EPP. *Hiperbolična geometrija* je nevtralna geometrija, ki zadošča HPP.

Vaje.

1. Poišči najmanjšo zgornjo mejo naslednjih množic

   (i) $\mathcal{B}_1 = \{\sin(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$;
   (ii) $\mathcal{B}_2 = \{(-1)^n \mid n \text{ celo število}\}$;
   (iii) $\mathcal{B}_3 = \{(r \mid r \text{ racionalno število in } r^2 < 2\}$.

2. Dokaži, da je v Evklidski ravnini za vsako premico l in vsako točko $P \notin l$ $r(P, l) = 90$. Torej za vsak t velja: $\Pi(t) = 90$.

3. Dokaži, da je $\{\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E, d_E, m_E\}$ Evklidska geometrija.

4. Dokaži, da je $\{\mathbb{H}, \mathcal{L}_H, d_H, m_H\}$ hiperbolična geometrija.

5. V Poincarejevi ravnini $\mathcal{H}$ naj bo $l =_0 L$ in $\mathcal{A}$ presek $\mathbb{H}$ z Evklidsko premico skozi $O = (0, 0)$ in $P = (a, b)$, kjer $a > 0$ in $b > 0$. Dokaži: $\mathcal{A}$ je enakoraz-daljna množica glede na l v $\mathcal{H}$. (Pozor! $\mathcal{A}$ ni premica v $\mathcal{H}$.)

6. Naj bo l premica in $P \notin l$ točka v nevtralni geometriji, ki zadošča HPP. Dokaži, da obstaja neskončno mnogo premic skozi P, ki so vzporedne s premico l.

Poglavje 8

Evklidska geometrija

8.1 Ekvivalentne oblike EPP

Izrek 157. Nevtralna geometrija zadošča EPP natanko tedaj, ko sta za par vzporednih premic l in l' s transverzalo t pripadajoča notranja alternirajoča kota skladna.

Dokaz. DN. □

Spomnimo se, da je pravokotnik štirikotnik s štirimi pravimi koti.

Izrek 158. Nevtralna geometrija zadošča EPP natanko tedaj, ko obstaja pravokotnik.

Dokaz. DN. □

Posledica 159. Nevtralna geometrija zadošča EPP natanko tedaj, ko je vsak Saccherijev štirikotnik pravokoten.

Naslednja razlika med EPP in HPP je povezana s simetralami stranic trikotnika. Naslednja dva izreka bosta pokazala, da nevtralna geometrija zadošča EPP natanko tedaj, ko se v vsakem trikotniku simetrale stranic sekajo v skupni točki.

Definicija 160. Množica premic je *konvergentna*, če obstaja točka P, ki pripada vsaki premici iz te množice. V tem primeru pravimo, da se premice stikajo v točki P.

Izrek 161. V Evklidski geometriji je množica simetral stranic trikotnika konvergentna.

Dokaz. DN. □

Izrek 162. V poljubni hiperbolični geometriji obstaja tak trikotnik, da sta simetrali dveh stranic vzporedni.

Dokaz. DN. □

Posledica 163. Nevtralna geometrija zadošča EPP natanko tedaj, ko so za vsak trikotnik simetrale stranic tega trikotnika konvergentne.

Izrek 164. Nevtralna geometrija zadošča EPP natanko tedaj, ko za vsak ostri kot $\angle ABC$ in vsako točko $P \in int(\angle ABC)$ obstaja premica l skozi P, ki seka $int(\overrightarrow{BA})$ in $int(\overrightarrow{BC})$.

Dokaz. DN. □

Izrek 165. Nevtralna geometrija zadošča EPP natanko tedaj, ko obstajata dva neskladna trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$, za katera velja $\angle ABC \cong \angle DEF$, $\angle BCD \cong \angle EFD$ in $\angle CAB \cong \angle FDE$.

Dokaz. DN. □

Vaje.

1. Dokaži, da nevtralna geometrija zadošča EPP natanko tedaj, ko je vzporednost $||$ tranzitivna relacija.

2. Naj bo $l||l'$ v nevtralni geometriji. Dokaži, da je zadoščeno EPP natanko tedaj, ko je vsaka premica, ki je pravokotna na premico l, pravokotna tudi na premico l'.

3. Dokaži, da nevtralna geometrija zadošča EPP natanko tedaj, ko je vzporednost $||$ ekvivalenčna relacija.

4. Dokaži, da v Evklidski geometriji velja:
$$l||l',\ r\perp l,\ r'\perp l' \ \Rightarrow\ r||r'.$$

5. Dokaži: nevtralna geometrija zadošča EPP natanko tedaj, ko za vsak trikotnik $\triangle ABC$ obstaja taka krožnica $\mathcal{C}$, da so $A, B, C \in \mathcal{C}$. (Krožnico $\mathcal{C}$ imenujemo *trikotniku očrtana krožnica*.)

6. Dokaži: nevtralna geometrija zadošča EPP natanko tedaj, ko za poljubne tri nekolinearne točke A, B in C obstaja enolična točka O, ki je enako oddaljena od vseh treh točk A, B in C.

7. Naj bo $\triangle ABC$ tak trikotnik v nevtralni geometriji, da točka B leži na krožnici s premerom $\overline{AC}$. Dokaži, da je zadoščeno EPP natanko tedaj, ko je $\angle ABC$ pravokotni.

8. Naj bo $\triangle ABC$ tak trikotnik v nevtralni geometriji, da je $\angle ABC$ pravokotni. Dokaži, da je zadoščeno EPP natanko tedaj, ko točka B leži na kroňici s premerom $\overline{AC}$.

9. Dokaži, da nevtralna geometrija zadošča EPP natanko tedaj, ko velja:
$$l\perp r,\ r\perp s,\ s\perp m \ \Rightarrow\ l\cap m \neq \emptyset.$$

10. Poišči primer trikotnika v Poincarejevi ravnini $\mathcal{H}$, v katerem simetrale stranic niso konvergentne (se ne sekajo v isti točki).

8.2 Teorija podobnosti

Izrek 166. Naj bodo l_1, l_2 in l_3 različne vzporedne premice v Evklidski geometriji. Naj premica t_1 seka l_1 v točki A, l_2 v točki B in l_3 v točki C. Naj premica t_2 seka l_1 v točki D, l_2 v točki E in l_3 v točki F. Če je $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, potem je $\overline{DE} \cong \overline{EF}$.

Dokaz. DN. □

Izrek 167. Naj bodo l_1, l_2 in l_3 različne vzporedne premice v Paschevi geometriji. Naj premica t_1 seka l_1 v točki A, l_2 v točki B in l_3 v točki C. Naj premica t_2 seka l_1 v točki D, l_2 v točki E in l_3 v točki F. Če je $A - B - C$, potem je $D - E - F$.

Dokaz. DN. □

Izrek 168. Naj bodo l_1, l_2 in l_3 različne vzporedne premice v Evklidski geometriji. Naj bo t_1 transverzala, ki seka l_1 v točki A, l_2 v točki B in l_3 v točki C. Naj bo t_2 transverzala, ki seka l_1 v točki D, l_2 v točki E in l_3 v točki F. Če je $A - B - C$, potem je

$$\frac{d(B,C)}{d(A,B)} = \frac{d(E,F)}{d(D,E)}.$$

Dokaz. DN. □

Definicija 169. Dva trikotnika $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ v protractor geometriji sta si *podobna* (pišemo $\triangle ABC \sim \triangle DEF$), če je $\angle ABC \cong \angle DEF$, $\angle BCA \cong \angle EFD$ in $\angle CAB \cong \angle FDE$.

Izrek 170. V Evklidski geometriji je razmerje dožin stranic podobnih trikotnikov konstantno. T.j., če je $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, potem je

$$\frac{d(A,B)}{d(D,E)} = \frac{d(B,C)}{d(E,F)} = \frac{d(A,C)}{d(D,F)}.$$

Dokaz. DN. □

Izrek 171. *(SSS podobnostni izrek)* V Evklidski geometriji je $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ natanko tedaj, ko je

$$\frac{d(A,B)}{d(D,E)} = \frac{d(B,C)}{d(E,F)} = \frac{d(A,C)}{d(D,F)}.$$

Dokaz. DN. □

Izrek 172. *(Pitagorov izrek)* V Evklidski geometriji ima trikotnik $\triangle ABC$ pravi kot v oglišču B natanko tedaj, ko je

$$d(A,B)^2 + d(B,C)^2 = d(A,C)^2.$$

Dokaz. DN. □

Izrek 173. Nevtralna geometrija zadošča EPP natanko tedaj, ko za vsak pravokotni trikotnik $\triangle ABC$, ki ima pravi kot v oglišču B, velja enačba

$$d(A,B)^2 + d(B,C)^2 = d(A,C)^2.$$

Dokaz. DN. □

Izrek 174. Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v Evklidski geometriji. Naj bo D nožišče višine skozi A in E nožišče višine skozi B. Potem velja:

$$d(A,D) \cdot d(B,C) = d(B,E) \cdot d(A,C).$$

Dokaz. DN. □

Vaje.

1. Naj bo $\triangle ABC$ pravokotni trikotnik v Evklidski geometriji s pravim kotom v oglišču B. Dokaži: če je D nožišče višine skozi B na stranico $\overline{AC}$, je $\triangle ADB \sim \triangle ABC \sim \triangle BDC$.

2. Naj bosta $\triangle ABC$ in $\triangle PQR$ podobna trikotnika v nevtralni geometriji. Dokaži: če je $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, potem je $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

3. Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v Evklidski geometriji. Naj bo $A - D - B$ in $A - E - C$, tako da
$$\frac{d(A,D)}{d(A,B)} = \frac{d(A,E)}{d(A,C)}.$$
Dokaži, da je $DE||BC$.

4. Naj bosta $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ podobna trikotnika v Evklidski geometriji. Naj bo G nožišče višine na $\overline{BC}$ skozi A in naj bo H nožišče višine na $\overline{EF}$ skozi D. Dokaži, da velja:
$$\frac{d(A,G)}{d(D,H)} = \frac{d(A,B)}{d(D,E)}.$$

5. Naj bosta $\overline{AB}$ in $\overline{CD}$ taki tetivi krožnice $\mathcal{C}$ v Evklidski geometriji, da se $\overline{AB}$ in $\overline{CD}$ sečeta v točki E, ki leži med A in B. Dokaži, da velja:
$$d(A,E) \cdot d(E,B) = d(C,E) \cdot d(E,D).$$

6. Naj bo $\mathcal{C}$ krožnica v Evklidski geometriji in naj bo B točka, ki leži zunaj krožnice $\mathcal{C}$. Dokaži: če so $A, C, D \in \mathcal{C}$, AB tangenta krožnice $\mathcal{C}$ in $B - D - C$, potem je
$$d(A,B)^2 = d(B,D) \cdot d(B,C).$$

7. Naj bo $\mathcal{C}$ krožnica v Evklidski geometriji in naj bo C točka, ki leži zunaj krožnice $\mathcal{C}$. Dokaži: če $A, B, D, E \in \mathcal{C}$, $A - B - C$ in $E - D - C$, potem je
$$d(C,A) \cdot d(C,B) = d(C,E) \cdot d(C,D).$$

8.3 Nekaj klasičnih izrekov Evklidske geometrije

Če je $\mathcal{A}$ množica konvergentnih premic, točko, v kateri se sekajo premice iz $\mathcal{A}$, imenujemo *točka konvergence.*

Izrek 175. V Evklidski geometriji so simetrale kotov poljubnega trikotnika $\triangle ABC$ konvergentne. Točko konvergence, I, imenujemo *središče* trikotnika $\triangle ABC$.

Dokaz. DN. □

Tu navajamo nekaj osnovnih objektov, ki so vezani na trikotnik v Evklidski geometriji. *Pozor!* Ti objekti v poljubni geometriji ne obstajajo nujno.

(i) Višinska točka je presečisče višin trikotnika. - ORTHOCENTER

(ii) *Težiščnica* veže razpolovišče stranice trikotnika z nasprotnim ogliščem. - MEDIAN

(iii) *Težišče trikotnika* je presečišče težiščnic trikotnika. - CENTROID

(iv) Presečišče simetral stranic trikotnika $\triangle ABC$ je *središče očrtanega kroga* trikotniku $\triangle ABC$.
- CIRCUMCENTER

(v) Presečišče kotnih simetral trikotnika $\triangle ABC$ je *središče včrtanega kroga* trikotniku $\triangle ABC$.
- INCENTER

Izrek 176. V Evklidski geometriji so višinska točka, težišče in središče očrtanega kroga kolinearne.

Dokaz. DN. □

Definicija 177. V Evklidski geometriji premico, ki jo določajo višinska točka, težiščnica in središče očrtanega kroga neenakokrakega trikotnika, imenujemo *Eulerjeva premica trikotnika.* Središčne točke daljic, ki povezujejo višinsko točko trikotnika z oglišči trikotnika imenujemo *Eulerjeve točke.*

Izrek 178. *(Nine points circle)* Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v Evklidski geometriji. Potem središčne točke stranic trikotnika, nožišča višin in Eulerjeve točke ležijo na isti krožnici.

Dokaz. DN. □

Vaje.

1. Dokaži, da je v nevtralni geometriji presečišče kotnih simetral trikotnika enako oddaljeno od vseh treh stranic tega trikotnika.

2. Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v nevtralni geometriji. Dokaži, da obstaja krog $\mathcal{C}$, ki je tangenten na premice AB, BC in AC (imenujemo ga *trikotniku včrtan krog*).

3. Naj bodo A, B in C nekolinearne točke v Evklidski geometriji. Dokaži, da obstaja taka krožnica $\mathcal{C}$, da $A, B, C \in \mathcal{C}$. Tako krožnico imenujemo *očrtana krožnica.*

4. Dokaži, da v Poincarejevi ravnini $\mathcal{H}$ obstajajo tri nekolinearne točke, ki ne ležijo na isti krožnici.

5. Dokaži, da Eulerjeva premica pravokotnega trikotnika v Evklidski geometriji vsebuje težiščnico hipotenuze tega trikotnika.

Poglavje 9

Hiperbolična geometrija

9.1 Asimptotični poltraki in trikotniki

Definicija 179. Naj bodo A, B, C in D štiri točke v nevtralni geometriji, tako da nobene tri niso kolinearne. Naj C in D ležita na isti strani premice AB in naj bo $AD||BC$. Potem množico

$$\triangle DABC = \overrightarrow{AD} \cup \overline{AB}\overrightarrow{BC}$$

imenujemo *odprti trikotnik* (ali *bikot*).

Definicija 180. Naj bo $\triangle DABC$ odprti trikotnik. Poltrak $\overrightarrow{BC}$ je *strogo asimptotičen* s poltrakom $\overrightarrow{AD}$, če za vsako točko $E \in int(\angle ABC)$ poltrak $\overrightarrow{BE}$ seka $\overrightarrow{AD}$.

Definicija 181. Poltraka $\overrightarrow{PQ}$ in $\overrightarrow{RS}$ sta *ekvivalentna* (pišemo $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$), če je $\overrightarrow{PQ} \subset \overrightarrow{RS}$ ali $\overrightarrow{RS} \subset \overrightarrow{PQ}$. Poltrak $\overrightarrow{BC}$ je *asimptotičen* s poltrakom $\overrightarrow{AD}$ (pišemo $\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{AD}$), če je $\overrightarrow{BC}$ strogo asimptotičen s poltrakom $\overrightarrow{AD}$ ali $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{AD}$.

Izrek 182. V nevtralni geometriji velja:

(i) $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{B'C'} \ \wedge \ \overrightarrow{BC}|\overrightarrow{AD} \ \Rightarrow \ \overrightarrow{B'C'} \sim \overrightarrow{AD}$;

(ii) $\overrightarrow{AD} \sim \overrightarrow{A'D'} \ \wedge \ \overrightarrow{BC}|\overrightarrow{AD} \ \Rightarrow \ \overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{A'D'}$;

(iii) $\overrightarrow{AD} \sim \overrightarrow{A'D'} \ \wedge \ \overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{B'C'} \ \Rightarrow \ \overrightarrow{BC}|\overrightarrow{AD}$.

Dokaz. Predavanja. □

Izrek 183. V nevtralni geometriji velja: Naj bo $\overrightarrow{AD}$ poltrak in $B \notin AD$ točka, ki ne leži na premici AD. Potem obstaja enolično določen poltrak $\overrightarrow{BC}$, ki je vzporeden s poltrakom $\overrightarrow{AD}$.

Dokaz. Predavanja. □

Izrek 184. V nevtralni geometriji je asimptotičnost ekvivalenčna relacija.

Dokaz. DN. □

Definicija 185. Odprti trikotnik $\triangle DABC$ imenujemo *zaprti trikotnik* (ali *asimptotični trikotnik*), če je $\overrightarrow{AD}|\overrightarrow{BC}$.

Izrek 186. *(Izrek skladnosti za asimptotične trikotnike)* V nevtralni geometriji velja: Naj bosta $\triangle DABC$ in $\triangle SPQR$ asimptotična trikotnika, za katera velja $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ in $\angle ABC \cong \angle PQR$. Potem je $\angle BAD \cong \angle QPS$.

Dokaz. DN. □

Definicija 187. Premici l in l' sta *asimptotični* ali *asimptotično vzporedni* (pišemo $l|l'$), če obstajata poltraka $\overrightarrow{AD}$ in $\overrightarrow{BC}$, za katera velja

$$\overrightarrow{AD} \subset l, \ \overrightarrow{BC} \subset l' \text{ in } \overrightarrow{AD}|\overrightarrow{BC}.$$

Če je $\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{CD}$, potem je očitno $AB||CD$. Torej so asimptotične premice vzporedne. Izkaže se, da v nevtralni geometriji, ki zadošča EPP, velja tudi obrat te trditve (glej vajo 1 tega razdelka). V nevtralni geometriji, ki zadošča HPP, pa obrat ne velja.

Izrek 188. V nevtralni geometriji, ki zadošča HPP velja: Naj bosta l in l' različni premici, ki premoreta skupno pravokotnico. Potem sta l in l' vzporedni, vendar nista asimptotični.

Dokaz. DN. □

Vaje.

1. Dokaži, da v nevtralni geometriji, ki zadošča EPP, velja:

$$l||l' \ \Leftrightarrow \ l|l'.$$

2. Naj bo $\triangle DABC$ odprti trikotnik. Kako se glasi definicija notranjosti tega trikotnika? Dokaži, da je $int(\triangle DABC)$ konveksna množica.

3. Naj bo $\triangle DABC$ asimptotični trikotnik v nevtralni geometriji. Naj bo l taka premica, da je $l \cap int(\triangle DABC) \neq \emptyset$. Dokaži, da je $l \cap \triangle DABC \neq \emptyset$.

4. Naj bosta $A = (0,1)$ in $D = (0,2)$ točki Poincarejeve ravnine.
   (i) Skiciraj dva različna asimptotična trikotnika $\triangle DABC$. Koliko je vseh takih asimptotičnih trikotnikov?
   (ii) Naj bo $E = (1,1)$. Poišči enolično določen poltrak $\overrightarrow{EF}$, za katerega velja, da je $\overrightarrow{EF}|\overrightarrow{AD}$.

5. Naj bosta $A = (0,1)$ in $D = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ točki Poincarejeve ravnine.

   (i) Skiciraj dva različna asimptotična trikotnika $\triangle DABC$. Koliko je vseh takih asimptotičnih trikotnikov?

   (ii) Naj bo $E = (0, 1/2)$. Poišči enolično določen poltrak $\overrightarrow{EF}$, za katerega velja, da je $\overrightarrow{EF}|\overrightarrow{AD}$.

6. Naj bosta $A = (1,1)$ in $B = (1,5)$ točki Poincarejeve ravnine.

   (i) Skiciraj pet različnih poltrakov, ki so asimptotični s poltrakom $\overrightarrow{AB}$.

   (ii) Skiciraj pet različnih poltrakov, ki so asimptotični s poltrakom $\overrightarrow{BA}$.

9.2 Vsota kotov in defekt trikotnika

Definicija 189. Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v protractor geometriji. *Defekt* trikotnika $\triangle ABC$ je

$$\delta(\triangle ABC) = 180 - (m(\angle CAB) + m(\angle ABC) + m(\angle ACB)).$$

Po izreku o Evklidski vsoti kotov (glej izrek 139) je v Evkildski geometriji za vsak trikotnik $\triangle ABC$ defekt $\delta(\triangle ABC) = 0$.

Definicija 190. Naj bo $\triangle DABC$ odprti trikotnik v nevtralni geometriji in naj bosta P in Q točki, za kateri velja:

$$P - A - D \text{ in } Q - A - B.$$

Potem sta $\angle PAB$ in $\angle QAD$ *zunanja kota* trikotnika $\triangle DABC$, katerih nasprotni notranji kot je $\angle ABC$.

Izrek 191. V hiperbolični geometriji je zunanji kot asimptotičnega trikotnika večji od nasprotnega notranjega kota.

Dokaz. DN. □

Izrek 192. V hiperbolični geometriji je kritična funkcija Π strogo padajoča.

Dokaz. DN. □

Izrek 193. V hiperbolični geometriji sta zgornja bazna kota poljubnega Saccherijevega štirikotnika ostra.

Dokaz. DN. □

Izrek 194. V hiperbolični geometriji je vsota notranjih kotov poljubnega trikotnika strogo manjša od 180.

Dokaz. DN. □

Izrek 195. *(Vsota defekta)* Naj bo $\triangle ABC$ trikotnik v protractor geometriji in naj bo $A - D - C$. Potem je

$$\delta(\triangle ABC) = \delta(\triangle ABD) + \delta(\triangle DBC).$$

Dokaz. DN. □

Izrek 196. *(AAA skladnostni izrek)* Naj bosta $\triangle ABC$ in $\triangle DEF$ trikotnika v hiperbolični geometriji. Če je $\angle CAB \cong \angle FDE$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ in $\angle ACB \cong \angle DFE$, potem je $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Dokaz. DN. □

Izrek 197. V hiperbolični geometriji je $\lim_{x\to\infty} \Pi(x) = 0$.

Dokaz. DN. □

Izrek 198. V hiperbolični geometriji velja: če je $0 < r < 90$, obstaja enolično določeno število t, za katero je $\Pi(t) = r$.

Dokaz. DN. □

Posledica 199. V hiperbolični geometriji je $\lim_{x\to 0^+} \Pi(x) = 90$.

Dokaz. DN. □

Izrek 200. V hiperbolični geometriji velja: če je $0 < r < 180$, potem obstaja trikotnik, katerega defekt je r.

Dokaz. DN. □

Vaje.

1. Dokaži, da imajo skadni trikotniki enak defekt.
2. Naj bosta $AB = {}_0L$ in $BC = {}_cL_r$ premici v Poincarejevi ravnini. Dokaži, da simetrala kota $\angle ABC$ pripada premici ${}_dL_s$, kjer je $d = c + r$.
3. Dokaži oziroma navedi protiprimer:

   V Evklidski geometriji velja AAA skladnostni izrek.

9.3 Razdalja med vzporednimi premicami

Definicija 201. V hiperbolični geometriji sta premici l in l' *divergentno vzporedni*, če sta vzporedni, vendar nista asimptotični.

Izrek 202. V hiperbolični geometriji sta premici l in l' divergentno vzporedni natanko tedaj, ko imata skupno pravokotnico.

Dokaz. DN. □

Definicija 203. Naj bo $\mathcal{B}$ množica realnih števil. Število $s \in \mathbb{R}$ je *največja spodnja meja* množice $\mathcal{B}$ (pišemo $s = glb\,\mathcal{B}$), če velja:

(i) $s \leq b$ za vsak $b \in \mathcal{B}$; in

(ii) če je $r > s$, potem obstaja $b_r \in \mathcal{B}$, da je $b_r < r$.

Definicija 204. V metrični geometriji je *razdalja med točko P in premico l* definerana z

$$d(P, l) = glb\{d(P, Q) \mid Q \in l\}.$$

Razdalja med premicama l in l' pa je definirana z

$$d(l, l') = glb\{d(P, Q) \mid P \in l, Q \in l'\}.$$

Izrek 205. Naj bosta l in l' divergentno vzporedni premici v hiperbolični geometriji. Če sta $A \in l$ in $A' \in l'$ taki točki, da je premica AA' pravokotna na l in l', je $d(l, l') = d(A, A')$. Nadalje, če je $A - B - C$, je $d(B, l') < d(C, l')$.

Dokaz. DN. □

Izrek 206. Naj bo $\triangle ABC$ pravokotni trikotnik v nevtralni geometriji s pravim kotom v ogljišču B. Naj bo C' točka, za katero velja $A - C - C'$ in $\overline{AC} \cong \overline{CC'}$. Naj bo B' nožišče pravokotnice na premico AB skozi točko C'. Potem je $d(B', C') \geq 2 \cdot d(B, C)$ in $d(A, B') \leq 2 \cdot d(A, B)$.

Dokaz. DN. □

Izrek 207. *(Aristotelov izrek)* Če je $\angle ABC$ kot v nevtralni geometriji in je $r > 0$, potem obstaja točka $E \in \overrightarrow{BC}$, za katero velja: $d(E, AB) > r$.

Dokaz. DN. □

Izrek 208. Naj bo premica l divergentno vzporedna s premico l' v hiperbolični geometriji in naj bo $r > 0$. Potem obstaja $P \in l$, tako da je $d(P, l') > r$.

Dokaz. DN. □

Izrek 209. Naj bo poltrak $\overrightarrow{AB}$ strogo asimptotičen s poltrakom $\overrightarrow{CD}$ v hiperbolični geometriji. Potem je $d(A, CD) > d(B, CD)$.

Dokaz. DN. □

Izrek 210. V hiperbolični geometriji velja: Naj bo $\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{CD}$ in $t > 0$. Potem obstaja točka $P \in \overrightarrow{AB}$, za katero velja: $d(P, CD) \leq t$.

Dokaz. DN. □

Posledica 211. V hiperbolični geometriji je razdalja med asimptotičnimi poltraki enaka 0.

Definicija 212. V hiperbolični geometriji je *razdaljna enota* enolično število s, za katero je $\Pi(s) = 45$.

Definicija 213. Naj bosta $\{\mathcal{S}, \mathcal{L}, d, m\}$ in $\{\mathcal{S}', \mathcal{L}', d', m'\}$ dve protractor geometriji. Funkcija $f : \mathcal{S} \to S'$ je *izometrija*, če velja:

(i) f je bijekcija;

(ii) $f(l) \in \mathcal{L}'$, če $l \in \mathcal{L}$;

(iii) $d'(f(A), f(B)) = d(A, B)$ za vse $A, B \in \mathcal{S}$;

(iv) $m'(\angle f(A)f(B)f(C)) = m(\angle ABC)$ za vsak kot $\angle ABC$ v $\mathcal{S}$.

Če obstaja izometrija med dvema geometrijama, pravimo, da sta geometriji *izometrični*.

Vaje.

1. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirana s predpisom $f(a, b) = (a + 1, b - 3)$. Dokaži, da je f izometrija.
2. Naj bo funkcija $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definirana s predpisom $f(a, b) = (a+2, b)$. Dokaži, da je f izometrija.
3. Dokaži, da je izometrija ekvivalenčna relacija.

Poglavje 10

Konveksna geometrija

10.1 Osnovne definicije

n-dimenzionalni *Evklidski prostor* $\mathbb{E}^n$ je metrična geometrija z razdaljo $d(x,y) = ||x-y||$, katere točke so vektorji iz $\mathbb{R}^n$. $\mathbb{E}^2$ je Kartezična ravnina. Notranji produkt točk x, y v $\mathbb{E}^n$ je $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kjer je $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in $||x|| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ *norma* vektorja x. Za množici R, S v $\mathbb{E}^n$, je $S + R = \{x + y \mid x \in R, y \in S\}$ in $S + x = S + \{x\}$ (to množico imenujemo tudi *translacija* množice S z vektorjem x).

Odprta krogla s središčem x in radijem $r > 0$ je množica $B_r(x) = \{y \in \mathbb{E}^n : d(x,y) < r\}$. Naj bo S množica v $\mathbb{E}^n$. Pravimo, da $x \in S$ leži v *notranjosti* množice S, če je $B_r(x) \subseteq S$ za nek $r > 0$. Pravimo, da točka x v $\mathbb{E}^n$ leži na *robu* množice S, če za poljuben $r > 0$, velja, da $B_r(x) \cap S \neq \emptyset$ in $B_r(x) \cap \overline{S} \neq \emptyset$. Z $\mathrm{int}(S)$ označujemo množico vseh točk iz S, ki ležijo v njeni notranjosti, in z $\mathrm{bd}(S)$ označujemo množico vseh točk iz S, ki ležijo na robu množice S. *Zaprtje* množice S je množica $\mathrm{cl}(S) = S \cup \mathrm{bd}(S)$. Množica S je *zaprta*, če $S = \mathrm{cl}(S)$. Množica S je *odprta*, če $S = \mathrm{int}(S)$. Množica je *omejena*, če je vsebovana v neki odprti krogli. Množica je *kompaktna*, če je omejena in zaprta.

Definicija 214. *k-dimenzionalni afini podprostori* prostora $\mathbb{E}^n$ so translacije k-dimenzionalnih linearnih podprostorov prostora $\mathbb{R}^n$.

Afina podprostora sta *vzporedna*, če nimata skupne točke. Afini podprostori dimenizije 1 se imenujejo *premice*, afini podprostori dimenizije $n-1$ se imenujejo *hiperravnine*.

Definicija 215. Za točke $x_1, \ldots, x_k$ v $\mathbb{E}^n$, in števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, za katera velja $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, vsoto $\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_k x_k$ imenujemo *afina combinacija* točk $x_1, \ldots, x_k$.

Z o bomo označevali *izhodišče* v $\mathbb{E}^n$, to je $o = (0, \ldots, 0)$.

Definicija 216. Točke $x_1, \ldots, x_k$ v $\mathbb{E}^n$ so *afino odvisne*, če obstajajo $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, tako da je $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$ in $\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_k x_k = o$.

Definicija 217. *Afino zaprtje* množice S v $\mathbb{E}^n$ je presek vseh afinih podprostorov, ki vsebujejo S (pišemo $\mathrm{aff}(S)$).

Notacija: $\mathrm{aff}(S)$. Dimenzija podmnožice S prostora $\mathbb{E}^n$ je dimenzija $\mathrm{aff}(S)$. Če je $\dim(S) < n$, potem je $\mathrm{int}(S) = \emptyset$ in $\mathrm{bd}(S) = S$. Z $\mathrm{relint}(S)$ označujemo notranjost množice S, ki jo gledamo kot množico v $\mathrm{aff}(S)$. Podobno, $\mathrm{relbd}(S)$ označuje rob množice S. Za točki x, y v $\mathbb{E}^n$, je $\overline{xy}$ *daljica* definirana z $\{\alpha x + (1-\alpha)y \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$.

Definicija 218. Množica S v $\mathbb{E}^n$ je *konveksna*, če je za poljubna $x, y \in S$ daljica $\overline{xy} \subseteq S$ vsebovana v S.

Notacija: $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ in $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Definicija 219. Za točke $x_1, \ldots, x_k$ v $\mathbb{E}^n$ in števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}_0^+$, za katere je $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, vsoto $\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_k x_k$ imenujemo *konveksna kombinacija* za $x_1, \ldots, x_k$.

Definicija 220. *Konveksna luknja* množice S v $\mathbb{E}^n$ je presek vseh konveksnih množic, ki vsebujejo S (pišemo $\mathrm{conv}(S)$).

Izrek 221. *(Charatéodory Theorem)* Naj bo S množica v $\mathbb{E}^n$. Potem poljubno točko $x \in \mathrm{conv}(S)$ lahko izrazimo kot konveksno kombinacijo največ $n+1$ točki iz S.

DOKAZ. Predavanja. □

Lineari funkcionali so linearne preslikave iz $\mathbb{E}^n$ na $\mathbb{R}$. Naj bo $f\colon \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ linearni funkcional in $\alpha \in \mathbb{R}$. Potem $[f\colon \alpha]$ označuje množico $\{x \in \mathbb{E}^n \mid f(x) = \alpha\}$ v $\mathbb{E}^n$.

Trditev 222. *(Representations of hyperplanes)*

(1) Množica H v $\mathbb{E}^n$ je hiperravnina $\Leftrightarrow H = [f\colon \alpha]$ za nek neničelni linearni funkcional f in $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) Če je $[f_1, \alpha_1] = [f_2, \alpha_2]$, potem je $f_1 = \lambda f_2$ in $\alpha_1 = \lambda \alpha_2$ za nek $\lambda \neq 0$.

(3) Za poljuben linearni funkcional f, obstaja vektor $u \in \mathbb{E}^n$, za katerega velja: $f(x) = \langle u, x \rangle$ za poljubni $x \in \mathbb{E}^n$.

DOKAZ. Predavanja. □

Če je $H = [f, \alpha]$, potem vektor u iz točke (3) v trditvi 222 imenujemo *normali vektor* od H.

Notacija: Naj bosta A in B množici v $\mathbb{E}^n$ in naj bo f linearni funkcional na $\mathbb{E}^n$. Potem pišemo $f(A) \geq \alpha$, če je $f(x) \geq \alpha$ za vse $x \in A$, in $f(A) \geq f(B)$, če $f(x) \geq f(y)$ za vse $x \in A$ in $y \in B$. Podobno definiramo, če $\geq$ zamenjamo z $\leq$, $>$, $<$ ali $=$.

Definicija 223. *Pol-hiperravnini* od $\mathbb{E}^n$ inducirani s hiperravnino H sta definirani kot množici

$$\begin{aligned} H^+ &= \{x \in \mathbb{E}^n \mid f(x) > \alpha\}, \\ H^- &= \{x \in \mathbb{E}^n \mid f(x) < \alpha\}, \end{aligned}$$

kjer je $H = [f\colon \alpha]$.

Po točki (2) trditve 222, množici $H^{\pm}$ nista odvisni od reprezentacije $[f\colon \alpha]$ hiperravnine H. Zaprtji pol-hiperravnin v $\mathbb{E}^n$ se imenujejta *zaprti pol-hiperravnini.*

Definicija 224. Za podmnožico S v $\mathbb{E}^n$ in $x \in S$ je hiperravnina $H = [f\colon \alpha]$ *tangenta hiperravnina* glede na S v točki x, če je $f(S) \geq \alpha$ ali $f(S) \leq \alpha$.

10.2 Separacijski izreki za konveksne množice

Definicija 225. Hiperravnina $H = [f\colon \alpha]$ *separira* množici A in B v $\mathbb{E}^n$, če je $f(A) \geq f(B)$ ali $f(A) \leq f(B)$ (pišemo $A|_H B$).

Definicija 226. Hiperravnina $H = [f\colon \alpha]$ *strogo separira* množico S v $\mathbb{E}^n$, če je $f(A) > f(B)$ ali $f(A) < f(B)$ (pišemo $A||_H B$).

Lema 227. Naj bo S odprta konveksa množica v $\mathbb{E}^n$, in naj bo F k-dimenzionalni afini podprostor, $0 \leq k \leq n-1$, tako da je $S \cap F = \emptyset$. Potem obstaja hiperravnina H, za katero velja: $S \cap H = \emptyset$ in $F \subseteq H$.

DOKAZ. Predavanja. □

Lema 228. Naj bosta A in B konveksni množici v $\mathbb{E}^n$, tako da je $\dim(\operatorname{aff}(A \cup B)) = n$. Potem je $A|_H B$ za neko hiperravnino $H \Leftrightarrow \operatorname{relint}(A) \cap \operatorname{relint}(B) = \emptyset$.

DOKAZ. Predavanja. □

Izrek 229. Naj bosta A in B neprazni konveksni množici v $\mathbb{E}^n$, tako da je A zaprta in B kompaktna. Potem je $A||_H B$ za neko hiperravnino $H \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

DOKAZ. Predavanja. □

10.3 Konveksni politopi

Definicija 230. *Konveksni politop* je konveksna luknja končnega števila točk v $\mathbb{E}^n$. Množica $\{x_1, \ldots, x_k\}$ se imenuje *minimalna representacija* konveksnega politopa P, če je

(1) $P = \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_k\})$,

(2) za vsak $1 \leq i \leq k$, $x_i \notin \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_k\} \setminus \{x_i\})$.

Definicija 231. Naj bo S neprazna kompaktna konveksna množica $\mathbb{E}^n$. Potem je podmnožica F množice S *lice* množice S, če je

(1) $F = \emptyset$, ali

(2) $F = S$, ali

(3) $F = S \cap H$ za neko tangentno hiperravnino množice S.

Notacija: $F \preceq S$ pomeni, da je F lice množice S. Lice v primeru (1) in (2) se imenuje *trivialo lice*, drugače, rečemo, da je lice *netrivialno.* Točka $x \in S$ se imenuje *vozlišče* množice S, če je $\{x\}$ lice množice S.

Trditev 232. *(Lastnosti lic kompaktnih konveksnih množic)*

(1) Naj bo S neprazna kompaktna konveksna množica v $\mathbb{E}^n$ in naj bo $F_1, \ldots, F_k \preceq S$. Potem je $F_1 \cap \cdots \cap F_k \preceq S$.

(2) Naj bosta S_1 in S_2 kompaktni konveksni množici v $\mathbb{E}^n$, tako da je $S_2 \subseteq S_1$ in $F \preceq S_1$. Potem je $(F \cap S_2) \preceq S_2$.

DOKAZ. Predavanja. □

Trditev 233. *(Lastnosti lic konveksnih politopov)* Naj bo P konveksni politop v $\mathbb{E}^n$ z mninimalno representacijo M.

(1) M je množica vozlišč politopa P.

(2) Vsako lice politopa P je konveksni politop.

(3) Če je $F_1 \preceq P$ in $F_2 \preceq F_1$, potem je $F_1 \preceq P$.

DOKAZ. Predavanja. □

Definicija 234. *Klasični konveksni politopi v* $\mathbb{E}^n$.

(1) *n-dimenzionalni simplex* je konveksna luknja $n+1$ afinih neodvisnih točk v $\mathbb{E}^n$.

(2) *n-dimenzionalni stožec* je konveksna luknja $(n-1)$-dimenzionalnega politopa Q v $\mathbb{E}^n$, in točke $x \in \mathbb{E}^n$, za katero velja: $x \notin \operatorname{aff}(Q)$.

(3) *n-dimenzionalni križni politop* je konveksna luknja točk $\pm x_1, \ldots, \pm x_i$, kjer so $x_1, \ldots, x_i$ linearno neodvisni vektorji v $\mathbb{E}^n$.

(4) *n-dimenzionalni dvojni stožec* je konveksna luknja $(n-1)$-dimenzionalnega politopa Q v $\mathbb{E}^n$ in dveh točk x, y, za kateri velja: $|\operatorname{relint}(\overline{xy}) \cap \operatorname{relint}(Q)| = 1$.

(5) *n-dimenzionalni paralleletope* je množica $I_1 + \cdots + I_n$, kjer $I_i = \overline{ox_i}$ za linearno neodvisne vektorje $x_1, \ldots, x_n$ v $\mathbb{E}^n$.

Za politop iz točke (2) se imenuje politop Q njegova *baza*, točka x pa njegovo *vozlišče*, medtem ko se za politop iz točke (4), Q imenuje njegova *baza*, točki x, y pa njegovi *vozlišči* .

Notacija Za konveksni politop P v $\mathbb{E}^n$ in $k \in \mathbb{N}_0$, $f_k(P)$ označuje število k-dimenzionalnih lic politopa P. števila $f_i(P)$, kjer je P eden izmed politopov (1)-(5) v Definiciji 234 so dana v (a)-(e) vaje 12 spodaj. Natančneje, *enotski simplex* je simplex, v katerem sta poljubni dve točki na razdalji 1. Več lastnosti enotskih simplexov bomo spoznali v vajah 17-21. Če so vektorji $x_1, \ldots, x_n$ iz $\mathbb{E}^n$ v definiciji 234(5) parpma pravokotni in so enakih dolžin a, potem je paralleletope *n-dimenzionalena kocka*, ki se imenuje *enotska kocka*, če je $a = 1$. Več lastnosti kock bomo spoznali v vajah 13-16.

Izrek 235. *(Euler-Poincaré formula)* Če je P n-dimenzionalni konveksni politop, je

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f_i(P) = 1 + (-1)^{n-1}.$$

Posebni primer zgornjega izreka, $n = 3$, se poznan tudi kot *Euler's Polyhedron Theorem.* Aplikacije tega izreka bomo spoznali v vajah 24-28.

Vaje.

1. Naj bodo $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{E}^n$ afini podprostori, tako da je $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Pokaži, da je $\dim(F_1 \cap F_2) \geq \dim(F_1) + \dim(F_2) - n$
2. Za konveksno množico $S \subseteq \mathbb{E}^n$ pokaži, da velja:
   (i) $\operatorname{int}(S)$ je konveksna množica.
   (ii) $\operatorname{cl}(S)$ je konveksna množica.
3. Dokaži, da je množica v $\mathbb{E}^n$, ki ima vsaj $n + 2$ točk afino odvisna.
4. Naj bo S podmnoži v $\mathbb{E}^n$. Pokaži, da velja:
$$\operatorname{aff}(S) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \text{ and } x_i \in S\}.$$
5. Naj bo S podmnoži v $\mathbb{E}^n$. Pokaži, da velja:
$$\operatorname{conv}(S) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid k \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R}_0^+, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \text{ and } x_i \in S\}.$$
6. Pokaži, da je za vsako množico $S \subseteq \mathbb{E}^n$ množica $\{x \in S \mid \forall y \in S\colon \overline{xy} \subseteq S\}$ konveksna.

7. Pravimo, da je k premic v $\mathbb{E}^2$ v splošni legi, če nobeni dve med njimi nista vzporedni in se nobene tri ne sekajo v isti točki. Za $n \geq 3$, k hiperravnin v $\mathbb{E}^n$ v splošni legi definiramo podobno. V koliko delov je razdeljena

   (i) $\mathbb{E}^2$ s k premicami v splošni legi?

   (ii) $\mathbb{E}^3$ s k ravninami v splošni legi?

   (iii) $\mathbb{E}^n$ s k hiperravninami v splošni legi?

8. Pokaži, da velja: če je S odprta konveksna množica v $\mathbb{E}^2$ in je x točka, ki ne leži v S, potem obstaja premica ℓ skozi x, za katero je $\ell \cap S = \emptyset$.

9. Hiperravnina $H = [f : \alpha]$ v $\mathbb{E}^n$ *razreže* množico S, če je $f(x) > \alpha$ in $f(y) < \alpha$ za vse $x, y \in S$. Pokaži, da hiperravnina H razreže konveksno množico $S \Leftrightarrow S \nsubseteq H$ in $\mathrm{relint}(S) \cap H \neq \emptyset$.

10. Pokaži, da za konveksni množici A in B v $\mathbb{E}^n$ velja: $A|_H B \Leftrightarrow \mathrm{relint}(A)|_H \mathrm{relint}(B)$.

11. Pokaži, da velja: če je x konveksnega politopa P, potem x ni v notranjosti nobene daljice v P.

12. Dokaži naslednje trditve:

    (i) Če je P n-dimenzionalni simplex, potem je $f_i(P) = \binom{n+1}{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$.

    (ii) Če je P n-dimenzionalni stožec z bazo Q, potem je $f_0(P) = f_0(Q) + 1$, $f_i(P) = f_i(Q) + f_{i-1}(Q)$, $1 \leq i \leq n-2$, in $f_{n-1}(P) = f_{n-2}(Q) + 1$.

    (iii) Če je P n-dimenzionalni dvojni stožec z bazo Q, potem je $f_0(P) = f_0(Q) + 2$, $f_i(P) = f_i(Q) + 2f_{i-1}(Q)$, $1 \leq i \leq n-2$,in $f_{n-1}(P) = 2f_{n-2}(Q)$.

    (iv) Če je P n-dimenzionalni križni politop, potem je $f_i(P) = 2^{i+1}\binom{n}{i+1}$, $0 \leq i \leq n-1$.

    (v) Če je P n-dimenzionalni paralleletope, potem je $f_i(P) = 2^{n-i}\binom{n}{i}$, $0 \leq i \leq n-1$.

13. Določi diameter n-dimenzionalne enotske kocke.

14. Določi število diametrov n-dimenzionalne enotske kocke, ki so pravokotni na izbrani diameter.

15. Kateri 4-dimenzionalni politop je definiran z naslednjimi zaprtimi pol-hiperravninami?

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| &\leq 1, \\ |x_1 + x_2 - x_3 - x_4| &\leq 1, \\ |x_1 - x_2 + x_3 - x_4| &\leq 1, \\ |x_1 - x_2 - x_3 + x_4| &\leq 1. \end{aligned}$$

16. Določi presek 4-dimenzionalne enotske kocke s hiperravnino v $\mathbb{E}^4$, ki vsebuje središče in je pravokotna na diameter kocke.

17. Določi točke $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n-dimenzionalnega enotskega simplexa v $\mathbb{E}^n$, če

    (i) vsako vozlišče ima nenegativne koordinate, in

    (ii) x_0 je izhodišče, in če je $i > 1$, je $x_i = (*, \ldots, *, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-i})$.

18. Določi radij n-dimenzionalnega enostskega simplexa.

19. Pokaži, da je razdalja vozlišča n-dimenzionalnega enotskega simplexa do nasprotnega lica enaka $\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$.

20. Pokaži, da je razdalja med afinima podprostoroma $x + U$ in $y + V$ razdalja $x - y$ do linearnega podprostora $U + V$.

21. Razdeli množico vozlišč n-dimenzionalnega enotskega simplexa na dva dela X_1 in X_2, tako da ima X_1 $m+1$ vozlišč in X_2 $n-m$ vozlišč. Pokaži, da je razdalja med afinima podprostoroma $\operatorname{aff}(X_1)$ in $\operatorname{aff}(X_2)$ enaka $\sqrt{\frac{n+1}{2(n-m)(m+1)}}$.

22. Podan imaš večkotnik s 101 vozlišči. Vsako povezavo označi z 1 ali -1. Dokaži, da obstaja vozlišče x, tako da je produkt vseh oznak povezav, ki vsebujejo x enako 1.

23. Ali obstaja konveksni šestkotnik, v katerem je vsaka diagonala krajša od $\sqrt{2}$, medtem ko je dolžina vsake stranice najmanj 1?

24. Polieder se imenuje enostaven, če ima vsako vozlišče valenco 3. Vsako lice enostavnega poliedra je petkotnik ali pa šestkotnik.

    (i) Poišči število petkotnikov.

    (ii) Podaj primer.

    (iii) Pokaži, da obstajata vsaj dva šestkotnika.

25. Koliko konveksnih poliedrov s 5 lici obstaja?

26. V konveksnem poliedru ima vsako lice centralno simetrijo. Dokaži, da je vsaj šest lic paralelogramov.

27. V konveksnem poliedru ima vsako lice liho mnogo strani in vsako vozlišče ima liho valenco. Ali je možno, da je vsota števila trikotnikov in števila vozlišč valence 3 enaka 9?

28. V konveksnem poliedru so vozlišča enega lica pobarvana z rdečo, preostala vozlišča pa so pobarvana z modro. Dokaži, da ima polieder modro vozlišče z valenco največ 5 ali pa ima rdeče vozlišče z valenco 3.

29. (i) Naj bo S kompaktna konveksna množica v $\mathbb{E}^2$. Pokaži, da obstaja točka O v S, tako da O pade v srednjo tretino poljubne diagonale množice S.

    (ii) Podaj posplošitev izjave (i) v $\mathbb{E}^n$.

30. Naj bo $\mathcal{P}$ končno mnogo paroma vzporednih daljic v $\mathbb{E}^2$, tako da nobeni dve ne ležita na isti premici, in tako da za poljubne tri med njimi obstaja premica, ki sega vse tri. Pokaži, da obstaja premica, ki seka vse daljice v $\mathcal{P}$.

31. Naj bo $\mathcal{P}$ končno mnogo pravokotnikov v $\mathbb{E}^2$, tako da ima vsak pravokotnik v $\mathcal{P}$ stranico, ki je vzporedna z dano premico ℓ, in tako da imata poljubna dva pravokotnika v $\mathcal{P}$ skupno oglišče. Pokaži, da imajo vsi pravokotniki v $\mathcal{P}$ skupno oglišče.

32. Naj bo $\mathcal{P}$ končno mnogo poligonov in $\mathbb{E}^2$, in naj bo ℓ premica, tako da za poljubna dva politopa v $\mathcal{P}$ obstaja premica, ki ju seka in je vzporedna s premico ℓ. Dokaži, da obstaja premica, ki je vporedna s premico ℓ in seka vse politope v $\mathcal{P}$.

33. Naj v poligonu 4 vožlišča tvorijo konveksni štirikotnik. Pokaži, da je poligon konveksen.

34. Dokaži, da velja: Naj bo P množica 5 točk v ravnini, tako da nobene tri niso kolinearne. Potem 4 med njimi tvorijo konveksni štirikotnik. [1]

[1] Naj bo $n \geq 3$. "Happy End Problem" sprašuje po najmanjšem številu $g(n)$ točk v splošni legi v ravnini $\mathbb{E}^2$ (t.j., nobene tri med njimi niso kolinearne), tako da med $g(n)$ točkami vedno obstaja vsaj ena množica n točk, ki so vozlišča konveksnega n-kotnika. Očitno je $g(3) = 3$. V tej vaji v resnici pokažemo, da je $g(4) = 5$. Znano je tudi, da je $g(5) = 9$ in $g(6) = 17$. V splošnem obstaja domneva, da je $g(n) = 2^{n-1} + 1$.