Aleš Vavpetič

# AFINA IN PROJEKTIVNA GEOMETRIJA

Ljubljana 2011

naslov: AFINA IN PROJEKTIVNA GEOMETRIJA
avtorske pravice: Aleš Vavpetič
izdaja: prva izdaja
založnik: samozaložba Aleš Vavpetič, Ljubljana
avtor: Aleš Vavpetič
leto izida: 2011
natis: elektronsko gradivo
dostop: `http://www.fmf.uni-lj.si/~vavpetic/APG/APG.pdf`

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

514.14(075.8)(0.034.2)

VAVPETIČ, Aleš
Afina in projektivna geometrija [Elektronski vir] / Aleš Vavpetič. - El. knjiga. - Ljubljana : samozal. A. Vavpetič, 2011

Način dostopa (URL): `http://www.fmf.uni-lj.si/~vavpetic/APG/APG.pdf`

ISBN 978-961-93141-0-4 (pdf)

257410304

To so zapiski predavanj, ki sem jih imel zadnjih nekaj let pri izbirnem predmetu Afina in projektivna geometrija.

Aleš Vavpetič

# Kazalo

# OZNAKE

| | |
|---|---|
| $\lvert X\rvert$ | moč množice $X$ |
| $\mathbb{F}_p$ | polje s $p$ elementi |
| $\mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ | grupa avtomorfizmov obsega $\mathcal{O}$ |
| $\mathrm{Lin}\, X$ | linearna ogrinjača množice $X$ |
| $\mathrm{Af}\, X$ | afina ogrinjača množice $X$ |
| $c_X$ | konstantna preslikava, ki vse preslika v točko $X$ |
| **A1**, **A2**, **A3**, **A4**, **A5** | pet aksiomov v afini geometriji |
| $\mathbf{A}(\mathcal{A})$ | afina geometrija nad afinim prostorom $\mathcal{A}$ |
| $\mathbf{P}(V)$ | projektivna geometrija nad vektorskim prostorom $V$ |
| $\mathcal{P}V$ | množica točk projektivne geometrije $\mathbf{P}(V)$ |
| $A(\mathcal{A})$ | grupa afinih transformacij afinega prostora $\mathcal{A}$ |
| $D(\mathcal{A})$ | grupa dilatacij afinega prostora $\mathcal{A}$ |
| $T(\mathcal{A})$ | grupa translacij afinega prostora $\mathcal{A}$ |
| $R_O(\mathcal{A})$ | množica raztegov afine ravnine $\mathcal{A}$ s središčem v $O$ |

# 1 UVOD

## UVOD

Geometrija $\mathcal{G}$ razsežnosti $n$ se sestoji iz $n$ množic $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{n-1}$. Elemente množice $\mathcal{G}_0$ imenujemo točke geometrije $\mathcal{G}$, elemente $\mathcal{G}_1$ premice, elemente $\mathcal{G}_2$ ravnine,... Med množicama $\mathcal{G}_0$ in $\mathcal{G}_1$ je podana incidenčna relacija. Če sta točka $X \in \mathcal{G}_0$ in premica $p \in \mathcal{G}_1$ v relaciji, pravimo, da $X$ leži na $p$ oziroma $p$ gre skozi $X$ in pišemo $X \in p$. Prav tako so podane incidenčne relacije za ostale pare množic $\mathcal{G}_i$ in $\mathcal{G}_j$. Če predpišemo aksiome, katerim morajo zadoščati incidenčne relacije, dobimo različne geometrije, kot so evklidska, afina, projektivna, hiperbolična ...

Transformacija geometrije $\tau\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ se sestoji iz $n$ bijekcij $\tau_i\colon \mathcal{G}_i \to \mathcal{G}_i$, ki so usklajene z incidenčnimi relacijami. Pri nekaterih geometrijah poleg aksiomov za incidenčne relacije podamo še aksiome za množico transformacij geometrije. Tako na primer pri evklidski ravnini zahtevamo, da transformacije ohranjajo pravi kot. Iz tega aksioma sledi, da se pri transformacijah evklidske ravnine ohranjajo tudi ostali koti, dolžina, vzporednost ... Količine, ki se ohranjajo s transformacijami geometrije $\mathcal{G}$, imenujemo invariante. Felix Klein je opisal geometrijo kot preučevanje lastnosti, ki se ohranjajo pri določenih transformacijah.

Zakaj bi preučevali neevklidske geometrije, če pa živimo v evklidskem prostoru? Vemo tudi, da se pri togih premikih, ki jih štejemo za transformacije evklidske geometrije, ohranjajo koti, razdalje ... Okrog leta 300 pred našim štetjem je Evklid napisal zbirko Elementi, ki obsega 13 knjig. Na začetku prve knjige je Evklid zapisal pet postulatov za ravninsko geometrijo. Zapisani v sodobnem matematičnem jeziku se glasijo takole.

**E1.** Skozi različni točki poteka natanko ena premica.

**E2.** Premica je neomejena.

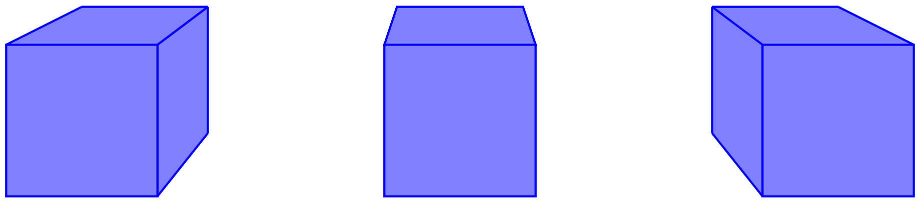
**E3.** Za različni točki obstaja krožnica, ki ima središče v prvi točki in poteka skozi drugo.

**E4.** Vsi pravi koti so med seboj skladni.

**E5.** Za vsako točko $X$ in premico $p$ obstaja natanko ena premica, ki gre skozi $X$ in je vzporedna s $p$.

Dolgo časa je bilo vprašanje, če ni morda zadnji postulat o vzporednosti posledica prvih štirih. Šele v 19. stoletju sta János Bolyai in Nikolaj Ivanovič Lobačevski neodvisno odkrila hiperbolično ravninsko geometrijo, ki zadošča prvim štirim Evklidovim postulatom, a ne zadošča postulatu o vzporednosti.

Študij neevklidskih geometrij še zdaleč ni namenjen le "teoretični" matematiki. Vsakdo ve, da evklidska geometrija ni primerna za prikaz premikanja objekta na računalniškem ekranu.



Zgoraj je prikazana kocka, ki jo prestavimo v levo in desno. Opazimo, da se koti ne ohranjajo. Da se pri "pravih" transformacijah ravnine, ki jo predstavlja računalniški ekran, ne ohranjajo koti in dolžina, je dobro vidno pri prostorskih slikah.

Evklidska ravnina je v nekem smislu nesimetrična. Dve premici v njej sta bodisi vzporedni bodisi se sekata. V njej imamo tri tipe stožnic – to so elipse, hiperbole in parabole. Ali ni morda bolj naravna ravninska geometrija, v kateri se poljubni premici sekata in obstaja le en tip stožnic?

# 2 AFINA GEOMETRIJA

## AFINI PODPROSTORI

**Definicija 2.1** *Naj bodo $V$ končnorazsežen vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$, $U < V$ vektorski podprostor in $a \in V$. Množico $a+U = \{a+x \mid x \in U\}$ imenujemo* ***afin podprostor*** *v $V$. Množica $\mathcal{A}$ je* ***afin prostor****, če je afin podprostor v kakšnem vektorskem prostoru.*

Včasih ni pomemben vektorski prostor $V$ v katerem leži afin podprostor $\mathcal{A}$. Zanima nas le obseg $\mathcal{O}$, nad katerim je $V$ vektorski prostor. Tedaj pravimo, da je $\mathcal{A}$ **afin prostor nad obsegom $\mathcal{O}$**.

**Lema 2.2** *Naj bosta $V$ vektorski prostor in $\mathcal{A} = a + U$ afin podprostor v $V$. Tedaj za vsako točko $b \in \mathcal{A}$ velja $\mathcal{A} = b + U$.*

**Dokaz:** Naj bo $b \in \mathcal{A}$. Tedaj obstaja $u \in U$, da je $b = a + u$. Za vsak $x \in U$ je $a+x = b+(a-b)+x = b-u+x \in b+U$. Torej je $a+U \subset b+U$. Enako pokažemo, da je $b+U \subset a+U$. $\square$

**Posledica 2.3** *Na bodo $V$ vektorski prostor, $\mathcal{A} = a+U$ in $\mathcal{B} = b+W$ afina podprostora v $V$. Če je $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, je $U < W$.*

**Dokaz:** Ker je $a \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, je po prejšnji lemi $\mathcal{B} = a + W$. Ker je $a + U = \mathcal{A} \subset B = a + W$, je $U < W$. $\square$

Od tod dobimo, da je z afinim prostorom pripadajoči vektorski podprostor natanko določen.

**Posledica 2.4** *Naj bo $\mathcal{A}$ afin podprostor v vektorskem prostoru $V$. Če je $\mathcal{A} = a + U$ in $\mathcal{A} = b + W$, je $U = W$.*

**Definicija 2.5** ***Razsežnost*** *afinega prostora* $\mathcal{A} = a + U$ *je* $\dim \mathcal{A} = \dim U$.

Enorazsežne afine prostore imenujemo afine premice, dvorazsežne afine ravnine in $(\dim V - 1)$ razsežne imenujemo afine hiperravnine.

**Primer:** Naj bo $V = \mathbb{F}_2^2$ vektorski prostor s 4 točkami. V $V$ obstajajo trije enorazsežni vektorski podprostori $X = \mathbb{F}_2 \times \{0\}$, $Y = \{0\} \times \mathbb{F}_2$ in "diagonala" $Z = \{(x, x) \in V \mid x \in \mathbb{F}_2\}$. Tedaj je

$$\begin{aligned} (0,0) + X &= (1,0) + X, & (0,1) + X &= (1,1) + X, \\ (0,0) + Y &= (0,1) + Y, & (1,0) + Y &= (1,1) + Y, \\ (0,0) + Z &= (1,1) + Z, & (0,1) + Z &= (1,0) + Z. \end{aligned}$$

Zato je v $V$ šest afininih premic, kolikor je vseh dvoelementnih podmnožic v $V$. Torej so afine premice v $V$ natanko vse dvoelementne pomnožice v $V$. Enako velja tudi za afine premice v vektorskem prostoru $\mathbb{F}_2^n$ za poljuben $n \in \mathbb{N}$.

**Definicija 2.6** *Naj bodo* $V$ *vektorski prostor nad obsegom* $\mathcal{O}$, $\mathcal{A}$ *afin podprostor v* $V$ *in* $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{A}$. *Vsoto* $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$, *kjer so* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathcal{O}$ *taki skalarji, da je* $\sum_{i=1}^k \lambda_k = 1$, *imenujemo* ***afina kombinacija*** *točk* $a_1, \ldots, a_k$.

**Trditev 2.7** *Naj bo* $V$ *vektorski prostor. Podmnožica* $\mathcal{A} \subset V$ *je afin podprostor natanko tedaj, ko poljubna afina kombinacija točk iz* $\mathcal{A}$ *leži v* $\mathcal{A}$.

**Dokaz:** Naj bo $\mathcal{A}$ afin podprostor v $V$. Torej obstajata $U < V$ vektorski podprostor in $a \in V$, da je $\mathcal{A} = a + U$. Naj bodo $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{A}$ poljubne točke in $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathcal{O}$ taki skalarji, da je $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Tedaj obstajajo $x_1, \ldots, x_k \in V$, da je $a_i = a + x_i$ za vse $i \in \{1, \ldots, k\}$, zato je

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i (a + x_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i a + \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = a + \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \in a + U.$$

Denimo, da poljubna afina kombinacija točk iz $\mathcal{A}$ leži v $\mathcal{A}$. Izberimo $a \in \mathcal{A}$ in definirajmo $U = \{b - a \mid b \in \mathcal{A}\}$. Radi bi pokazali, da je $U$ vektorski podprostor v $V$. Naj bodo $x, y \in U$ in $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$. Tedaj obstajata $b, c \in \mathcal{A}$, da je $x = b - a$ in $y = c - a$, zato je linearna kombinacija

$$\alpha x + \beta y = \alpha(b - a) + \beta(c - a) \in U$$

natanko tedaj, ko je vsota

$$a + \alpha(b - a) + \beta(c - a) = (1 - \alpha - \beta)a + \alpha b + \beta c \in \mathcal{A}.$$

Ker je $(1 - \alpha - \beta) + \alpha + \beta = 1$, je $(1 - \alpha - \beta)a + \alpha b + \beta c$ afina kombinacija treh točk iz $\mathcal{A}$, zato je po predpostavki $(1 - \alpha - \beta)a + \alpha b + \beta c \in \mathcal{A}$. Torej je $\alpha x + \beta y = \alpha(b - a) + \beta(c - a) \in U$ in zato je $U$ vektorski podprostor. $\square$

Hitro se lahko prepričamo, da ni moč ošibiti predpostavke izreka in zapisati, da je $\mathcal{A} \subset V$ je afin podprostor natanko tedaj, ko poljubna afina kombinacija dveh točk iz $\mathcal{A}$ leži v $\mathcal{A}$. Naj bosta $\mathcal{O} = \mathbb{F}_2$ in $V = \mathbb{F}_2^2$. Če je $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, je $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = 1$ ali pa je $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 0$. Torej je afina kombinacija $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ točk $a_1$ in $a_2$ enaka $a_1$ ali $a_2$. Zato za vsako podmnožico $\mathcal{A} \subset V$ velja, da poljubna afina kombinacija dveh točk iz $\mathcal{A}$ leži v $\mathcal{A}$. Vendar trielementne množice niso afini podprostori v $V$.

V dokazu trditve nismo uporabili, da afina kombinacija poljubnega števila točk iz $\mathcal{A}$ leži v $\mathcal{A}$. Shajali smo le z afinimi kombinacijami treh elementov. Kdaj iz dejstva, da poljubna afina kombinacija dveh točk iz $\mathcal{A}$ leži v $\mathcal{A}$, ni mogoče sklepati, da poljubna afina kombinacija treh točk iz $\mathcal{A}$ leži v $\mathcal{A}$?

Naj za podmnožico $\mathcal{A} \subset V$ velja, da poljubna afina kombinacija dveh točk iz $\mathcal{A}$ leži v $\mathcal{A}$. Naj bodo $a, b, c \in \mathcal{A}$ poljubne točke in $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{O}$ taki neničelni skalarji, da je $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Če je $\alpha + \beta \neq 0$, je $\alpha a + \beta b + \gamma c = (\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^{-1}\alpha a + (\alpha+\beta)^{-1}\beta b) + \gamma c$. Ker je $(\alpha+\beta)^{-1}\alpha + (\alpha+\beta)^{-1}\beta = 1$, je $(\alpha + \beta)^{-1}\alpha a + (\alpha + \beta)^{-1}\beta b \in \mathcal{A}$. Ker je $(\alpha + \beta) + \gamma = 1$, je tako tudi $\alpha a + \beta b + \gamma c = (\alpha + \beta)((\alpha + \beta)^{-1}\alpha a + (\alpha + \beta)^{-1}\beta b) + \gamma c \in \mathcal{A}$.

Če torej za obseg $\mathcal{O}$ velja, da je vsota dveh izmed poljubnih treh neničelnih skalarjev $\alpha$, $\beta$ in $\gamma$, za katere je $\alpha + \beta + \gamma = 1$, različna od 0, lahko pogoj "poljubna afina kombinacija treh točk" zamenjamo s pogojem "poljubna afina kombinacija dveh točk". Denimo, da obseg $\mathcal{O}$ ne zadošča temu pogoju. Tedaj obstajajo neničelni skalarji $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{O}$, da je $\alpha + \beta + \gamma = 1$ in $\alpha + \beta = \alpha + \gamma = \beta + \gamma = 0$. Torej je $\alpha = \beta = \gamma = 1$, se pravi, $1 + 1 + 1 = 1$ oziroma $2 \cdot 1 = 0$. Tako smo dokazali naslednjo trditev.

**Trditev 2.8** *Naj bo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$ karakteristike različne od 2. Podmnožica $\mathcal{A} \subset V$ je afin podprostor natanko tedaj, ko poljubna afina kombinacija dveh točk iz $\mathcal{A}$ leži v $\mathcal{A}$.*

**Trditev 2.9** *Naj bosta $V$ vektorski prostor in $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ družina afinih podprostorov v $V$. Če je presek $\cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ neprazen, je afin podprostor v $V$.*

**Dokaz:** Za vsak $\lambda \in \Lambda$ obstajata $U_\lambda < V$ in $a_\lambda \in V$, da je $A_\lambda = a_\lambda + U_\lambda$. Naj bo presek $\mathcal{A} = \cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ neprazen. Izberimo $a \in \mathcal{A}$. Po lemi 2.2 je $A_\lambda = a + U_\lambda$ za vsak $\lambda \in \Lambda$. Tako je $\mathcal{A} = \cap_{\lambda\in\Lambda}(a + U_\lambda) = a + \cap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Presek vektorskih podprostorov v $V$ je vektorski podprostor v $V$, zato je $\mathcal{A}$ afin podprostor v $V$. □

**Definicija 2.10** *Naj bo $X$ neprazna podmnožica vektorskega prostora $V$. **Afina ogrinjača** $\mathrm{Af}(X)$ množice $X$ je presek vseh afinih podprostorov v $V$, ki vsebujejo $X$.*

Po prejšnji trditvi je afina ogrinjača vedno afin podprostor. Vemo, da je linearna ogrinjača množice $X \subset V$ enaka množici vseh linearnih kombinacij elementov iz $X$. Pri afini ogrinjači velja analogna enakost.

**Trditev 2.11** *Naj bosta $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$ in $X \subset V$ neprazna podmnožica. Tedaj je $\mathrm{Af}(X) = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathcal{O}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$.*

**Dokaz:** Označimo $Y := \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathcal{O}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$.

Poljuben element $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in Y$ je afina kombinacija elementov iz $X \subset \mathrm{Af}(X)$. Po trditvi 2.7 je $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \mathrm{Af}(X)$.

Ker je $X \subset Y$, je za vsebovanost $Af(X) \subset Y$ dovolj pokazati, da je $Y$ afin podprostor v $V$. Naj bodo $y_1, \ldots, y_k \in Y$ poljubni elementi in $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathcal{O}$ taki skalarji, da je $\sum_{i=1}^k \mu_i = 1$. Za vsak $i \in \{1, \ldots, k\}$ obstajajo $n_i \in \mathbb{N}$, $x_1^i, \ldots, x_{n_i}^i \in X$ in $\lambda_1^i, \ldots, \lambda_{n_i}^i \in \mathcal{O}$, da je $\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^i = 1$, in velja $y_i = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^i x_j^i$. Tedaj je

$$\sum_{i=1}^k \mu_i y_i = \sum_{i=1}^k \mu_i \Big(\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j^i x_j^i\Big) = \sum_{i=1}^k \Big(\sum_{j=1}^{n_i} (\mu_i \lambda_j^i) x_j^i\Big)$$

afina kombinacija, saj je $\sum_{i=1}^k \big(\sum_{j=1}^{n_i} (\mu_i \lambda_j^i)\big) = \sum_{i=1}^k \mu_i = 1$. Po trditvi 2.7 je $Y$ afin podprostor v $V$. □

**Lema 2.12** *Naj bosta $\mathcal{A} = a + U$ in $\mathcal{B} = b + W$ afina podprostora v vektorskem prostoru $V$. Tedaj je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ natanko tedaj, ko je $b - a \in U + W$.*

**Dokaz:** Denimo, da je presek $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ neprazen. Tedaj obstajata $u \in U$ in $w \in W$, da je $a + u = b + w$. Zato je $b - a = u - w \in U + W$.

Če pa je $b - a \in U + W$, obstajata $u \in U$ in $w \in W$, da je $b - a = u + w$. To pomeni, da je $a + u = b - w \in (a + U) \cap (b + W) = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, zato je presek neprazen. $\square$

**Lema 2.13** *Naj bodo $V$ vektorski prostor, $U, W < V$ vektorska podprostora in $a, b \in V$ poljubna vektorja. Tedaj je*

$$\mathrm{Af}\big((a + U) \cup (b + W)\big) = a + \big(U + W + \mathrm{Lin}\{b - a\}\big).$$

**Dokaz:** Označimo $T := U + W + \mathrm{Lin}\{b - a\}$. Ker je $U < T$, je $a + U \subset a + T$. Ker je $b \in a + T$, po lemi 2.2 velja $a + T = b + T$. Torej je tudi $b + W \subset b + T = a + T$. Od tod sledi, da je $\mathrm{Af}\big((a + U) \cup (b + W)\big) \subset a + T$.

Naj bo $\mathcal{B}$ poljuben afin podprostor v $V$, ki vsebuje množico $(a+U)\cup(b+W)$. Ker sta $a, b \in \mathcal{B}$, obstaja vektorski podprostor $S < V$, da je $\mathcal{B} = a + S = b + S$. Ker je $a + U \subset a + S$, je $U < S$, in ker je $b + W \subset a + S = b + S$, je $W < S$. Ker je $b \in a + S$, je $b - a \in S$ in zato tudi $\mathrm{Lin}\{b - a\} < S$. Tako smo pokazali, da je $U + W + \mathrm{Lin}\{b - a\} < S$ in zato $a + T \subset a + S = \mathcal{B}$. $\square$

**Trditev 2.14** *Naj bosta $\mathcal{A} = a + U$ in $\mathcal{B} = b + W$ afina podprostora v vektorskem prostoru $V$.*

**a.** *Če je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, je $\dim \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \dim(U + W) + 1$.*

**b.** *Če je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, je $\dim \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \dim(U + W)$.*

**Dokaz:** Po prejšnji lemi je $\mathrm{Af}\big((a+U)\cup(b+W)\big) = a+(U+W+\mathrm{Lin}\{b-a\})$ in po lemi 2.12 je presek $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ natanko tedaj, ko $b - a \notin U + W$.

**a.** Če je $\mathcal{A}\cap\mathcal{B} = \emptyset$, je tako $\mathrm{Af}\big((a+U)\cup(b+W)\big) = a+((U+W)\oplus\mathrm{Lin}\{b-a\})$ in zato $\dim(U + W) + 1 = \dim(U + W) + \dim(\mathrm{Lin}\{b - a\}) = \dim(U + W + \mathrm{Lin}\{b - a\}) = \dim \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$.

**b.** Če je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, je $\mathrm{Af}\big((a + U) \cup (b + W)\big) = a + (U + W)$ in zato $\dim \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \dim(U + W)$. $\square$

Ker je vsaka točka v vektorskem prostoru enorazsežen afin podprostor, iz zgornje trditve sledi naslednja karakterizacija.

**Posledica 2.15** *Naj bo $\mathcal{A}$ afin prostor. Tedaj je $a \in \mathcal{A}$ natanko tedaj, ko je $\dim \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cup \{a\}) = \dim \mathcal{A}$.*

**Definicija 2.16** *Afina podprostora $\mathcal{A} = a + U$ in $\mathcal{B} = b + W$ vektorskega prostora $V$ sta* ***vzporedna*** *natanko tedaj, ko je $U < W$ ali $W < U$. Tedaj pišemo $\mathcal{A} \parallel \mathcal{B}$.*

**Trditev 2.17** *Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ afina podprostora v vektorskem prostoru $V$.*

**a.** *Če je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, je $\mathcal{A} \parallel \mathcal{B}$ natanko tedaj, ko je $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ali $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.*

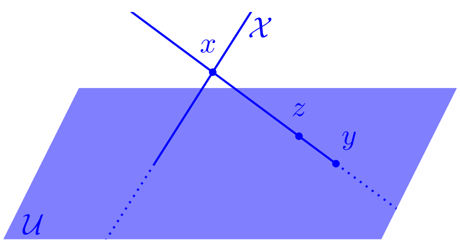
**b.** *Če je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, je $\mathcal{A} \parallel \mathcal{B}$ natanko tedaj, ko je $\dim \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \max\{\dim \mathcal{A}, \dim \mathcal{B}\} + 1$.*

**Dokaz:** Naj bosta $U, W < V$ vektorska podprostora in naj bosta $a, b \in V$, da je $\mathcal{A} = a + U$ in $\mathcal{B} = b + W$.

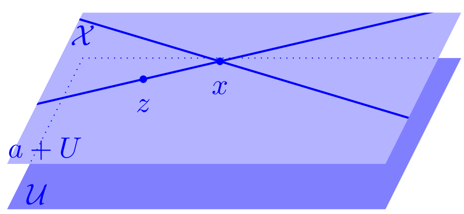
**a.** Izberimo $c \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Tedaj je $\mathcal{A} = c + U$ in $\mathcal{B} = c + W$. Zato je $\mathcal{A} \parallel \mathcal{B}$ natanko tedaj, ko je $U < W$ ali $W < U$, kar pa je natanko tedaj, ko je $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ali pa $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

**b.** Afina prostora $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ sta vzporedna natanko tedaj, ko je $W < U$ ali $U < W$, to pa je natanko tedaj, ko je $\dim(U + W) = \max\{\dim U, \dim W\}$. Ker je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, je po trditvi 2.14 razsežnost $\dim \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \dim(U + W) + 1$. Torej je $\mathcal{A} \parallel \mathcal{B}$ natanko tedaj, ko je $\dim \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \dim(U + W) + 1 = \max\{\dim U, \dim W\} + 1$. $\square$

Naj bosta $\mathcal{X}$ premica in $\mathcal{U}$ ravnina v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$, ki se sekata. Tedaj za vsako točko $z \in \mathrm{Af}(\mathcal{X} \cup \mathcal{U}) = \mathbb{R}^3$ obstajata takšni različni točki $x \in \mathcal{X}$ in $y \in \mathcal{U}$, da $z$ leži na premici $xy$. Temu ni tako, če se $\mathcal{X}$ in $\mathcal{U}$ ne sekata. Če zapišemo $\mathcal{X} = a + X$ in $\mathcal{U} = b + U$, je $X \subset U$, saj sta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{U}$ vzporedna. Tedaj za vsako točko $z \in a + U$ velja, da je premica, ki seka $\mathcal{X}$ in vsebuje $z$, vzporedna z ravnino $\mathcal{U}$.

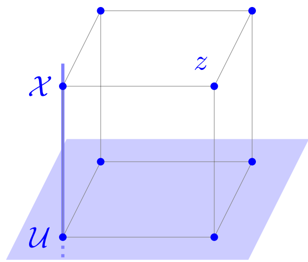


Afina prostora $\mathcal{X}$ in $\mathcal{U}$ se sekata.



Afina prostora $\mathcal{X}$ in $\mathcal{U}$ se ne sekata.

Zgornje bi radi posplošili na afine podprostore v vektorskem prostoru $V$ nad poljubnim obsegom $\mathcal{O}$. Kaj hitro naletimo na težavo. Naj bosta $\mathcal{O} = \mathbb{F}_2$ in $V = \mathbb{F}_2^3$. Presek afinih podprostorov $\mathcal{U} = \mathbb{F}_2^2 \times \{0\}$ in $\mathcal{X} = \{(0,0)\} \times \mathbb{F}_2$ je neprazen. Naj bo $z = (1,0,1)$ ali katerakoli druga točka, ki ni v $\mathcal{X} \cup \mathcal{U}$. Afina premica v $V$ ima le dve točki; toliko kot obseg $\mathcal{O}$. Če torej izberemo različni točki $x \in \mathcal{X}$ in $u \in \mathcal{U}$, je $\{x, u\}$ že premica v $V$, ki pa seveda ne vsebuje točke $z$. Je pa res, da je obseg $\mathbb{F}_2$ edini, ki nam dela preglavice, saj je premajhen – vsebuje namreč le ničlo in enoto. Posplošitev pa je mogoča pri afinih podprostorih višje razsežnosti, kot pove naslednja lema.




**Lema 2.18** *Naj bodo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O} \neq \mathbb{F}_2$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset V$ afina podprostora in $c \in \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$. Če je $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ in $\dim \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \geq 1$, obstajata različni točki $a \in \mathcal{A}$ in $b \in \mathcal{B}$, da točka $c$ leži na premici $ab$.*

**Dokaz:** Denimo, da je $c \in \mathcal{A}$. Če obstaja $b \in \mathcal{B} - \{c\}$, označimo $a = c$. Tedaj je $a \neq b$ in točka $c$ leži na premici $ab$. Če tak $b$ ne obstaja, je $\mathcal{B} = \{c\}$. Ker je $\dim(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \geq 1$, obstaja $a \in \mathcal{A} - \{c\}$ in označimo $b = c$. Enako konstruiramo premico, če je $c \in \mathcal{B}$. Predpostavimo torej, da $c \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Ker je $c \in \mathrm{Af}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, po trditvi 2.11 obstajajo $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$, $b_1, \ldots, b_m \in \mathcal{B}$ in $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathcal{O}$, da je $c = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^m \beta_j b_j$ in $\sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^m \beta_j = 1$. Označimo $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ in $\beta = \sum_{j=1}^m \beta_j = 1$. Tedaj je $\alpha + \beta = 1$.

Če velja $\alpha \neq 0$ in $\beta \neq 0$, je $a = \sum_{i=1}^n \alpha^{-1} \alpha_i a_i \in \mathcal{A}$, $b = \sum_{j=1}^m \beta^{-1} \beta_j b_j \in \mathcal{B}$ in $c = \alpha a + \beta b$. Če je $a = b$, je tudi $c = a = b$. Vendar smo predpostavili, da $c \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Zato je $a \neq b$ in točka $c$ leži na premici $ab$.

Denimo, da je eden od skalarjev $\alpha$ in $\beta$ enak 0. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $\alpha = 0$ in tedaj je $\beta = 1$. Ker je obseg $\mathcal{O} \neq \mathbb{F}_2$, obstaja skalar $\lambda \in \mathcal{O}$, različen od 0 in 1. Izberimo še $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ in označimo $\alpha_0 = \lambda$, $\beta_0 = -\lambda$ ter $a_0 = b_0 = x$. Tedaj je $c = \sum_{i=0}^n \alpha_i a_i + \sum_{j=0}^m \beta_j b_j$ in $\sum_{i=0}^n \alpha_i + \sum_{j=0}^m \beta_j = 1$. Sedaj sta oba skalarja $\alpha = \sum_{i=0}^n \alpha_i$ in $\beta = \sum_{j=0}^m \beta_j$ različna od 0, zato po zgornjem obstajata različna $a \in \mathcal{A}$ in $b \in \mathcal{B}$, da točka $c$ leži na premici $ab$. $\square$

## AFINE KOORDINATE

Premica skozi točki $A$ in $B$ v evklidskem prostoru je množica $AB = \{(1-\lambda)A + \lambda B \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Torej je to množica vseh afinih kombinacij izbranih elementov $A$ in $B$. Vsak element $(1-\lambda)A+\lambda B = A+\lambda(B-A)$ na premici $AB$ podamo tako, da povemo, za koliko se moramo premakniti od točke $A$ v smeri vektorja $\overrightarrow{AB}$. Enako storimo v $n$-razsežnem afinem prostoru – podamo izhodišče in potem še $n$ "smeri". Podobno je v vektorskem prostoru, kjer pa je izhodišče vedno ničla.

**Definicija 2.19** *Množica $\{x_0, \ldots, x_k\}$ v vektorskem prostoru $V$ je* ***afino neodvisna****, če je $\{x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$ linearno neodvisna.*

Na prvi pogled se zdi, da je za afino neodvisnost pomembno, kateri vektor je prvi zapisan v množici, vendar temu ni tako.

**Lema 2.20** *Naj bo $\{x_0, \ldots, x_k\}$ afino neodvisna množica v vektorskem prostoru $V$. Tedaj je za vsak $i \in \{1, \ldots, k\}$ tudi $\{x_i, x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k\}$ afino neodvisna.*

**Dokaz:** Naj bodo $\lambda_0, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_k \in \mathcal{O}$, da je

$$\lambda_0(x_0 - x_i) + \cdots + \lambda_{i-1}(x_{i-1} - x_i) + \lambda_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \cdots + \lambda_k(x_k - x_i) = 0.$$

Za vsak $j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k\}$ je $\lambda_j(x_j - x_i) = \lambda_j(x_j - x_0) - \lambda_j(x_i - x_0)$, zato iz zgornje enakosti sledi

$$\lambda_1(x_1 - x_0) + \cdots + \lambda_i(x_i - x_0) + \cdots + \lambda_k(x_k - x_0) = 0,$$

kjer je $\lambda_i = -\lambda_0 - \cdots - \lambda_{i-1} - \lambda_{i+1} - \cdots - \lambda_k$. Ker je $\{x_0, \ldots, x_k\}$ afino neodvisna množica, je $\{x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$ linearno neodvisna. Torej je $\lambda_1 = \cdots = \lambda_i = \cdots = \lambda_k = 0$ od koder sledi, da je tudi $\lambda_0 = 0$. Tako so vektorji $\{x_0 - x_i, \ldots, x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, \ldots, x_k - x_i\}$ linearno neodvisni in zato so $\{x_i, x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k\}$ afino neodvisni. □

Že iz definicije afine neodvisnosti je jasno, da je vrstni red preostalih vektorjev nepomemben, kot pri linearni neodvisnosti. Torej je pojem afine neodvisnosti dobro definiran za množico, saj v njej vrstni red elementov ni pomemben. Poleg tega pa sledi, da je podmnožica afino neodvisne množice tudi afino neodvisna.

**Definicija 2.21** *Podmnožica $X \subset \mathcal{A}$ afinega prostora je **afina baza**, če je $X$ afino neodvisna in velja $\operatorname{Af} X = \mathcal{A}$.*

**Trditev 2.22** *Naj bo $\mathcal{A} = a + U$ afin podprostor.*

**a.** *Če je $\{u_1, \ldots, u_k\}$ baza za $U$, je $\{a, a+u_1, \ldots, a+u_k\}$ afina baza za $\mathcal{A}$.*

**b.** *Če je $\{x_0, \ldots, x_k\}$ afina baza za $\mathcal{A}$, je $\{x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$ baza za $U$.*

**Dokaz:** **a.** Množica $\{a, a + u_1, \ldots, a + u_k\}$ je afino neodvisna, saj je $\{u_1, \ldots, u_k\}$ linearno neodvisna. Ker je $\{a, a + u_1, \ldots, a + u_k\} \subset \mathcal{A}$, je $\operatorname{Af}\{a, a + u_1, \ldots, a + u_k\} \subset \mathcal{A}$. Dokažimo še obratno vsebovanost. Naj bo $b \in \mathcal{A}$, tedaj obstaja $u \in U$, da je $b = a + u$. Ker je $\{u_1, \ldots, u_k\}$ baza za $U$, lahko zapišemo $u = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i$. Zato je

$$b = a + u = a + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = (1 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i)a + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (a + u_i).$$

Tako smo $b$ zapisali kot afino kombinacijo elementov iz $\{a, a+u_1, \ldots, a+u_k\}$, zato je $b \in \operatorname{Af}\{a, a + u_1, \ldots, a + u_k\}$.

**b.** Množica $\{x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$ je linearno neodvisna, saj je $\{x_0, \ldots, x_k\}$ afino neodvisna. Ker je $\{x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0\} \subset U$, je $\operatorname{Lin}\{x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0\} \subset U$. Naj bo $u \in U$ poljuben. Ker je $x_0 \in \mathcal{A}$, po lemi 2.2 $\mathcal{A} = x_0 + U$. Torej je $x_0 + u \in \mathcal{A}$, zato lahko zapišemo $x_0 + u = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i$, kjer je $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$. Tedaj je

$$u = \Big(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i\Big) - x_0 = \Big(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i\Big) - \Big(\sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_0\Big) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x_i - x_0),$$

zato je $u \in \operatorname{Lin}\{x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$. □

Afina baza ima podobne lastnosti kot baza vektorskega prostora. Brez dokaza naštejmo nekaj tistih, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

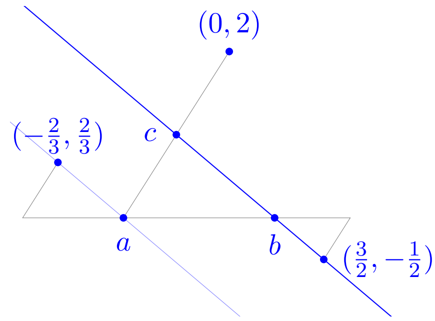
**Trditev 2.23** *Nekaj lastnosti afine baze.*

**a.** *Afino neodvisna množica $X$ je afina baza svoje afine ogrinjače $\operatorname{Af} X$.*

**b.** *Če je $X$ afina baza za $\mathcal{A}$, je razsežnost $\dim \mathcal{A} = |X| - 1$.*

**c.** *Vsako afino bazo afinega podprostora $\mathcal{B}$ v afinem prostoru $\mathcal{A}$ lahko dopolnimo do afine baze za $\mathcal{A}$.*

Naj bo $\{x_0, \dots, x_k\}$ afina baza afinega prostora $\mathcal{A}$. Tedaj lahko vsak element $x \in \mathcal{A}$ zapišemo kot afino kombinacijo $x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$. Ker je $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, je skalar $\lambda_0$ natanko določen z ostalimi skalarji. Torej je element $x$ pri dani afini bazi natanko določen s $k$-terico skalarjev $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, ki ji rečemo **afine koordinate** točke $x$ v afini bazi $\{x_0, \dots, x_k\}$.




Na desni sliki je prikazana realna afina ravnina z afino bazo $\{a, b, c\}$. Jasno je, da je množica točk $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha + \beta = 1\}$ ravno afina premica $bc$. Opazimo, da točke $(\alpha, \beta)$, kjer je $\alpha + \beta = 0$, ležijo na afini premici, ki gre skozi točko $a$ in je vzporedna premici $bc$.

**Trditev 2.24** *Naj bodo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$, $\{x_0, \dots, x_k\}$ afina baza afinega prostora $\mathcal{A} \subset V$ in $\mathcal{B} = \mathrm{Af}\{x_1, \dots, x_k\}$.*

**a.** *Množica $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}$ je enaka $\mathcal{B}$ in je hiperravnina v $\mathcal{A}$.*

**b.** *Za vsak $\lambda \in \mathcal{O}$ je $\mathcal{B}_\lambda = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = \lambda\}$ hiperravnina v $\mathcal{A}$, ki je vzporedna s hiperravnino $\mathcal{B}$. Hiperravnina $\mathcal{B}_0$ vsebuje točko $x_0$.*

**Dokaz:** Označimo $U = \mathrm{Lin}\{x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1\}$. Tedaj je $\mathcal{B} = x_1 + U$.
**a.** Jasno je $\mathcal{B} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\}$ in po trditvi 2.23 je $\dim \mathcal{B} = k - 1 = \dim \mathcal{A} - 1$.

**b.** Naj bo $\lambda \in \mathcal{O}$. Tedaj je

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_\lambda &= \Big\{(1-\lambda)x_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathcal{O}, \sum_{i=1}^k \lambda_i = \lambda\Big\} = \\
&= \Big\{(1-\lambda)x_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i x_1 + \sum_{i=2}^k \lambda_k (x_i - x_1) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathcal{O}, \sum_{i=1}^k \lambda_i = \lambda\Big\} = \\
&= \Big\{(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 + \sum_{i=2}^k \lambda_k (x_i - x_1) \mid \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathcal{O}\Big\} =
\end{aligned}
$$

$$= (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 + \Big\{\sum_{i=2}^{k} \lambda_k(x_i - x_1) \mid \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathcal{O}\Big\} =$$
$$= (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 + U.$$

Zato je hiperravnina $\mathcal{B}_\lambda$ vzporedna $\mathcal{B}$ in za $\lambda = 0$ je $x_0 \in (1-0)x_0 + 0x_1 + U = x_0 + U = \mathcal{B}_0$. $\square$

## AFINE TRANSFORMACIJE

**Definicija 2.25** *Točke $x$, $y$ in $z$ v afinem prostoru $\mathcal{A}$ so* ***kolinearne****, če obstaja afina premica $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$, ki jih vsebuje.*
*Točke $x$, $y$, $z$ in $w$ v afinem prostoru $\mathcal{A}$ so* ***koplanarne****, če obstaja afina ravnina $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$, ki jih vsebuje.*

V afinem prostoru nismo vpeljali nobene topolgije, čeprav imamo na primer v realnih in kompleksnih afinih prostorih naravno evklidsko topologijo. Torej pri transformacijah med afinimi prostori ne govorimo o zveznosti. Edino, kar nam povezuje točke v afinem prostoru, sta pojma kolinearnost in koplanarnost ter njuni analogi v višjih razsežnostih. Zato so edini naravni pogoji za afine transformacije ohranjanje kolinearnosti, koplanarnosti ...

**Definicija 2.26** *Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ afina podprostora v vektorskem prostoru $V$ razsežnosti $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} \geq 2$. Bijektivno preslikavo $\tau \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, ki poljubne tri kolinearne točke preslika v kolinearne, imenujemo* ***afina transformacija****.*

Naj bodo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset V$ afina podprostora in $\tau \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ afina transformacija. Ker $\tau$ preslika kolinearne točke v kolinearne, za vsako premico $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}$ obstaja premica $\mathcal{Y} \subset \mathcal{B}$, da je $\tau(\mathcal{X}) \subset \mathcal{Y}$. Ker je $\tau$ bijekcija, je zožitev $\tau|_{\mathcal{X}} \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ injektivna. Afini premici $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ imata enako moč kot obseg $\mathcal{O}$. Če je torej $\mathcal{O}$ končen, je $\tau|_{\mathcal{X}} \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ injektivna preslikava med končnima množicama, zato je bijektivna. Tako pa ne moremo sklepati v primeru neskončnega obsega $\mathcal{O}$. Vseeno pa tudi za neskončne obsege velja, da afina transformacija $\tau$ preslika afino premico $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}$ **na** afino premico $\mathcal{Y} \subset \mathcal{B}$.

**Lema 2.27** *Naj bodo $V$ vektorski prostor nad neskončnim obsegom $\mathcal{O}$ ter $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ afina podprostora v $V$ razsežnosti $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} = n \geq 2$. Denimo, da za afino transformacijo $\tau \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ obstajata afini premici $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}$ in*

*$\mathcal{Y} \subset \mathcal{B}$, da je $\tau(\mathcal{X}) \subsetneq \mathcal{Y}$. Tedaj v $\mathcal{A}$ obstajajo afini podprostori $\mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$, da velja*

**a.** $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}_2 \subset \ldots \subset X_n = \mathcal{A}$,

**b.** $\dim \mathcal{X}_i = i$ *za vse* $i \in \{2, \ldots, n\}$ *in*

**c.** $\dim \operatorname{Af} \tau(\mathcal{X}_i) < i$ *za vse* $i \in \{2, \ldots, n\}$.

**Dokaz:** Ker je $\tau$ surjektivna, obstaja $a \in \mathcal{A} - \mathcal{X}$, da je $\tau(a) \in \mathcal{Y}$. Ker je presek afinih prostorov $\{a\} \cap \mathcal{X} = \emptyset$, je po trditvi 2.14 razsežnost $\dim \operatorname{Af}(\mathcal{X} \cup \{a\}) = 2$. Označimo $\mathcal{X}_2 = \operatorname{Af}(\mathcal{X} \cup \{a\})$ in pokažimo, da je $\tau(\mathcal{X}_2) \subset \mathcal{Y}$. Naj bo $b \in \mathcal{X}$ poljubna točka in $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}_2$ afina premica skozi $a$ in $b$. Ker $\tau$ preslika točki $a$ in $b$ v $\mathcal{Y}$, zaradi ohranjanja kolinearnosti velja $\tau(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Y}$. Naj bo $c \in \mathcal{X}_2 = \operatorname{Af}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Z})$. Ker je $\mathcal{X} \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset$ in $\mathcal{O} \neq \mathbb{F}_2$, po lemi 2.18 obstajata različni točki $x \in \mathcal{X}$ in $z \in \mathcal{Z}$, da $c$ leži na premici $xz$. Ker so $\tau(x)$, $\tau(z)$ in $\tau(c)$ kolinearne, je $\tau(c) \in \mathcal{Y}$. Torej je $\tau(\mathcal{X}_2) \subset \mathcal{Y}$ in zato $\dim \operatorname{Af} \tau(\mathcal{X}_2) \leq \dim \mathcal{Y} = 1 < 2$.

Denimo, da smo že definirali afine prostore $\mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_{i-1}$, ki zadoščajo predpostavkam leme. Ker je $\dim \mathcal{X}_{i-1} = i - 1 < n = \dim \mathcal{A}$, obstaja $a \in \mathcal{A} - \mathcal{X}_{i-1}$. Definirajmo $\mathcal{X}_i = \operatorname{Af}(\{a\} \cup \mathcal{X}_{i-1})$. Ker je presek afinih prostorov $\{a\} \cap \mathcal{X}_{i-1} = \emptyset$, je po trditvi 2.14 razsežnost $\dim \mathcal{X}_i = \dim \mathcal{X}_{i-1} + 1 = i$. Naj bo $b \in \mathcal{X}_{i-1}$ poljubna. Po lemi 2.18 za vsako točko $z \in \mathcal{X}_i$ obstajata različni točki $x \in \mathcal{X}_{i-1}$ in $y \in ab$, da $z$ leži na premici $xy$. Ker $\tau$ ohranja kolinearnost, je $\tau(z) \in \tau(xy) \subset \operatorname{Af}\big(\tau(\mathcal{X}_{i-1}) \cup \tau(ab)\big)$. Torej je $\tau(X_i) \subset \operatorname{Af}\big(\tau(\mathcal{X}_{i-1}) \cup \tau(ab)\big) \subset \operatorname{Af}\big(\operatorname{Af} \tau(\mathcal{X}_{i-1}) \cup \operatorname{Af} \tau(ab)\big)$ in zato je tudi $\operatorname{Af} \tau(X_i) \subset \operatorname{Af}\big(\operatorname{Af} \tau(\mathcal{X}_{i-1}) \cup \operatorname{Af} \tau(ab)\big)$. Po lemi 2.14 je razsežnost $\dim \operatorname{Af}\big(\operatorname{Af} \tau(\mathcal{X}_{i-1}) \cup \operatorname{Af} \tau(ab)\big) \leq \dim \operatorname{Af} \tau(\mathcal{X}_{i-1}) + \dim \operatorname{Af} \tau(ab) \leq (i-2) + 1 = i - 1$. □

Iz leme sledi, da afina transformacija preslika premico na premico.

**Izrek 2.28** *Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ afina podprostora v vektorskem prostoru $V$ razsežnosti $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} \geq 2$. Bijektivna preslikava $\tau \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je afina transformacija natanko tedaj, ko je za vsako afino premico $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}$, tudi njena slika $\tau(\mathcal{X})$ afina premica v $\mathcal{B}$.*

**Dokaz:** Naj bo $\tau$ afina transformacija in denimo, da obstaja afina premica $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}$, da $\tau(\mathcal{X})$ ni premica. Po prejšnji lemi za $\mathcal{A}(= \mathcal{X}_n)$ velja $\dim \operatorname{Af} \tau(\mathcal{A}) < n$, torej je $\tau(\mathcal{A}) \neq \mathcal{B}$. To pa je v protislovju z bijektivnostjo preslikave $\tau$.

Če preslikava $\tau$ preslika afine premice v afine premice, pomeni, da ohranja kolinearnost in je tako afina transformacija $\square$

**Posledica 2.29** *Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ afina podprostora v vektorskem prostoru $V$ razsežnosti $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} \geq 2$. Afina transformacija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preslika nekolinearne točke v nekolinearne.*

**Dokaz:** Naj bodo $a$, $b$ in $c$ nekolinearne točke v $\mathcal{A}$. Po ravnokar dokazanem izreku je slika $\tau(ab)$ premice skozi $a$ in $b$ premica $\tau(a)\tau(b)$ v $\mathcal{B}$. Ker je $\tau$ bijekcija in $c \notin ab$, tudi $\tau(c) \notin \tau(ab)$. Torej so točke $\tau(a)$, $\tau(b)$ in $\tau(c)$ nekolinearne. $\square$

**Posledica 2.30** *Naj bo $\mathcal{A}$ afin prostor. Množica vseh afinih transformacij $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je grupa za komponiranje.*

**Dokaz:** Identiteta $id_{\mathcal{A}}$ je afina transformacija in je enota grupe.

Naj bodo $\tau, \rho\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ afini transformaciji in $a, b, c \in \mathcal{A}$ kolinearne točke. Tedaj so $\tau(a)$, $\tau(b)$ in $\tau(c)$ kolinearne in zato tudi $\rho(\tau(a))$, $\rho(\tau(b))$ in $\rho(\tau(c))$. Torej je $\rho \circ \tau$ afina transformacija.

Ker je afina transformacija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ bijekcija, obstaja inverz $\tau^{-1}$. Pokažimo, da je tudi inverz afina transformacija. Naj bodo $a, b, c \in \mathcal{A}$ kolinearne. Ker so $\tau(\tau^{-1}(a)) = a$, $\tau(\tau^{-1}(b)) = b$ in $\tau(\tau^{-1}(c)) = c$ kolinearne, so po posledici 2.29 tudi točke $\tau^{-1}(a)$, $\tau^{-1}(b)$ in $\tau^{-1}(c)$ kolinearne. $\square$

Domnevamo, da afina transformacija preslika koplanarne točke v koplanarne. Ponovno se predvidevanja napačna v primeru obsega $\mathcal{O} = \mathbb{F}_2$. V vektorskem prostoru $V = \mathbb{F}_2^3$ je vsaka dvoelementna množica afina premica. To pomeni, da je poljubna bijekcija $\tau\colon V \to V$ afina transformacija. Vendar ne bo vsaka bijekcija ohranjala koplanarnosti. Na primer $\tau\colon V \to V$, definirana s predpisom

$$\tau(x) = \begin{cases} x, & x \neq (0,0,0), (1,0,0), \\ (0,0,0), & x = (1,0,0), \\ (1,0,0), & x = (0,0,0), \end{cases}$$

preslika afino ravnino $\mathcal{X} = \{1\} \times \mathbb{F}_2^2$ v množico $\mathcal{Y} = \{(0,0,0),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$. Množica $\mathcal{Y}$ vsebuje $(0,0,0)$ in ni vektorski podprostor v $V$, zato tudi ni afin podprostor v $\mathcal{A}$.

**Lema 2.31** *Naj bodo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O} \neq \mathbb{F}_2$ in $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset V$ afina podprostora razsežnosti $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} \geq 2$. Afina transformacija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preslika koplanarne točke v koplanarne.*

**Dokaz:** Naj bodo $a, b, c, d \in \mathcal{A}$ koplanarne. Če so $a$, $b$ in $c$ kolinearne, so tudi $\tau(a)$, $\tau(b)$ in $\tau(c)$ kolinearne in tako so $\tau(a)$, $\tau(b)$, $\tau(c)$ in $\tau(d)$ koplanarne.

Naj bodo $a$, $b$ in $c$ nekolinearne. Tedaj sta $ab$ in $ac$ različni premici, ki se sekata v točki $a$, in po lemi 2.14 je $\mathrm{Af}(ab \cup ac)$ afina ravnina. Ker je $d \in \mathrm{Af}(ab \cup ac)$, po lemi 2.18 obstajata različni točki $x \in ab$ in $y \in ac$, da točka $d$ leži na premici $xy$. Torej $\tau(d)$ leži na premici $\tau(xy)$. Ker $\tau(x)$ leži na premici $\tau(ab)$ in $\tau(y)$ leži na premici $\tau(ac)$, točki $\tau(x)$ in $\tau(y)$ ležita v afini ravnini, ki jo določajo točke $\tau(a)$, $\tau(b)$ in $\tau(c)$. Ker je $\tau(d) \in \tau(xy)$, tudi $\tau(d)$ leži v tej ravnini in so tako $\tau(a)$, $\tau(b)$, $\tau(c)$ in $\tau(d)$ koplanarne. $\square$

**Lema 2.32** *Naj bodo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O} \neq \mathbb{F}_2$ in $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset V$ afina podprostora razsežnosti $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} \geq 2$. Afina transformacija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ slika vzporedne premice v vzporedne.*

**Dokaz:** Naj bosta $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ različni vzporedni premici v $\mathcal{A}$. Po trditvi 2.17 je $\dim \mathrm{Af}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) = \max\{\dim \mathcal{X}, \dim \mathcal{Y}\} + 1 = 2$. Ker je tako $\mathrm{Af}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$ afina ravnina, je po prejšnji lemi tudi $\tau(\mathrm{Af}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}))$ afina ravnina. Ker je $\tau$ bijekcija, je $\tau(\mathcal{X}) \cap \tau(\mathcal{Y}) = \emptyset$. Po lemi 2.14 sta premici $\tau(\mathcal{X})$ in $\tau(Y)$ vzporedni. $\square$

## SEMILINEARNE PRESLIKAVE

Vsaka linearna preslikava $M\colon U \to W$ ohranja kolinearnost. Prav tako ohranjata kolinearnost translaciji $\tau_a\colon U \to a + U$ in $\tau_b\colon W \to b + W$. Torej je kompozitum $\tau_b \circ M \circ \tau_a^{-1}\colon a + U \to b + W$ afina transformacija, če je le $M$ obrnljiva. Prepričali smo se že, da v primeru obsega $\mathcal{O} = \mathbb{F}_2$ to niso edine afine transformacije. V tem primeru je namreč vsaka bijekcija afina transformacija. Ali je obseg $\mathbb{F}_2$ edini, kjer afine transformacije niso zgornje oblike?

Naj bo $M\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definirana s predpisom $M(z, w) = (\bar{z}, \bar{w})$ in naj bodo $(z_1, w_1)$, $(z_2, w_2)$, $(z_3, w_3)$ različne kolinearne točke v $\mathbb{C}^2$. Tedaj obstajata

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, da je $(z_3, w_3) = \alpha(z_1, w_1) + \beta(z_2, w_2)$ in $\alpha + \beta = 1$. Enakosti konjugiramo in dobimo $(\bar{z}_3, \bar{w}_3) = \bar{\alpha}(\bar{z}_1, \bar{w}_1) + \bar{\beta}(\bar{z}_2, \bar{w}_2)$ in $\bar{\alpha} + \bar{\beta} = 1$. Torej $M$ preslika kolinearne točke v kolinearne, zato je afina transformacija. Vendar $M$ ni linearna. Je aditivna, a ni homogena, saj $M(\alpha(z, w)) = M(\alpha z, \alpha w) = (\bar{\alpha}\bar{z}, \bar{\alpha}\bar{w}) = \bar{\alpha}M(z, w)$.

Enako velja za preslikavo $N \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, definirano s predpisom $N(z, w) = (f(z), f(w))$, kjer je $f$ avtomorfizem obsega $\mathbb{C}$. Če na enakostih $(z_3, w_3) = \alpha(z_1, w_1) + \beta(z_2, w_2)$ in $\alpha + \beta = 1$ uporabimo avtomorfizem $f$, dobimo $N(z_3, w_3) = (f(z_3), f(w_3)) = f(\alpha)(f(z_1), f(w_1)) + f(\beta)(f(z_2), f(w_2)) = f(\alpha)N(z_1, w_1) + f(\beta)N(z_2, w_2)$ in $f(\alpha) + f(\beta) = f(1) = 1$. Torej je $N$ afina transformacija.

**Definicija 2.33** *Naj bosta $U$ in $V$ vektorska prostora nad obsegom $\mathcal{O}$. Preslikava $M \colon U \to V$ je* ***semilinearna****, če obstaja avtomorfizem $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$, da je $M$ aditivna in* ***semihomogena****; t.j za vsaka $x \in U$ in $\lambda \in \mathcal{O}$ je $M(\lambda x) = f(\lambda)M(x)$.*

Grupa avtomorfizmov obsegov $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p$, kjer je $p$ praštevilo, je trivialna. Tako je v teh primerih vsaka semilinearna preslikava kar linearna.

Predno se lotimo dokazovanja, da je vsaka afina transformacija kompozitum dveh translacij in semilinearne preslikave (seveda, če je obseg različen od $\mathbb{F}_2$), pokažimo, da imajo semilinearne preslikave zelo podobne lastnosti kot linearne.

**Trditev 2.34** *Naj bo $M \colon U \to V$ semilinearna preslikava.*

**a**. *Če je $W < U$ vektorski podprostor, je $M(W)$ vektorski podprostor v $V$.*

**b**. *Če je $W < V$ vektorski podprostor, je $M^{-1}(W)$ vektorski podprostor v $U$.*

**Dokaz:** Naj bodo $U$ in $V$ vektorska prostora nad obsegom $\mathcal{O}$ in $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ avtomorfizem obsega, ki pripada semilinearni preslikavi $M$.

**a.** Naj bodo $x, y \in M(W)$ in $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$. Tedaj obstajata $x', y' \in W$, da je $x = M(x')$ in $y = M(y')$, zato je

$$M(f^{-1}(\alpha)x' + f^{-1}(\beta)y') = M(f^{-1}(\alpha)x') + M(f^{-1}(\beta)y') = \\ = \alpha M(x') + \beta M(y') = \alpha x + \beta y.$$

Torej je $\alpha x + \beta y \in M(W)$ in zato je $M(W)$ vektorski podprostor.

**b.** Naj bodo $x, y \in M^{-1}(W)$ in $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$. Tedaj sta $M(x), M(y) \in W$ in zato $M(\alpha x + \beta y) = f(\alpha)M(x) + f(\beta)M(y) \in W$. Torej je $\alpha x + \beta y \in M^{-1}(W)$. □

**Posledica 2.35** *Zaloga vrednosti in jedro semilinearne preslikave sta vektorska prostora.*

**Trditev 2.36** *Injektivna semilinearna preslikava preslika linearno neodvisne vektorje v linearno neodvisne.*

**Dokaz:** Naj bo $M\colon U \to V$ injektivna semilinearna preslikava. Naj bodo $x_1, \ldots, x_k \in U$ linearno neodvisni in naj velja $\sum_{i=1}^k \lambda_i M(x_i) = 0$. Tedaj je $M\Big(\sum_{i=1}^k f^{-1}(\lambda_i)(x_i)\Big) = \sum_{i=1}^k \lambda_i M(x_i) = 0$ in zato $\sum_{i=1}^k f^{-1}(\lambda_i)(x_i) = 0$. Ker so $x_1, \ldots, x_k$ linearno neodvisni, je $f^{-1}(\lambda_i) = 0$ za vse $i \in \{1, \ldots, k\}$. Torej je tudi $\lambda_i = 0$ za vse $i \in \{1, \ldots, k\}$, kar pomeni, da so vektorji $M(x_1), \ldots, M(x_k)$ linearno neodvisni. □

**Trditev 2.37** *Naj bodo $U$, $V$ in $W$ vektorski prostori nad obsegom $\mathcal{O}$. Naj semilinearni preslikavi $M\colon U \to V$ pripada $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ in naj semilinearni preslikavi $N\colon V \to W$ pripada $g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$. Tedaj je tudi $N \circ M\colon U \to W$ semilinearna, ki ji pripada avtomorfizem $gf \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$.*

**Dokaz:** Za vsaka $x \in U$ in $\lambda \in \mathcal{O}$ velja $N(M(\lambda x)) = N(f(\lambda)M(x)) = g(f(x))N(M(x))$. Ker je kompozitum $NM$ jasno aditiven, je $NM$ semilinearna preslikava, ki ji pripada avtomorfizem $gf$. □

**Trditev 2.38** *Naj bosta $U$ in $V$ vektorska prostora nad $\mathcal{O}$. Če bijektivni semilinearni preslikavi $M\colon U \to V$ pripada avtomorfizem $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$, je $M^{-1}\colon V \to U$ semilinearna preslikava, ki ji pripada avtomorfizem $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$.*

**Dokaz:** Jasno je inverz obrnljive aditivne preslikave aditivna preslikava. Ker za $x \in V$ in $\lambda \in \mathcal{O}$ velja $M\big(f^{-1}(\lambda)M^{-1}(x)\big) = \lambda x$, je $M^{-1}(\lambda x) = f^{-1}(\lambda)M^{-1}(x)$. Torej je $M^{-1}$ semilinearna preslikava, ki ji pripada avtomorfizem $f^{-1}$. □

**Posledica 2.39** *Naj bo $V$ vektorski prostor. Tedaj je množica vseh semilinearnih preslikav $M: V \to V$ grupa za kompozitum.*

Pripomnimo, da vsota semilinearnih preslikav v splošnem ni semilinearna. Težava se pojavi, ko želimo sešteti dve semilinearni preslikavi, katerima pripadata različna avtomorfizma. Če pa semilinearnima preslikavama pripada isti avtomorfizem, bo tudi vsota semilinearna preslikava z istim avtomorfizmom.

## OSNOVNI IZREK AFINE GEOMETRIJE

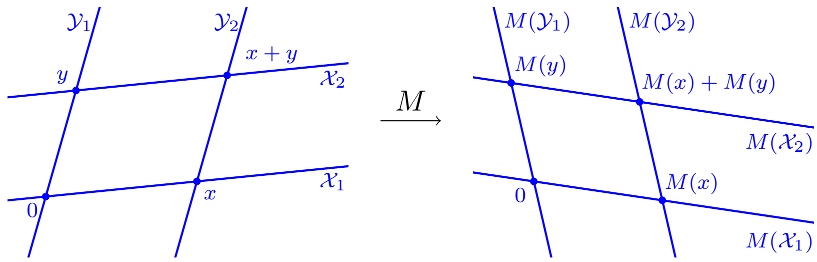
**Izrek 2.40** *Naj bodo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$ in $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset V$ afina podprostora razsežnosti $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} \geq 2$. Preslikava $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je afina transformacija, ki ohranja vzporednost, natanko tedaj, ko obstajajo $a, b \in V$ in obrnljiva semilinearna preslikava $M$, da je $\tau(x) = M(x - a) + b$.*

**Dokaz:** Pokažimo najprej, da je preslikava $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ oblike $\tau(x) = M(x - a) + b$, kjer je $M$ obrnljiva semilinearna preslikava, afina transformacija, ki ohranja vzporednost. Naj bo $x + X$ afina premica v $\mathcal{A}$. Tedaj je $\tau(x + X) = M(x-a)+b+MX$ tudi afina premica. Torej je $\tau$ afina preslikava. Naj bosta $\mathcal{X} = x+X$ in $\mathcal{Y} = y+Y$ vzporedna afina podprostora v $\mathcal{A}$. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $X < Y$. Ker je $\tau(\mathcal{X}) = M(x - a) + b + MX$, $\tau(\mathcal{Y}) = M(y-a)+b+M(Y)$ in $M(X) < M(Y)$, sta afina podprostora $\tau(\mathcal{X})$ in $\tau(\mathcal{Y})$ vzporedna.

Naj bo $\tau: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ afina transformacija, ki ohranja vzporednost. Zapišimo $\mathcal{A} = a+U$ in $\mathcal{B} = \tau(a)+W$. Definirajmo preslikavo $M: U \to W$ s predpisom $M(x) = \tau(x + a) - \tau(a)$. Preslikava $M$ je kompozitum dveh translacij in preslikave $\tau$, ki so vse afine transformacije in ohranjajo vzporednost. Torej je $M$ afina transformacija, ki ohranja vzporednost, za katero velja $M(0) = \tau(a) - \tau(a) = 0$. Radi bi seveda pokazali, da je $M$ semilinearna preslikava.

Naj bosta $x, y \in U$ linearno neodvisna vektorja in označimo $X = \mathrm{Lin}\{x\}$ ter $Y = \mathrm{Lin}\{y\}$. Afini premici $\mathcal{X}_1 = 0 + X$ in $\mathcal{X}_2 = y + X$ sta vzporedni. Ker je $M(\mathcal{X}_1) = 0+M(X)$ in $M$ ohranja vzporednost, je slika $M(\mathcal{X}_2) = y'+M(X)$ za nek $y' \in W$. Ker je $M(y) \in M(\mathcal{X}_2)$, je po lemi 2.2 slika $M(\mathcal{X}_2) = M(y) + M(X)$. Enako razmislimo, da je $M(\mathcal{Y}_2) = M(x) + M(Y)$. Torej je presek afinih premic $M(\mathcal{X}_2) = M(y) + M(X)$ in $M(\mathcal{Y}_2) = M(x) + M(Y)$

točka $M(x)+M(y)$. Zato je $M(x+y)=M(x)+M(y)$.




Naj bosta $x,y\in U$ linearno odvisna neničelna vektorja. Ker je $\dim U = \dim \mathcal{A} \geq 2$, obstaja $z \in U - \mathrm{Lin}\{x\}$. Tedaj je vektor $z$ linearno neodvisen z $x$ ter $x+y$ in vektor $y$ je neodvisen z $x+z$. Po zgornjem razmisleku je tako

$$\begin{aligned}M(x+y)+M(z) = M((x+y)+z) = M((x+z)+y) = \\ = M(x+z)+M(y) = M(x)+M(y)+M(z)\end{aligned}$$

in zato je $M(x+y)=M(x)+M(y)$. Torej je $M$ aditivna.

Naj bo $x\in U$ neničelni vektor. Zožitev $M\colon \mathrm{Lin}\{x\}\to\mathrm{Lin}\{M(x)\}$ je bijekcija. Torej za vsak $\lambda\in\mathcal{O}$ obstaja natanko en $f_x(\lambda)\in\mathcal{O}$, da je $M(\lambda x) = f_x(\lambda)M(x)$. Naša naloga je pokazati, da je $f_x\colon \mathcal{O}\to\mathcal{O}$ avtomorfizem obsega, ki je neodvisen od vektorja $x$.

Naj bosta $x,y\in U$ linearno neodvisna. Za vsak $\lambda\in\mathcal{O}$ velja

$$\begin{aligned}f_x(\lambda)M(x)+f_y(\lambda)M(y) =& M(\lambda x)+M(\lambda y) = M(\lambda x+\lambda y) = \\ =& M(\lambda(x+y)) = f_{x+y}(\lambda)M(x+y) = \\ =& f_{x+y}(\lambda)M(x)+f_{x+y}(\lambda)M(y).\end{aligned}$$

Ker afina transformacija preslika nekolinearne točke v nekolinearne, so $0 = M(0)$, $M(x)$ in $M(y)$ nekolinearne, kar pomeni, da sta $M(x)$ in $M(y)$ linearno neodvisna. Zato iz zgornje enakosti sledi $f_x = f_{x+y} = f_y$. Naj bosta $x,y\in U$ linearno odvisna neničelna vektorja. Ker je $\dim U = \dim\mathcal{A}\geq 2$, obstaja $z\in U-\mathrm{Lin}\{x\}$. Tedaj je vektor $z$ linearno neodvisen z $x$ in $y$. Zato je $f_x = f_z = f_y$. Torej je $f := f_x$ neodvisna od indeksa.

Za vse $x\in U$ in $\alpha,\beta\in\mathcal{O}$ je

$$\begin{aligned}f(\alpha+\beta)M(x) = M((\alpha+\beta)x) = M(\alpha x)+M(\beta x) = \\ = f(\alpha)M(x)+f(\beta)M(x)\end{aligned}$$

in

$$f(\alpha\beta)M(x) = M(\alpha\beta x) = f(\alpha)M(\beta x) = f(\alpha)f(\beta)M(x).$$

Zato za vse $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ velja $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ in $f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta)$. Torej je $f$ avtomorfizem obsega $\mathcal{O}$, ki pripada obrnljivi semilinearni preslikavi $M$. $\square$

Po lemi 2.32 afina preslikava med afinima podprostoroma v vektorskem prostoru nad obsegom različnim od $\mathbb{F}_2$ ohranja vzporednost.

**Posledica 2.41** *Naj bodo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O} \neq \mathbb{F}_2$ in $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset V$ afina podprostora razsežnosti $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} \geq 2$. Preslikava $\tau \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je afina transformacija natanko tedaj, ko obstajajo $a, b \in V$ in obrnljiva semilinearna preslikava $M$, da je $\tau(x) = M(x-a) + b$.*

**Posledica 2.42** *Naj bodo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$ in $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset V$ afina podprostora razsežnosti $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B} \geq 2$. Afina preslikava $\tau \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preslika $k$-razsežen afin podprostor $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ v $k$-razsežen afin podprostor $\tau(\mathcal{U}) \subset \mathcal{B}$.*

**Definicija 2.43** *Množico vseh afinih podprostorov afinega prostora $\mathcal{A}$ imenujemo **afina geometrija** na $\mathcal{A}$ in jo označimo $\mathbf{A}(\mathcal{A})$.*

Naj bo $\dim \mathcal{A} = n$. Za vsak $k \in \{0, \ldots, n\}$ množico vseh $k$-razsežnih afinih podprostorov v $\mathcal{A}$ označimo z $\mathbf{A}_k(\mathcal{A})$. Množico 0-razsežnih afinih podprostorov $\mathbf{A}_0(\mathcal{A}) = \{\{x\} \mid x \in \mathcal{A}\}$ pogosto enačimo kar s samo množico $\mathcal{A}$. Po zgornji posledici vsaka afina transformacija $\tau \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ porodi bijekcijo med $\mathbf{A}_k(\mathcal{A}) \to \mathbf{A}_k(\mathcal{B})$ za vse možne $k$.

**Definicija 2.44** *Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ afina prostora nad istim obsegom razsežnosti $\dim \mathcal{A}, \dim \mathcal{B} \geq 2$. Afini geometriji $\mathbf{A}(\mathcal{A})$ in $\mathbf{A}(\mathcal{B})$ sta* **izomorfni**, *če obstaja taka bijektivna preslikava $\widetilde{\tau} \colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{A}(\mathcal{B})$, da $\widetilde{\tau}$ in $\widetilde{\tau}^{-1}$ ohranjata inkluzije; t.j. če je $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ v $\mathcal{A}$, je $\widetilde{\tau}(\mathcal{U}) \subset \widetilde{\tau}(\mathcal{W})$ v $\mathcal{B}$, in enako za inverz $\widetilde{\tau}^{-1}$.*

Bralec se lahko prepriča, da je v primeru afinih prostorov nad končnim obsegom pogoj o ohranjanju inkluzij za inverz odveč. V definiciji nismo zahtevali, da $\widetilde{\tau}$ množico $\mathbf{A}_k(\mathcal{A})$ preslika v $\mathbf{A}_k(\mathcal{B})$, saj je to posledica same definicije.

**Lema 2.45** *Naj bo $\widetilde{\tau}\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{A}(\mathcal{B})$ izomorfizem afinih geometrij. Tedaj za vsak afin podprostor $\mathcal{U} \in \mathbf{A}(\mathcal{A})$ velja $\dim \widetilde{\tau}(\mathcal{U}) = \dim \mathcal{U}$.*

**Dokaz:** Naj bo $\mathcal{U} \in \mathbf{A}(\mathcal{A})$. Izberimo afino bazo $\{x_0, \ldots, x_k\}$ za $\mathcal{U}$ in za vsak $i \in \{0, \ldots, k\}$ označimo $\mathcal{U}_i = \mathrm{Af}\{x_0, \ldots, x_i\}$. Tedaj je

$$\{x_0\} = \mathcal{U}_0 \subsetneq \mathcal{U}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathcal{U}_k = \mathcal{U}.$$

Ker je $\widetilde{\tau}$ bijekcija, ki ohranja inkluzije, je

$$\widetilde{\tau}(\mathcal{U}_0) \subsetneq \widetilde{\tau}(\mathcal{U}_1) \subsetneq \ldots \subsetneq \widetilde{\tau}(\mathcal{U}_k) = \widetilde{\tau}(\mathcal{U}),$$

zato je $\dim \widetilde{\tau}(\mathcal{U}) \geq k = \dim \mathcal{U}$. Torej bijekcija med afinima geometrijama, ki ohranja inkluzije, ne povečuje razsežnosti. Ker je tudi $\widetilde{\tau}^{-1}$ bijekcija, ki ohranja inkluzije, za vsak $\mathcal{U} \in \mathbf{A}(\mathcal{A})$ velja $\mathcal{U} \leq \dim \widetilde{\tau}(\mathcal{U}) \leq \dim \widetilde{\tau}^{-1}(\widetilde{\tau}(\mathcal{U})) = \dim \mathcal{U}$. □

Naj bo $\widetilde{\tau}\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{A}(\mathcal{B})$ izomorfizem afinih geometrij. Jasno velja $\widetilde{\tau}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, zato sta izomorfni afini geometriji enake razsežnosti. Naj bo $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ afina transformacija. Po definiciji sta tedaj afina prostora enake razsežnosti. Razmislili smo že (posledica 2.42), da $\tau$ porodi izomorfizem $\widetilde{\tau}\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{A}(\mathcal{B})$ afinih geometrij. Velja pa tudi obrat.

**Trditev 2.46** *Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ afina prostora nad istim obsegom razsežnosti $\dim \mathcal{A}, \dim \mathcal{B} \geq 2$. Afini geometriji $\mathbf{A}(\mathcal{A})$ in $\mathbf{A}(\mathcal{B})$ sta izomorfni natanko tedaj, ko je $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B}$. Vsak izomorfizem $\mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{A}(\mathcal{B})$ med afinima geometrijama je porojen z afino transformacijo $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.*

**Dokaz:** Naj bo $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B}$. Tedaj je $\mathcal{A} = a + U$ in $\mathcal{B} = b + W$, kjer sta $U$ in $W$ vektorska prostora ene razsežnosti nad istim obsegom. Zato obstaja linearni izomorfizem $M\colon U \to W$. Tedaj je $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, definiran s predpisom $\tau(x) = M(x - a) + b$, afina transformacija, ki po zgornjem razmisleku porodi izomorfizem $\widetilde{\tau}\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{A}(\mathcal{B})$ afinih geometrij.

Če sta afini geometriji $\mathbf{A}(\mathcal{A})$ in $\mathbf{A}(\mathcal{B})$ izomorfni, iz leme 2.45 sledi enakost razsežnosti $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{B}$.

Naj bo $\gamma\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{A}(\mathcal{B})$ izomorfizem afinih geometrij. Po lemi 2.45 je zožitev $\gamma_{\mathbf{A}_0(\mathcal{A})}\colon \mathbf{A}_0(\mathcal{A}) \to \mathbf{A}_0(\mathcal{B})$ bijekcija. Ker množico 0-razsežnih afinih podprostorov enačimo z množico točk, smo dobili preslikavo $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. (Zanjo velja $\{\tau(a)\} = \gamma\{a\}$.) Naj bodo $a, b, c \in \mathcal{A}$ kolinearne, se pravi, da

obstaja afina premica $\mathcal{X} \subset \mathcal{A}$, ki jih vsebuje. Ker $\gamma$ ohranja inkluzije, so $\tau(a), \tau(b), \tau(c) \in \gamma(\mathcal{X})$. Po lemi 2.45 je $\gamma(\mathcal{X})$ afina premica, zato so slike $\tau(a)$, $\tau(b)$ in $\tau(c)$ kolinearne. Torej je $\tau$ afina transformacija in velja $\gamma = \widetilde{\tau}$.
$\square$

# 3 AKSIOMATSKO DEFINIRANA AFINA GEOMETRIJA

## DEFINICIJE

**Aksiomatsko definirana afina ravnina** je par $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$, kjer je $\mathcal{A}_1$ podmnožica potenčne množice $2^{\mathcal{A}}$. Elemente prve množice imenujemo **točke**, elemente druge pa **premice**. Če za točko $X \in \mathcal{A}_0$ in premico $p \in \mathcal{A}_1$ velja $X \in p$, pravimo, da točka $X$ **leži** na premici $p$ oziroma, da gre premica $p$ **skozi** točko $X$. Če točke ležijo na isti premici, so **kolinearne**. Premici $p$ in $q$ se **sekata**, če obstaja točka $X$, da je na $p$ in na $q$. Premici $p$ in $q$ sta **vzporedni**, $p \parallel q$, če se ne sekata ali pa je $p = q$.

Množica $\mathcal{A}_1$ oziroma relacija med točkami in premicami zadošča naslednjim aksiomom.

**A1.** Skozi različni točki poteka natanko ena premica.

**A2.** Za vsako točko $X$ in premico $p$ obstaja natanko ena premica, ki gre skozi $X$ in je vzporedna s $p$.

**A3.** Obstajajo tri nekolinearne točke.

**Opombe:**

• Ko ne bo dvomov, bomo aksiomatsko afino ravnino označili le z množico točk $\mathcal{A}$.

• Skozi poljubni različni točki $A$ in $B$ gre torej natanko ena premica, ki jo označimo z $AB$.

• Iz enakosti $AB = AC$ sledi, da so točke $A$, $B$ in $C$ kolinearne.

• Če premici nista vzporedni, se po **A1** sekata v natanko eni točki.

• Če je $X$ (edina) točka v preseku premic $p$ in $q$, bomo pisali $X = p \cap q$, čeprav je pravilen zapis $\{X\} = p \cap q$.

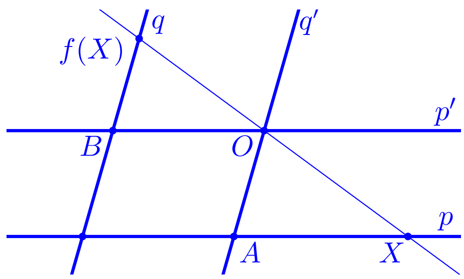
**Trditev 3.1** *V aksiomatsko definirani afini ravnini je vzporednost ekvivalenčna relacija.*

**Dokaz:** Neposredno iz definicije vzporednosti sledi, da je relacija refleksivna in simetrična. Naj bo $p \parallel q$ in $q \parallel r$. Če je $p \cap r = \emptyset$, sta premici po definiciji vzporedni. Denimo, da obstaja $X \in p \cap r$. Tedaj sta $p$ in $q$ premici, ki gresta skozi $X$ in sta vzporedni s premico $q$. Po aksiomu **A2** je $p \parallel r$. □

**Trditev 3.2** *V aksiomatsko definirani afini ravnini ima premica vsaj dve točki in poljubni premici sta enako močni.*

**Dokaz:** Denimo, da v aksiomatsko definirani afini ravnini obstaja premica $\{A\}$ z eno samo točko. Po aksiomu **A3** obstajata še točki $B$ in $C$, da točke $A$, $B$ in $C$ niso kolinearne. Po aksiomu **A2** obstaja natanko ena premica $p$ skozi $C$, ki je vzporedna s premico $AB$. Torej je $p \cap AB = \emptyset$ in prav tako $p \cap \{A\} = \emptyset$. To je v protislovju z aksiomom **A2**, saj skozi $A$ potekata dve premici, ki sta vzporedni s premico $p$. Torej ima vsaka premica vsaj dve točki.

Naj bosta $p$ in $q$ nevzporedni premici v aksiomatsko definirani afini ravnini. Ker imata $p$ in $q$ vsaj dve točki, obstajata točki $A \in p$ in $B \in q$, različni od $p \cap q$. Po aksiomu **A2** obstajata vzporednica $q'$ k premici $q$ skozi $A$ in vzporednica $p'$ k premici $p$ skozi $B$. Ker $q \nparallel p$, po trditvi 3.2 tudi $p' \nparallel q'$. Označimo $O = p' \cap q'$.




Premica $q' = AO$ je edina vzporednica k premici $q$, ki gre skozi $O$. Zato za vsak $X \in p - \{A\}$ premica $XO$ seka $q$ v natanko eni točki. Če je presek $XO \cap q = B$, je premica $XO = OB = p'$. To ni mogoče, saj je $p'$ vzporedna s premico $p$ in je tako ne seka. Definiramo preslikavo $f\colon p - \{A\} \to q - \{B\}$ s predpisom $f(X) = XO \cap q$.

Preslikava $f$ je surjektivna: Naj bo $Y \in q - \{B\}$. Ker je $OB \cap q = B$, točka $Y$ ni na $OB$. Premica $YO$ je tako različna od $OB = p'$, ki je edina vzporednica k premici $p$ skozi $O$. Torej se $YO$ in $p$ sekata. Za točko $X = OY \cap p$ je $XO = OY$ in tako $f(X) = XO \cap q = Y$.

Preslikava $f$ je injektivna: Če je $f(X) = f(X')$, premici $OX$ in $OX'$ potekata skozi točki $O$ in $f(X) = f(X')$, zato sta po aksiomu **A1** enaki. Presek nevzporednih premic $p$ in $OX = OX'$ je ena sama točka, zato je $X = X'$.

Preslikava $f$ je bijekcija, zato sta množici $p$ in $q$ enako močni. Če sta premici $p$ in $q$ vzporedni, izberemo $A \in p$ in $B \in q$. Tedaj sta premici $p$ in $q$ enako močni kot premica $AB$, ki ni vzporedna ne s $p$ ne s $q$. $\square$

**Posledica 3.3** *Naj bosta $p$ in $q$ nevzporedni premici v aksiomatsko definirani afini ravnini $\mathcal{A}$. Tedaj obstaja $A \in \mathcal{A}$, da $A \notin p$ in $A \notin q$.*

**Dokaz:** Ker sta premici $p$ in $q$ različni, po zadnji trditvi obstaja $X \in p$, ki ni na $q$. Naj bo $r$ vzporednica s $q$, ki gre skozi $X$. Ker $r \cap p = \emptyset$, $r \cap q = \{X\}$ in $|r| \geq 2$, obstaja $X \in r$, ki ni ne na $p$ ne na $q$. $\square$

**Definicija 3.4** *Aksiomatsko definirani afini ravnini $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$ in $\{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1\}$ sta **izomorfni**, če obstaja taka bijekcija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, da je za vsako premico $p \in \mathcal{A}_1$ slika $\tau(p) \in \mathcal{B}_1$.*

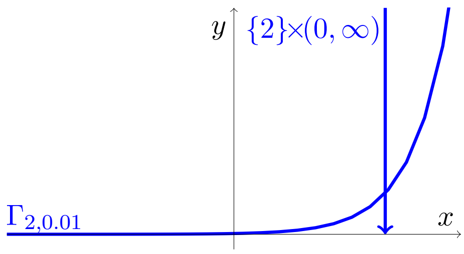
**Primeri:**

• Naj bo $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$ aksiomatsko definirana afina ravnina, kjer ima (vsaka) premica le dve točki. Po **A1** je vsaka dvoelementa množica v $\mathcal{A}$ premica; torej $|\mathcal{A}_1| = \frac{1}{2}(|\mathcal{A}|-1)|\mathcal{A}|$. Po **A3** obstajajo nekolinearne točke $A, B, C \in \mathcal{A}$. Po točki **A1** obstaja natanko ena premica $p$ skozi $C$, ki je vzporedna premici $\{A, B\}$. Torej obstaja $D$, različna od $A$, $B$ in $C$, da je $p = \{C, D\}$. Denimo, da v $\mathcal{A}$ obstaja še peta točka $E$. Tedaj je tudi premica $\{C, E\}$ vzporedna s premico $\{A, B\}$ in gre skozi $C$, kar je v nasprotju z **A1**. Torej je $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$ izomorfna $\{\mathbb{F}_2^2, \mathbf{A}(\mathbb{F}_2^2)\}$.

• Naj bo $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$ taka aksiomatsko definirana afina ravnina, da je $|\mathcal{A}| = 4$. Naj bosta $p$ poljubna premica v $\mathcal{A}$ in $A$ točka, ki ni na $p$. Po **A1** obstaja premica $q$ skozi $A$, vzporedna s $p$. Po zadnji trditvi je $|p| = |q|$ in ker sta premici disjunktni, je $2|p| \leq |\mathcal{A}| = 4$. Torej je moč premice enaka 2 in je zato $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$ izomorfna $\{\mathbb{F}_2^2, \mathbf{A}(\mathbb{F}_2^2)\}$.

• Za vsako afino ravnino $\mathcal{A}$ nad obsegom je jasno $\{\mathcal{A}, \mathbf{A}_1(\mathcal{A})\}$ aksiomatsko definirana afina ravnina. Ali obstaja aksiomatsko definirana afina ravnina, ki ni izomorfna afini ravnini nad kakšnim obsegom?

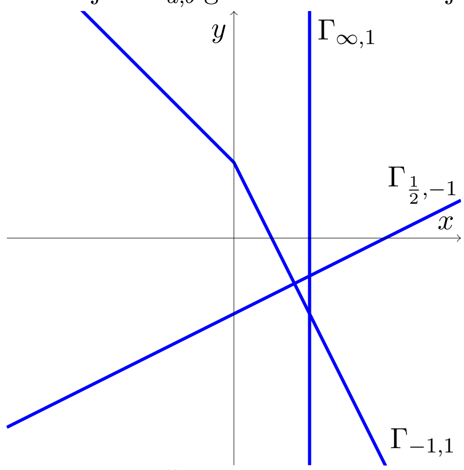
• Naj bo $\mathcal{A} = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ in $\mathcal{A}_1 = \{\{x\} \times (0, \infty) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{\Gamma_{a,b} \mid a \in \mathbb{R}, b \in (0, \infty)\}$, kjer je $\Gamma_{a,b} = \{(x, be^{ax}) \mid x \in \mathbb{R}\}$ graf eksponentne funkcije $x \mapsto be^{ax}$. Bralec lahko preveri veljavnost aksiomov **A1**, **A2** in **A3**. (Bo pa veljavnost aksiomov sledila iz spodnjega izomorfizma.) Kljub temu,




da premice v $\mathcal{A}_1$ niso podobne afinim premicam v afini ravnini nad obsegom, pa je aksiomatsko definirana ravnina $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$ izomorfna afini ravnini $\mathbf{A}(\mathbb{R}^2)$. Izomorfizem $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$ je podan s predpisoma $\tau(x, y) = (x, \ln y)$. Predpis $\tau$ je res izomorfizem aksiomatsko definiranih afinih ravnin, saj je bijekcija, za $p = \{x\} \times (0, \infty)$ je slika $\tau(p) = \{x\} \times \mathbb{R}$ navpična premica in za $p = \Gamma_{a,b}$ je slika $\tau(\Gamma_{a,b}) = \{(x, \ln(be^{ax})) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, ax + \ln(b)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ tudi premica. Torej sta $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$ in $\mathbf{A}(\mathbb{R}^2)$ izomorfni aksiomatsko definirani afini ravnini.

• Naj bo sedaj $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$. Za $a \geq 0$ ter $b \in \mathbb{R}$ naj bo $\Gamma_{a,b}$ graf linearne funkcije $x \mapsto ax + b$ in za $a < 0$ ter $b \in \mathbb{R}$ naj bo $\Gamma_{a,b}$ graf funkcije

$$x \mapsto \begin{cases} ax + b, & x \leq 0, \\ 2ax + b, & x \geq 0. \end{cases}$$



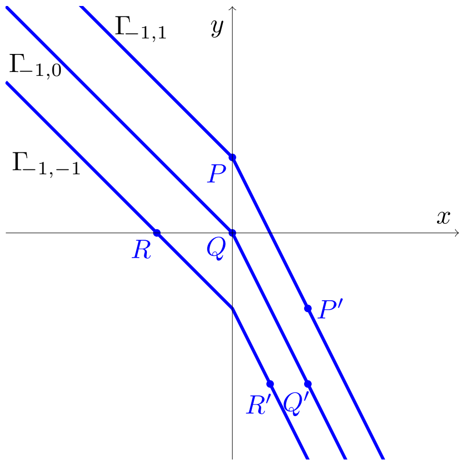

Označimo še $\Gamma_{\infty,b} = \{b\} \times \mathbb{R}$ in definiramo $\mathcal{A}_1 = \{\Gamma_{a,b} \mid a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, b \in \mathbb{R}\}$. Hitro se prepričamo, da sta premici $\Gamma_{a,b}$ in $\Gamma_{c,d}$ vzporedni natanko tedaj, ko je $a = c$. Naj bosta $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}_0$ in $\Gamma_{a,b} \in \mathcal{A}_1$ poljubna. Če je $a = \infty$, je $\Gamma_{a,x_0}$ edina premica, ki gre skozi $(x_0, y_0)$ in je vzporedna $\Gamma_{a,b}$. Če je $a \geq 0$, je $\Gamma_{a,y_0-ax_0}$ edina, ki gre skozi $(x_0, y_0)$ in je vzporedna $\Gamma_{a,b}$. Če pa je $a < 0$, ločimo dve možnosti. Za $x_0 \geq 0$ je $\Gamma_{a,y_0-ax_0}$ edina, ki gre skozi $(x_0, y_0)$ in je vzporedna $\Gamma_{a,b}$, za $x_0 < 0$ pa je edina $\Gamma_{a,y_0-2ax_0}$. Torej je $\{A, \mathcal{A}_1\}$ aksiomatsko definirana afina ravnina, ki se imenuje Moultonova ravnina. Premice v Moultonovi ravnini niso ravne, a zaradi prejšnjega primera si ne upamo prehitro sklepati, da ni izomorfna afini ravnini nad kakim obsegom. Kako se torej prepričati, da takega izomorfizma res ni?

## PRVI DESARGUESOV IZREK

V afinih ravninah nad obsegom veljata dva Desarguesova izreka, ki v splošnih aksiomatsko definiranih afinih ravninah ne veljata.

**Izrek 3.5** *(prvi Desarguesov izrek) Naj bodo $\mathcal{A}$ afina ravnina nad obsegom in $p$, $q$, $r$ različne vzporedne premice v njej. Če za točke $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$ in $R, R' \in r$ velja $PQ \parallel P'Q'$ in $QR \parallel Q'R'$, je $PR \parallel P'R'$.*

Izreka ni težko dokazati. Mi bomo dokaz preložili za nekaj časa, saj bo posledica Desarguesovega izreka za projektivno ravnino. Prepričajmo pa se, da prvi Desarguesov izrek ne velja v Moultonovi ravnini. Premice $p = \Gamma_{-1,1}$, $q = \Gamma_{-1,0}$ in $r = \Gamma_{-1,-1}$ so vzporedne. Naj bo $P = (0,1)$, $P' = (1,-1)$, $Q = (0,0)$ in $R = (-1,0)$. Premica, ki gre skozi $P'$ in je vzporedna $PQ = \Gamma_{\infty,0}$, je $\Gamma_{\infty,1}$. Presek premic $\Gamma_{\infty,1}$ in $q$ je $(1,-2) =: Q'$. Premica $\Gamma_{0,-2}$ gre skozi $Q'$ in je vzporedna premici $QR = \Gamma_{0,0}$. Za tako definirane točke je torej $PQ \parallel P'Q'$ in $QR \parallel Q'R'$, vendar premici $PR = \Gamma_{1,1}$ in $P'R' = \Gamma_{\frac{3}{2},-3}$ nista vzporedni. Torej Moultonova ravnina ni izomorfna nobeni afini ravnini nad obsegom.




Denimo, da je aksiomatsko definirana afina ravnina $\mathcal{A}$ izomorfna afini ravnini nad obsegom $\mathcal{O}$. Tedaj je po trditvi 2.46 izomorfna afini ravnini $\mathbf{A}(\mathcal{O}^2)$. To pomeni, da obstaja bijekcija med množicama $\mathcal{A}$ in $\mathcal{O}$, se pravi, da lahko na množici $\mathcal{A}$ vpeljemo strukturo vektorskega prostora. Preden pa definiramo vektorje v $\mathcal{A}$, moramo povedati, kaj so translacije.

**Definicija 3.6** *Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ aksiomatsko definirani afini ravnini. Bijekcijo $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, ki tri kolinearne točke preslika v kolinearne, imenujemo **afina transformacija**.*

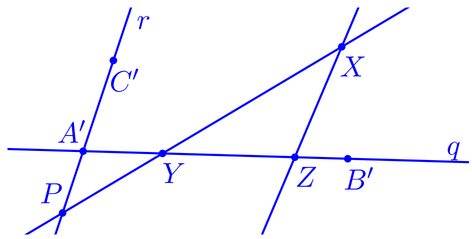
Kot v primeru afinih prostorov nad obsegom sta definiciji izomorfizma in afine transformacije zelo podobni. Bijekcija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je izomorfizem, če je slika premice tudi premica, in je afina transformacija, če je slika premice vsebovana v premici. Neposredno iz definicij torej sledi, da je vsak izomorfizem afina transformacija. Velja pa tudi obrat, ki je posledica naslednje trditve.

**Trditev 3.7** *Inverz afine transformacije $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je afina transformacija.*

**Dokaz:** Če je $|\mathcal{A}| = 4$, je tudi $|\mathcal{B}| = 4$. Tedaj je vsaka bijekcija $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ afina transformacija, saj poljubno premico (dvoelementno množico) v $\mathcal{B}$ preslika na premico v $\mathcal{A}$.

Naj bo $|\mathcal{A}| > 4$. Naj bodo $A, B, C \in \mathcal{B}$ kolinearne točke, ki ležijo na premici $p$, in denimo, da $A' = \tau^{-1}(A)$, $B' = \tau^{-1}(B)$ in $C' = \tau^{-1}(C)$ niso kolinearne. Označimo premici $q = A'B'$ in $r = A'C'$. Ker $\tau$ ohranja kolinearnost, je $\tau(q), \tau(r) \subset p$. Pokažimo, da je $\tau(\mathcal{A}) \subset p$.

Naj bo $X \in \mathcal{A}$, ki ni ne na $q$ ne na $r$. Ker je $|\mathcal{A}| > 4$, ima vsaka premica v $\mathcal{A}$ vsaj tri točke, zato obstajata različni točki $Y$ in $Z$ na $q - \{A'\}$. Ker $X$, $Y$ in $Z$ niso kolinearne, sta premici $XY$ in $XZ$ različni. Po **A1** vsaj ena izmed njih seka premico $r$. Lahko privzamemo, da je to premica $XY$ in presek označimo s $P = XY \cap r$. Ker $\tau(Y)$ in $\tau(P)$ ležita na $p$ in $\tau$ ohranja kolinearnost, tudi $\tau(X)$ leži na $q$. Torej je $\tau(\mathcal{A}) \subset p$, kar je v protislovju z bijektivnostjo afine transformacije. Torej so točke $A'$, $B'$ in $C'$ kolinearne, zato je $\tau^{-1}$ afina transformacija. $\square$



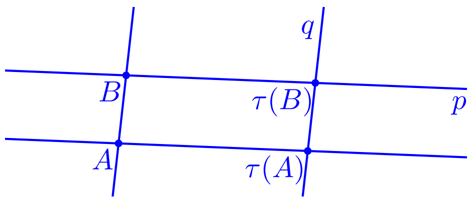

**Posledica 3.8** *Naj bo $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ afina transformacija med akisomatsko definiranima afinima ravninama. Tedaj je za vsako premico $p$ v $\mathcal{A}$ slika $\tau(p)$ premica v $\mathcal{B}$.*

**Dokaz:** Denimo, da za premico $p$ v $\mathcal{A}$ velja $\tau(p) \subsetneq q$. Naj bodo $A, B \in p$ in $C \in q - \tau(p)$. Tedaj so $\tau(A)$, $\tau(B)$ in $C$ kolinearne in po prejšnji trditvi so zato $A = \tau^{-1}(\tau(A))$, $B = \tau^{-1}(\tau(B))$ in $\tau^{-1}(C)$ kolinearne. Torej je $\tau^{-1}(C) \in p$, kar je v protislovju s predpostavko, da $C \notin \tau(p)$. $\square$

**Definicija 3.9** *Afino transformacijo $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, za katero velja $p \parallel \tau(p)$ za vse premice $p$ v $\mathcal{A}$, imenujemo* ***dilatacija****. Dilatacija, ki je identiteta $id_{\mathcal{A}}$ ali pa nima negibnih točk, se imenuje* ***translacija****.*

**Lema 3.10** *Naj bodo $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ translacija aksiomatsko definirane afine ravnine različna od $id_{\mathcal{A}}$ in $A, B \in \mathcal{A}$ taki točki, da $\tau(A) \notin AB$. Naj bo $p$ (edina) vzporednica skozi $B$ k premici $A\tau(A)$ in $q$ (edina) vzporednica skozi $\tau(A)$ k premici $AB$. Tedaj je $\tau(B) = p \cap q$.*

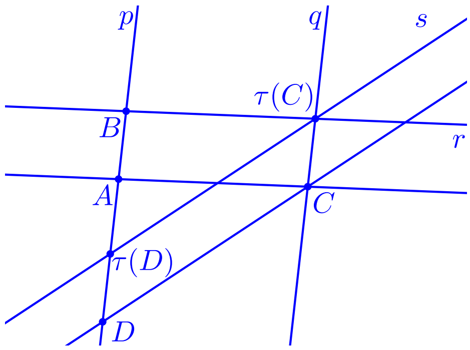
**Dokaz:** Premici $AB \nparallel A\tau(A)$, tudi $p \nparallel q$. Torej je v preseku $p \cap q$ natanko ena točka. Ker translacija preslika premico $AB$ v premico, ki ji je vzporedna, je $\tau(AB) = q$. Torej je $\tau(B) \in q$. Ker $\tau(A)$ leži na premicah $A\tau(A)$ ter $\tau(A\tau(A))$ in sta premici $A\tau(A)$ ter $\tau(A\tau(A))$ vzporedni,




je $A\tau(A) = \tau(A\tau(A))$. Prav tako je $B\tau(B) = \tau(B\tau(B))$. Če se premici $A\tau(A)$ in $B\tau(B)$ sekata, je v preseku le ena točka, ki se preslika v presek slik $\tau(A\tau(A)) = A\tau(A)$ in $\tau(B\tau(B)) = B\tau(B)$. Torej je $A\tau(A) \cap B\tau(B)$ negibna točka, kar je protislovje, saj translacija $\tau$ nima negibnih točk. Torej je premica $B\tau(B)$ vzporedna s premico $A\tau(A)$ in gre skozi točko $B$. Po **A2** je $B\tau(B) = q$, zato je $\tau(B) = p \cap q$. $\square$

**Trditev 3.11** *Naj bo $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina ravnina. Za točki $A, B \in \mathcal{A}$ obstaja največ ena translacija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, da je $\tau(A) = B$.*

**Dokaz:** Denimo, da obstaja translacija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, da je $\tau(A) = B$. Če je $A = B$, je po definiciji translacije $\tau = id_{\mathcal{A}}$ in je tako natanko določena.




Naj bo $A \neq B$ in označimo $p = AB$. Naj bodo $C \in \mathcal{A}$, ki ne leži na premici $p$, $q$ edina vzporednica k premici $p$ skozi $C$ in $r$ edina vzoredница k $AC$ skozi $B$. Po lemi 3.10 je $\tau(C) = q \cap r$.

Naj bo $D \in p - \{A\}$. Za poljubno točko $C \in \mathcal{A} - p$ naj bo $s$ edina vzporednica skozi $\tau(C)$, ki je vzporedna premici $DC$. Po lemi 3.10 je $\tau(D) = p \cap s$. Torej so slike transformacije $\tau$ natanko določene s pogojem $\tau(A) = B$. $\square$

**Trditev 3.12** *Naj bo $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina ravnina.*

**a**. *Množica vseh afinih transformacij $A(\mathcal{A})$ je grupa.*

**b**. *Množica vseh dilatacij $D(\mathcal{A})$ je podgrupa edinka v $A(\mathcal{A})$.*

**c**. *Množica vseh translacij $T(\mathcal{A})$ je podgrupa edinka v $A(\mathcal{A})$.*

**Dokaz:** **a.** Identiteta $id_{\mathcal{A}}$ je afina transformacija in je enota grupe $A(\mathcal{A})$. Po trditvi 3.7 ima vsak element v $A(\mathcal{A})$ tudi inverz.

**b.** Naj bosta $\tau, \rho\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dilataciji. Tedaj za vsako premico $p$ v $\mathcal{A}$ velja $p \parallel \tau(p) \parallel \rho(\tau(p))$. Torej je $\rho \circ \tau$ dilatacija. Za premico $q$ označimo $p = \tau^{-1}(q)$. Ker je $p \parallel \tau(p)$, je $\tau^{-1}(q) \parallel q$. Torej je inverz dilatacije dilatacija, zato je $D(\mathcal{A})$ grupa.

Naj bodo $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ dilatacija, $\rho\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ afina transformacija in $p$ premica v $\mathcal{A}$. Tedaj je $\rho(p) \parallel \tau(\rho(p))$. Če je $\rho(p) = \tau(\rho(p))$, je $p = \rho^{-1}(\rho(p)) = \rho^{-1}(\tau(\rho(p)))$. Če pa je $\rho(p) \cap \tau(\rho(p)) = \emptyset$, je tudi $p \cap \rho^{-1}(\tau(\rho(p))) = \emptyset$. Torej je $p \parallel \rho^{-1}(\tau(\rho(p)))$, zato je $\rho^{-1} \circ \tau \circ \rho$ dilatacija.

**c.** Naj bosta $\tau, \rho\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ translaciji. Vemo že, da je $\tau^{-1}$ dilatacija. Če je $\tau \neq id_{\mathcal{A}}$, je brez negibnih točk, zato je tudi $\tau^{-1}$ brez negibnih točk. Torej je inverz translacije translacija. Kompozitum $\rho \circ \tau$ je dilatacija. Če je $A \in \mathcal{A}$ negibna točka kompozituma, je $\tau(A) = \rho^{-1}(A)$. Po trditvi 3.11 je $\tau = \rho^{-1}$ in zato $\rho \circ \tau = id_{\mathcal{A}}$. Torej je $T(\mathcal{A})$ grupa.

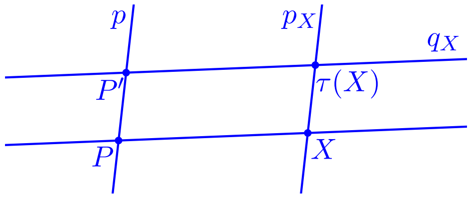
Naj bosta $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ translacija in $\rho\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ afina transformacija. Vemo že, da je $\rho^{-1} \circ \tau \circ \rho$ dilatacija. Denimo, da ima negibno točko $A \in \mathcal{A}$. Tedaj je $\tau(\rho(A)) = \rho(A)$. Translaciji $\tau$ in $id_{\mathcal{A}}$ se ujemata v točki $\rho(A)$, zato sta enaki. Če ima kompozitum $\rho^{-1} \circ \tau \circ \rho$ negibno točko, je enak $id_{\mathcal{A}}$. V vsakem primeru je tako $\rho^{-1} \circ \tau \circ \rho$ translacija. □

Trditev 3.11 pove, da imamo za poljubni točki $A, B \in \mathcal{A}$ največ eno translacijo, ki $A$ premakne v $B$. Ne vemo pa, če taka translacija sploh obstaja. Če želimo na množici $\mathcal{A}$ vpeljati strukturo vektorskega prostora, pa potrebujemo obstoj take translacije. Dva vektorja namreč seštejemo tako, da drugega transliramo, da ima začetek v koncu prvega vektorja. Vse kaže, da aksiomatsko definirana ravnina, ki je izomorfna afini ravnini nad kakim obsegom, zadošča naslednjemu aksiomu.

> **A4.** Za poljubni točki $A$ in $B$ obstaja translacija $\tau$, da je $\tau(A) = B$.

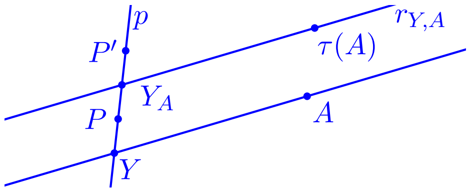
**Trditev 3.13** *V aksiomatsko definirani afini ravnini je prvi Desarguesov izrek ekvivalenten aksiomu* **A4.**

**Dokaz:** Denimo, da v aksiomatsko definirani ravnini $\mathcal{A}$ velja prvi Desarguesov izrek. Če imajo premice v $\mathcal{A}$ le dve točki, je $\mathcal{A} = \mathbb{F}_2^2$, v kateri velja aksiom **A4**. Predpostavimo, da imajo premice v $\mathcal{A}$ vsaj tri točke.



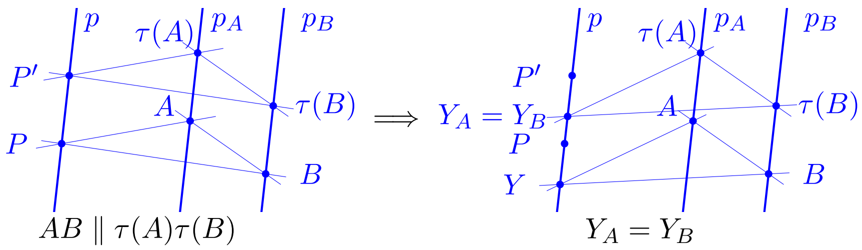

Naj bosta $P, P' \in \mathcal{A}$ različni in označimo premico $p = PP'$. Za $X \in \mathcal{A} - p$ naj bosta $q_X$ in $p_X$ tisti premici, da je $X \in p_X$, $p_X \parallel p$, $P' \in q_X$ in $q_X \parallel PX$. Definirajmo $\tau(X) = p_X \cap q_X$.

Naj bo $Y \in p$ in izberimo poljubno točko $A \in \mathcal{A} - p$. Naj bo $r_{Y,A}$ premica




skozi $\tau(A)$, ki je vzporedna premici $YA$. Radi bi se prepričali, da je presek $Y_A = p \cap r_{Y,A}$ neodvisen od točke $A$.

Naj bo $B$ še ena točka v $\mathcal{A} - p$. Ločimo dve možnosti. Denimo, da $B \notin p_A = A\tau(A)$. Tedaj so različne premice $p$, $p_A$ in $p_B$ vzporedne. Za točke $P, P' \in p$, $A, \tau(A) \in p_A$ in



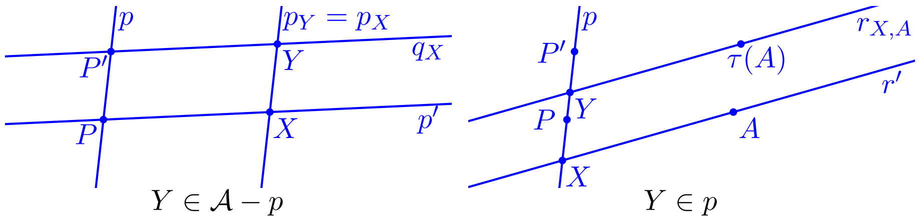

$B, \tau(B) \in p_B$ velja $PA \parallel q_A = P'\tau(A)$ in $PB \parallel q_B = P'\tau(B)$. Po prvem Desarguesovem izreku sta premici $AB$ in $\tau(A)\tau(B)$ vzporedni. Sedaj pa za točke $Y, Y_A \in p$, $A, \tau(A) \in p_A$ in $B, \tau(B) \in p_B$ velja $YA \parallel r_{Y,A} = Y_A\tau(A)$ in $AB \parallel \tau(A)\tau(B)$. Po prvem Desarguesovem izreku je $YB \parallel Y_A\tau(B)$. Ker je premica $r_{Y,B}$ tudi vzporedna s premico $YB$ in gre skozi točko $\tau(B)$, je $Y_B\tau(B) = r_{Y,B} = Y_A\tau(B)$. Torej je $Y_B = Y_A$.

Oglejmo si še drugo možnost, ko $B \in p_A$. Po predpostavki imajo premice več kot dve točki, zato obstaja točka $C$ na premici $YB$, ki je različna od $Y$ in $B$. Tedaj je $Y_A = Y_C$ in $Y_B = Y_C$. Torej je presek $Y_A = p \cap r_{Y,A} := \tau(Y)$ neodvisen od izbire točke $A$.

Za tako definirano preslikavo $\tau \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ velja $\tau(p) \subset p$ in $\tau(\mathcal{A} - p) \subset \mathcal{A} - p$.

• Preslikava $\tau$ je injektivna: Če sta $X, Y \in \mathcal{A} - p$ različni točki, je $p_X \neq p_Y$ ali $q_X \neq q_Y$. Zato je $\tau(X) = p_X \cap q_X \neq p_Y \cap q_Y = \tau(Y)$. Če sta $X, Y \in p$ različni točki, sta za vsako točko $A \in \mathcal{A} - p$ premici $r_{X,A}$ in $r_{Y,A}$ različni in zato je $\tau(X) = p \cap r_{X,A} \neq p \cap r_{Y,A} = \tau(Y)$.

• Preslikava $\tau$ je surjektivna: Naj bo $Y \in \mathcal{A} - p$. Naj bosta $p'$ vzporednica s premico $YP'$ skozi točko $P$ in $X = p' \cap p_Y$. Tedaj je $p_X = p_Y$ in $q_X = YP'$




in zato $\tau(X) = Y$. Naj bo $Y \in p$ in izberimo $A \in \mathcal{A} - p$. Naj bo $r'$ vzporednica premici $Y\tau(A)$ skozi $A$. Za točko $X = r' \cap p$ velja $r_{X,A} = Y\tau(A)$ in zato $\tau(X) = Y$.

• Preslikava $\tau$ je dilatacija: Naj bo $q$ poljubna premica v $\mathcal{A}$. Če je $q \parallel p$, je za vsak $X \in q$ premica $p_X = q$ in zato je $\tau(X) \in q$. Torej je $\tau(q) = q$ vzporedna s $q$. Denimo, da se $p$ in $q$ sekata. Naj bo $X = p \cap q$, $Y = \tau(X)$ in $r$ premica skozi $Y$ vzporedna s $q$. Tedaj je za vsak $Z \in q - \{X\}$ premica $r_{X,Z} = r$, zato je $\tau(Z) \in r$. Torej sta premici $\tau(p) = r$ in $p$ vzporedni.

• Preslikava $\tau$ nima negibne točke: Za $X \in p$ in $A \in \mathcal{A} - p$ velja $X \notin r_{X,A}$, zato $\tau(X) \neq X$. Za $X \in \mathcal{A} - p$ pa je $X \notin p_X$ ali $X \notin q_X$, zato $\tau(X) \neq X$.

Tako smo za različni točki $P, P' \in \mathcal{A}$ konstruirali translacijo $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, ki $P$ preslika v $P'$. Če je $P = P'$, je jasno iskana translacija $id_{\mathcal{A}}$. Torej v $\mathcal{A}$ velja aksiom **A4**.

Dokažimo še obrat izreka. Denimo, da za aksiomatsko definirano afino ravnino $\mathcal{A}$ velja **A4**. Naj bodo $p$, $q$ in $r$ različne vzporedne premice v $\mathcal{A}$ ter $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$ in $R, R' \in r$ take različne točke, da je $PQ \parallel P'Q'$ in $QR \parallel Q'R'$. Po **A4** obstaja translacija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, da je $\tau(Q) = Q'$. Ker $Q \neq Q'$, iz leme 3.10 sledi $\tau(P) = p \cap P'Q' = P'$ in $\tau(R) = r \cap Q'R' = R'$. Ker $\tau$ ohranja vzporednost, sta premici $PR$ in $\tau(PR) = P'R'$ vzporedni. $\square$

Naj bo $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina aravnina. **Usmerjena daljica** v $\mathcal{A}$ je urejen par $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, kjer nam $A$ predstavlja začetek in $B$ konec usmerjene daljice. Na množici urejenih parov $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ definiramo ekvivalenčno relacijo $\sim$ na naslednji način. Para $(A, B)$ in $(C, D)$ sta ekvivalentna, če obstaja translacija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, da je $\tau(A) = C$ in $\tau(B) = D$. Ker je množica vseh translacij $T(\mathcal{A})$ grupa (trditev 3.12), je $\sim$ res ekvivalenčna relacija. Elemente množice ekvivalenčnih razredov $\mathcal{V}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times \mathcal{A}/_{\sim}$ imenujemo **vektorji** v $\mathcal{A}$. Vektor, ki pripada usmerjeni daljici $(A, B)$, označimo $\overrightarrow{AB}$.

Aksiom **A4** nam omogoča seštevanje vektorjev v aksiomatsko definirani afini ravnini $\mathcal{A}$. Naj bosta $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{CD}$ vektorja v $\mathcal{A}$. Tedaj obstaja natanko ena translacija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, da je $\tau(C) = B$. Tako definiramo $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A\tau(D)}$ .

**Trditev 3.14** *Naj bo $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina ravnina, ki zadošča aksiomu* **A4**. *Množica vektorjev $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ je abelova grupa za seštevanje.*

**Dokaz:** Naj bodo $\vec{x}$, $\vec{y}$ in $\vec{z}$ vektorji v $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$. Naj bo $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$. Po **A4** obstajata točki $C$ in $D$, da je $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$ in $\vec{z} = \overrightarrow{CD}$. Tedaj je $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ in $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) = \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$. Torej je seštevanje asociativno.

Vektor $\overrightarrow{AA}$ je enota grupe $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$. Obratni element vektorja $\overrightarrow{AB}$ je $\overrightarrow{BA}$.

Dokažimo še, da je $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ abelova. Naj bosta $\overrightarrow{OA}$ in $\overrightarrow{OB}$ vektorja v $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$. Denimo, da so točke $O$, $A$ in $B$ nekolinearne. Naj bo $p$ edina vzporednica k premici $OB$, ki gre skozi $A$, in naj bo $q$ edina vzporednica k premici $OA$, ki gre skozi $B$. Po **A4** obstajata translaciji $\tau, \rho\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, da je $\tau(O) = A$ in $\rho(O) = B$. Po lemi 3.10 je $\tau(A) = p \cap q = \rho(B)$. Torej je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{\tau(O)\tau(B)} = \overrightarrow{O\tau(B)} = \\ &= \overrightarrow{O\rho(A)} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{\rho(O)\rho(A)} = \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}.\end{aligned}$$

Naj bodo sedaj točke $O$, $A$ in $B$ kolinearne. Izberimo poljubno točko $C$, ki ne leži na premici $AB$. Translacija ravnine $\mathcal{A}$, ki preslika $O$ v $A$, tudi točko $B$ preslika na premico $AB$. Zato bodo $O$, $C$ in končna točka usmerjene daljice z začetkom v $O$, ki predstavlja vsoto $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, nekolinearne. Po zgornjem razmisleku je zato $\overrightarrow{OC}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OC}$. Tudi translacija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, za katero je $\tau(O) = B$, preslika premico $OB = AB$ vase. Torej $\tau(C) \notin AB$ in zato po zgornjem velja $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O\tau(C)}$ in $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\tau(C)} = \overrightarrow{O\tau(C)} + \overrightarrow{OA}$. Od tod dobimo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\tau(C)} = \\ &= \overrightarrow{O\tau(C)} + \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OA}.\end{aligned}$$

Na obeh straneh zgornje enakosti z leve prištejemo vektor $\overrightarrow{CO}$ in dobimo, da elementa $\overrightarrow{OA}$ in $\overrightarrow{OB}$ komutirata. $\square$

Množica vektorjev $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ je v bijekciji z množico elementov afine ravnine $\mathcal{A}$. Izberemo točko $O \in \mathcal{A}$. Za vsako točko $X \in \mathcal{A}$ obstaja natanko ena translacija $\tau_X\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, da je $\tau_X(O) = X$. Torej jea vsak vektor predstavljen z natanko eno usmerjeno daljico z začetkom v točki $O$. Preslikava $\mathcal{A} \to \mathcal{V}_{\mathcal{A}}$, podana s predpisom $A \mapsto \overrightarrow{OA}$, je tako bijekcija. Pri tej identifikaciji postane množica $\mathcal{A}$ abelova grupa, kjer je $O$ ničla grupe, operacija seštevanja pa je podana s predpisom $A + B = \tau_A(B)$, saj je $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O\tau_A(B)}$ .

**Izrek 3.15** *Naj bo $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina ravnina, ki zadošča aksiomu* **A4**. *Za vsako točko $O \in \mathcal{A}$ je $\mathcal{A}$ abelova grupa z ničlo $O$ in seštevanjem podanim s predpisom $A + B = \tau_A(B)$, kjer je $\tau_A \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ translacija, ki $O$ preslika v $A$.*

Od sedaj naprej bomo aksiomatsko definirano afino ravnino $\mathcal{A}$, ki zadošča aksiomu **A4**, vedno smatrali za abelovo grupo z zgoraj definirano operacijo seštevanja. Podali bomo le ničlo $O$ grupe $\mathcal{A}$. Obratni element elementa $A \in \mathcal{A}$ je $-A = \tau_A^{-1}(O)$, saj je $A + \tau_A^{-1}(O) = \tau_A(\tau_A^{-1}(O)) = O$. Ker je $\tau_A^{-1}$ translacija in je $O = \tau_A^{-1}(A) \in \tau_A^{-1}(OA)$, je $\tau_A^{-1}(OA) = OA$. Torej so za vsak $A \in \mathcal{A}$ točke $O$, $A$ in $-A$ kolinearne.

**Lema 3.16** *Naj bo $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina ravnina, ki zadošča aksiomu* **A4**, *in $O \in \mathcal{A}$ ničla. Za vsako točko $A \in \mathcal{A}$ so točke $O$, $A$ in $-A$ kolinearne.*

## DRUGI DESARGUESOV IZREK

Naj bo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$. Tedaj je za vsak neničelni skalar $\lambda \in \mathcal{O}$ množenje $m_\lambda \colon V \to V$ razteg. Za vsako afino premico $a + U \subset V$ je slika $m_\lambda(a + U) = \lambda \cdot a + U$ vzporedna z afino premico $a + U$. Torej je $m_\lambda$ dilatacija, ki ima koordinatno izhodišče za negibno točko. Tako smo ugotovili, kako je treba definirati obseg, da bo $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ vektorski prostor nad njim.

**Definicija 3.17** *Naj bosta $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina ravnina in $O \in \mathcal{A}$. Preslikava $\rho \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, ki je konstanta $c_O$ ali pa dilatacija, za katero je $\rho(O) = O$, se imenuje* ***razteg*** *s središčem v točki $O$. Množico vseh raztegov ravnine $\mathcal{A}$ s središčem v $O$ označimo z $R_O(\mathcal{A})$.*

**Lema 3.18** *Naj bo $\rho$ netrivialen razteg aksiomatsko definirane afine ravnine $\mathcal{A}$ s središčem v $O$. Tedaj se za vsak $A \in \mathcal{A} - \{O\}$ premica $OA$ z raztegom $\rho$ preslika vase.*

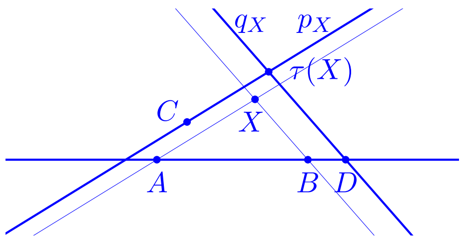
**Dokaz:** Razteg $\rho$ je dilatacija, zato je $\rho(OA) \parallel OA$. Ker je $O \in \rho(OA) \cap OA$, je $\rho(OA) = OA$. $\square$

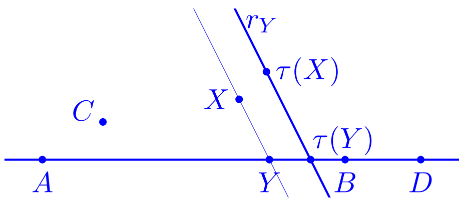
V vektorskem prostoru $V$ nad obsegom $\mathcal{O}$ za taki točki $a, b \in V - \{0\}$, da $b$ leži na premici $0a$, obstaja natanko en skalar $\lambda \in \mathcal{O}$, da je $b = \lambda a$. Želimo, da enako velja za raztege aksiomatsko definirane afine ravnine.

**Lema 3.19** *Naj bodo $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina ravnina in $A$, $B$, $C$, $D \in \mathcal{A}$, da je $A \neq B$. Tedaj obstaja največ ena dilatacija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, za katero velja $\tau(A) = C$ in $\tau(B) = D$.*

**Posledica 3.20** *Naj bodo $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina ravnina in $O$, $A$, $B \in \mathcal{A}$, da je $A \neq O$ in $B \in OA$. Tedaj obstaja največ en razteg $\rho\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ s središčem v $O$, za katerega velja $\rho(A) = B$.*

**Dokaz leme:** Če je $C = D$, taka dilatacija ne obstaja, saj so dilatacije bijekcije. Naj bo $C \neq D$ in denimo, da obstaja dilatacija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, da je $\tau(A) = C$ in $\tau(B) = D$. Naj bo $X \in \mathcal{A}$, ki ni na premici $AB$. Naj bo $p_X$ premica skozi $C$, ki je vzporedna s premico $AX$, in $q_X$ premica skozi $D$, ki je vzporedna s premico $BX$. Dilatacija $\tau$ preslika premico $AX$ v njeno vzporednico. Ker je $\tau(A) = C \in p_X$, je $\tau(AX) = p_X$. Enako razmislimo, da je $\tau(BX) = q_X$. Zato je $\tau(X) = p_X \cap q_X$.




Naj bo $Y \in AB$. Izberimo poljubno točko $X \in \mathcal{A} - AB$ in naj bo $r_Y$ vzporednica s premico $XY$ skozi točko $\tau(X)$, ki je po prejšnjem odstavku natanko določena z vrednostima $\tau(A)$ in $\tau(B)$. Tedaj je $\tau$ preslika premico $XY$ v njej vzporedno premico, ki gre skozi $\tau(X)$, torej $\tau(XY) = r_Y$. Zato je $\tau(Y) = AB \cap r_X$. Tako smo pokazali, da obstaja kvečjemu ena dilatacija, ki $A$ preslika v $C$ in $B$ v $D$. $\square$

Posledica nam zagotavlja enoličnost raztega, ne pa obstoja. V aksiomatsko definirani afini ravnini $\mathcal{A}$ namreč nimamo nobenega zagotovila, da za točke

$O, A, B \in \mathcal{A}$, za katere je $A \neq O$ in $B \in OA$, obstaja razteg s središčem v $O$, ki $A$ preslika v $B$. Zato je treba podati nov aksiom.

**A5.** Obstaja točka $O$, da za taki točki $A$ in $B$, da $O \neq A$ in $B \in OA$, obstaja razteg $\rho$ s središčem v $O$, za katerega velja $\rho(A) = B$.

Če torej v aksiomatsko definirani afini ravnini $\mathcal{A}$ velja aksiom **A5**, obstaja točka $O$, da je množica raztegov $R_O(\mathcal{A})$ največja možna. V tem primeru rečemo, da $\mathcal{A}$ zadošča aksiomu **A5** v točki $O$. To pa ne pomeni, da $\mathcal{A}$ zadošča aksiomu **A5** v drugi točki $P \in \mathcal{A}$. Bo pa to na primer res takrat, ko obstaja translacija ravnine $\mathcal{A}$, ki $O$ premakne v $P$.

**Lema 3.21** *Naj za točki $A, B \in \mathcal{A}$ aksiomatsko definirane afine ravnine obstaja translacija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, da je $\tau(A) = B$. Tedaj obstaja bijekcija med $R_A(\mathcal{A})$ in $R_B(\mathcal{A})$.*

**Dokaz:** Definirajmo preslikavo $f\colon R_A(\mathcal{A}) \to R_B(\mathcal{A})$ s predpisom $f(\rho) = \tau \circ \rho \circ \tau^{-1}$. Velja $f(c_A) = c_B$ in za netrivialen razteg $\rho$ je po trditvi 3.12 kompozitum $f(\rho) = \tau \circ \rho \circ \tau^{-1}$ dilatacija. Ker je $\tau \circ \rho \circ \tau^{-1}(B) = \tau \circ \rho(A) = \tau(A) = B$, je $f(\rho)$ razteg s središčem v $B$. Preslikava $f$ je bijekcija z inverzom $\rho \mapsto \tau^{-1} \circ \rho \circ \tau$. □

**Posledica 3.22** *Aksiomatsko definirana afina ravnina $\mathcal{A}$, ki zadošča aksiomoma **A4** in **A5**, zadošča aksiomu **A5** v vsaki točki $O \in \mathcal{A}$.*

Pokazali bomo, da peti aksiom sledi iz drugega Desarguesovega izreka.

**Izrek 3.23** *(drugi Desarguesov izrek) Naj bodo $\mathcal{A}$ afina ravnina, $p$, $q$ in $r$ različne premice v njej, ki gredo skozi isto točko $O$. Če za točke $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$ in $R, R' \in r$ velja $PQ \parallel P'Q'$ in $QR \parallel Q'R'$, je $PR \parallel P'R'$.*

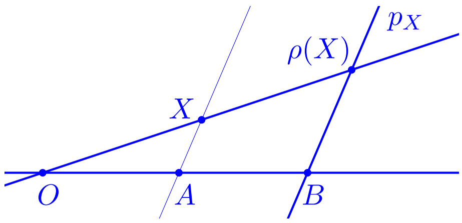
Drugi Desarguesov izrek velja za afino ravnino $\mathcal{A}$ nad obsegom. Izrek bomo dokazali kasneje in bo sledil iz istega izreka kot prvi Desarguesov izrek. Ni pa **A5** ekvivalenten drugemu Desarguesovemu izreku, je namreč ekvivalenten le njegovi različici. Tako kot je aksiom **A5** odvisen od točke $O$, je tudi drugi Desarguesov izrek odvisen od nje. Če v ravnini $\mathcal{A}$ izrek velja za vse premice, ki gredo skozi dano točko $O$, pravimo, da $\mathcal{A}$ zadošča drugemu Desarguesovemu izreku v točki $O$.

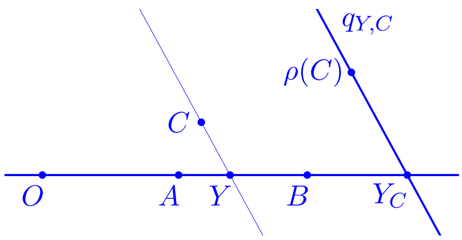
**Trditev 3.24** *Aksiomatsko definirana afina ravnina $\mathcal{A}$ zadošča aksiomu* **A5** *v točki $O$ natanko tedaj, ko zadošča drugemu Desarguesovemu izreku v točki $O$.*

Iz posledice 3.22 sledi naslednja ekvivalenca.

**Posledica 3.25** *Aksiomatsko definirana afina ravnina, ki zadošča aksiomu* **A4**, *zadošča aksiomu* **A5** *natanko tedaj, ko v njej velja drugi Desarguesov izrek.*

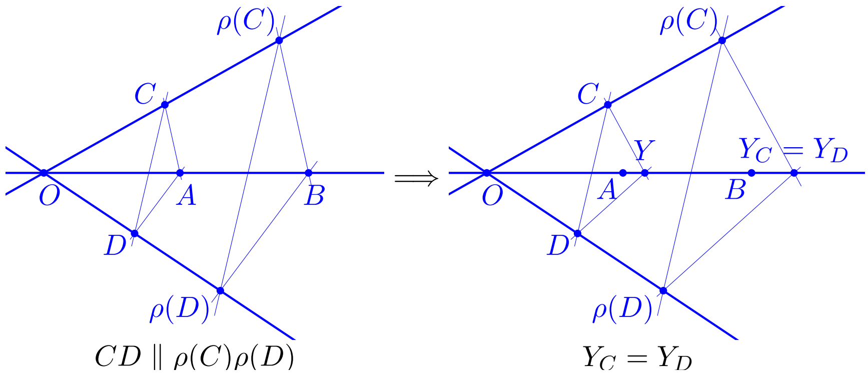
**Dokaz izreka:** Denimo, da v aksiomatsko definirani afini ravnini $\mathcal{A}$ velja drugi Desarguesov izrek za točko $O$. Naj bosta $A$ in $B$ v $\mathcal{A}$ taki, da je $O \neq A$ in $B \in OA$. Naj bosta $X \in \mathcal{A}$, ki ni na premici $AB$, in $p_X$ vzporednica k premici $AX$, ki gre skozi $B$. Ker premici $AX$ in $OX$ nista vzporedni, prav tako nista $p_X$ in $OA$. Zato lahko definiramo $\rho(X) = OA \cap p_X$.




Naj bo $Y \in AB$ in izberimo poljubno točko $C \in \mathcal{A} - AB$. Naj bo $q_{Y,C}$ premica skozi $\rho(C)$, ki je vzporedna premici $YC$. Radi bi se prepričali, da presek $Y_C = OA \cap q_{Y,C}$ neodvisen od točke $C$.

Naj bo $D$ še ena točka v $\mathcal{A}$, ki ni na $OA$. Denimo, da $D$ tudi ne leži na $OC$. Tedaj se različne premice $OA$, $OC$ in $OD$ sekajo v $O$. Za točke $A, B \in OA$, $C, \rho(C) \in OC$ in $D, \rho(D) \in OD$ velja $AC \parallel p_C = B\rho(C)$ in $AD \parallel p_D = B\rho(D)$. Po drugem Desarguesovem izreku sta premici $CD$ in $\rho(C)\rho(D)$ vzporedni. Sedaj za točke $Y, Y_C \in OA$, $C, \rho(C) \in OC$ in $D, \rho(D) \in OD$ velja, da je $CD \parallel \rho(C)\rho(D)$ in $CY \parallel q_{Y,C} = \rho(C)Y_C$. Po drugem Desarguesovem izreku je tedaj $DY \parallel \rho(D)Y_C$. Ker je premica $q_{Y,D}$ edina, ki je vzporedna s premico $DY$ in gre skozi $\rho(D)$, je




$q_{Y,D} = \rho(D)Y_C$. Zato je $Y_D = OA \cap q_{Y,D} = OA \cap \rho(D)Y_C = Y_C$.

Naj bo sedaj $D \in OC$. Po posledici 3.3 obstaja točka $E$, ki ni ne na $OA$ in ne na $OC = OD$. Tedaj je $Y_C = Y_E$ in $Y_D = Y_E$. Torej je presek $Y_C = AB \cap q_{Y,C} := \rho(Y)$ neodvisen od izbire točke $C$.

Tako smo definirali preslikavo $\rho\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, za katero velja $\rho(OC) \subset OC$ za vse $C \in \mathcal{A} - \{O\}$ in $O$ je edina točka, ki se preslika v $O$.

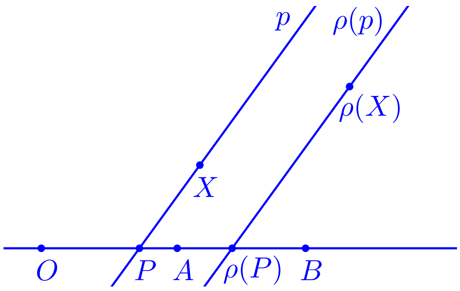
• Preslikava $\rho$ je injektivna: Naj za $X, Y \in \mathcal{A}$, ki nista na premici $OA$, velja $\rho(X) = \rho(Y)$. Tedaj je $OX = OY$. Premici $p_X$ in $p_Y$ potekata skozi točki $B \notin OX$ in $\rho(X) = \rho(Y)$. Torej je $p_X = p_Y$ in zato $AX \parallel p_X \parallel AY$. Od tod sledi $AX = AY$ in zato $X = OX \cap AX = OY \cap AY = Y$.

Naj za $X, Y \in AB - \{O\}$ velja $\rho(X) = \rho(Y)$. Za poljubno točko $C \notin OA$ tako velja $q_{X,C} = \rho(C)\rho(X) = \rho(C)\rho(X) = q_{Y,C}$. Zato sta premici $CX$ in $CY$ vzporedni in ker se sekata, sta enaki. Zato je $X = OA \cap CX = OA \cap CY = Y$.

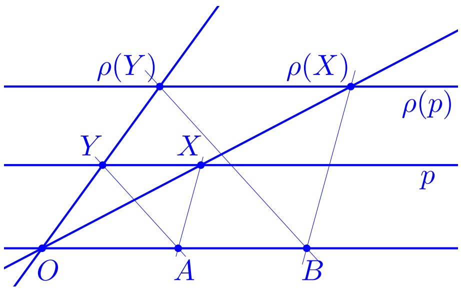
• Preslikava $\rho$ je surjektivna: Naj bo $Y \in \mathcal{A}$, ki ni na $OA$. Naj bosta $p$ vzporednica s premico $YB$ skozi točko $A$ in $X = p \cap OY$. Tedaj je $p_X = BY$ in zato $\rho(X) = p_X \cap OX = YB \cap OY = Y$. Naj bo $Y \in OA - \{O\}$ in izberimo $C \in \mathcal{A}$, ki ni na $OA$. Naj bosta $q$ vzporednica premici $Y\rho(C)$ skozi $C$ in $X = q \cap OA$. Tedaj je $q_{X,C} = Y\rho(C)$ in zato $\rho(X) = q_{X,C} \cap OA = Y\rho(C) \cap OA = Y$.

• Preslikava $\rho$ je dilatacija: Naj bo $p$ poljubna premica v $\mathcal{A}$. Če je $O \in p$, iz konstrukcije sledi, da je $\rho(p)$, torej je slika premice vzporedna s samo premico. Naj velja $O \notin p$. Ločimo dve možnosti.

Denimo, da se $OA$ in $p$ sekata in presek označimo s $P$. Tedaj je za vsako točko $X \in p - \{P\}$ velja $\rho(X) \in q_{P,X}$ in $q_{P,X} \parallel XP = p$. Torej je slika premice $p$ njena vzporednica skozi $\rho(X)$.




Premici $p$ in $OA$ se sekata.




Premici $p$ in $OA$ sta vzporedni.

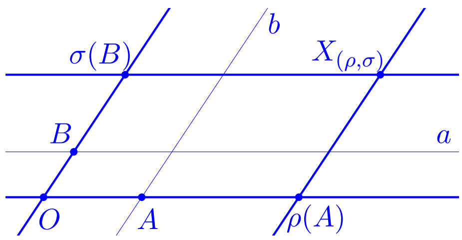
Naj bo sedaj $p \parallel OA$ in naj bosta $X, Y \in p$ različni točki. Tedaj za točke $A, B \in OA$, $X, \rho(X) \in OX$ in $Y, \rho(Y) \in OY$ velja $AX \parallel p_X = B\rho(X)$ in $AY \parallel p_Y = B\rho(Y)$. Po drugem Desarguesovem izreku je $p = XY \parallel \rho(X)\rho(Y) = \rho(p)$. Torej je $\rho$ razteg s središčem v $O$, ki $A$ preslika v $B$, zato $\mathcal{A}$ zadošča aksiomu **A5** v točki $O$.

Dokažimo še obrat izreka. Denimo, da v aksiomatsko definirani ravnini $\mathcal{A}$ velja aksiom **A5** za točko $O$. Naj bodo $p$, $q$ in $r$ različne premice v $\mathcal{A}$, ki se sekajo v $O$, in $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$, $R, R' \in r$ take različne točke, da je $PQ \parallel P'Q'$ in $QR \parallel Q'R'$. Po **A5** obstaja razteg $\rho\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ s središčem v $O$, ki $Q$ preslika v $Q'$. Ker $\rho$ premico preslika v vzporedno premico, je $\rho(PQ)$ vzporedna s $PQ$ in gre skozi $Q'$. Tudi $P'Q'$ je vzporedna s premico $PQ$ in gre skozi $Q'$, zato je $\rho(PQ) = P'Q'$. Torej je

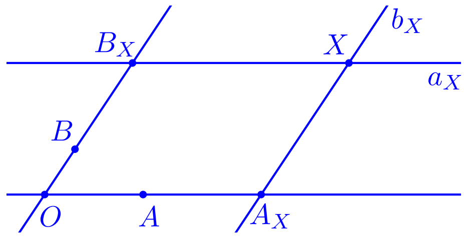
$$\rho(P) = OP \cap \rho(PQ) = OP \cap P'Q' = P'.$$

Enako velja $\rho(R) = R'$. Razteg $\rho$ tako premico $PR$ preslika v premico $P'R'$, zato sta premici vzporedni. Torej v $\mathcal{A}$ velja drugi Desarguesov izrek za točko $O$. $\square$

Naj bo $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina ravnina, ki zadošča aksiomu **A5** v točki $O$. Izberimo taki točki $A, B \in \mathcal{A}$, da so $O$, $A$ in $B$ nekolinearne. Za poljubna raztega $\rho, \sigma \in R_O(\mathcal{A})$ naj bosta $a$ in $b$ premici, za kateri velja $a \parallel OA$, $B \in a$, $b \parallel OB$ in $A \in b$. Premici $\rho(b)$ in $\sigma(a)$ nista vzporedni, njun presek označimo $X_{(\rho,\sigma)}$. Torej urejeni par $(\rho, \sigma)$ natanko določa točko v afini ravnini $\mathcal{A}$.




Velja tudi obratno, namreč vsako točko v $\mathcal{A}$ lahko podamo na zgornji način.




Velja $O = X_{c_O,c_O}$, kjer je $c_O$ konstantna preslikava. Za $X \in \mathcal{A} - \{O\}$ naj bosta $a_X$ edina vzporednica s premico $OA$, ki gre skozi $X$, in $b_X$ edina vzporednica s premico $OB$, ki gre skozi $X$. Naj bosta $A_X = b_X \cap OA$ in $B_X = a_X \cap OB$. Ker $\mathcal{A}$ zadošča aksiomu **A5**, obstajata raztega $\rho_A, \rho_B \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ s središčem v $O$, da je $\rho_A(A) = A_X$ in $\rho_B(B) = B_X$. Po konstrukciji je $X = X_{\rho_A,\rho_B}$. Tako smo dokazali naslednjo lemo.

**Lema 3.26** *Naj bodo $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina ravnina, ki v točki $O$ zadošča aksiomu* **A5***, in $a, b \subset \mathcal{A}$ nevzporedni premici, ki se ne sekata v točki $O$. Tedaj je preslikava $R_O(\mathcal{A}) \times R_O(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, podana s predpisom $(\rho, \sigma) \mapsto \rho(a) \cap \sigma(b)$, bijekcija.*

Torej, če je $R_O(\mathcal{A})$ obseg in če je $\mathcal{A}$ vektorski prostor nad $R_O(\mathcal{A})$, je razsežnosti 2. Preostanek razdelka bomo posvetili dokazu, da je $R_O(\mathcal{A})$ obseg, če le ravnina $\mathcal{A}$ zadošča obema dodatnima aksiomoma **A4** in **A5**.

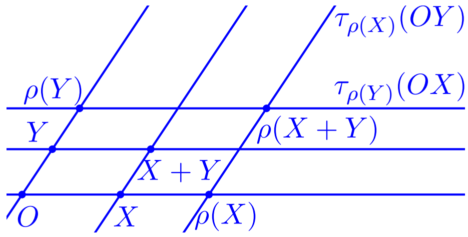
Jasno je kompozitum dveh raztegov s središčem v $O$ tudi razteg s središčem v $O$. Ker je neničelni razteg $\rho$ dilatacija, je inverz $\rho^{-1}$ tudi dilatacija. Ker je $\rho^{-1}(O) = O$, je tudi $\rho^{-1}$ razteg. Tako smo dokazali naslednjo trditev.

**Trditev 3.27** *Naj bo $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana ravnina. Množica neničelnih raztegov $R_O(\mathcal{A}) - \{c_O\}$ je grupa za komponiranje.*

Naj sedaj aksiomatsko definirana afina ravnina $\mathcal{A}$ zadošča obema dodatnima aksiomoma **A4** in **A5**. Po posledici 3.22 ravnina $\mathcal{A}$ zadošča **A5** v vsaki svoji točki. Izberimo poljubno točko $O \in \mathcal{A}$. Po izreku 3.15 je $\mathcal{A}$ abelova grupa z enoto $O$, kjer je seštevanje definirano s predpisom $A + B = \tau_A(B)$, pri čemer je $\tau_A \colon \mathcal{A} \to A$ edina translacija, ki $O$ preslika v $A$.

**Trditev 3.28** *Če aksiomatsko definirana afina ravnina $\mathcal{A}$ zadošča aksiomu* **A4***, je vsak razteg $\rho \in R_O(\mathcal{A})$ homomorfizem abelove grupe $\mathcal{A}$.*

**Dokaz:** Konstantni razteg $c_O$ je trivialni homomorfizem. Naj bo $\rho$ netrivialni razteg. Naj bosta $X, Y \in \mathcal{A}$ taki točki, da $O$, $X$ in $Y$ niso kolinearne. Premaknjena premica $\tau_{\rho(X)}(OY)$ je vzporedna premicama $OY$ in $X(X+Y)$.




Ker sta točki $O, \rho(Y) \in OY$, sta $\rho(X) = \tau_{\rho(X)}(O), \rho(X) + \rho(Y) = \tau_{\rho(X)}(\rho(Y)) \in \tau_{\rho(X)}(OY)$. Ker je $\rho(X) \in \rho(X(X+Y)) \parallel X(X+Y)$, je $\rho(X(X+Y)) = \tau_{\rho(X)}(OY)$. Zato je $\rho(X+Y) \in \tau_{\rho(X)}(OY)$. Enako dobimo, da sta $\rho(X)+\rho(Y), \rho(X+Y) \in \tau_{\rho(Y)}(OX)$. Ker premici $\tau_{\rho(X)}(OY)$ in $\tau_{\rho(Y)}(OX)$ nista vzporedni, je v njunem preseku le ena točka. Torej je $\rho(X)+\rho(Y) = \rho(X+Y)$.

Naj bosta $X, Y \in \mathcal{A}$ sedaj taki, da so $O$, $X$ in $Y$ kolinearne. Izberimo $Z$, ki ne leži na premici $OX = OY$. Tedaj so točke $O$, $Z$, $X+Y$ nekolinearne in $O$, $X$, $Y+Z$ nekolinearne. Iz prejšnjega odstavka tako dobimo

$$\rho(X+Y)+\rho(Z) = \rho((X+Y)+Z) = \rho(X)+\rho(Y+Z) = \rho(X)+\rho(Y)+\rho(Z).$$

Torej je tudi v tem primeru $\rho(X+Y) = \rho(X)+\rho(Y)$, zato je razteg $\rho$ homomorfizem. □

Dejstvo, da je $\mathcal{A}$ grupa, nam omogoča, da vsakemu raztegu iz $\rho \in R_O(\mathcal{A})$ priredimo obratni razteg $-\rho$ s predpisom $(-\rho)(X) = -(\rho(X))$. Poleg tega lahko na množici $R_O(\mathcal{A})$ definiramo še seštevanje. Za $\rho, \sigma \in R_O(\mathcal{A})$ naj bo preslikava $\rho+\sigma\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ podana s predpisom $(\rho+\sigma)(X) = \rho(X)+\sigma(X)$.

**Lema 3.29** *Naj bosta $\rho, \sigma \in R_O(\mathcal{A})$ raztega aksiomatsko definirane afine ravnine, ki zadošča aksiomu* **A4***.*

**a**. *Preslikava $-\rho$ je razteg s središčem v $O$.*

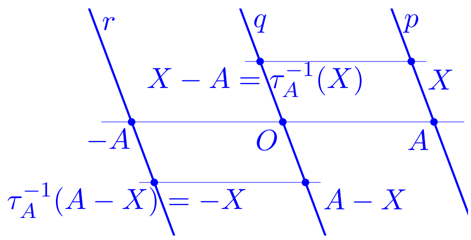
**b**. *Vsota $\rho+\sigma$ je razteg s središčem v $O$.*

**c**. *Velja $\rho+\sigma = \sigma+\rho$ in $\rho+(-\rho) = c_O$.*

**Dokaz: a.** Iz definicije obratnega raztega sledi, da je $-c_O = c_O$. Naj bo $\rho$ netrivialen razteg, tedaj je $-\rho$ bijekcija, za katero velja $(-\rho)(O) = O$. Pokažimo še, da $-\rho$ preslika premico v njej vzporedno premico.

Naj bo $p$ premica v $\mathcal{A}$. Denimo, da je $O \in p$. Po lemi 3.16 je za vsako točko $X \in p$ tudi $-X \in p$. Ker je $\rho(p) = p$, je zato tudi $(-\rho)(p) = p$. Naj sedaj $O \notin p$. Naj bo $A \in p$. Premici $q$ in $r$ naj bosta vzporedni s premico $p$ in naj gre $q$ skozi $O$ ter $r$ skozi $-A = \tau_A^{-1}(O)$. Ker gre $\tau_A^{-1}(p)$ skozi $\tau_A^{-1}(A) = O$, je

$\tau_A^{-1}(p) = q$. Za vsako točko $X \in p$ je torej $\tau_A^{-1}(X) = X - A \in q$ in zato je po lemi 3.16 tudi $A - X = -(X - A) \in q$. Ker sta $r$ in $\tau_A^{-1}(q)$ vzporedni s premico $q$ in gresta skozi $-A$, sta enaki. Torej je $-X = \tau_A^{-1}(A - X) \in r$. Tako smo pokazali, da je $(-\rho)(p) = r \parallel p$.



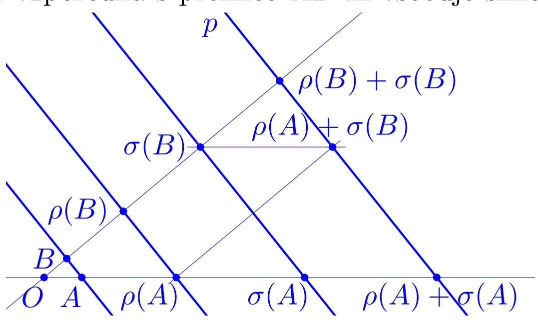

**b.** Če je $\rho = c_O$, je $\rho + \sigma = \sigma$, in če je $\sigma = c_O$, je $\rho + \sigma = \rho$. V obeh primerih dobimo razteg s središčem v $O$.

Naj bosta raztega $\rho$ in $\sigma$ različna od konstante $c_O$. Denimo, da obstaja $X \in \mathcal{A} - \{O\}$, da je $(\rho + \sigma)(X) = O$. Tedaj je $\rho(X) = -\sigma(X)$, po posledici 3.20 je $\rho = -\sigma$ in zato $\rho + \sigma = c_O \in R_O(\mathcal{A})$.

Denimo, da je za vsak $X \in \mathcal{A} - \{O\}$ slika $(\rho + \sigma)(X) \neq O$. Pokažimo, da je v tem primeru vsota $\rho + \sigma$ bijektivni razteg.

• Vsota $\rho + \sigma$ je injektivna: Denimo, da je $(\rho + \sigma)(X) = (\rho + \sigma)(Y)$. Tedaj je $\rho(X) - \rho(Y) = (-\sigma)(X) - (-\sigma)(Y)$. Ker sta $\rho$ in $-\sigma$ homomorfizma, se ujemata v točki $X - Y$. Ker sta tako $\rho$ in $\sigma$ raztega, ki se ujemata v eni točki, sta po posledici 3.20 enaka. Tedaj je $\rho + \sigma = \rho + (-\rho) = c_O$. Ker smo predpostavili, da $(\rho + \sigma)(X) \neq O$ za vse $X \in \mathcal{A} - \{O\}$, je vsota res injektivna.

• Za različni točki $A, B \in \mathcal{A}$ velja, da sta premici $AB$ in $\big((\rho + \sigma)(A)\big)\big((\rho + \sigma)(B)\big)$ vzporedni: Če je $O \in AB$, sta $\rho(A), \sigma(A) \in OA = AB$ in zato $(\rho + \sigma)(A) \in AB$. Enako velja za točko $B$, zato je premica $\big((\rho + \sigma)(A)\big)\big((\rho + \sigma)(B)\big) = AB$. Naj sedaj $O \notin AB$. Naj bo $p \parallel AB$, ki gre skozi točko $(\rho + \sigma)(A)$. Premica $\tau_{\rho(A)}(\sigma(AB))$ je vzporedna s premico $AB$ in vsebuje sliko točke $A$ s kompozitumom dveh translacij $\tau_{\rho(A)}(\sigma(A)) = \rho(A) + \sigma(A)$, zato je premica $\tau_{\rho(A)}(\sigma(AB)) = p$. Torej je tudi $\tau_{\rho(A)}(\sigma(B)) = \rho(A) + \sigma(B)$ na premici $p$. Prav tako je premica $\tau_{\sigma(B)}(\rho(AB))$ vzporedna s premico $AB$ in vsebuje točko $\tau_{\sigma(B)}(\rho(A)) = \rho(A) + \sigma(B)$. Zato je $\tau_{\sigma(B)}(\rho(AB)) = p$ in točka $\tau_{\sigma(B)}(\rho(B)) = \rho(B) + \sigma(B)$ je na $p$. Torej je premica $\big((\rho + \sigma)(A)\big)\big((\rho + \sigma)(B)\big) = p$ in je tako vzporedna



s premico $AB$.

• Vsota $\rho+\sigma$ je surjektivna: Naj bo $Y \in \mathcal{A}-\{O\}$ poljubna točka. Izberimo točko $A \in \mathcal{A}$, da so $O$, $A$ in $Y$ nekolinearne. Tedaj je $(\rho+\sigma)(A) \in OA$ in po predpostavki različna od $O$. Naj bodo $p$ premica skozi točki $(\rho+\sigma)(A)$ in $Y$, $q$ njena vzporednica skozi točko $A$ in $X = q \cap OY$. Iz prejšnje točke sledi, da sta premici $AX$ in $\big((\rho+\sigma)(A)\big)\big((\rho+\sigma)(X)\big) = p$ vzporedni. Ker je $OX = OY$, je $(\rho+\sigma)(X) = OX \cap \big((\rho+\sigma)(A)\big)\big((\rho+\sigma)(X)\big) = OY \cap p = Y$.

**c.** Enakosti veljata, saj je $\mathcal{A}$ abelova grupa in tako za vsak $X \in \mathcal{X}$ velja $(\rho+\sigma)(X) = \rho(X)+\sigma(X) = \sigma(X)+\rho(X) = (\sigma+\rho)(X)$ in $(\rho+(-\rho))(X) = \rho(X)-\rho(X) = O = c_O(X)$. □

**Izrek 3.30** *Naj bo $O \in \mathcal{A}$ poljubna točka v aksiomatsko definirani afini ravnini, ki zadošča aksiomu* **A4**. *Tedaj je $(R_O(\mathcal{A}), +, \circ)$ obseg.*

**Dokaz:** Po lemi 3.29 je $(R_O(\mathcal{A}), +)$ abelova grupa z ničlo $c_O$. Po trditvi 3.27 je $(R_O(\mathcal{A}) - \{c_O\}, \circ)$ grupa z enoto $id_{\mathcal{A}}$. Po trditvi 3.28 je vsak razteg homomorfizem, zato za poljubne raztege $\rho, \sigma, \pi \in R_O(\mathcal{A})$ velja $\rho((\sigma+\pi)(X)) = \rho(\sigma(X)+\pi(X)) = (\rho\circ\sigma)(X)+(\rho\circ\pi)(X) = (\rho\circ\sigma+\rho\circ\pi)(X)$ za vsako točko $X \in \mathcal{A}$. Torej v $R_O(\mathcal{A})$ velja tudi distributivnost, zato je $(R_O(\mathcal{A}), +, \circ)$ obseg. □

**Izrek 3.31** *Naj bo $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina ravnina, ki zadošča aksiomoma* **A4** *in* **A5**. *Za vsako točko $O \in \mathcal{A}$ je $\mathcal{A}$ vektorski prostor nad $R_O(\mathcal{A})$ razsežnosti 2. Afina geometrija $\mathcal{A}$ je izomorfna afini geometriji $\mathbf{A}(R_O^2(\mathcal{A}))$.*

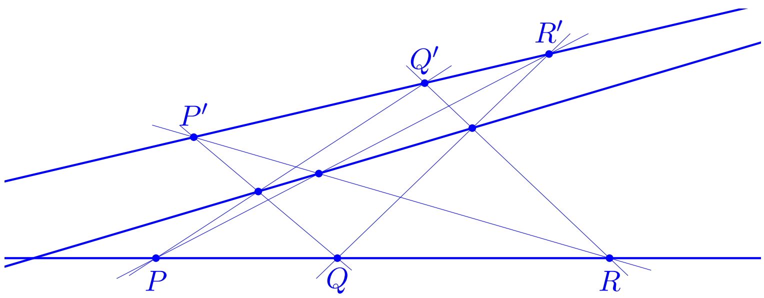
**Dokaz:** Po izreku 3.15 je $\mathcal{A}$ abelova grupa in po zgornjem izreku je $R_O(\mathcal{A})$ obseg. Naj bodo $\rho, \sigma \in R_O(\mathcal{A})$ poljubna raztega in $X, Y \in \mathcal{A}$ poljubni točki. Po definiciji je $(\rho+\sigma)(X) = \rho(X)+\sigma(X)$ in $(\rho\circ\sigma)(X) = \rho(\sigma(X))$. Ker je vsak razteg homomorfizem, je tudi $\rho(X+Y) = \rho(X)+\rho(Y)$. Torej je $\mathcal{A}$ vektorski prostor nad obsegom $R_O(\mathcal{A})$. Naj bosta $A, B \in \mathcal{A}$ taki točki, da $O$, $A$ in $B$ niso kolinearne. Naj bo $a \parallel OA$, $b \parallel OB$, $A \in b$ in $B \in a$. Po lemi 3.26 obstajata natanko določena raztega $\rho, \sigma \in R_O(\mathcal{A})$, da je $X = \rho(b) \cap \sigma(a)$. Ker je $\rho(A) = \rho(b) \cap OA$ in $\sigma(B) = \sigma(a) \cap OB$, je $\rho(A)+\sigma(B) = X$. Torej je $\dim \mathcal{A} = 2$.

Predpis $(R_O(\mathcal{A}))^2 \to \mathcal{A}$ iz leme 3.26, ki je podan kot $(\rho, \sigma) \mapsto \rho(A)+\sigma(B)$, je jasno izomorfizem vektorskih prostorov in zato porodi izomorfizem med afinima geometrijama $\mathbf{A}(R_O^2(\mathcal{A}))$ in $\mathcal{A}$. □

## PAPPUSOV IZREK

Prišli smo skoraj do konca naše zgodbe o aksiomatsko definiranih afinih ravninah. Zgolj z geometrijo v ravnini $\mathcal{A}$ smo uspeli definirati vektorsko strukturo na množici $\mathcal{A}$. Za sam konec se vprašajmo, če lahko zgolj s pomočjo geometrije ugotovimo, ali je $\mathcal{A}$ vektorski prostor nad **komutativnim** obsegom.

Pappus iz Aleksandrije je v 3. stoletju pred našim štetjem ugotovil, da če so točke $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ kolinearne, $P', Q', R' \in \mathbb{R}^2$ kolinearne in velja $PR' \nparallel P'R$, $PQ' \nparallel P'Q$ in $RQ' \nparallel R'Q$, so tudi $PR' \cap P'R$, $PQ' \cap P'Q$ in $RQ' \cap R'Q$ kolinearne točke.




Pappusovega izreka ni težko dokazati. Pri dokazovanju opazimo, da izrek velja tudi v nekaterih drugih afinih ravninah.

**Izrek 3.32** *(Pappusov izrek) Naj bosta $p$ in $q$ različni premici v afini ravnini $\mathcal{A}$ nad poljem $\mathcal{O}$ in naj bodo $P, Q, R \in p$ in $P', Q', R' \in q$ različne točke.*

- **a.** *Če je $PQ' \parallel P'Q$ in $PR' \parallel P'R$, je $QR' \parallel Q'R$.*
- **b.** *Če $PQ' \nparallel P'Q$, $PR' \nparallel P'R$ in $QR' \nparallel Q'R$, so točke $PQ' \cap P'Q$, $PR' \cap P'R$ in $RQ' \cap R'Q$ kolinearne.*

Izrek bomo dokazali v naslednjem poglavju, saj bo posledica Pappusovega izreka za projektivno ravnino. Kako je z izrekom v afinih ravninah nad nekomutativnimi obsegi?

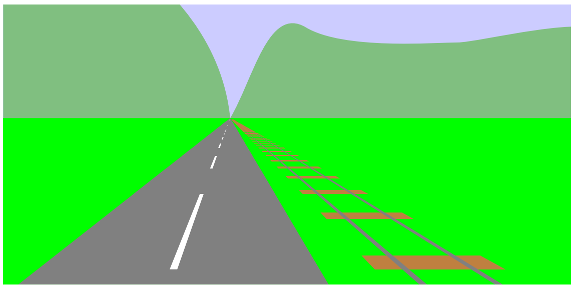
**Izrek 3.33** *V afini ravnini $\mathcal{A}$ nad obsegom $\mathcal{O}$ velja Pappusov izrek natanko tedaj, ko je obseg $\mathcal{O}$ komutativen.*

**Dokaz:** Naj v $\mathcal{A}$ velja Pappusov izrek. Izberimo dva skalarja $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$, različna od ničle in enice. Izberimo dve premici $p$ in $q$ v $\mathcal{A}$, ki se sekata v točki $O$, in točki $P \in p$ ter $R' \in q$, različni od $O$. Naj bosta $Q = \alpha P$ in $Q' = \beta R'$. Ker je množenje s skalarjem razteg, je $PQ' \parallel \alpha(PQ') = QP'$, kjer smo označili $P' := \alpha Q' = \alpha\beta R'$. Enako za točko $R := \beta Q = \beta\alpha P$ velja $QR' \parallel RQ'$. Ker v $\mathcal{A}$ velja Pappusov izrek, je tako tudi $PR' \parallel RP'$. Množenje s skalarjem $\alpha\beta$ je razteg, ki premico $PR'$ preslika v njej vzporedno premico, ki gre skozi točko $(\alpha\beta)R' = P'$. Torej je $(\alpha\beta)(PR') = P'R$. Tudi množenje s skalarjem $\beta\alpha$ je razteg, ki premico $PR'$ preslika v njej vzporedno premico, ki gre skozi točko $(\beta\alpha)P = R$. Tako sta premici $(\alpha\beta)(PR')$ in $(\beta\alpha)(PR')$ enaki. Zato je $(\alpha\beta)P = OP \cap (\alpha\beta)(PR') = OP \cap (\beta\alpha)(PR') = (\beta\alpha)(P)$. Ker se raztega $\alpha\beta$ in $\beta\alpha$ ujemata v točki, različni od $O$, sta po posledici 3.20 enaka. Torej je $\mathcal{O}$ komutativen obseg. $\square$

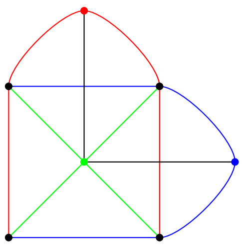
# 4 PROJEKTIVNA GEOMETRIJA

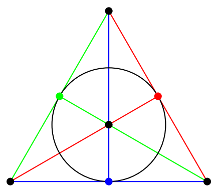
## UVOD

Če želimo čim bolj realistično narisati sliko, je treba enako velike predmete, ki so od nas opazovalca različno oddaljeni, narisati različno veliko. Bolj kot je predmet oddaljen od nas, manjši bo na naši sliki. Na primer cesta, ki je v naši bližini široka, se z oddaljenostjo "oža". Daleč nekje pa se nam celo zdi, da se levi in desni rob cestišča stakneta. To pomeni, da se nekje daleč na obzorju vse vzporedne premice staknejo v isto točko.



Projektivno geometrijo dobimo iz afine tako, da vsaki množici vzporednih premic v afini geometriji dodamo točko "na obzorju". Tako se vse vzporedne premice sekajo v novo dodani točki na obzorju. V projektivni ravnini se tako poljubni premici sekata v natanko eni točki. Oglejmo si, kako dobimo projektivno ravnino iz najmanjše afine ravnine $\mathbb{F}_2^2$. V tem primeru obstajajo tri družine vzporednih premic. To so $P_1 = \{\{(0,0),(1,0)\},\{(0,1),(1,1)\}\}$, $P_2 = \{\{(0,0),(0,1)\},\{(1,0),(1,1)\}\}$ in $P_3 = \{\{(0,0),(1,1)\},\{(0,1),(1,0)\}\}$. Torej bo imela projektivna ravnina, ki jo dobimo iz afine ravnine $\mathbb{F}_2^2$, tri nove točke na obzorju. Na spodnji levi sliki sta premici iz $P_1$ obarvani modro in





pripadajoča točka v neskončnosti prav tako. Za množico $P_2$ je uporabljena rdeča barva in za $P_3$ zelena. Črna premica skozi točke v neskončnosti pa predstavlja premico v neskočnosti, tako imenovano obzorje. Na zgornji desni sliki je le lepše narisana projektivna ravnina, ki jo dobimo iz $\mathbb{F}_2^2$. Imenuje se **Fanova ravnina**.

Na podoben način si lahko prestavljamo projektivno ravnino, ki jo dobimo iz $\mathbb{F}_p^2$. V tem primeru je $p+1$ družin vzporednih premic, v kar se prepričamo na naslednji način. Naj bo $\vec{r} = (x, y)$ smerni vektor ene izmed družin. Če je $x \neq 0$, obstaja vektor $\vec{s} = (1, y')$, ki je linearno odvisen z vektorjem $\vec{r}$; torej kaže v isto smer. Če pa je $x = 0$, je $\vec{r}$ linearno odvisen z vektorjem $\vec{s} = (0, 1)$. Tako dobimo natanko $p + 1$ različnih vektorjev, ki so paroma linearno neodvisni. To so $(0, 1), (1, 0), (1, 1), \ldots, (1, p - 1)$.

Kako pa si predstavljamo projektivno ravnino, ki jo dobimo iz evklidske afine ravnine $\mathbb{R}^2$? Ravnino $\mathbb{R}^2$ vložimo v $\mathbb{R}^3$ na nivo $z = 1$. Tedaj je vsaka točka v $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ presek te ravnine z nekim enorazsežnim vektorskim prostorom v $\mathbb{R}^3$. Torej je množica točk v $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ v bijekciji z množico enorazsežnih vektorskih prostorov v $\mathbb{R}^3$, ki ne ležijo na ravnini $z = 0$. Premica v $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$, podana z enačbo $\vec{x} = \vec{r}_0 + t\vec{r}$, pa je presek ravnine $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ z ravnino, ki gre skozi koordinatno izhodišče in vsebuje vektorja $\vec{r}$ ter $\vec{r}_0$. Vsako premico v $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ tako lahko predstavimo kot dvorazsežen podprostor v $\mathbb{R}^2$, različen od ravnine $z = 0$.

Naj bo $P$ množica vzporednih premic v $\mathbb{R}^2$. Naj bo $\vec{r}$ smerni vektor premic iz $P$. Torej vsako premico iz $P$ lahko zapišemo z enačbo $\vec{x} = \vec{r}_0 + t\vec{r}$ za nek vektor $\vec{r}_0$. Premici pripadajoči dvorazsežni podprostor napenajta vektorja $\vec{r}$ in $\vec{r}_0$. Torej se dvorazsežna prostora, ki pripadata poljubnima premica iz $P$, sekata v enorazsežnem podprostoru, ki ga določa vektor $\vec{r}$. Torej nam enorazsežni podprostori v $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ določajo točke v neskončnosti. Od tod dobimo idejo, kako definirati projektivno geometrijo nad poljubnim vektorskim prostorom.

**Definicija 4.1** *Naj bo $V$ končnorazsežen vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$. Množica vseh vektorskih podprostorov v $V$ se imenuje* ***projektivna geometrija*** $\mathbf{P}(V)$ *nad $V$. Enorazsežne podprostore imenujemo točke projektivne geometrije, dvorazsežne projektivne premice, vektorske podprostore korazsežnosti 1 pa imenujemo projektivne hiperravnine.* ***Projektivni prostor*** $\mathcal{P}V$ *je množica vseh točk projektivne geometrije* $\mathbf{P}(V)$.

Naj opomnimo, da topološka kvocientna prostora $(\mathbb{R}^n - \{0\})/_{\substack{x \sim \lambda x \\ \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}}}$ in $(\mathbb{C}^n - \{0\})/_{\substack{z \sim \lambda z \\ \lambda \in \mathbb{C}-\{0\}}}$ imenujemo projektivna prostora in ju označimo z $\mathbb{R}P^n$

in s $\mathbb{C}P^n$. Množici $\mathbb{R}P^n$ in $\mathbb{C}P^n$ sta v naravni bijekciji z množicama $\mathcal{P}\mathbb{R}^{n+1}$ in $\mathcal{P}\mathbb{C}^{n+1}$.

Za vsak element $U \in \mathbf{P}(V)$ projektivne geometrije definiramo **projektivno razsežnost** kot $\operatorname{pdim} U = \dim U - 1$. Definicija je smiselna, saj nam enorazsežni vektorski podprostori predstavljajo točke, torej ničrazsežne projektivne objekte, dvorazsežni prostori v $V$ nam predstavljajo projektivne premice, torej enorazsežne projektivne objekte ... **Razsežnost projektivne geometrije** $\mathbf{P}(V)$ je enaka $\operatorname{pdim} V$. Če je $\operatorname{pdim} V = 2$, je $\mathbf{P}(V)$ projektivna ravnina. Enorazsežen realen projektivni prostor $\mathbb{R}P^1$ je topološka krožnica. Čeprav tu ne govorimo o topologiji, si bomo projektivno premico $\mathbb{R}P$ predstavljali kot krožnico.

Naj bosta $X, Y \in \mathcal{P}V$ različni točki projektivne geometrije. Projektivna premica, ki gre skozi $X$ in $Y$, je dvorazsežen vektorski podprostor v $V$, ki vsebuje enorazsežna podprostora $X$ in $Y$. Torej je premica skozi točki $X$ in $Y$ direktna vsota $X \oplus Y$. Torej kot v afinem prostoru tudi v projektivnem prostoru velja, da gre skozi poljubni različni točki natanko ena projektivna premica.

Opazimo, da je projektivna ravnina $\mathbf{P}(V)$ "bolj homogena" od afine ravnine. Namreč, poljubni različni premici iz $\mathbf{P}(V)$ se sekata v natanko eni točki. Če sta $L$ in $M$ različni premici v $\mathbf{P}(V)$, sta $L$ in $M$ različna dvorazsežna vektorska podprostora v trorazsežnem vektorskem prostoru $V$. Vemo, da je $L \cap M$ enorazsežen vektorski podprostor v $V$ oziroma točka v projektivni ravnini $\mathbf{P}(V)$. To pa ni edina prednost projektivne geometrije pred afino. Drugo prednost si bomo ogledali v naslednjem razdelku.

Povejmo še, kdaj sta dve projektivni geometriji izomorfni.

**Definicija 4.2** *Naj bosta $V$ in $V'$ vektorska prostora nad obsegom $\mathcal{O}$ enake razsežnosti. Projektivni geometriji $\mathbf{P}(V)$ in $\mathbf{P}(V')$ sta* ***izomorfni****, če obstaja bijektivna preslikava $\widetilde{\gamma}\colon \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V')$, ki ohranja inkluzije; t.j. za $U < U'$ v $V$ je $\widetilde{\gamma}(U) < \widetilde{\gamma}(U')$ v $V'$.*

**Lema 4.3** *Naj bosta $V$ in $V'$ vektorska prostora nad obsegom $\mathcal{O}$ enake razsežnosti. Če je $\widetilde{\gamma}\colon \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V')$ izomorfizem projektivnih geometrij, za vsak $U < V$ velja $\dim \widetilde{\gamma}(U) = \dim U$.*

**Dokaz:** Ker je $\widetilde{\gamma}$ bijekcija, ki ohranja inkluzije, najmanjši vektorski podprostor $\{0\}$ v $V$ preslika v najmanjši vektorski podprostor $\{0\}$ v $V'$. Iz enakega razloga $\widetilde{\gamma}$ preslika največji podprostor $V$ v največjega $V'$.

Naj bo $\{x_1, \ldots, x_k\}$ baza vektorskega prostora $U$, ki jo dopolnimo do baze $\{x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n\}$ vektorskega prostora $V$. Za $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ označimo $U_i = \text{Lin}\{x_1, \ldots, x_i\}$. Ker je $\widetilde{\gamma}$ bijekcija, ki ohranja inkluzije, velja

$$0 = \widetilde{\gamma}(U_0) \subsetneqq \widetilde{\gamma}(U_1) \subsetneqq \cdots \subsetneqq \widetilde{\gamma}(U_n) = n.$$

Torej je za vsak $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ razsežnost $\dim \widetilde{\gamma}(U_i) = i = \dim U_i$ in v posebnem primeru je $\dim \widetilde{\gamma}(U) = k = \dim U$. $\square$

## DUALNOST

V tem razdelku je $V$ končno razsežen vektorski prostor nad **poljem** $\mathcal{O}$. Naj bo $V^*$ vektorski prostor vseh linearnih funkcionalov na $V$. Naj pripomnimo, da v primeru vektorskega prostora $V$ nad nekomutativnim obsegom množica vseh linearnih funkcionalov nad $V$ ni vektorski prostor. Namreč, za linearen funkcional $\varphi \colon V \to \mathcal{O}$ in skalar $\alpha \in \mathcal{O}$ produkt $\alpha \cdot \varphi \colon V \to \mathcal{O}$ v splošnem ni linearen.

Naj bo $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza vektorskega prostora $V$. Za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$ definiramo dualni fukcional $\varphi_i \colon V \to \mathcal{O}$ k vektorju $x_i$ s predpisom $\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Torej, $\varphi_i$ bazni vektor $x_i$ preslika v 1, jedro pa je hiperravnina, ki jo napenjajo preostali bazni vektorji. Na ta način smo podali izomorfizem vektorskih prostorov $V \to V^*$, ki $x_i$ pošlje v $\varphi_i$. Zgornji izomorfizem med vektorskim prostorom in njegovim dualom je odvisen od izbire baze. Je pa drugi dual $V^{**}$ vektorskega prostora $V$, ki je dualni prostor vektorskega prostora $V^*$, naravno izomorfen vektorskemu prostoru $V$. Naravni izomorfizem $\psi \colon V \to V^{**}$ je podan s predpisom $\psi(x)(f) = f(x)$; to pomeni, da je $\psi(x) \colon V^* \to \mathcal{O}$ linearni funkcional, ki vektorju (linearnemu funkcionalu) $f$ priredi njegovo vrednost v točki $x$. Izomorfizma vektorskih prostorov $V \to V^*$ in $V \to V^{**}$ porodita izomorfizma projektivnih geometrij $\mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V^*)$ in $\mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V^{**})$. Vendar pa med geometrijama $\mathbf{P}(V)$ in $\mathbf{P}(V^*)$ obstaja še ena bijekcija, ki sicer ni izomorfizem geometrij, saj ne ohranja inkluzij, a ima zelo zanimive lastnosti.

**Definicija 4.4** ***Zgornji anhilator*** *vektorskega podprostora $W < V$ je vektorski prostor $W^\perp = \{f \in V^* \mid f(w) = 0 \text{ za vse } w \in W\}$.* ***Spodnji anhilator*** *vektorskega podprostora $U < V^*$ je vektorski prostor $U_\perp = \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ za vse } f \in U\}$.*

Oba anhilatorja sta tako predpisa iz projektivne geometrije nad $V$ v projektivno geometrijo nad $V^*$ oziroma iz projektivne geometrije nad $V^*$ v projektivno geometrijo nad $V$. Predpisa nista izomorfizma, saj nikakor ne ohranjata projektivne razsežnosti. V primeru projektivne ravnine oba anhilatorja točke slikata v projektivne premice in obratno, v kar se bomo kmalu prepričali. Kljub temu pa sta predpisa bijekciji, kot pove naslednji izrek.

**Izrek 4.5** *Naj bo $V$ končnorazsežen vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$. Zgornji anhilator $^{\perp}\colon \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V^*)$ je bijekcija, ki ima za inverz spodnji anhilator $_{\perp}\colon \mathbf{P}(V^*) \to \mathbf{P}(V)$.*

**Dokaz:** Naj bo $U < V$ poljuben vektorski podprostor. Po definiciji zgornjega anhilatorja za vsak $f \in U^{\perp}$ velja $f(x) = 0$. To pomeni, da vsi linearni funkcionali iz $U^{\perp}$ preslikajo $x$ v 0. Torej je $x \in (U^{\perp})_{\perp}$. Tako smo pokazali, da je $U < (U^{\perp})_{\perp}$. Pokažimo še inkluzijo v drugo smer. Naj velja $x \notin U$. Izberimo bazo $\{x_1, \dots, x_k\}$ vektorskega prostora $U$. Ker $x \notin U$, je množica $\{x_1, \dots, x_k, x\}$ linearno neodvisna. Dopolnimo jo do baze $\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ $(x_{k+1} := x)$ vektorskega prostora $U$. Naj bo $\varphi \in V^*$ dualni funkcional k vektorju $x$ v ravnokar definirani bazi za $V$. Tedaj je $\varphi(x) = 1 \neq 0$ in $\varphi(x_i) = 0$ za vse $i \in \{1, \dots, k\}$. Od tod sledi, da $\varphi$ preslika vse vektorje iz $U$ v 0 in zato velja $\varphi \in U^{\perp}$. Ker pa je $\varphi \in U^{\perp}$ in $\varphi(x) \neq 0$, element $x$ ni v spodnjem anhilatorju $(U^{\perp})_{\perp}$. S tem smo pokazali, da je $U = (U^{\perp})_{\perp}$ oziroma, da je spodnji anhilator levi inverz zgornjega anhilatorja.

Dokazovanja, da je spodnji anhilator tudi desni inverz zgornjega anhilatorja, se lahko lotimo na podoben način, kot smo to storili zgoraj. Lahko pa uporabimo naravni izomorfizem $\psi\colon V \to V^{**}$ in naslednji razmislek. Za vsak vektorski podprostor $U$ v dualu $V^*$ velja

$$\begin{aligned}
\psi(U_{\perp}) &= \psi\{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ za vse } f \in U\} = \\
&= \{\psi(v) \in V^{**} \mid f(v) = 0 \text{ za vse } f \in U\} = \\
&= \{\psi(v) \in V^{**} \mid \psi(v)(f) = 0 \text{ za vse } f \in U\} = U^{\perp}.
\end{aligned}$$

Naj bo sedaj $U$ vektorski podprostor v $V^*$. Tedaj je $U_{\perp}$ vektorski podprostor v $V$ in ker že vemo, da je spodnji anhilator levi inverz zgornjega anhilatorja, je $((U_{\perp})^{\perp})_{\perp} = U_{\perp}$. Zato je tudi $\psi(((U_{\perp})^{\perp})_{\perp}) = \psi(U_{\perp})$. Po zgornjem razmisleku je zato

$$((U_{\perp})^{\perp})^{\perp} = \psi(((U_{\perp})^{\perp})_{\perp}) = \psi(U_{\perp}) = U^{\perp}.$$

Ker smo že pokazali, da ima zgornji anhilator levi inverz, je zato injektivna preslikava. Torej iz enakosti $((U_{\perp})^{\perp})^{\perp} = U^{\perp}$ sledi $(U_{\perp})^{\perp} = U$, kar smo želeli pokazati. $\square$

Oglejmo si nekaj lastnosti zgornjega anhilatorja.

**Lema 4.6** *Naj bodo $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ in $U_1$, $U_2$, $U$ vektorski podprostori v $V$.*

**a**. *Če je $U_1 < U_2$, je $U_2^\perp < U_1^\perp$.*
**b**. *Velja $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.*
**c**. *Velja $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.*
**d**. *Velja $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$.*

Preden se lotimo dokazovanja, navedimo pomembnost zgornjih enakosti. Če sta $U_1$ in $U_2$ različni točki v projektivni ravnini $\mathbf{P}(V)$, je $U_1 \oplus U_2$ projektivna premica skozi ti dve točki. Po zadnji enakosti iz leme za $i \in \{1, 2\}$ velja $\dim U_i^\perp = \dim V - \dim U_i = 3 - 1 = 2$. Torej sta $U_1^\perp$ in $U_2^\perp$ projektivni premici v $\mathbf{P}(V^*)$. Ker je $\dim(U_1 + U_2)^\perp = \dim V - \dim(U_1 + U_2) = 3 - 2 = 1$, je $(U_1 + U_2)^\perp$ točka v $\mathbf{P}(V^*)$. Tako iz tretje enakosti sledi, da zgornji anhilator preslika projektivno premico $U_1 \oplus U_2$ v presek projektivnih premic $U_1^\perp$ in $U_2^\perp$. Podobno z uporabo druge in četrte enakosti dobimo, da zgornji anhilator preslika presek projektivnih premic $U_1$ in $U_2$ v projektivno premico, ki gre skozi točki $U_1^\perp$ in $U_2^\perp$; torej v premico $(U_1 \cap U_2)^\perp$.

**Dokaz: a.** Naj bo $U_1 < U_2$. Za linearni funkcional $f \in U_2^\perp$ velja $f(x) = 0$ za vse $x \in U_2$. Ker je $U_1 < U_2$, je $f(x) = 0$ za vse $x \in U_1$. Torej je $f \in U_1^\perp$ oziroma $U_2^\perp < U_1^\perp$.

**b.** Ker je $U_1 \cap U_2 < U_1, U_2$, je po prejšnji točki $U_1^\perp, U_2^\perp < (U_1 \cap U_2)^\perp$. Torej je $U_1^\perp + U_2^\perp < (U_1 \cap U_2)^\perp$. Dokažimo še obratno inkluzijo. Naj bo $f \in (U_1 \cap U_2)^\perp$. Torej je $f(x) = 0$ za vse $x \in U_1 \cap U_2$. Naj bosta $W_1$ in $W_2$ taka vektorska podprostora v $V$, da je $U_1 = (U_1 \cap U_2) \oplus W_1$ in $U_2 = (U_1 \cap U_2) \oplus W_2$. Naj bo sedaj $W_0$ tak vektorski podprostor, da je $(U_1 \cap U_2) \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus W_0 = V$. Torej za vsak vektor $x \in V$ obstajajo enolično določeni vektorji $u(x) \in U_1 \cap U_2$, $w_1(x) \in W_1$, $w_2(x) \in W_2$ in $w_0(x) \in W_0$, da je $x = u(x) + w_1(x) + w_2(x) + w_0(x)$. Tako za linearni funkcional $f$ velja $f(x) = f(w_1(x)) + f(w_2(x)) + f(w_0(x))$. Definirajmo linearna funkcionala $f_1, f_2 \colon V \to \mathcal{O}$ s predpisoma $f_1(x) = f(w_2(x)) + f(w_0(x))$ in $f_2(x) = f(w_1(x))$. Po definiciji je $f = f_1 + f_2$. Za vektor $x \in U_1$ je $w_2(x) = w_0(x) = 0$ in zato $f_1(x) = 0$. Za vektor $x \in U_2$ pa je $w_1(x) = w_0(x) = 0$ in zato $f_2(x) = 0$. Torej je $f = f_1 + f_2$ in $f_1 \in U_1^\perp$ ter $f_2 \in U_2^\perp$. Tako smo pokazali, da je $f \in U_1^\perp + U_2^\perp$ oziroma $(U_1 \cap U_2)^\perp < U_1^\perp + U_2^\perp$.

**d.** Pred tretjo enakostjo se prej prepričajmo o veljavnosti zadnje. Naj bo $\{x_1, \ldots, x_k\}$ baza vektorskega prostora $U$, ki jo dopolnimo do baze $\{x_1,$

$\dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ vektorskega prostora $V$. Naj bo $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ dualna baza vektorskega prostora $V^*$, torej velja $\varphi_j(x_i) = \delta_{i,j}$. Naj bo linearni funkcional $\varphi \in U^\perp$. Zapišimo ga v bazi $\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\varphi_n$. Za $i \in \{1, \dots, k\}$ je $0 = \varphi(x_i) = \alpha_i$. Torej je $\varphi = \alpha_{k+1}\varphi_{k+1} + \cdots + \alpha_n\varphi_n$ in zato $U^\perp < \mathrm{Lin}\{\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n\}$. Ker vektor $x \in U$ zapišemo kot $x = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k$, je za vsak $i \in \{k+1, \dots, n\}$ vrednost $\varphi_i(x) = \beta_1\varphi_i(x_1) + \cdots + \beta_k\varphi_i(x_k) = 0$. Torej je tudi $\mathrm{Lin}\{\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n\} < U^\perp$. Tako smo pokazali, da je $U^\perp = \mathrm{Lin}\{\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n\}$ in tako je $\dim U^\perp = n - k = \dim V - \dim U$.

**c.** Ker je $U_1, U_2 < U_1 + U_2$, iz druge točke sledi $U_1^\perp, U_2^\perp > (U_1 + U_2)^\perp$ oziroma $U_1^\perp \cap U_2^\perp > (U_1 + U_2)^\perp$. Če dokažemo, da sta vektorska prostora $U_1^\perp \cap U_2^\perp$ in $(U_1 + U_2)^\perp$ enakih razsežnosti, sledi $U_1^\perp \cap U_2^\perp = (U_1 + U_2)^\perp$.

Iz četrte enakosti, ki smo jo že dokazali, sledi

$$\begin{aligned}
\dim(U_1 + U_2)^\perp &= \dim V - \dim(U_1 + U_2) = \\
&= \dim V - (\dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)) = \\
&= \dim V - \dim U_1 - \dim U_2 + \dim(U_1 \cap U_2).
\end{aligned}$$

Za izračun razsežnosti preseka poleg četrte enakosti upoštevamo še enakost iz druge točke in dobimo

$$\begin{aligned}
&\dim(U_1^\perp \cap U_2^\perp) = \dim U_1^\perp + \dim U_2^\perp - \dim(U_1^\perp + U_2^\perp) = \\
&\quad = \dim U_1^\perp + \dim U_2^\perp - \dim(U_1 \cap U_2)^\perp = \\
&\quad = (\dim V - \dim U_1) + (\dim V - \dim U_2) - (\dim V - \dim(U_1 \cap U_2)) = \\
&\quad = \dim V - \dim U_1 - \dim U_2 + \dim(U_1 \cap U_2).
\end{aligned}$$

Torej je razsežnost $\dim(U_1 + U_2)^\perp = \dim(U_1^\perp \cap U_2^\perp)$ in zato je $U_1^\perp \cap U_2^\perp = (U_1 + U_2)^\perp$. □

Analogne enakosti veljajo za vektorske podprostore v $V^*$ in za spodnji anhilator.

**Definicija 4.7** ***Trditev*** $\mathcal{T}$ *o projektivni geometriji* $\mathbf{P}(V)$ *je izjava, ki vključuje elemente iz* $\mathbf{P}(V)$ *in relacije med njimi.*

Oglejmo si nekaj primerov.

**a.** $\mathcal{T}_1$: Skozi poljubni različni točki projektivne geometrije $\mathbf{P}(V)$ gre natanko ena projektivna premica.

Zapišimo trditev zgolj z matematičnimi simboli.

$$\mathcal{T}_1: \ \forall X, Y \in \mathbf{P}(V). X \neq Y. \dim X = \dim Y = 1 \Rightarrow \\ \exists! L \in \mathbf{P}(V). \dim L = 2. X, Y < L.$$

**b**. $\mathcal{T}_2$: Poljubni različni projektivni premici v projektivni ravnini $\mathbf{P}(V)$ se sekata v natanko eni točki.

$\mathcal{T}_2$ je trditev o projektivni ravnini:

$$\forall L, M \in \mathbf{P}(V). L \neq M. \dim L = \dim M = 2 \Rightarrow \\ \exists! X \in \mathbf{P}(V). \dim X = 1. X < L \cap M.$$

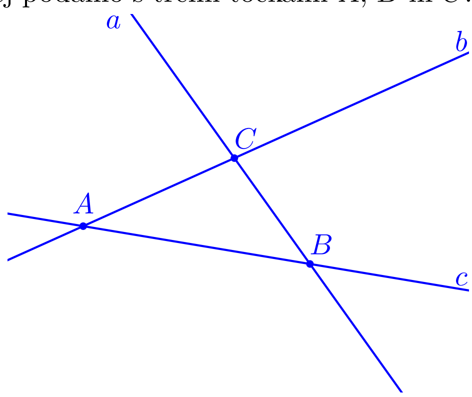
**c**. $\mathcal{T}_3$: Točke $X$, $Y$ in $Z$ projektivne ravnine $\mathbf{P}(V)$ so kolinearne.

$\mathcal{T}_3$ je trditev o projektivni ravnini:

$$X, Y, Z \in \mathbf{P}(V). \dim X = \dim Y = \dim Z = 1 \wedge \\ (\exists L \in \mathbf{P}(V). \dim L = 2. X, Y, Z < L).$$

**Definicija 4.8** *Množico treh nekolinearnih točk $A$, $B$, $C$ in projektivnih premic $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ v projektivni geometriji $\mathbf{P}(V)$ imenujemo **trikotnik** in ga označimo z $ABC$ ali $abc$.*

Trikotnik v projektivni geometriji torej podamo s tremi točkami $A$, $B$ in $C$. Pogoj nekolinearnosti točk pa lahko zapišemo kot $\dim(A + B + C) = 3$. Lahko pa trikotnik podamo tudi s tremi projektivnimi premicami $a$, $b$ in $c$. V tem primeru moramo biti previdni pri zapisu pogoja nekolinearnosti pripadajočih točk. Če so projektivne premice v projektivni ravnini, potem se poljubni dve sekata. Tako se pogoj nekolinearnosti presekov premic glasi $\dim(a \cap b \cap c) = 0$. Če pa so premice v višjerazsežni projektivni geometriji, je treba k pogoju $\dim(a \cap b \cap c) = 0$ dodati še pogoje $\dim(a \cap b) = 1$, $\dim(a \cap c) = 1$ in $\dim(b \cap c) = 1$, ki povedo, da se premice res sekajo in tako določajo oglišča trikotnika $A$, $B$ in $C$.



**d**. $\mathcal{T}_4$: Množica $ABC$ je trikotnik v projektivni ravnini $\mathbf{P}(V)$.

$\mathcal{T}_4$ je trditev o projektivni ravnini:

$$A, B, C \in \mathbf{P}(V).\dim A = \dim B = \dim C = 1 \wedge \dim(A + B + C) = 3.$$

Naj bo $\varphi\colon V \to V'$ izomorfizem vektorskih prostorov in naj bo $\mathcal{T}$ trditev o projektivni geometriji $\mathbf{P}(V)$. Tedaj je $\varphi(\mathcal{T})$ trditev o projektivni geometriji $\mathbf{P}(V')$, ki jo dobimo tako, da v trditvi $\mathcal{T}$ zamenjamo vse vektorske podprostore $U < V$ z vektorskimi podprostori $\varphi(U) < V'$. Ker izomorfizem ohranja inkluzije, vsote, preseke in razsežnost je jasno, da je trditev $\mathcal{T}$ resnična natanko tedaj, ko je resnična trditev $\varphi(\mathcal{T})$. Seveda to ni presenetljivo in podoben sklep velja tudi za trditve o afinih geometrijah. Kar je novo v projektivni geometriji in nima analoga v afini geometriji, je pojem dualne trditve, ki jo dobimo s pomočjo zgornjega anhilatorja.

**Definicija 4.9** ***Dualna trditev*** *$\mathcal{T}^*$ trditve $\mathcal{T}$ o projektivni geometriji $\mathbf{P}(V)$ je trditev o projektivni geometriji $\mathbf{P}(V^*)$, ki jo dobimo iz $\mathcal{T}$ tako, da vsak vektorski prostor $U$, ki nastopa v $\mathcal{T}$, zamenjamo z njegovim zgornjim anhilatorjem $U^\perp$, vse inkluzije obrnemo (torej inkluzijo $<$ zamenjamo z $>$ in inkluzijo $>$ zamenjamo z $<$), preseke zamenjamo z vsotami, vsote zamenjamo s preseki in razsežnost zamenjamo s korazsežnostjo.*

Preden si ogledamo, kaj so dualne trditve k zgornjim štirim trditvam, se spomnimo, da je korazsežnost vektorskega podprostora $U$ v $V$ enaka $\dim V - \dim U$. Torej dualno trditev dobimo iz trditve tako, če naredimo ravno takšne zamenjave, kot jih naredi zgornji anhilator, v kar smo se prepričali v lemi 4.6. Od tod sledi, da je trditev $\mathcal{T}$ o projekivni geometriji $\mathbf{P}(V)$ resnična natanko tedaj, ko je resnična njena dualna trditev $\mathcal{T}^*$ o projektivni geometriji $\mathbf{P}(V^*)$. Tako smo dokazali izrek o principu dualnosti.

**Izrek 4.10** *(princip dualnosti) Za vsako resnično trditev $\mathcal{T}$ o projektivni geometriji $\mathbf{P}(V)$ je resnična dualna trditev $\mathcal{T}^*$ o projektivni geometriji $\mathbf{P}(V^*)$ in za vsak izomorfizem $\varphi\colon V \to V^*$ vektorskih prostorov je resnična trditev $\varphi^{-1}(\mathcal{T}^*)$ o projektivni geometriji $\mathbf{P}(V)$.*

Izrek o principu dualnosti nam olajša dokazovanje v projektivni geometriji, saj z dokazom trditve $\mathcal{T}$ dobimo tudi dokaz trditve $\varphi^{-1}(\mathcal{T}^*)$ o isti projektivni geometriji.

Oglejmo si sedaj dualne trditve k zgornjim trem trditvam.

**a**. Trditev $\mathcal{T}_1$ govori o projektivni geometriji $\mathbf{P}(V)$.

$$\mathcal{T}_1: \ \forall X, Y \in \mathbf{P}(V). X \neq Y. \dim X = \dim Y = 1 \Rightarrow \\ \exists! L \in \mathbf{P}(V). \dim L = 2. X, Y < L.$$

Njena dualna trditev $\mathcal{T}^*$ govori o projektivni geometriji $\mathbf{P}(V^*)$.

$$\mathcal{T}_1^*: \ \forall X^\perp, Y^\perp \in \mathbf{P}(V^*). X^\perp \neq Y^\perp. \dim X^\perp = \dim Y^\perp = \dim V - 1 \Rightarrow \\ \exists! L^\perp \in \mathbf{P}(V^*). \dim L^\perp = \dim V - 2. X^\perp, Y^\perp > L^\perp.$$

Seveda lahko v trditvi $\mathcal{T}_1^*$ vpeljemo nove oznake $X' = X^\perp$, $Y' = Y^\perp$ in $L' = L^\perp$. Sedaj se dualna trditev glasi:

$$\mathcal{T}_1^*: \ \forall X', Y' \in \mathbf{P}(V^*). X' \neq Y'. \dim X' = \dim Y' = \dim V - 1 \Rightarrow \\ \exists! L' \in \mathbf{P}(V^*). \dim L' = \dim V - 2. X', Y' > L'.$$

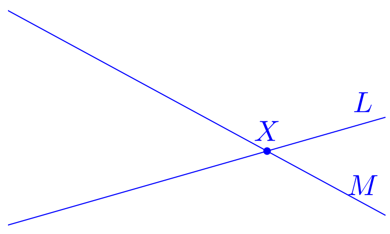
Dualna trditev $\mathcal{T}_1^*$ pomeni, da je presek poljubnih dveh različnih projektivnih hiperravnin projektivni prostor korazsežnosti 2.

**b**. Trditev $\mathcal{T}_2$ govori o projektivni ravnini $\mathbf{P}(V)$.

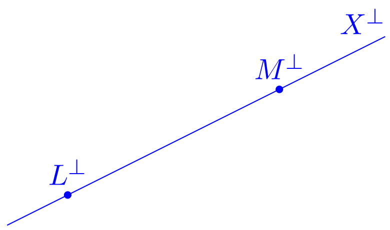
$$\mathcal{T}_2: \ \forall L, M \in \mathbf{P}(V). L \neq M. \dim L = \dim M = 2 \Rightarrow \\ \exists! X \in \mathbf{P}(V). \dim X = 1. X < L \cap M.$$

Dualna trditev $\mathcal{T}_2^*$ govori o projektivni ravnini $\mathbf{P}(V^*)$.

$$\mathcal{T}_2^*: \ \forall L^\perp, M^\perp \in \mathbf{P}(V^*). L^\perp \neq M^\perp. \dim L^\perp = \dim M^\perp = 1 \Rightarrow \\ \exists! X^\perp \in \mathbf{P}(V^*). \dim X^\perp = 2. X^\perp > L^\perp + M^\perp.$$




Trditev $\mathcal{T}_2$ o geometriji $\mathbf{P}(V)$.




Trditev $\mathcal{T}_2^*$ o geometriji $\mathbf{P}(V^*)$.

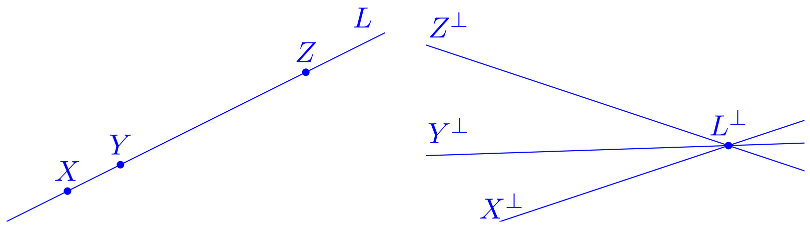
Dualna izjava $\mathcal{T}_2^*$ pomeni, da za poljubni različni točki v projektivni geometriji $\mathbf{P}(V^*)$ obstaja natanko ena projektivna premica, ki vsebuje ti dve točki. Ker je ta trditev resniča, je po izreku o principu dualnosti resnična tudi trditev $\mathcal{T}_2$. O resničnosti trditve $\mathcal{T}_2$ smo se prepričali že na začetku, ko smo definirali projektivno geometrijo, a kot vidimo sedaj, je bil dokaz "odveč".

**c**. Trditev $\mathcal{T}_3$ govori o projektivni ravnini $\mathbf{P}(V)$.

$$\mathcal{T}_3: \; X, Y, Z \in \mathbf{P}(V).\dim X = \dim Y = \dim Z = 1 \wedge \\ (\exists L \in \mathbf{P}(V).\dim L = 2.X, Y, Z < L).$$

Njej dualna trditev $\mathcal{T}_3^*$ govori o projektivni ravnini $\mathbf{P}(V^*)$.

$$\mathcal{T}_3^*: \; X^\perp, Y^\perp, Z^\perp \in \mathbf{P}(V^*).\dim X^\perp = \dim Y^\perp = \dim Z^\perp = 2 \wedge \\ (\exists L^\perp \in \mathbf{P}(V^*).\dim L^\perp = 1.X^\perp, Y^\perp, Z^\perp > L^\perp).$$




Trditev $\mathcal{T}_3$ o geometriji $\mathbf{P}(V)$. Trditev $\mathcal{T}_3^*$ o geometriji $\mathbf{P}(V^*)$.

Trditev $\mathcal{T}_3$ pravi, da so točke $X$, $Y$ in $Z$ v $\mathbf{P}(V)$ kolinearne. Njena dualna trditev $\mathcal{T}_3^*$ pa pravi, da se premice $X^\perp$, $Y^\perp$ in $Z^\perp$ v $\mathbf{P}(V^*)$ sekajo v isti točki.

**d**. Trditev $\mathcal{T}_4$ govori o projektivni ravnini $\mathbf{P}(V)$.

$$\mathcal{T}_4: \; A, B, C \in \mathbf{P}(V).\dim A = \dim B = \dim C = 1 \wedge \\ \dim(A + B + C) = 3.$$

Njej dualna trditev $\mathcal{T}_4^*$ govori o projektivni ravnini $\mathbf{P}(V^*)$.

$$\mathcal{T}_4: \; A^\perp, B^\perp, C^\perp \in \mathbf{P}(V^*).\dim A^\perp = \dim B^\perp = \dim C^\perp = 2 \wedge \\ \dim(A^\perp \cap B^\perp \cap C^\perp) = 0.$$

Torej dualna trditev $\mathcal{T}_4^*$ pravi, da je $A^\perp B^\perp C^\perp$ trikotnik v projektivni ravnini $\mathbf{P}(V^*)$.

**Definicija 4.11** *Trikotnika $ABC$ in $A'B'C'$ v projektivni geometriji $\mathbf{P}(V)$ sta v **perspektivni legi**, če se projektivne premice $AA'$, $BB'$ in $CC'$ sekajo v isti točki.*

Premislimo, kaj je dualna trditev trditve $\mathcal{T}$ o projektivni ravnini $\mathbf{P}(V)$, ki pravi, da sta trikotnika $ABC$ in $DEF$ v perspektivni legi.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}:\ & A,B,C,D,E,F \in \mathbf{P}(V).\dim A = \dim B = \dim C = \dim D = \\ & \dim E = \dim F = 1 \wedge \exists X \in \mathbf{P}(V).\dim X = 1. X = AD \cap BE \cap CF.\end{aligned}$$

Trditev $\mathcal{T}$ lahko zapišemo drugače, saj trikotnik namesto z oglišči podamo z nosilkami stranic. Označimo projektivne premice $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $d = EF$, $e = FD$ in $f = DE$. Tedaj je $A = b \cap c$ in $D = e \cap f$ ter analogno za ostala oglišča trikotnika. Projektivno premico $AD$ pa sedaj zapišemo kot $(b \cap c) + (e \cap f)$ in analogno ostale projektivne premice. Tako lahko trditev $\mathcal{T}$ zapišemo na naslednji način.

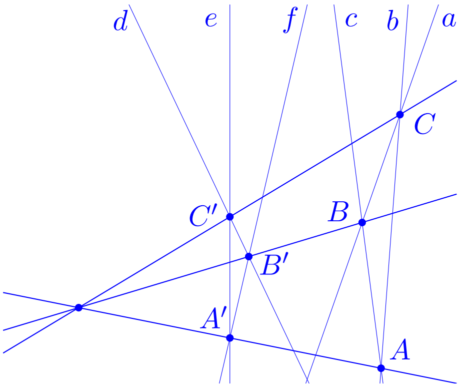
$$\begin{aligned}\mathcal{T}:\ & a,b,c,d,e,f \in \mathbf{P}(V).\dim a = \dim b = \dim c = \\ & \dim d = \dim e = \dim f = 2 \wedge \exists X \in \mathbf{P}(V).\dim X = 1. \\ & X = \big((b \cap c) + (e \cap f)\big) \cap \big((a \cap c) + (d \cap f)\big) \cap \big((a \cap b) + (d \cap e)\big).\end{aligned}$$

Sedaj lahko zapišemo dualno trditev.

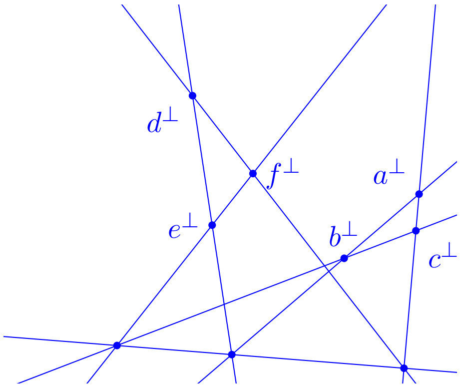
$$\begin{aligned}\mathcal{T}^*:\ & a^\perp, b^\perp, c^\perp, d^\perp, e^\perp, f^\perp \in \mathbf{P}(V^*).\dim a^\perp = \dim b^\perp = \dim c^\perp = \\ & \dim d^\perp = \dim e^\perp = \dim f^\perp = 1 \wedge \exists X^\perp \in \mathbf{P}(V^*).\dim X^\perp = 2. \\ & X^\perp = \big((b^\perp + c^\perp) \cap (e^\perp + f^\perp)\big) + \big((a^\perp + c^\perp) \cap (d^\perp + f^\perp)\big) + \big((a^\perp + b^\perp) \cap (d^\perp + e^\perp)\big).\end{aligned}$$

Vpeljemo nove oznake $A = a^\perp$, $B = b^\perp$, $C = c^\perp$, $D = d^\perp$, $E = e^\perp$, $F = f^\perp$ in $x = X^\perp$.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^*:\ & A,B,C,D,E,F \in \mathbf{P}(V^*).\dim A = \dim B = \dim C = \\ & \dim D = \dim E = \dim F = 1 \wedge \exists x \in \mathbf{P}(V^*).\dim x = 2. \\ & x = (BC \cap EF) + (AC \cap DF) + (AB \cap DE).\end{aligned}$$




Trditev $\mathcal{T}$ o geometriji $\mathbf{P}(V)$.




Trditev $\mathcal{T}^*$ o geometriji $\mathbf{P}(V^*)$.

Torej dualna trditev $\mathcal{T}^*$ pravi, da za trikotnika $ABC$ in $DEF$ velja, da presečišča nosilk $BC \cap EF$, $AC \cap DF$ in $AB \cap DE$ ležijo na isti premici.

V afini ravnini obstajata dva Desarguesova izreka, saj je treba ločiti primera, ko se premice sekajo v isti točki in ko so premice vzporedne. V projektivni ravnini druga možnost odpade, saj se poljubni projektivni premici v projektivni ravnini sekata. Pojem vzporednosti v projektivni geometriji sploh ne obstaja.

**Izrek 4.12** *(Desarguesov izrek v projektivni ravnini) Naj bo $V$ vektorski prostor razsežnosti 3 nad poljem $\mathcal{O}$. Trikotnika $ABC$ in $A'B'C'$ v projektivni ravnini $\mathbf{P}(V)$ sta v perspektivni legi natanko tedaj, ko presečišča nosilk stranic $X = AB \cap A'B'$, $Y = AC \cap A'C'$ in $Z = BC \cap B'C'$ ležijo na isti projektivni premici.*

**Dokaz:** Najprej pokažimo, da če sta trikotnika $ABC$ in $A'B'C'$ v perspektivni legi, so točke $X$, $Y$ in $Z$ kolinearne. To trditev označimo s $\mathcal{T}$. Ker sta trikotnika v perspektivni legi, se projektivne premice $AA'$, $BB'$ in $CC'$ sekajo v isti točki, ki jo označimo s $P$. Projektivnim točkam izberimo bazne vektorje v $V$. Torej $A = \mathrm{Lin}\{a\}$, $B = \mathrm{Lin}\{b\}$, $C = \mathrm{Lin}\{c\}$, $A' = \mathrm{Lin}\{a'\}$, $B' = \mathrm{Lin}\{b'\}$, $C' = \mathrm{Lin}\{c'\}$ in $P = \mathrm{Lin}\{p\}$. Ker točka $P$ leži na projektivnih premicah $AA'$, $BB'$ in $CC'$, obstajajo skalarji $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in \mathcal{O}$, da velja

$$p = \alpha a + \alpha' a' = \beta b + \beta' b' = \gamma c + \gamma' c'.$$

Od tod sledi, da je $\alpha a - \beta b = \beta' b' - \alpha' a'$, kar pomeni, da vektor $x = \alpha a - \beta b = \beta' b' - \alpha' a'$ leži v preseku $AB \cap A'B' = X$. Enako sledi, da vektor $y = \alpha a - \gamma c = \gamma' c' - \alpha' a'$ leži v preseku $AC \cap A'C' = Y$ in vektor

$z = \beta b - \gamma c = \gamma' c' - \beta' b'$ leži v preseku $BC \cap B'C' = Z$. Torej je $X = \mathrm{Lin}\{x\}$, $Y = \mathrm{Lin}\{y\}$, $Z = \mathrm{Lin}\{z\}$ in velja

$$z = \beta b - \gamma c = (\alpha a - \gamma c) - (\alpha a - \beta b) = y - x.$$

Tako velja $Z < X \oplus Y$, kar pomeni, da so točke $X$, $Y$ in $Z$ kolinearne, kar smo želeli dokazati.

Pred formulacijo izreka smo pokazali, da dualna trditev $\mathcal{T}^*$ pravi, da če za trikotnika $ABC$ in $A'B'C'$ velja, da so preseki $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$ in $BC \cap B'C'$ kolinearni, sta trikotnika v perspektivni legi. Po izreku o principu dualnosti je dualna trditev $\mathcal{T}^*$ resnična. Hkrati pa je dualna trditev ravno implikacija Desarguesovega izreka v drugo smer. S tem je izrek dokazan. $\square$

Še enkrat pripomnimo, da nam "homogenost" projektivne geometrije zelo olajša delo. Ne samo, da imamo v projektivni geometriji le en Desarguesov izrek, še tega je treba dokazati le v eno smer, saj dokaz v drugo sledi po izreku o principu dualnosti. Desarguesov izrek je torej sam sebi dualen.

Priznati pa moramo, da smo Desarguesov izrek v projektivni ravnini dokazali le za projektivne ravnine nad vektorskim prostorom nad poljem. Edino mesto, kjer smo potrebovali komutativnost polja $\mathcal{O}$, je obrat izreka, ko smo uporabili izrek o dualnem principu. Bralec lahko poskusi dokazati obrat izreka brez uporabe izreka o dualnem principu in jasno za projektivno ravnino nad vektorskim poljem nad poljubnim (ne nujno komutativnim) obsegom $\mathcal{O}$. Privzetek o komutativnosti obsega $\mathcal{O}$ ni "pretiran", saj nas predvsem zanimajo vektorski prostori nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ in $\mathbb{F}_{p^\alpha}$, ki pa so vsi komutativni.

Želeli bi si, da izreke, ki veljajo v projektivni geometriji, uporabimo za dokazovanje izrekov v pripadajoči afini geometriji. Na primer, ali oba Desarguesova izreka v afini ravnini sledita iz pravkar dokazanega Desarguesovega izreka v projektivni ravnini. To storimo tako, da afino geometrijo vložimo v projektivno.

## VLOŽITEV AFINE GEOMETRIJE V PROJEKTIVNO GEOMETRIJO

Že v uvodu, ko smo motivirali definicijo projektivne geometrije, smo povedali, kako afino ravnino $\mathbb{R}^2$ vložimo v vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ na nivo $z = 1$, kar je vložitev afine ravnine $\mathbb{R}^2$ v projektivno ravnino $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$. Opišimo sedaj vložitev za poljuben primer.

Naj bodo $V$ vektorski prostor razsežnosti $n+1$ nad obsegom $\mathcal{O}$, $W < V$ vektorski podprostor razsežnosti $n$ in vektor $a \notin W$. Tedaj je $\mathcal{A} = a + W$ $n$-razsežen afin podprostor v $V$. Vložitev $\widetilde{l}\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{P}(V)$ definiramo s predpisom $\widetilde{l}(\mathcal{X}) = \mathrm{Lin}\{\mathcal{X}\}$. Naslednji izrek opraviči ime vložitev za pravkar podan predpis $\widetilde{l}$.

**Izrek 4.13** *Pri zgornjih oznakah ima preslikava $\widetilde{l}\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{P}(V)$ naslednje lastnosti.*

**a**. *Preslikava $\widetilde{l}$ je injektivna.*

**b**. *Vektorski podprostor $U < V$ je v zalogi vrednosti natanko tedaj, ko $U \not\subset W$. Torej je zaloga vrednosti $Z_{\widetilde{l}} = \mathbf{P}(V)\backslash\mathbf{P}(W)$.*

**c**. *Če je $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ v $\mathbf{A}(\mathcal{A})$, je $\widetilde{l}(\mathcal{X}) < \widetilde{l}(\mathcal{Y})$ v $\mathbf{P}(V)$. Torej preslikava $\widetilde{l}$ ohranja inkluzije.*

**d**. *Če je $\{\mathcal{X}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ družina afinih podprostorov v $\mathcal{A}$ z nepraznim presekom, je*

$$\widetilde{l}(\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{X}_\lambda) = \cap_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{l}(\mathcal{X}_\lambda).$$

**e**. *Če je $\{\mathcal{X}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ družina afinih podprostorov v $\mathcal{A}$, je*

$$\widetilde{l}(\mathrm{Af}(\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{X}_\lambda)) = \Sigma_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{l}(\mathcal{X}_\lambda).$$

**f**. *Za vsak $\mathcal{X} \in \mathbf{A}(\mathcal{A})$ je $\mathrm{pdim}\,\widetilde{l}(\mathcal{X}) = \dim \mathcal{X}$.*

**g**. *Afina podprostora $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ v $\mathcal{A}$ sta vzporedna natanko tedaj, ko je $\widetilde{l}(\mathcal{X}) \cap W \subset \widetilde{l}(\mathcal{Y}) \cap W$ ali pa je $\widetilde{l}(\mathcal{Y}) \cap W \subset \widetilde{l}(\mathcal{X}) \cap W$.*

Preden se lotimo dokazovanja povejmo, da so lastnosti preslikave $\widetilde{l}$, o katerih govori izrek, take, da preslikavi $\widetilde{l}$ upravičeno rečemo **standardna vložitev afine geometrije v projektivno**.

• Točka **f.** izreka pove, da $\widetilde{l}$ preslika točke afine geometrije v točke projektivne geometrije, premice afine ravnine v premice projektivne geometrije ...

• Naj bo $p$ afina premica v $\mathcal{A}$ skozi točki $A$ in $B$. Drugače zapisano, je $p = \mathrm{Af}\{A, B\}$. Točka **e.** izreka pove, da je $\widetilde{l}(p) = \widetilde{l}(A) + \widetilde{l}(B)$. Torej je $\widetilde{l}(p)$ projektivna premica skozi točki $\widetilde{l}(A)$ in $\widetilde{l}(B)$.

• Naj bosta $p$ in $q$ afini premici v $\mathcal{A}$, ki se sekata v točki $A$. Torej je $A = p \cap q$. Po točki **d.** izreka je $\widetilde{l}(A) = \widetilde{l}(p) \cap \widetilde{l}(q)$, se pravi, da je $l(A)$ presečišče projektivnih premic $\widetilde{l}(p)$ in $\widetilde{l}(q)$.

Naj bo $\mathcal{T}$ trditev o afini geometriji $\mathbf{A}(\mathcal{A})$. Tedaj je **inducirana trditev** $\widetilde{l}(\mathcal{T})$ trditev o projektivni geometriji $\mathbf{P}(V)$, ki jo dobimo iz $\mathcal{T}$ tako, da vsak afin podprostor $\mathcal{X}$ v $\mathcal{A}$ zamenjamo z vektorskim prostorom $\widetilde{l}(\mathcal{X})$, razsežnosti zamenjamo s projektivnimi razsežnostmi, inkluzije pa ohranimo.

Ali lahko iz resničnosti trditve $\mathcal{T}$ sklepamo na resničnost trditve $\widetilde{l}(\mathcal{T})$ ali pa obratno? V splošnem ne. Oglejmo si trditev $\mathcal{T}$ o afini ravnini $\mathbf{A}(\mathcal{A})$, ki pravi, da se premici $p$ in $q$ sekata. Očitno je inducirana trditev pravilna, saj se v projektivni ravnini poljubni projektivni premici sekata in se tako v posebnem primeru sekata tudi $\widetilde{l}(p)$ in $\widetilde{l}(q)$. Zapišimo trditev $\mathcal{T}$ z matematičnimi simboli.

$$\mathcal{T}: \ p, q \in \mathbf{A}(\mathcal{A}). \dim p = \dim q = 1 \wedge \exists X \in \mathbf{A}(\mathcal{A}). \dim X = 0. X = p \cap q.$$

Sedaj opazimo, kje nastopi težava. V trditvi $\mathcal{T}$ nastopa kvantifikator $\exists$, preslikava $\widetilde{l}$ pa ni surjektivna. Torej, če se preslikani premici sekata ravno v točki, ki ni v sliki preslikave $\widetilde{l}$, se jasno $p$ in $q$ ne sekata; sta namreč vzporedni. Torej če v trditvi $\mathcal{T}$ nastopa kvantifikator $\exists$, iz pravilnosti inducirane trditve $\widetilde{l}(\mathcal{T})$ ne moremo sklepati na pravilnost trditve $\mathcal{T}$. Lahko pa iz pravilnosti trditve $\mathcal{T}$ sklepamo na pravilnost inducirane trditve $\widetilde{l}(\mathcal{T})$. Podoben razmislek naredimo za kvantifikator $\forall$ in dejstva povzamemo v naslednji trditvi.

**Trditev 4.14** *Naj bo $\widetilde{l}\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{P}(V)$ standardna vložitev afine geometrije v projektivno in naj bo $\mathcal{T}$ trditev o afini geometriji $\mathbf{A}(\mathcal{A})$.*

**a.** *Če v $\mathcal{T}$ ni kvantifikatorjev, je trditev $\mathcal{T}$ resnična natanko tedaj, ko je resnična trditev $\widetilde{l}(\mathcal{T})$.*

**b.** *Če v $\mathcal{T}$ ne nastopa kvantifikator $\exists$ (nastopa pa lahko $\forall$), iz resničnosti trditve $\mathcal{T}$ sledi resničnost trditve $\widetilde{l}(\mathcal{T})$.*

**c.** *Če v $\mathcal{T}$ ne nastopa kvantifikator $\forall$ (nastopa pa lahko $\exists$), iz resničnosti trditve $\widetilde{l}(\mathcal{T})$ sledi resničnost trditve $\mathcal{T}$.*

Zgornja trditev je zadosten razlog, da se lotimo dokaza izreka 4.13. Še prej pa potrebujemo nekaj pomožnih trditev.

**Lema 4.15** *Naj bo $\widetilde{l}\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{P}(V)$ standardna vložitev afine geometrije v projektivno. Tedaj za vsak $x + U \in \mathbf{A}(\mathcal{A})$ velja $\widetilde{l}(x + U) = \operatorname{Lin}\{x\} \oplus U$.*

**Dokaz:** Pripomnimo, da $x \notin U$. V nasprotnem primeru bi afin prostor $x + U$ vseboval točko $x + (-x) = 0$ kar pa ni res. Spomnimo se namreč, da smo afin prostor $\mathcal{A} = a + W$ definirali tako, da $a \notin W$. To pomeni, da

$0 \notin \mathcal{A}$ in zato koordinatno izhodišče 0 ni v nobenem afinem podprostoru afinega prostora $\mathcal{A}$. Ker $x \notin U$, je $\text{Lin}\{x\} \cap U = \{0\}$.

Jasno je, da vektorski prostor $\text{Lin}\{x\} \oplus U$ vsebuje množico $x + U$ in zato vsebuje tudi njeno linearno ogrinjačo $\widetilde{l}(x + U)$.

Ker je $\{x\} \subset x + U$, je $\widetilde{l}(\{x\}) = \text{Lin}\{x\} < \text{Lin}\{x + U\} = \widetilde{l}(x + U)$. Ker je $U = (x + U) - x$ in sta $x + U$ ter $\{x\}$ podmnožici vektorskega prostora $\widetilde{l}(x + U)$, je $U < \widetilde{l}(x + U)$. Torej je $\text{Lin}\{x\} \oplus U < \widetilde{l}(x + U)$. S tem je lema dokazana. □

**Lema 4.16** *Naj bo $\widetilde{l} \colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{P}(V)$ standardna vložitev afine geometrije v projektivno. Tedaj za vsak $x + U \in \mathbf{A}(\mathcal{A})$ velja $\widetilde{l}(x + U) \cap \mathcal{A} = x + U$.*

**Dokaz:** Ker je $x + U \subset \widetilde{l}(x + U)$ in $x + U \subset \mathcal{A}$, je $x + U \subset \widetilde{l}(x + U) \cap \mathcal{A}$. Dokažimo še obratno inkluzijo. Ker je $x + 0 \in x + U \subset \mathcal{A}$, je po lemi 2.2 $\mathcal{A} = a + W = x + W$. Naj bo $v \in \widetilde{l}(x + U) \cap \mathcal{A}$. Ker je $v \in \mathcal{A} = x + W$, obstaja $w \in W$, da je $v = x + w$. Po prejšnji lemi je $\widetilde{l}(x+U) = \text{Lin}\{x\} \oplus U$, zato obstajata $u \in U$ in $\alpha \in \mathcal{O}$, da je $v = \alpha x + u$. Torej je $\alpha x + u = x + w$ oziroma $w - u = (\alpha - 1)x$. Ker sta $w, u \in W$, je tudi $(\alpha - 1)x \in W$. Ker $x \notin W$, je $\alpha = 1$. To pa pomeni, da je $v = x + u \in x + U$, kar smo želeli dokazati. □

**Lema 4.17** *Naj bo $\widetilde{l} \colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{P}(V)$ standardna vložitev afine geometrije v projektivno. Če je $U < V$ vektorski podprostor, ki ni vsebovan v $W$, je $U \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ in $\widetilde{l}(U \cap \mathcal{A}) = U$.*

**Dokaz:** Ker $a \notin W$ in je $W$ korazsežnosti 1 v $V$, je $V = \text{Lin}\{a\} \oplus W$. Naj bo $f \colon V \to \mathcal{O}$ linearni funkcional za katerega velja $f(a) = 1$ in $f(W) = 0$. Naj pripomnimo, da funkcional $f$ definiramo tako, da izberemo bazo $\{w_1, \dots, w_n\}$ za $W$. Tedaj je $f$ dualni funkcional k vektorju $a$ pri izbrani bazi $\{w_1, \dots, w_n, a\}$ vektorskega prostora $V$. Vsak vektor $v \in V$ lahko zapišemo kot $v = \alpha a + w$, kjer je $\alpha \in \mathcal{O}$ in $w \in W$. Zato je $f(v) = f(\alpha a + w) = \alpha f(a) + f(w) = \alpha$. Torej je $f(v) = 1$ natanko tedaj, ko je $v \in \mathcal{A}$, se pravi $\mathcal{A} = \{v \in V \mid f(v) = 1\}$.

Ker $U \not< W$, obstaja vektor $\widetilde{u}_0 \in U$, da je $f(\widetilde{u}_0) \neq 0$. Tedaj za $u_0 = (f(\widetilde{u}_0))^{-1}\widetilde{u}_0$ velja

$$f(u_0) = f((f(\widetilde{u}_0))^{-1}\widetilde{u}_0) = (f(\widetilde{u}_0))^{-1} f(\widetilde{u}_0) = 1,$$

kar pomeni, da $u_0$ leži v afinem prostoru $\mathcal{A}$. Torej je presek afinih prostorov $U \cap \mathcal{A} = \{u \in U \mid f(u) = 1\}$ neprazen afin prostor. Naj bo $g\colon U \to \mathcal{O}$ zožitev linearnega funkcionala $f$. Iz $g(u_0) \neq 0$, sledi $g$ netrivialen in zato je $g^{-1}(0) = U'$ vektorski podprostor v $U$ korazsežnosti 1. Ker je $g^{-1}(1) = g^{-1}(0) + u_0$, je $g^{-1}(1) = U \cap \mathcal{A} = u_0 + U'$. Ker $f(u_0) = 1$ in $f(U') = \{0\}$, vektor $u_0 \notin U'$. Tako po lemi 4.15 sledi

$$\widetilde{l}(U \cap \mathcal{A}) = \widetilde{l}(u_0 + U') = \mathrm{Lin}\{u_0\} \oplus U'$$

in zato $\dim \widetilde{l}(U \cap \mathcal{A}) = 1 + \dim U' = 1 + (\dim U - 1) = \dim U$. Ker je $U \cap \mathcal{A}$ afin podprostor v vektorskem prostoru $U$, je tudi njegova linearna ogrinjača $\widetilde{l}(U \cap \mathcal{A}) < U$. Zgoraj pa smo dokazali, da sta vektorska prostora $\widetilde{l}(U \cap \mathcal{A})$ in $U$ enakih razsežnosti, zato sta enaka. □

**Lema 4.18** *Naj bo $V$ vektorski prostor in naj bodo $X, Y, Z < V$ taki, da je $Z < X$. Tedaj je $X \cap (Y + Z) = (X \cap Y) + Z$.*

Poudarimo, da lema v splošnem ne velja, če $Z$ ni vektorski podprostor v $X$. Naj bo $V = \mathbb{R}^2$, $X = \mathbb{R} \times \{0\}$, $Y = \{0\} \times \mathbb{R}$ in $Z = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Tedaj je $Y + Z = \mathbb{R}^2$ in zato $X \cap (Y + Z) = X$. Presek $X \cap Y$ je trivialen vektorski podprostor, zato je $(X \cap Y) + Z = Z$. Torej $X \cap (Y + Z) = X \neq Z = (X \cap Y) + Z$.

**Dokaz:** Ker sta vektorska prostora $Z$ in $X \cap Y$ podprostora v $X$ in $Y + Z$, je $(X \cap Y) + Z < X \cap (Y + Z)$.

Dokažimo še obratno inkluzijo. Naj bo $x \in X \cap (Y + Z)$. Tedaj obstajata $y \in Y$ in $z \in Z$, da je $x = y + z$. Po predpostavki je $Z < X$, kar pomeni, da je $z \in X$. Torej je $y = x - z \in X$ in zato tudi $y \in X \cap Y$. Dokazali smo, da lahko $x$ zapišemo kot vsoto elementov iz $X \cap Y$ in $Z$, se pravi, da je $X \cap (Y + Z) < (X \cap Y) + Z$. □

**Lema 4.19** *Naj bo $\widetilde{l}\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{P}(V)$ standardna vložitev afine geometrije v projektivno. Za vsak $x + U \in \mathbf{A}(\mathcal{A})$ je $\widetilde{l}(x + U) \cap W = U$.*

**Dokaz:** Po lemi 4.15 je $\widetilde{l}(x + U) = \mathrm{Lin}\{x\} \oplus U$. Ker je $U < W$, je po lemi 4.18 presek $(\mathrm{Lin}\{x\} \oplus U) \cap U = (\mathrm{Lin}\{x\} \cap U) + U = U$. □

**Dokaz izreka 4.13: a.** Naj bosta $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbf{A}(\mathcal{A})$, za katera velja $\widetilde{l}(\mathcal{X}) = \widetilde{l}(\mathcal{Y})$. Po lemi 4.16 je $\mathcal{X} = \widetilde{l}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{A} = \widetilde{l}(\mathcal{Y}) \cap \mathcal{A} = \mathcal{Y}$. Torej je preslikava $\widetilde{l}$ injektivna.

**b.** Naj bo $U < V$ v zalogi vrednosti preslikave $\widetilde{l}$. Torej obstaja afin podprostor $\mathcal{X}$ v $\mathcal{A}$, da je $\widetilde{l}(\mathcal{X}) = U$. Afin podprostor $\mathcal{X}$ lahko zapišemo kot $\mathcal{X} = x + U'$ za neka $x \in V$ in $U' < V$. Ker je $x \in \mathcal{X} \subset \mathcal{A}$, lahko po lemi 2.2 afin prostor $\mathcal{A}$ zapišemo kot $\mathcal{A} = a + W = x + W$. Torej $x \notin W$. Po drugi strani pa je $x \in \mathcal{X} \subset \widetilde{l}(\mathcal{X}) = U$. Torej $U$ ni podmnožica v $W$.

Dokažimo še obrat. Naj bo $U < V$ vektorski podprostor, ki ni podprostor v $W$. Po lemi 4.17 je $U \cap \mathcal{A}$ neprazen afin podprostor v $\mathcal{A}$, za katerega velja $\widetilde{l}(U \cap \mathcal{A}) = U$. Torej je $U$ v zalogi preslikave $\widetilde{l}$.

**c.** Če je $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$, je $\widetilde{l}(\mathcal{X}) = \mathrm{Lin}\{\mathcal{X}\} \subset \mathrm{Lin}\{\mathcal{Y}\} = \widetilde{l}(\mathcal{Y})$.

**d.** Za vsak $\lambda \in \Lambda$ je $\mathcal{X}_\lambda \subset \widetilde{l}(\mathcal{X}_\lambda)$, zato je $\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{X}_\lambda \subset \cap_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{l}(\mathcal{X}_\lambda)$. Ker je $\cap_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{l}(\mathcal{X}_\lambda)$ vektorski prostor, ki vsebuje množico $\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{X}_\lambda$, $\widetilde{l}(\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{X}_\lambda)$ pa je najmanjši tak vektorski prostor, je $\widetilde{l}(\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{X}_\lambda) \subset \cap_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{l}(\mathcal{X}_\lambda)$.

Pokažimo še obrat. Po privzetku je presek $\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{X}_\lambda$ neprazen. Torej obstaja $x$, ki je v vseh afinih prostorih $\mathcal{X}_\lambda$. Zato po lemi 2.2 za vsak $\lambda \in \Lambda$ obstaja vektorski prostor $U_\lambda < W$, da je $\mathcal{X}_\lambda = x + U_\lambda$. Po lemi 4.15 je $\widetilde{l}(\mathcal{X}_\lambda) = \mathrm{Lin}\{x\} \oplus U_\lambda$.

Naj bo $y \in \cap_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{l}(\mathcal{X}_\lambda) = \cap_{\lambda\in\Lambda}\big(\mathrm{Lin}\{x\} \oplus U_\lambda\big)$. Torej za vsak $\lambda \in \Lambda$ obstajata $\alpha_\lambda \in \mathcal{O}$ in $u_\lambda \in U_\lambda$, da je $y = \alpha_\lambda x + u_\lambda$. Naj bosta $\lambda, \mu \in \Lambda$ različna. Tedaj iz enakosti $\alpha_\lambda x + u_\lambda = \alpha_\mu x + u_\mu$ sledi $(\alpha_\lambda - \alpha_\mu)x = u_\mu - u_\lambda$. Ker je $u_\mu - u_\lambda \in W$ in vektor $x \notin W$, je $\alpha_\lambda = \alpha_\mu =: \alpha$ in tako tudi $u_\lambda = u_\mu =: u$. Torej je $u \in \cap_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ in zato je $y = \alpha x + u \in \mathrm{Lin}\{x\} \oplus (\cap_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda) = \widetilde{l}(x + \cap_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda) = \widetilde{l}(\cap_{\lambda\in\Lambda}(x + U_\lambda)) = \widetilde{l}(\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{X}_\lambda)$.

**e.** Množica $\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{X}_\lambda$ je podmnožica vektorskega prostora $\Sigma_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{l}(\mathcal{X}_\lambda)$, ki je jasno tudi afin prostor. Zato je afina ogrinjača $\mathrm{Af}(\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{X}_\lambda) \subset \Sigma_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{l}(\mathcal{X}_\lambda)$ in tako tudi $\widetilde{l}(\mathrm{Af}(\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{X}_\lambda)) \subset \Sigma_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{l}(\mathcal{X}_\lambda)$.

Po drugi strani pa za vsak $\lambda \in \Lambda$ velja $\widetilde{l}(\mathcal{X}_\lambda) < \widetilde{l}(\mathrm{Af}(\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{X}_\lambda))$, zato je tudi $\Sigma_{\lambda\in\Lambda}\widetilde{l}(\mathcal{X}_\lambda) < \widetilde{l}(\mathrm{Af}(\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{X}_\lambda))$.

**f.** Naj bo $\mathcal{X} \in \mathbf{A}(\mathcal{A})$. Tedaj je $\mathcal{X} = x + U$ za neka $U < W$ ter $x \notin U$ in po lemi 4.15 je $\widetilde{l}(\mathcal{X}) = \mathrm{Lin}\{x\} \oplus U$. Zato je $\dim \widetilde{l}(\mathcal{X}) = 1 + \dim U = 1 + \dim \mathcal{X}$ in $\mathrm{pdim}\, \widetilde{l}(\mathcal{X}) = \dim \widetilde{l}(\mathcal{X}) - 1 = \dim \mathcal{X}$.

**g.** Naj bosta $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbf{A}(\mathcal{A})$ afina podprostora, ki ju zapišimo $\mathcal{X} = x + U_\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y} = y + U_\mathcal{Y}$, kjer sta $U_\mathcal{X}$ in $U_\mathcal{Y}$ vektorska podprostora v $W$ in $x, y \in V$. Tedaj po lemi 4.15 in lemi 4.18 velja $\widetilde{l}(\mathcal{X}) \cap W = (\mathrm{Lin}\{x\} \oplus U_\mathcal{X}) \cap W = U_\mathcal{X} + (\mathrm{Lin}\{x\} \cap W) = U_\mathcal{X}$ in $\widetilde{l}(\mathcal{Y}) \cap W = (\mathrm{Lin}\{y\} \oplus U_\mathcal{Y}) \cap W = U_\mathcal{Y}$. Torej sta afina prostora $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ vzporedna natanko tedaj, ko je $U_\mathcal{X} < U_\mathcal{Y}$ ali pa je $U_\mathcal{Y} < U_\mathcal{X}$, to pa je natanko tedaj, ko je $\widetilde{l}(\mathcal{X}) \cap W < \widetilde{l}(\mathcal{Y}) \cap W$ ali pa je

$\widetilde{l}(\mathcal{Y}) \cap W < \widetilde{l}(\mathcal{X}) \cap W$. □

Naj bo $\widetilde{l}\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{P}(V)$ standardna vložitev afine geometrije v projektivno. Označimo bijekcijo $l\colon \mathcal{A} \to \mathcal{P}V$ za katero velja $\widetilde{l}(\{x\}) = \{l(x)\}$ za vse točke $x \in \mathcal{A}$. Iz izreka sledi, da je $\mathcal{P}V = \mathcal{P}W \coprod \{l(x) \mid x \in \mathcal{A}\}$. Množico točk $\mathcal{P}W$ imenujemo **hiperravnina v neskončnosti** projektivne geometrije $\mathbf{P}(V)$ pri izbrani vložitvi $\widetilde{l}$. Iz konstrukcije je jasno, da lahko za vsako projektivno hiperravnino $\mathcal{P}W$ v $\mathbf{P}(V)$ izberemo standardno vložitev $\widetilde{l}\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{P}(V)$, da je $\mathcal{P}W$ hiperravnina v neskončnosti.

**Posledica 4.20** *Naj bo $\widetilde{l}\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{P}(V)$ standardna vložitev afine ravnine v projektivno. Različni afini premici $p$ in $q$ v afini ravnini $\mathcal{A}$ sta vzporedni natanko tedaj, ko se $\widetilde{l}(p)$ in $\widetilde{l}(q)$ sekata v točki v neskončnosti.*

**Dokaz:** Naj bosta $U_p$ in $U_q$ vektorska podprostora v $W$ in naj bosta $x, y \in V$, da je $p = x + U_p$ in $q = y + U_q$. Ker sta $p$ in $q$ afini premici, je $\dim U_p = \dim U_q = 1$.

Če sta premici $p$ in $q$ vzporedni, je $U_p = U_q =: U$. Tedaj sta $\widetilde{l}(p) = \mathrm{Lin}\{x\} \oplus U$ in $\widetilde{l}(q) = \mathrm{Lin}\{y\} \oplus U$ različni ravnini v trorazsežnem prostoru, zato je njun presek enorazsežen podprostor v $V$. Jasno je tako $\widetilde{l}(p) \cap \widetilde{l}(q) = U$. Ker je $U < W$, je presek $U$ točka v neskončnosti.

Denimo, da se $\widetilde{l}(p)$ in $\widetilde{l}(q)$ sekata v točki v neskončnosti. Torej obstaja $U < W$ razsežnosti 1, da je $\widetilde{l}(p) \cap \widetilde{l}(q) = U$. Po lemi 4.19 je $\widetilde{l}(p) \cap W = U_p$. Ker je $U < \widetilde{l}(p)$ in $U < W$, je $U < \widetilde{l}(p) \cap W = U_p$. Ker je $\dim U = \dim U_p$, je $U = U_p$. Enako sklepamo, da je $U = U_q$. Ker je $U_p = U_q$, sta afini premici $p$ in $q$ vzporedni. □

Za konec tega razdelka z uporabo projektivne geometrije dokažimo nekatere izreke v afini ravnini. Naj bodo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = 3$, $W < V$ podprostor razsežnosti $\dim W = 2$, $a \in V - W$ in $\mathcal{A} = a + W$ afina ravnina.

**Izrek 4.21** *(Prvi Desargesov izrek za afino ravnino) Naj bodo $p$, $q$ in $r$ različne vzporedne premice v afini ravnini $\mathcal{A}$ in $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$, $R, R' \in r$ take točke, da je $PQ \parallel P'Q'$ in $PR \parallel P'R'$. Tedaj je tudi $QR \parallel Q'R'$.*

**Dokaz:** Ker so $p$, $q$ in $r$ vzporedne, obstajajo $U < V$ razsežnosti 1 in točke $x, y, z \in V$, da je $p = x+U$, $q = y+U$ in $r = z+U$. Naj bo $\widetilde{l}\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{P}(V)$

standardna vložitev afine geometrije v projektivno. Tedaj se projektivne premice $\widetilde{l}(p)$, $\widetilde{l}(q)$ in $\widetilde{l}(r)$ sekajo v skupni točki $U$ (v neskončnosti). Ker sta tako trikotnika $l(P)l(Q)l(R)$ in $l(P')l(Q')l(R')$ v perspektivni legi, so po Desarguesovem izreku za projektivno ravno točke $l(P)l(Q) \cap l(P')l(Q')$, $l(P)l(R) \cap l(P')l(R')$ in $l(Q)l(R) \cap l(Q')l(R')$ kolinearne. Ker $\widetilde{l}$ preslika afino premico skozi točki $P$ in $Q$ v projektivno premico skozi točki $l(P)$ in $l(Q)$, je $l(P)l(Q) = \widetilde{l}(PQ)$. Enako sklepamo za ostale premice. Ker sta po predpostavki afini premici $PQ$ in $P'Q'$ vzporedni, se po posledici 4.20 projektivni premici $\widetilde{l}(PQ)$ in $\widetilde{l}(P'Q')$ sekata v neskončnosti. Enako dobimo, da se $\widetilde{l}(PR)$ in $\widetilde{l}(P'R')$ sekata v neskončnosti. Ker so preseki $\widetilde{l}(PQ) \cap \widetilde{l}(P'Q')$, $\widetilde{l}(PR) \cap \widetilde{l}(P'R')$ in $\widetilde{l}(QR) \cap \widetilde{l}(Q'R')$ kolinearne točke, se tudi projektivni premici $\widetilde{l}(QR)$ in $\widetilde{l}(Q'R')$ sekata v točki v neskončnosti. Po posledici 4.20 sta afini premici $RQ$ in $R'Q'$ vzporedni. □

**Izrek 4.22** *(Drugi Desargesov izrek za afino ravnino) Naj bodo $p$, $q$ in $r$ različne premice v afini ravnini $\mathcal{A}$, ki se sekajo v isti točki, in $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$, $R, R' \in r$ take točke, da je $PQ \parallel P'Q'$ in $PR \parallel P'R'$. Tedaj je tudi $QR \parallel Q'R'$.*

**Dokaz:** Naj bo $X$ presek premic $p$, $q$ in $r$. Naj bo $\widetilde{l}\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{P}(V)$ standardna vložitev afine geometrije v projektivno. Tedaj se projektivne premice $\widetilde{l}(p)$, $\widetilde{l}(q)$ in $\widetilde{l}(r)$ sekajo v točki $l(X)$. Enako kot v dokazu prvega Desarguesovega izreka za afino ravnino zaključimo dokaz z uporabo Desarguesovega izreka za projektivno ravnino. □

Pozoren bralec je morda opazil, da iz Desarguesovega izreka za projektivno ravnino sledita še dva izreka za afino ravnino.

**Trditev 4.23** *Naj bodo $p$, $q$ in $r$ različne vzporedne premice v afini ravnini $\mathcal{A}$ in $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$, $R, R' \in r$ take točke, da se $PQ$ in $P'Q'$ sekata v točki $X$ ter $PR$ in $P'R'$ v $Y$. Tedaj se $QR$ in $Q'R'$ sekata v točki na premici $XY$ ali pa velja $QR \parallel Q'R' \parallel XY$.*

**Trditev 4.24** *Naj bodo $p$, $q$ in $r$ različne premice v afini ravnini $\mathcal{A} = a+W$, ki se sekajo v isti točki, in $P, P' \in p$, $Q, Q' \in q$, $R, R' \in r$ take točke, da se $PQ$ in $P'Q'$ sekata v točki $X$ ter $PR$ in $P'R'$ v $Y$. Tedaj se $QR$ in $Q'R'$ sekata v točki na premici $XY$ ali pa velja $QR \parallel Q'R' \parallel xy$.*

Obe trditvi dokažemo enako kot oba Desarguesova izreka za afino ravnino.

**Izrek 4.25** *(Pappusov izrek za projektivno ravnino) Naj bodo $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = 3$ in $p, q \subset \mathcal{P}V$ različni projektivni premici. Za različne točke $A, B, C \in p$ in $A', B', C' \in q$, od katerih nobena ni enaka preseku $p \cap q$, so preseki $X = AB' \cap A'B$, $Y = AC' \cap A'C$ in $Z = BC' \cap B'C$ kolinearne točke.*

**Dokaz:** Za točko $O := p \cap q$ izberemo bazni vektor $o \in O$. Izberemo še $u \in p$ in $v \in q$, da je $\{o, u\}$ baza za $p$ in $\{o, v\}$ baza za $q$. Ker sta premici $p$ in $q$ različni, je $\{o, u, v\}$ baza za $V$. Ker so točke $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$ in $C'$ različne od $O$, obstajajo skalarji $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathcal{O}$, da je $\alpha o + u \in A$, $\beta o + u \in B$, $\gamma o + u \in C$, $\alpha' o + v \in A'$, $\beta' o + v \in B'$ in $\gamma' o + v \in C'$. Ker je

$$
\begin{aligned}
x :=&(\alpha' - \beta')(\alpha o + u) + (\alpha - \beta)(\beta' o + v) = \\
=&(\alpha' - \beta')(\beta o + u) + (\alpha - \beta)(\alpha' o + v), \\
y :=&(\alpha' - \gamma')(\alpha o + u) + (\alpha - \gamma)(\gamma' o + v) = \\
=&(\alpha' - \gamma')(\gamma o + u) + (\alpha - \gamma)(\alpha' o + v), \\
z :=&(\beta' - \gamma')(\beta o + u) + (\beta - \gamma)(\gamma' o + v) = \\
=&(\beta' - \gamma')(\gamma o + u) + (\beta - \gamma)(\beta' o + v),
\end{aligned}
$$

je $X = \mathrm{Lin}\{x\}$, $Y = \mathrm{Lin}\{y\}$ in $Z = \mathrm{Lin}\{z\}$. Ker je

$$
\begin{aligned}
x + z =&\big((\alpha\alpha' - \beta\beta')o + (\alpha' - \beta')u + (\alpha - \beta)v\big) + \\
&+ \big((\beta\beta' - \gamma\gamma')o + (\beta' - \gamma')u + (\beta - \gamma)v\big) \\
=&(\alpha\alpha' - \gamma\gamma')o + (\alpha' - \gamma')u + (\alpha - \gamma)v = y,
\end{aligned}
$$

so točke $X$, $Y$ in $Z$ kolinearne. □

Pappusov izrek za afino ravnino dokažemo na enak način kot smo dokazali Desarguesova izreka.

## KOLINEACIJE IN PROJEKTIVNOSTI

Sedaj smo se že malo sprijaznili s projektivno geometrijo, nismo pa še ničesar povedali o transformacijah projektivnih prostorov. Kot pri afinih prostorih je tudi tu smiselno zahtevati, da transformacija projektivne geometrije preslika kolinearne točke v kolinearne. Ker nam ta pogoj ničesar ne pove v primeru enorazsežne projektivne geometrije, saj so v njej poljubne točke kolinearne, se bomo za nekaj časa omejili na projektivne geometrije razsežnosti vsaj 2.

**Definicija 4.26** *Naj bosta $V$ in $V'$ vektorska prostora nad obsegom $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = \dim V' \geq 3$. Bijektivno preslikavo $\vartheta\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$ imenujemo* ***kolineacija****, če poljubne tri kolinearne točke preslika v kolinearne.*

Ni težko poiskati kakšne kolineacije. Naj bo $M\colon V \to V'$ bijektivna semilinearna preslikava. Tedaj za vsak enorazsežen vektorski podprostor $X < V$ velja, da je $MX < V'$ tudi enorazsežen. Tako lahko definiramo preslikavo $\vartheta_M\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$ s predpisom $\vartheta_M(X) = MX$. Ker je $M$ bijektivna, je tudi $\vartheta_M$ bijektivna. Preverimo še, da $\vartheta_M$ ohranja kolinearnost. Naj bodo $X$, $Y$ in $Z$ različne kolinarne točke v $\mathcal{P}V$. To pomeni, da je $Z < X \oplus Y$. Ker je preslikava $M$ aditivna, je $MZ < M(X \oplus Y) = MX \oplus MY$ oziroma točke $\vartheta_M(X) = MX$, $\vartheta_M(Y) = MY$ in $\vartheta_M(Z) = MZ$ so kolinearne. Tako smo se prepričali, da je $\vartheta_M$ res kolineacja.

Večji del tega razdelka bomo namenili dokazu, da je vsaka kolineacija $\mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$ enaka $\vartheta_M$ za neko bijektivno semilinearno preslikavo $M\colon V \to V'$.

**Lema 4.27** *Naj bosta $V$ in $V'$ vektorska prostora nad obsegom $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = \dim V' \geq 3$. Naj bo $\vartheta\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$ kolineacija in naj bodo $X_0, X_1, \ldots, X_n < V$ enorazsežni vektorski podprostori. Če je $X_0 < X_1 + \cdots + X_n$, je $\vartheta(X_0) < \vartheta(X_1) + \cdots + \vartheta(X_n)$.*

**Dokaz:** Lemo bomo dokazali z indukcijo na $n$. Če je $n = 1$, ni kaj dokazovati. Če je $n = 2$, iz pogoja $X_0 < X_1 + X_2$ sledi, da so točke $X_0$, $X_1$ in $X_2$ v $\mathcal{P}V$ kolinearne. Ker je $\vartheta$ kolineacija, so točke $\vartheta(X_0)$, $\vartheta(X_1)$ in $\vartheta(X_2)$ v $\mathcal{P}V'$ kolinearne oziroma $\vartheta(X_0) < \vartheta(X_1) + \vartheta(X_2)$.

Denimo, da lema velja za $n-1$. Naj bo $x \in X_0 < X_1 + \cdots + X_n$. Za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$ obstaja vektor $x_i \in X_i$, da je $x = x_1 + \ldots + x_n$. Tedaj je $X_0 < \mathrm{Lin}\{x_1\} + \mathrm{Lin}\{x_2 + \cdots + x_n\} = X_1 + \mathrm{Lin}\{x_2 + \cdots + x_n\}$. Ker je $\vartheta$ kolineacija, je $\vartheta(X_0) < \vartheta(X_1) + \vartheta(\mathrm{Lin}\{x_2 + \cdots + x_n\})$. Ker je $\mathrm{Lin}\{x_2 + \cdots + x_n\} < X_2 + \ldots + X_n$ po indukcijski predpostavki velja $\vartheta(\mathrm{Lin}\{x_2 + \cdots + x_n\}) < \vartheta(X_2) + \cdots + \vartheta(X_n)$. Od tod pa sledi $\vartheta(X_0) < \vartheta(X_1) + \cdots + \vartheta(X_n)$. □

Iz leme sledi, da kolineacija koplanarne točke preslika v koplanarne. Neposredno iz tega še ne moremo sklepati, da bo množica slik kolineacije neke projektivne ravnine spet projektivna ravnina. Iz leme namreč sledi le, da bomo dobili podmnožico. Ob predpostavki, da je $\vartheta$ bijekcija, si težko predstavljamo, da bi dobili pravo podmnožico projektivne ravnine. Prepričajmo se, da so naša predvidevanja pravilna.

**Lema 4.28** *Naj bosta $V$ in $V'$ vektorska prostora nad obsegom $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = \dim V' \geq 3$. Naj bo $\vartheta\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$ kolineacija in naj bodo $X_1, \ldots, X_n < V$ taki enorazsežni vektorski podprostori, da je $V = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$. Tedaj je $V' = \vartheta(X_1) \oplus \cdots \oplus \vartheta(X_n)$.*

**Dokaz:** Naj bo $X \in \mathcal{P}V$ poljubna točka. Tedaj je $X < V = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$. Po prejšnji lemi je $\vartheta(X) < \vartheta(X_1) + \cdots + \vartheta(X_n)$. Ker je $\vartheta$ surjektivna, je $\vartheta(X_1)+\cdots+\vartheta(X_n) = V'$. Ker je $\dim V' = \dim V = n$, je $\vartheta(X_1)+\cdots+\vartheta(X_n)$ $n$-razsežen vektorski prostor. To pa je res le, če je zgornja vsota direktna vsota, torej $V' = \vartheta(X_1) \oplus \cdots \oplus \vartheta(X_n)$. $\square$

**Posledica 4.29** *Naj bosta $V$ in $V'$ vektorska prostora nad obsegom $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = \dim V' \geq 3$. Naj bo $\vartheta\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$ kolineacija in naj bodo $X_1, \ldots, X_k < V$ taki enorazsežni vektorski podprostori, da je $X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$ $k$-razsežen vektorski podprostor v $V$. Tedaj je $\vartheta(X_1)\oplus\cdots\oplus\vartheta(X_k)$ $k$-razsežen vektorski podprostor v $V'$.*

**Dokaz:** Obstajajo enorazsežni vektorski podprostori $X_{k+1}, \ldots, X_n < V$, da je $V = X_1 \oplus \cdots \oplus X_k \oplus \cdots \oplus X_n$. Po prejšnji lemi je $V' = \vartheta(X_1) \oplus \cdots \oplus \vartheta(X_k) \oplus \cdots \oplus \vartheta(X_n)$. To pa že pomeni, da je $\vartheta(X_1) \oplus \cdots \oplus \vartheta(X_k)$ $k$-razsežen vektorski podprostor v $V'$. $\square$

**Izrek 4.30** *Naj bosta $V$ in $V'$ vektorska prostora nad obsegom $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = \dim V' \geq 3$. Kolineacijo $\vartheta\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$ lahko na en sam način razširimo do izomorfizma $\widetilde{\vartheta}\colon \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V')$ projektivnih geometrij.*

Preslikava $\vartheta$ nam preslika le točke projektivne geometrije $\mathbf{P}(V)$. Izrek pravi, da lahko predpis razširimo na vektorske podprostore v $V$, katerih razsežnost je različne od 1, tako da bo iz $U < U'$ sledilo $\widetilde{\vartheta}(U) < \widetilde{\vartheta}(U')$.

**Dokaz:** Če je $U = \{0\} < V$, definiramo $\widetilde{\vartheta}(\{0\}) = \{0\}$. Naj bo $U < V$ poljuben netrivialen vektorski podprostor. Tedaj obstajajo enorazsežni vektorski podprostori $X_1, \ldots, X_k < V$, da je $U = X_1+\cdots+X_k$. Definirajmo $\widetilde{\vartheta}(U) = \vartheta(X_1)+\cdots+\vartheta(X_k)$. Seveda bi lahko prostor $U$ zapisali kot direktno vsoto, a bomo pokazali, da je tako podan predpis $\widetilde{\vartheta}$ dobro definiran; t.j. neodvisen je od zapisa $U$ kot vsoto enorazsežnih vektorskih podprostorov.

• Predpis $\widetilde{\vartheta}$ je dobro definiran: Naj bodo $Y_1, \ldots, Y_l < V$ taki enorazsežni podprostori, za katere tudi velja $U = Y_1 + \cdots + Y_l$. Za vsak $i \in \{1, \ldots, l\}$ je $Y_i < U = X_1 + \cdots + X_k$. Po lemi 4.27 je $\vartheta(Y_i) < \vartheta(X_1) + \cdots + \vartheta(X_k)$ in zato $\vartheta(Y_1) + \cdots + \vartheta(Y_l) < \vartheta(X_1) + \cdots + \vartheta(X_k)$. Enako dokažemo obratno inkluzijo.

• Preslikava $\widetilde{\vartheta}\colon \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V')$ je surjektivna: Naj bo $U' < V'$ netrivialen vektorski podprostor. Tedaj obstajajo taki enorazsežni podprostori $Y_1, \ldots, Y_k < V'$ za katere velja $U = Y_1 + \cdots + Y_k$. Ker je preslikava $\vartheta$ surjektivna, za vsak $i \in \{1, \ldots, k\}$ obstaja enorazsežen vektorski podprostor $X_i < V$, da je $\vartheta(X_i) = Y_i$. Tedaj je $\widetilde{\vartheta}(X_1 + \cdots + X_k) = Y_1 + \cdots + Y_k = U'$. Torej je $\widetilde{\vartheta}$ surjektivna.

• Po konstrukciji preslikava $\widetilde{\vartheta}$ ohranja inkluzije.

• Za vsak $U < V$ velja $\dim \widetilde{\vartheta}(U) = \dim U$. To sledi iz posledice 4.29.

• Preslikava $\widetilde{\vartheta}\colon \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V')$ je injektivna: Naj za $U, U' < V$ velja $\widetilde{\vartheta}(U) = \widetilde{\vartheta}(U')$. Lahko predpostavimo, da $U$ ni vsebovan v $U'$ (v nasprotnem primeru zamenjamo vlogi $U$ in $U'$). Tedaj obstaja enorazsežen vektorski podprostor $X < U'$, da je $X \cap U = \{0\}$. Naj bodo $X_1, \ldots, X_k < V$ taki enorazsežni podprostori, da je $U = X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$. Ker je $X < U'$, je $\vartheta(X) < \widetilde{\vartheta}(U') = \widetilde{\vartheta}(U)$. Torej velja

$$\begin{aligned}\widetilde{\vartheta}(X \oplus U) &= \vartheta(X) + \vartheta(X_1) + \ldots + \vartheta(X_k) = \\ &= \vartheta(X) + \widetilde{\vartheta}(U) = \\ &= \widetilde{\vartheta}(U).\end{aligned}$$

S pomočjo prejšnje točke tako dobimo $\dim(X \oplus U) = \dim \widetilde{\vartheta}(X \oplus U) = \dim \widetilde{\vartheta}(U) = \dim U < \dim X \oplus U$. To pa je v protislovje, zato je $\widetilde{\vartheta}$ res injektivna.

• Razširitev je enolična: Denimo, da je $\hat{\vartheta}\colon \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V')$ še en izomorfizem projektivnih geometrij, ki je razširitev preslikave $\vartheta$. Naj bo $U < V$ poljuben vektorski podprostor. Naj bo $\{x_1, \ldots, x_k\}$ baza za $X$, ki jo dopolnimo do baze $\{x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n\}$ za $V$. Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ naj bosta $X_i = \mathrm{Lin}\{x_i\}$ in $U_i = \mathrm{Lin}\{x_1, \ldots, x_i\} = X_1 \oplus \cdots \oplus X_i$. Ker $\hat{\vartheta}$ ohranja inkluzije in je injektivna, dobimo strogo naraščajočo verigo vektorskih podprostorov

$$\{0\} \subsetneqq \hat{\vartheta}(U_1) \subsetneqq \hat{\vartheta}(U_2) \subsetneqq \cdots \subsetneqq \hat{\vartheta}(U_{n-1}) \subsetneqq \hat{\vartheta}(U_n) = V'.$$

Zadnja enakost sledi iz dejstva, da je $\hat{\vartheta}$ surjektivna preslikava, ki ohranja inkluzije, in je $U_n = V$ največji vektorski podprostor v $V$. Iz zgornje verige dobimo naslednjo številsko verigo

$$0 = \dim\{0\} < \dim \hat{\vartheta}(U_1) < \cdots < \dim \hat{\vartheta}(U_{n-1}) < \dim \hat{\vartheta}(U_n) = \dim V' = n.$$

To pa pomeni, da je za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$ razsežnost $\dim \hat{\vartheta}(U_i) = i$. Ker je $U = U_k$, je tako $\dim \hat{\vartheta}(U) = k = \dim U$. Po predpostavki razširitev $\hat{\vartheta}$ ohranja inkluzije, zato je $\vartheta(X_i) = \hat{\vartheta}(X_i) < \hat{\vartheta}(U)$ za vsak $i \in \{1, \ldots, k\}$. Ker sta vektorska prostora $\widetilde{\vartheta}(U)$ in $\hat{\vartheta}(U)$ enake razsežnosti $k$ in je $\widetilde{\vartheta}(U) = \vartheta(X_1) + \cdots + \vartheta(X_k) < \hat{\vartheta}(U)$, sta enaka.

S tem smo pokazali, da obstaja le ena razširitev kolineacije $\vartheta$ do izomorfizma projektivnih geometrij. $\square$

Poleg dejstva, da za vsako kolineacijo $\vartheta\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$ obstaja (natanko ena) razširitev do izomorfizma $\widetilde{\vartheta}\colon \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V')$ projektivnih geometrij, si je dobro zapomniti začetek dokaza, kjer je razširitev konstruirana. Torej za vsak vektorski podprostor $U < V$ poiščemo enorazsežne podprostore $X_1, \ldots, X_k < V$, da je $U = X_1 + \cdots + X_k$ in tedaj je $\widetilde{\vartheta}(U) = \vartheta(X_1) + \cdots + \vartheta(X_k)$.

**Posledica 4.31** *Naj bosta $V$ in $V'$ vektorska prostora nad obsegom $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = \dim V' \geq 3$. Naj bo $\widetilde{\vartheta}\colon \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V')$ (edini) izomorfizem, ki je razširitev kolineacije $\vartheta\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$. Tedaj za poljubna vektorska podprostora $U, Z < V$ velja*

**a.** $\widetilde{\vartheta}(U + Z) = \widetilde{\vartheta}(U) + \widetilde{\vartheta}(Z)$ *in*

**b.** $\widetilde{\vartheta}(U \cap Z) = \widetilde{\vartheta}(U) \cap \widetilde{\vartheta}(Z)$.

**Dokaz:** **a.** Naj bodo $X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_l < V$ taki enorazsežni vektorski podprostori, da je $U = X_1 + \cdots + X_k$ in $Z = Y_1 + \cdots + Y_l$. Tedaj je $U + Z = X_1 + \cdots + X_k + Y_1 + \cdots + Y_l$ in zato

$$\widetilde{\vartheta}(U + Z) = \vartheta(X_1) + \cdots + \vartheta(X_k) + \vartheta(Y_1) + \cdots + \vartheta(Y_l) = \widetilde{\vartheta}(U) + \widetilde{\vartheta}(Z).$$

**b.** Ker $\widetilde{\vartheta}$ ohranja inkluzije, je $\widetilde{\vartheta}(U \cap Z) < \widetilde{\vartheta}(U) \cap \widetilde{\vartheta}(Z)$. Če sta vektorska prostora $\widetilde{\vartheta}(U \cap Z)$ in $\widetilde{\vartheta}(U) \cap \widetilde{\vartheta}(Z)$ enake razsežnosti, sta tako enaka. Upoštevamo dejstvi, da za poljubna vektorska prostora $U_1$ in $U_2$ velja $\dim U_1 + \dim U_2 =$

$\dim(U_1+U_2)+\dim(U_1\cap U_2)$ ter da $\widetilde{\vartheta}$ ohranja razsežnosti, in dobimo

$$\begin{aligned}\dim\widetilde{\vartheta}(U\cap Z) &= \dim(U\cap Z) = \\ &= \dim U + \dim Z - \dim(U+Z) = \\ &= \dim\widetilde{\vartheta}(U) + \widetilde{\vartheta}(Z) - \dim\widetilde{\vartheta}(U+Z) = \\ &= \dim\widetilde{\vartheta}(U) + \widetilde{\vartheta}(Z) - \dim(\widetilde{\vartheta}(U)+\widetilde{\vartheta}(Z)) = \\ &= \dim(\widetilde{\vartheta}(U)\cap\widetilde{\vartheta}(Z)),\end{aligned}$$

kar smo želeli dokazati. □

V prejšnjem pogavju smo si ogledali, kako afino geometrijo vložimo v projektivno. Zastavi se vprašanje, če je zožitev kolineacije na primerno vloženi afini geometriji tudi afina transformacija.

**Izrek 4.32** *Naj bodo $V$ in $V'$ vektorska prostora nad obsegom $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = \dim V' \geq 3$ in $\vartheta\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$ kolineacija. Naj bo $W < V$ poljubna hiperravnina in $a \in V - W$ poljuben vektor. Za $W' = \widetilde{\vartheta}(W)$ in neničelni vektor $a' \in \vartheta(\mathrm{Lin}\{a\})$ označimo $\mathcal{A} = a + W$ in $\mathcal{A}' = a' + W'$. Preslikava $\widetilde{\tau}\colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{A}(\mathcal{A}')$ definirana s predpisom $\widetilde{\tau}(\mathcal{U}) = \widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{\mathcal{U}\}) \cap \mathcal{A}'$, je izomorfizem afinih geometrij, ki ohranja vzporednost.*

Pripomnimo, da $\widetilde{\vartheta}$ ohranja razsežnost in zato je $W'$ hiperravnina v $V'$. Torej je zožitev kolineacije na poljubno vloženo afino geometrijo vedno afina tranformacija, le vložitev v $\mathbf{P}(V')$ moramo izbrati tako, da $\widetilde{\tau}$ slika v pravo množico.

**Dokaz:** Naj bo $\mathcal{U}$ afin podprostor v $\mathcal{A}$. Po lemi 4.17 je

$$\widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{\mathcal{U}\}) = \mathrm{Lin}\{\widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{\mathcal{U}\}) \cap \mathcal{A}'\} = \mathrm{Lin}\{\widetilde{\tau}(\mathcal{U})\}.$$

• Preslikava $\widetilde{\tau}$ je injektivna: Naj bosta $\mathcal{U}$ in $\mathcal{Z}$ afina podprostora v $\mathcal{A}$, za katera velja $\widetilde{\tau}(\mathcal{U}) = \widetilde{\tau}(\mathcal{Z})$. Po zgornjem razmisleku je

$$\widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{\mathcal{U}\}) = \mathrm{Lin}\{\widetilde{\tau}(\mathcal{U})\} = \mathrm{Lin}\{\widetilde{\tau}(\mathcal{Z})\} = \widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{\mathcal{Z}\}).$$

Ker je $\widetilde{\vartheta}$ bijekcija, je $\mathrm{Lin}\{\mathcal{U}\} = \mathrm{Lin}\{\mathcal{Z}\}$. S pomočjo leme 4.16 je $U = \mathrm{Lin}\{\mathcal{U}\} \cap \mathcal{A} = \mathrm{Lin}\{\mathcal{Z}\} \cap \mathcal{A} = \mathcal{Z}$.

• Preslikava $\widetilde{\tau}$ je surjektivna: Naj bo $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}'$ afin podprostor. Tedaj je $U = \mathrm{Lin}\{\mathcal{U}\} < V'$ in ker je $\widetilde{\vartheta}\colon \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V')$ bijekcija, obstaja $Z < V$, da je $\widetilde{\vartheta}(Z) = U$. Ker je $\mathcal{Z} = Z \cap \mathcal{A}$ presek afinih prostorov, je afin prostor (v $\mathcal{A}$). Ker $\mathcal{Z} \not\subset W$, tudi $Z \not< W$, in zato po lemi 4.17 velja $\mathrm{Lin}\{Z \cap \mathcal{A}\} = Z$. Iz leme 4.16 pa sledi $U \cap \mathcal{A}' = \mathrm{Lin}\{\mathcal{U}\} \cap \mathcal{A}' = \mathcal{U}$ in zato je

$$\widetilde{\tau}(\mathcal{Z}) = \widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{\mathcal{Z}\}) \cap \mathcal{A}' = \widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{Z \cap \mathcal{A}\}) \cap \mathcal{A}' = \widetilde{\vartheta}(Z) \cap \mathcal{A}' = U \cap \mathcal{A}' = \mathcal{U}.$$

• Preslikava $\widetilde{\tau}$ ohranja inkluzije. To sledi neposredno iz dejstva, da $\widetilde{\vartheta}$ ohranja inkluzije.

• Preslikava $\widetilde{\tau}$ ohranja vzporednost: Naj bosta $\mathcal{U}$ in $\mathcal{Z}$ vzporedna afina prostora v $\mathcal{A}$. Po točki 7. izreka 4.13 je

$$\mathrm{Lin}\{\mathcal{U}\} \cap W < \mathrm{Lin}\{\mathcal{Z}\} \cap W \text{ ali pa } \mathrm{Lin}\{\mathcal{Z}\} \cap W < \mathrm{Lin}\{\mathcal{U}\} \cap W.$$

Ker $\widetilde{\vartheta}$ ohranja inkluzije, je

$$\widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{\mathcal{U}\}\cap W) < \widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{\mathcal{Z}\}\cap W) \text{ ali pa je } \widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{\mathcal{Z}\}\cap W) < \widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{\mathcal{U}\}\cap W).$$

Po posledici 4.31 je slika preseka s preslikavo $\widetilde{\vartheta}$ presek slik. Po definiciji je $\widetilde{\vartheta}(W) = W'$ in zato

$$\widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{\mathcal{U}\}) \cap W' < \widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{\mathcal{Z}\}) \cap W' \text{ ali } \widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{\mathcal{Z}\}) \cap W' < \widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{\mathcal{U}\}) \cap W'.$$

Uporabimo razmislek z začetka dokaza in dobimo

$$\mathrm{Lin}\{\widetilde{\tau}(\mathcal{U})\} \cap W' < \mathrm{Lin}\{\widetilde{\tau}(\mathcal{Z})\} \cap W' \text{ ali } \mathrm{Lin}\{\widetilde{\tau}(\mathcal{Z})\} \cap W' < \mathrm{Lin}\{\widetilde{\tau}(\mathcal{U})\} \cap W'.$$

Po točki 7. izreka 4.13 sta tako afina prostora $\widetilde{\tau}(\mathcal{U})$ in $\widetilde{\tau}(\mathcal{Z})$ vzporedna. □

Sedaj imamo pripravljeno vse za osnovni izrek projektivne geometrije.

**Izrek 4.33** *Naj bodo $V$ in $V'$ vektorska prostora nad obsegom $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = \dim V' \geq 3$ in $\vartheta \colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$ kolineacija. Tedaj obstaja obrnljiva semilinearna $M \colon V \to V'$, da je $\vartheta = \vartheta_M$.*

Pripomnimo, da tedaj za vsak vektorski podprostor $U = X_1 + \cdots + X_k < V$ velja $\widetilde{\vartheta}(U) = \vartheta(X_1) + \cdots + \vartheta(X_k) = MX_1 + \cdots + MX_k = M(X_1 + \cdots + X_k) = MU$.

**Dokaz:** Naj bo $\widetilde{\vartheta} \colon \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(V')$ edina razširitev kolineacije $\vartheta$ do izomorfizma projektivnih geometrij. Naj bo $W < V$ poljubna hiperravnina in $a \in V - W$ poljuben. Za $W' = \widetilde{\vartheta}(W)$ in neničelni vektor $a' \in \vartheta(\mathrm{Lin}\{a\})$ označimo $\mathcal{A} = a + W$ in $\mathcal{A}' = a' + W'$. Po ravnokar dokazanem izreku je preslikava $\widetilde{\tau} \colon \mathbf{A}(\mathcal{A}) \to \mathbf{A}(\mathcal{A}')$, definirana s predpisom $\widetilde{\tau}(\mathcal{U}) = \widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{\mathcal{U}\}) \cap \mathcal{A}'$, izomorfizem afinih geometrij, ki ohranja vzporednost. Naj bo $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ afina transformacija, ki pripada izomorfizmu $\widetilde{\tau}$. Torej je $\{\tau(x)\} = \widetilde{\tau}(\{x\})$ za vse $x \in \mathcal{A}$. Po osnovnem izreku afine geometrije obstaja obrnljiva semilinearna preslikava $N\colon W \to W'$, da za vsako točko $x \in \mathcal{A}$ velja $\tau(x) = a' + N(x - a)$. Naj bo $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$ avtomorfizem obsega $\mathcal{O}$, ki pripada semilinearni preslikavi $N$.

Vektorski prostor $V$ zapišemo kot $V = W \oplus \mathrm{Lin}\{a\}$, zato lahko vsak element $x \in V$ na enoličen način zapišemo kot $x = w + \lambda a$, kjer je $w \in W$ in $\lambda \in \mathcal{O}$. Razširimo preslikavo $N$ do $M\colon V \to V'$ s predpisom $M(w + \lambda a) = N(w) + f(\lambda)a'$.

• Preslikava $M$ je aditivna: Poljubna elementa $x_1, x_2 \in V$ zapišemo kot $x_i = w_i + \lambda_i a$. Tedaj je

$$\begin{aligned} M(x_1 + x_2) &= M(w_1 + \lambda_1 a + w_2 + \lambda_2 a) = N(w_1 + w_2) + f(\lambda_1 + \lambda_2)a' = \\ &= N(w_1) + f(\lambda_1)a' + N(w_2) + f(\lambda_2)a' = M(x_1) + M(x_2). \end{aligned}$$

• Preslikava $M$ je semilinearna in ji pripada avtomorfizem $f$ obsega $\mathcal{O}$: Naj bo $x = w + \lambda a \in V$ in $\alpha \in \mathcal{O}$. Tedaj je

$$\begin{aligned} M(\alpha x) &= M(\alpha w + \alpha\lambda a) = N(\alpha w) + f(\alpha\lambda)a' = f(\alpha)N(w) + f(\alpha)f(\lambda)a' = \\ &= f(\alpha)(N(w) + f(\lambda)a') = f(\alpha)M(x). \end{aligned}$$

• Preslikava $M$ je injektivna: Naj bo $x = w + \lambda a \in \mathrm{Ker}\, M$ v jedru semilinearne preslikave $M$. Tedaj je $0 = M(x) = Nw + f(\lambda)a' \in W' \oplus \mathrm{Lin}\{a'\}$, zato je $Nw = 0$ in $f(\lambda)a' = 0$. Ker je $N$ injektivna, je $w = 0$, in ker je $a'$ neničelni vektor, je $f(\lambda) = 0$ oziroma $\lambda = 0$. Torej je jedro preslikave $M$ trivialno, zato je $M$ injektivna.

• Preslikava $M$ je surjektivna: Slika semilinearne preslikave je vektorski prostor v $V'$. Ker sta v sliki preslikave $M$ vektorski podprostor $W' = N(W) = M(W)$ ter točka $a' = M(a)$ in je $\mathrm{Lin}\{W \cup \{a'\}\} = W'$, je $M$ surjektivna.

Tako smo pokazali, da je $M\colon V \to V'$ obrnljiva semilinearna preslikava, ki ji pripada avtomorfizem $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$.

Dokazatimo moramo še, da je $\vartheta = \vartheta_M$. Naj bo $X < V$ enorazsežen vektorski podprostor. Izberimo neničelni vektor $x \in X$ in ga zapišimo kot $x = w + \lambda a$, kjer je $w \in W$ in $\lambda \in \mathcal{O}$. Ločimo dve možnosti.

• Naj bo $\lambda \neq 0$. Tedaj je $\lambda^{-1}x = \lambda^{-1}w + a$ tudi neničelni vektor v $X$. Torej lahko predpostavimo, da smo izbrali $x$ tak, da je $\lambda = 1$; se pravi $x = w + a$.

Tedaj velja

$$\begin{aligned}\vartheta(X)\cap\mathcal{A}' &= \vartheta(\mathrm{Lin}(\{x\})\cap\mathcal{A}' = \widetilde{\tau}(\{x\}) = \{\tau(x)\} = \{N(x-a)+a'\} = \\ &= \{M(x-a)+Ma\} = \{M(x)\}.\end{aligned}$$

S pomočjo te enakosti in leme 4.17 dobimo

$$\vartheta(X) = \mathrm{Lin}\{\vartheta(X)\cap A'\} = \mathrm{Lin}\{M(x)\} = M(\mathrm{Lin}\{x\}) = MX.$$

• Naj bo $\lambda = 0$. Torej je $x = w \in W$ in zato je $X = \mathrm{Lin}\{w\} = \mathrm{Lin}\{a, w + a\}\cap W$. Tedaj je

$$\begin{aligned}\vartheta(X) &= \vartheta(\mathrm{Lin}\{a, a+w\}\cap W) = \\ &= \widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{a, a+w\})\cap\widetilde{\vartheta}(W) = \\ &= \widetilde{\vartheta}(\mathrm{Lin}\{a\}+\mathrm{Lin}\{a+w\})\cap W' = \\ &= \big(\vartheta(\mathrm{Lin}\{a\})+\vartheta(\mathrm{Lin}\{a+w\})\big)\cap W' = \\ &= \big(M(\mathrm{Lin}\{a\})+M(\mathrm{Lin}\{a+w\})\big)\cap W' = \\ &= \big(\mathrm{Lin}\{Ma\}+\mathrm{Lin}\{M(a+w)\}\big)\cap W' = \\ &= \big(\mathrm{Lin}\{a'\}+\mathrm{Lin}\{a'+Mw\}\big)\cap W' = \\ &= \mathrm{Lin}\{a', a'+Mw\}\cap W' = \\ &= \mathrm{Lin}\{a', Mw\}\cap W' = \\ &= \mathrm{Lin}\{Mw\} = N(\mathrm{Lin}\{w\}) = MX.\end{aligned}$$

S tem je osnovni izrek projektivne geometrije dokazan. □

V tem poglavju o kolineacijah smo se omejili na vektorske prostore razsežnosti vsaj tri, saj je v ostalih primerih pogoj, da preslikava preslika kolinearne točke v kolinearne, na prazno izpolnjen. Vsekakor si ne želimo poljubne preslikave $\vartheta\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$, kjer je $\dim V = \dim V' = 2$, proglasiti za kolineacijo oziroma projektivno transformacijo. Osnovni izrek projektivne geometrije nam jasno ponudi definicijo kolineacije tudi za ta primer. Torej je preslikava $\vartheta\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$ med projektivnima premicama ($\dim V = \dim V' = 2$) **kolineacija**, če obstaja obrnljiva semilinearna preslikava $M\colon V \to V'$, da je $\vartheta = \vartheta_M$.

**Definicija 4.34** *Kolineacija $\vartheta_M$, porojena z linearno preslikavo $M$, se imenuje **projektivnost**.*

Omenili smo že, da obsegi $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{F}_p$, kjer je $p$ praštevilo, premorejo le trivialni avtomorfizem.

**Posledica 4.35** *Naj bosta $V$ in $V'$ vektorska prostora enake razsežnosti nad obsegom $\mathcal{O} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p\}$. Tedaj je vsaka kolineacija $\vartheta\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$ projektivnost.*

Polje kompleksnih števil pa premore tudi netrivialne avtomorfizme. Na primer konjugacija je že tak. Ni pa edini. Izkaže se, da je množica $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ neštevna. Kar pomeni, da imamo v primeru kompleksnih projektivnih geometrij veliko kolineacij, ki niso projektivnosti.

Naj bo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$. Z $PGL(V)$ označimo množico vseh projektivnosti $\mathcal{P}V \to \mathcal{P}V$ in z $P\Gamma L(V)$ označimo množico vseh kolineacij $\mathcal{P}V \to \mathcal{P}V$. Ker za $\vartheta, \vartheta' \in PGL(V)$ obstajata obrnljivi linearni preslikavi $M, N\colon V \to V$, da je $\vartheta = \vartheta_M$ in $\vartheta' = \vartheta_N$, je $\vartheta \circ \vartheta' = \vartheta_{M \circ N}$ tudi v $PGL(V)$. Prav tako je $\vartheta_M^{-1} = \vartheta_{M^{-1}}$ v $PGL(V)$. Enako lahko sklepamo za elemente iz $P\Gamma L(V)$. Torej sta $PGL(V)$ in $P\Gamma L(V)$ grupi. Iz ravnokar povedanega bi lahko prehitro sklepali, da je grupa $PGL(V)$ enaka grupi $GL(V)$ vseh obrnljivih linearnih preslikav $V \to V$, in da je $P\Gamma L(V)$ enaka grupi $\Gamma L(V)$ vseh obrnljivih semilinearnih preslikav $V \to V$. To ni res, saj obstajajo obrnljive linearne preslikave, ki porodijo isto projektivnost.

Naj bo $\mathcal{O}^*$ množica vseh neničelnih skalarnih matrik $\{\lambda I \mid \lambda \in \mathcal{O} - \{0\}\}$, kjer je $I\colon V \to V$ identiteta. Tedaj je $\mathcal{O}^*$ podgrupa v $GL(V)$ in zato tudi v $\Gamma L(V)$. Za vsak $\lambda I \in \mathcal{O}^*$ in vsak $U < V$ je $\lambda I(U) = U$. Torej je $\vartheta_{\lambda I}$ identiteta. Tako grupa $PGL(V)$ res ni enaka grupi $GL(V)$.

**Izrek 4.36** *Naj bo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$ in $\dim V \geq 2$.*

**a**. *Množici $PGL(V)$ in $P\Gamma L(V)$ sta grupi.*

**b**. *Grupa $PGL(V)$ je edinka v $P\Gamma L(V)$.*

**c**. *Grupa $PGL(V)$ je izomorfna kvocientni grupi $GL(V)/\mathcal{O}^*$.*

**d**. *Grupa $P\Gamma L(V)$ je izomorfna kvocientni grupi $\Gamma L(V)/\mathcal{O}^*$.*

**Dokaz:** Točko **a.** smo že dokazali.

**b.** Naj bo $\vartheta_M \in PGL(V)$ in $\vartheta_N \in P\Gamma L(V)$. Tedaj je $\vartheta_N \circ \vartheta_M \circ \vartheta_N^{-1} = \vartheta_{NMN^{-1}}$. Naj bo $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$, ki pripada semilinearni preslikavi $N$. Po trditvi 2.37 je $NMN^{-1}$ semilinearna preslikava, ki ji pripada avtomorfizem $f \circ id_{\mathcal{O}} \circ f^{-1} = id_{\mathcal{O}}$. Torej je $NMN^{-1}$ linearna preslikava in zato $\vartheta_N \circ \vartheta_M \circ \vartheta_N^{-1} \in PGL(V)$. Tako smo pokazali, da je $PGL(V)$ edinka v $P\Gamma L(V)$.

**c.** Naj bo $\varphi\colon GL(V) \to PGL(V)$ homomorfizem, definiran s predpisom $\varphi(M) = \vartheta_M$. Iz definicije projektivnosti sledi surjektivnost preslikave $\varphi$. Pokažimo, da je $\operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{O}^*$. O inkluziji $\mathcal{O}^* \subset \operatorname{Ker}\varphi$ smo se že prepričali. Naj bo $\vartheta_M \in \operatorname{Ker}\varphi$. Za vsak $x \in V - \{0\}$ torej velja $\operatorname{Lin}\{x\} = \vartheta_M(\operatorname{Lin}\{x\}) = \operatorname{Lin}\{Mx\}$. Zato obstaja neničelni skalar $\lambda_x \in \mathcal{O}$, da je $Mx = \lambda_x x$. Želimo pokazati, da je skalar $\lambda_x$ neodvisen od $x$.

Naj bosta $x, y \in V$ linearno neodvisna vektorja. Iz enakosti

$$\lambda_x x + \lambda_y y = Mx + My = M(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y$$

sledi $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$. Naj bosta $x, y \in V$ linearno odvisna. Ker je $\dim V \geq 2$, obstaja vektor $z$, ki je linearno neodvisen z $x$ in z $y$. Zato je $\lambda_x = \lambda_z = \lambda_y =: \lambda$. Torej je $Mx = \lambda x$ za vse $x \in X$, kar pomeni, da je $M$ skalarna matrika $\lambda I$.

Tako smo pokazali, da je jedro $\operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{O}^*$ in zato je grupa $PGL(V)$ izomorfna kvocientni grupi $GL(V)/\mathcal{O}^*$.

**d.** Naj bo $\varphi\colon \Gamma L(V) \to P\Gamma L(V)$ homomorfizem, definiran s predpisom $\varphi(M) = \vartheta_M$. Po osnovnem izreku projektivne geometrije je $\varphi$ surjektiven. Preostanek dokaza je enak kot v točki 3., saj nikjer nismo uporabili homogenosti preslikave $M$. □

Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ $n$-razsežna afina prostora. Vsaka afina transformacija $\tau\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ je natanko določena z vrednostmi v $n+1$ točkah, ki so afino neodvisne. Težko pričakujemo podoben rezultat za kolineacije, saj je iz nekaj vrednosti same kolineacije težko določiti avtomorfizem semilinearne preslikave, ki porodi kolineacijo. Morda pa velja kaj podobnega za projektivnost. Najprej razmislimo, s čim je treba zamenjati pogoj afine neodvisnosti.

**Definicija 4.37** *Naj bo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = n$. Tedaj $n+1$ točk v $\mathcal{P}V$ tvori* ***projektivno ogrodje****, če nobena $n$-terica teh točk ne leži na isti hiperravnini.*

V primeru, ko je $\dim V = 2$, je $\mathcal{P}V$ projektivna premica. Tri točke iz $\mathcal{P}V$ so projektivno ogrodje, če nobeni dve ne ležita na isti hiperravnini. V projektivni premici $\mathcal{P}V$ je hiperravnina točka. Torej so tri točke v $\mathcal{P}V$ projektivno ogrodje, ko so različne.

V primeru, ko je $\dim V = 3$, je $\mathcal{P}V$ projektivna ravnina. Štiri točke v $\mathcal{P}V$ so projektivno ogrodje natanko tedaj, ko nobena trojica ne leži na kakšni projektivni premici v $\mathcal{P}V$.

**Lema 4.38** *Naj bo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = n$. Če je $\{X_0, \ldots, X_n\}$ projektivno ogrodje za $\mathcal{P}V$, obstajajo neničelni vektorji $x_0 \in X_0, \ldots, x_n \in X_n$, da je $x_0 = x_1 + \cdots + x_n$.*

**Dokaz:** Za vsak $i \in \{0, \ldots, n\}$ izberimo neničelni vektor $y_i \in X_i$. Ker točke $X_1, \ldots, X_n$ ne ležijo na isti hiperravnini, je množica $\{y_1, \ldots, y_n\}$ baza vektorskega prostora $V$. Torej obstajajo skalarji $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathcal{O}$, da je $y_0 = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n$. Če je $\lambda_i = 0$, točke $X_0, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$ ležijo na isti hiperravnini $\mathrm{Lin}\{y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n\}$. Torej so vsi skalarji $\lambda_i \neq 0$ in so tako $x_0 = y_0, x_1 = \lambda_1 y_1, \ldots, x_n = \lambda_n y_n$ iskani vektorji. □

**Trditev 4.39** *Naj bo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$ razsežnosti $n$. Projektivnost $\vartheta_M \colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V$, ki ima $n+1$ negibnih točk, ki tvorijo projektivno ogrodje za $\mathcal{P}V$, je identična preslikava.*

**Dokaz:** Naj bodo $X_0, \ldots, X_n \in \mathcal{P}V$ negibne točke projektivnosti $\vartheta_M$, ki tvorijo projektivno ogrodje za $\mathcal{P}V$. Po lemi 4.38 za vsak $i \in \{0, \ldots, n\}$ lahko izberimo neničelni vektor $x_i \in X_i$, da je $x_0 = x_1 + \cdots + x_n$. Ker je $\mathrm{Lin}\{x_i\} = X_i = \vartheta(X_i) = MX_i = \mathrm{Lin}\{Mx_i\}$, obstaja $\lambda_i \in \mathcal{O}$, da je $Mx_i = \lambda_i x_i$. Velja

$$\begin{aligned}\lambda_0 x_1 + \cdots + \lambda_0 x_n &= \lambda_0(x_1 + \cdots + x_n) = \lambda_0 x_0 = M(x_0) = \\ &= M(x_1 + \cdots + x_n) = M(x_1) + \cdots + M(x_n) = \\ &= \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.\end{aligned}$$

Ker so vektorji $x_1, \ldots, x_n$ linearno neodvisni, je $\lambda_0 = \lambda_i$ za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$. Torej je $M(x_i) = \lambda_0 x_i$ za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ker je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza vektorskega prostora $V$, je $M$ skalarna matrika $\lambda_0 I$ in zato je $\vartheta_M$ identična preslikava. □

**Trditev 4.40** *Naj bosta $V$ in $V'$ vektorska prostora nad obsegom $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = \dim V' = n$. Naj bosta $\{X_0, \ldots, X_n\}$ projektivno ogrodje za $\mathcal{P}V$ in $\{Y_0 \ldots, Y_n\}$ projektivno ogrodje za $\mathcal{P}V'$. Tedaj obstaja natanko ena projektivnost $\vartheta \colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$, za katero velja $\vartheta(X_i) = Y_i$ za vse $i \in \{0, \ldots, n\}$.*

**Dokaz:** Po lemi 4.38 za vsak $i \in \{0, \ldots, n\}$ obstajata neničelna vektorja $x_i \in X_i$ in $y_i \in Y_i$, da je $x_0 = x_1 + \cdots + x_n$ in $y_0 = y_1 + \cdots + y_n$. Definirajmo linearno preslikavo $M\colon V \to V'$ na bazi $\{x_1, \dots, x_n\}$ s predpisom $Mx_i = y_i$. Za $i \in \{1, \dots, n\}$ je

$$\vartheta_M(X_i) = \vartheta_M(\mathrm{Lin}\{x_i\}) = \mathrm{Lin}\{M(x_i)\} = \mathrm{Lin}\{y_i\} = Y_i$$

in za $i = 0$ je

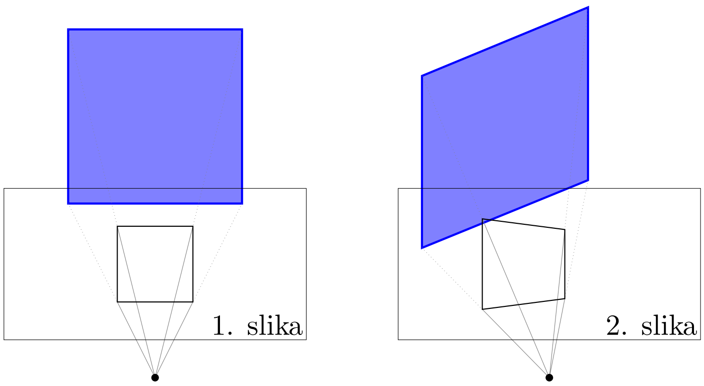
$$\begin{aligned}\vartheta_M(X_0) = \vartheta_M(\mathrm{Lin}\{x_0\}) &= \vartheta_M(\mathrm{Lin}\{x_1 + \dots + x_n\}) = \\ &= \mathrm{Lin}\{M(x_1 + \dots + x_n)\} = \mathrm{Lin}\{y_1 + \dots + y_n\} = \\ &= \mathrm{Lin}\{y_0\} = Y_0.\end{aligned}$$

Torej je $\vartheta_M$ iskana projektivnost. Denimo, da obstajata dve projektivnosti $\vartheta, \vartheta'\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$, ki zadoščata predpostavkam trditve. Tedaj je $\vartheta^{-1} \circ \vartheta'\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V$ projektivnost in $\{X_0, \dots, X_n\}$ projektivno ogrodje za $\mathcal{P}V$ sestavljeno iz negibnih točk. Po prejšnji trditvi je $\vartheta^{-1} \circ \vartheta'$ identična preslikava oziroma $\vartheta = \vartheta'$. □

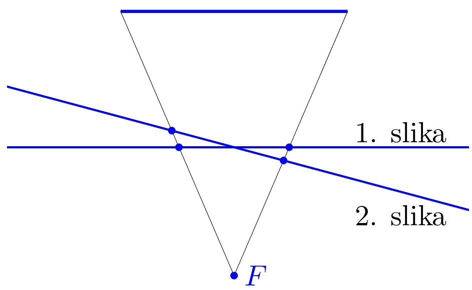
Ali nas preseneti dejstvo, da projektivnost na projektivni premici ni natanko določena z vrednostima v dveh različnih točkah? Spomnimo se, da je realna projektivna premica $\mathcal{P}\mathbb{R}$ topološka krožnica. Če predpišemo vrednost projektivnosti $\vartheta\colon \mathcal{P}\mathbb{R} \to \mathcal{P}\mathbb{R}$ le v dveh točkah, nismo povedali, ali bo $\vartheta$ ohranila orientacijo ali jo bo obrnila. To storimo, ko predpišemo še vrednost projektivnosti $\vartheta$ v tretji točki.

## PERSPEKTIVNOST

S fotoaparatom slikamo kvadrat, nato se zasukamo v desno in ga ponovno




slikamo, tako da navidezna razdalja od fotoaparata do fotografije ostane nespremenjena. Slika kvadrata se spremeni. Ne le, da je sedaj kvadrat bolj na levi strani fotografije, ampak se sama slika "deformira". Ko smo prvič fotografirali sta bili navpični stranici kvadrata enako oddaljena od foto-aparata, zato sta na sliki enako dolgi. Pri drugi fotografiji pa je leva stranica bližje, zato je na sliki daljša od desne. Da bi razumeli, kako se prva slika spremeni v drugo, si oglejmo obe fotografiji s ptičje perspektive. Točka $F$ predstavlja fotoaparat. Obe črti sta od točke $F$ oddaljeni toliko, kot je navidezna slika od fotoaparata, in tako predstavljata obe fotografiji. Kjer zveznica med točko $F$ in objektom seka premici, nastane navidezna slika. Sedaj je tudi jasno, kako iz ene fotografije dobimo drugo. Preslikava iz ene slike na drugo, ki jo dobimo na zgoraj opisan način, se imenuje perspektivnost. Definicijo seveda posplošimo še na ostale razsežnosti.




**Definicija 4.41** *Naj bodo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$ in $U, U', T$ vektorski podprostori v $V$, da je $U \oplus T = U' \oplus T = V$. Preslikava $\vartheta\colon \mathcal{P}U \to \mathcal{P}U'$, definirana s predpsiom $\vartheta(X) = (X \oplus T) \cap U'$, se imenuje **perspektivnost s centrom** $T$.*

Vektorski podprostor $T$ iz definicije imenujemo **skupni komplement** vektorskih podprostorov $U$ in $U'$ v $V$. Seveda iz definicije sledi, da je $\dim U = \dim U'$.

Treba se je prepričati, da je $\vartheta(X)$ res točka v projektivnem prostoru $\mathcal{P}U'$. Z drugimi besedami, radi bi pokazali, da je vektorski prostor $(X \oplus T) \cap U'$ enorazsežen. To sledi iz naslednje leme.

**Lema 4.42** *Naj bo $\vartheta\colon \mathcal{P}U \to \mathcal{P}U'$ perspektivnost s centrom v $T$. Tedaj za vsak $X \in \mathcal{P}U$ velja $X \oplus T = \vartheta(X) \oplus T$.*

**Dokaz:** Za $X \in \mathcal{P}U$ z uporabo leme 4.18 dobimo

$$\begin{aligned}\vartheta(X) \oplus T &= ((X \oplus T) \cap U') \oplus T = (X \oplus T) \cap (U' \oplus T) = \\ &= (X \oplus T) \cap V = X \oplus T.\end{aligned}$$

□

Iz leme tako sledi, da je $\dim X = \dim \vartheta(X)$. S tem smo se prepričali, da je vsaka perspektivnost dobro definirana. Poleg tega pa iz leme sledi tudi dejstvo, da je perspektivnost bijekcija, ki ima za inverz perspektivnost z istim centrom.

**Trditev 4.43** *Perspektivnost $\vartheta\colon \mathcal{P}U \to \mathcal{P}U'$ s centrom v $T$ je bijekcija katere inverz je perspektivnost $\vartheta'\colon \mathcal{P}U' \to \mathcal{P}U$ s centrom v $T$.*

**Dokaz:** Po ravnokar dokazani lemi za vsak $X \in \mathcal{P}U$ velja $\vartheta'(\vartheta(X)) = (\vartheta(X) \oplus T) \cap U = (X \oplus T) \cap U$. Ker je $X < U$, lahko uporabimo lemo 4.18 in dobimo $\vartheta'(\vartheta(X)) = X + (T \cap U) = X + \{0\} = X$. □

Geometrična predstava perspektivnosti nam pravi, da bo perpektivnost kolinerne točke preslikala v kolinearne. To je res, a velja še več. Perspektivnost ni le kolineacija, ampak je projektivnost.

**Izrek 4.44** *Vsaka perspektivnost je projektivnost.*

**Dokaz:** Naj bodo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$, $U$ ter $U'$ vektorska podprostora v $V$ enake razsežnosti in $T$ njun skupni komplement. Naj bo $\vartheta\colon \mathcal{P}U \to \mathcal{P}U'$ perspektivnost s centrom $T$. Izberimo bazo $\{x_1, \ldots, x_k\}$ vektorskega prostora $U$ in za vsak $i \in \{1, \ldots, k\}$ označimo $X_i = \text{Lin}\{x_i\}$. Za vsako projektivno točko $Y_i = \vartheta(X_i) = (X_i \oplus T) \cap U'$ izberemo bazni vektor $y_i' \in Y'$. Tedaj obstajata skalar $\alpha_i \in \mathcal{O}$ in vektor $t_i' \in T$, da je $y_i' = \alpha_i x_i + t_i'$. Če je $\alpha_i = 0$, je $y_i' = t_i'$ oziroma $\vartheta(X_i) = Y_i < T$, kar ni res. Torej je $\alpha_i \neq 0$ in zato označimo $y_i = \alpha_i^{-1} y_i'$ ter $t_i = \alpha_i^{-1} t_i'$. Tedaj je za vsak $i \in \{1, \ldots, k\}$ vektor $y_i = x_i + t_i$.

Definirajmo linearno preslikavo $M\colon U \to U'$ na bazi $\{x_1, \ldots, x_k\}$ s predpisom $M(x_i) = y_i$. Prepričajmo se, da je $\vartheta_M = \vartheta$. Naj bo $X \in \mathcal{P}U$ poljubna točka in v njej izberimo neničelni vektor $x \in X$, ki ga razvijemo po bazi $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$. Tedaj je

$$
\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i (y_i - t_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i y_i - \sum_{i=1}^k \lambda_i t_i = \\
&= \sum_{i=1}^k \lambda_i M(x_i) - \sum_{i=1}^k \lambda_i t_i = M(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i) - \sum_{i=1}^k \lambda_i t_i = \\
&= M(x) - \sum_{i=1}^k \lambda_i t_i.
\end{aligned}
$$

Torej je $x = M(x) + t$ za nek vektor $t \in T$, zato je $\text{Lin}\{M(x) + t\} \oplus T = \text{Lin}\{M(x)\} \oplus T$. Ker je $\text{Lin}\{M(x)\} < U'$, iz leme 4.18 sledi $(\text{Lin}\{M(x)\} \oplus$

$T) \cap U' = \mathrm{Lin}\{M(x)\} + (T \cap U') = \mathrm{Lin}\{M(x)\} = M\,\mathrm{Lin}\{x\} = MX$. Združimo ravnokar dokazane enakosti in dobimo

$$\vartheta(X) = (X \oplus T) \cap U' = (\mathrm{Lin}\{x\} \oplus T) \cap U' = (\mathrm{Lin}\{Mx + t\} \oplus T) \cap U' = MX$$

kar smo želeli pokazati. Morda le še omenimo, da je linearna preslikava $M$ obrnljiva, kar sledi iz dejstva, da je $\vartheta$ obrnljiva. Namreč, inverz $\vartheta^{-1}$ je tudi perpektivnost. Po ravnokar dokazanem obstaja $N\colon U' \to U$, da je $\vartheta^{-1} = \vartheta_N$. Ker je $id = \vartheta \circ \vartheta^{-1} = \vartheta_{MN}$, je $MN$ skalarna matrika. Torej je $MN$ bijektivna in zato je $M$ surjektivna. Surjektivna linearna preslikava med enako razsežnima vektorskima prostoroma je bijekcija. □

Ali je morda vsaka projektivnost perspektivnost? Zdi se nam, da ne, a kako to dokazati? Odgovor bo sledil iz naslednje trditve.

**Trditev 4.45** *Naj bodo $V$ vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$ in $U, U' < V$ podprostora enake razsežnosti. Vsaka točka iz preseka $\mathcal{P}U \cap \mathcal{P}U'$ je negibna točka vsake perspektivnosti $\mathcal{P}U \to \mathcal{P}U'$.*

**Dokaz:** Naj bosta $\vartheta\colon \mathcal{P}U \to \mathcal{P}U'$ perspektivnost s centrom $T$ in $X \in \mathcal{P}U \cap \mathcal{P}U'$ poljubna točka. Ker je $X < U'$, je po lemi 4.18

$$\vartheta(X) = (X \oplus T) \cap U' = X + (T \cap U') = X + \{0\} = X.$$

□

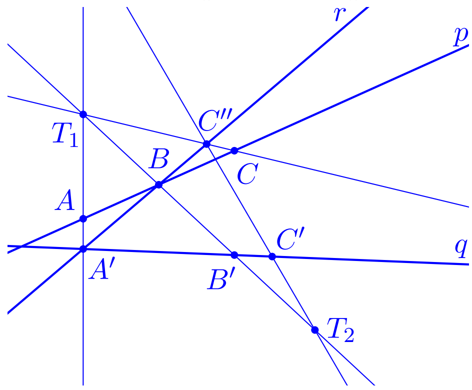
Vendar pa obstajajo projektivnosti, ki nimajo lastnosti iz zgornje trditve. Potrdimo to z zgledom. Naj bodo $\mathcal{O}$ poljuben obseg, $V = \mathcal{O}^3$ trorazsežen vektorski prostor ter $U = \{0\} \times \mathcal{O}^2$ in $U' = \mathcal{O} \times \{0\} \times \mathcal{O}$ dvorazsežna podprostora v $V$. Po zadnji trditvi je $\{(0,0)\} \times \mathcal{O}$ negibna točka vsake perspektivnosti $\mathcal{P}U \to \mathcal{P}U'$. Projektivnost $\vartheta_M\colon \mathcal{P}U \to \mathcal{P}U'$, kjer je linearna preslikava $M\colon U \to U'$ podana s predpisom $M(0, x, y) = (y, 0, x)$, nima negibne točke. Denimo, da je $\mathrm{Lin}\{(0, x, y)\} = \vartheta_M(\mathrm{Lin}\{(0, x, y)\}) = M\,\mathrm{Lin}\{(0, x, y)\} = \mathrm{Lin}\{(y, 0, x)\}$. Tedaj obstaja $\lambda \in \mathcal{O}$, da je $(0, x, y) = \lambda(y, 0, x)$. To pa je res le, če je $x = y = \lambda = 0$, kar ni možno.

Lahko pa vsako projektivnost med različnima projektivnima premicama v projektivni ravnini zapišemo kot kompozitum dveh perspektivnosti.

**Trditev 4.46** *Naj bodo $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O} \neq \mathbb{F}_2$) razsežnosti $\dim V = 3$ in $p, q$ različni projektivni premici v $\mathcal{P}V$. Za vsako projektivnost $\vartheta\colon p \to q$ obstajajo projektivna premica $r$ v $\mathcal{P}V$ in perspektivnosti $\vartheta_1\colon p \to r$ ter $\vartheta_2\colon r \to q$, da je $\vartheta = \vartheta_2 \circ \vartheta_1$.*

Pripomnimo, da je pogoj o različnosti projektivnih premic potreben. V nasprotnem primeru bi bila točka v preseku projektivnih premic $r$ in $p = q$ negibna točka kompozituma $\vartheta_2 \circ \vartheta_1$. Ravnokar pa smo razmislili, da obstajajo projektivnosti brez negibnih točk.

**Dokaz:** Ker je $\mathcal{O} \neq \mathbb{F}_2$, ima vsaka projektivna premica v $\mathcal{P}V$ vsaj štiri točke. Izberimo tri različne točke $A$, $B$ in $C$ na $p$, ki niso presečišče $p \cap q$. Označimo $A' = \vartheta(A)$, $B' = \vartheta(B)$ in $C' = \vartheta(C)$. Naj bo $r$ projektivna premica skozi točki $A'$ in $B$. Naj bo $T_1$ presečišče projektivnih premic $AA'$ in $BB'$. Naj bo $\vartheta_1 \colon p \to r$ perspektivnost s centrom $T_1$. Tedaj je $\vartheta_1(A) = A'$ in $\vartheta_1(B) = B$. Naj bosta $C'' = \vartheta_1(C)$ in $T_2$ presečišče projektivnih premic $BB'$ in $C'C''$. Naj bo $\vartheta_2 \colon r \to q$ perspektivnost s centrom $T_2$, zato je $\vartheta_2(A') = A$, $\vartheta_2(B) = B'$ in $\vartheta_2(C'') = C'$. Tedaj je $\vartheta_2(\vartheta_1(A)) = \vartheta_2(A') = A'$, $\vartheta_2(\vartheta_1(B)) = \vartheta_2(B) = B'$ in $\vartheta_2(\vartheta_1(C)) = \vartheta_2(C'') = C'$. Ker se projektivnosti $\vartheta$ in $\vartheta_2 \circ \vartheta_1$ ujemata na projektivnem ogrodju $\{A, B, C\}$ za projektivno premico $p$, sta enaki. $\square$




**Posledica 4.47** *Naj bodo $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O} \neq \mathbb{F}_2$) razsežnosti $\dim V = 3$ in $p$ ter $q$ različni projektivni premici v $\mathcal{P}V$. Če je $\vartheta \colon p \to q$ kompozitum končno mnogo perspektivnosti, je enak kompozitumu (največ) dveh perspektivnosti.*

## HOMOGENE KOORDINATE

V projektivnem prostoru bi radi točke zapisali v nekakšnem koordinatnem sistemu, podobno kot to storimo v vektorskem prostoru in kot smo to storili v afinem prostoru z afinimi koordinatami. Seveda bi radi, da je koordinatni sistem odvisen od točk v projekivnem prostoru in ne od izbire vektorjev v vektorskem prostoru.

Pokazali smo, da je projektivnost med $n$-razsežnima projektivnima prostoroma določena z vrednostmi v $n+2$ točkah, ki tvorijo projektivno ogrodje.

To nam da misliti, da lahko vsako točko projektivnega prostora zapišemo s pomočjo $n+2$ točk, ki tvorijo projektivno ogrodje.

Naj bo torej $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = n$. Po lemi 4.38 za projektivno ogrodje $\{X_0, \ldots, X_n\}$ za $\mathcal{P}V$ obstajajo vektorji $x_i \in X_i$, da je $x_0 = x_1 + \cdots + x_n$. Naj bo $X < V$ poljubna točka projektivnega prostora $\mathcal{P}V$. Poljuben neničelen vektor $x \in X$ razvijemo po bazi $\{x_1, \ldots, x_n\}$; torej $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$. Točki $X$ priredimo $n$-terico $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Pri definiciji $n$-terice smo naredili dve izbiri. Izbrali smo vektorje $x_i \in X_i$ in vektor $x \in X$. Ali je $n$-terica res neodvisna od teh dveh izbir? Hitro razmislimo, da temu ni tako, saj za neničelni vektor v $X$ lahko izberemo $\lambda x$ za katerikoli neničelni skalar $\lambda \in \mathcal{O}$. Za dobro definiranost koordinat v množici vseh neničelnih $n$-teric $\mathcal{O}^n - \{0\}$ vpeljemo ekvivalenčno relacijo na naslednji način:

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \sim (\beta_1, \ldots, \beta_n) \text{ natanko tedaj, ko obstaja } \lambda \in \mathcal{O} - \{0\},\\ \text{da je } \beta_i = \lambda \alpha_i \text{ za vsak } i \in \{1, \ldots, n\}.\end{aligned}$$

Ekvivalenčni razred, ki vsebuje neničelno $n$-terico $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, označimo z $[\alpha_1 : \ldots : \alpha_n]$ in jo imenujemo **homogene koordinate** točke $X$. Pokažimo sedaj, da je predpis $[.]\colon \mathcal{P}V \to (\mathcal{O}^n - \{0\})/_\sim$, podan kot

$$X = \mathrm{Lin}\{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\} \mapsto [\alpha_1 : \ldots : \alpha_n],$$

dobro definiran.

**Trditev 4.48** *Naj bosta $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ razsežnosti $n$ in $\{X_0, \ldots, X_n\}$ projektivno ogrodje za $\mathcal{P}V$. Naj bodo $x_i, y_i \in X_i$ taki, da je $x_0 = x_1 + \cdots + x_n$ in $y_0 = y_1 + \cdots + y_n$. Če sta $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ in $\sum_{i=1}^n \beta_i y_i$ neničelna vektorja v $X \in \mathcal{P}V$, obstaja $\lambda \in \mathcal{O}$, da za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$ velja $\beta_i = \lambda \alpha_i$.*

**Dokaz:** Ker sta $x_0, y_0 \in X_0$, obstaja skalar $\gamma \in \mathcal{O}$, da je $y_0 = \gamma x_0$. Ker sta $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ in $\sum_{i=1}^n \beta_i y_i$ v $X$, obstaja skalar $\delta \in \mathcal{O}$, da je

$$\sum_{i=1}^n \beta_i y_i = \delta\Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\Big) = \delta\Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma y_i\Big) = \sum_{i=1}^n (\delta \alpha_i \gamma) y_i.$$

Množica $\{y_1, \ldots, y_n\}$ je baza vektorskega prostora $V$, zato za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$ velja $\beta_i = \delta \alpha_i \gamma$. Ker je $\mathcal{O}$ polje, je tako $\beta_i = (\delta\gamma)\alpha_i$ za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$. $\square$

**Trditev 4.49** *Naj bosta $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ razsežnosti $n$ in $\{X_0, \ldots, X_n\}$ projektivno ogrodje za $\mathcal{P}V$. Preslikava $[.]\colon \mathcal{P}V \to (\mathcal{O}^n - \{0\})/_\sim$, definirana s predpisom*

$$X = \mathrm{Lin}\{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\} \mapsto [\alpha_1 \colon \ \ldots : \alpha_n],$$

*je bijekcija.*

**Dokaz:** Predpis je surjektiven, saj se v $[\alpha_1 \colon : \alpha_n]$ preslika točka $\mathrm{Lin}\{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\}$.

Če se $X = \mathrm{Lin}\{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\}$ in $Y = \mathrm{Lin}\{\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\}$ preslikata v isto točko, obstaja $\lambda \in \mathcal{O}$, da je $\beta_i = \lambda \alpha_i$ za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$. Torej je $\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n = \lambda(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)$ in zato $X = Y$. □

Sedaj, ko točke projektivne geometrije lahko podamo s homogenimi koordinatami, lahko zapišemo vložitev afinega prostora v projektivni s koordinatami. Naj bodo $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = n$, $W < V$ vektorski podprostor korazsežnosti 1, $a \in V - W$ in $\mathcal{A} = a + W$. Izberimo bazo $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ prostora $W$. Za $x_n = a$ je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza prostora $V$. Če poljuben vektor v bazi za $V$ zamenjamo z vektorjem $x_0 = x_1 + \ldots + x_n$, ponovno dobimo bazo za $V$. Od tod vidimo, kako podati projektivno ogrodje za $\mathcal{P}V$. Definiramo $X_0 = \mathrm{Lin}\{x_1 + \ldots + x_n\}$ in za $i \in \{1, \ldots, n\}$ definiramo $X_i = \mathrm{Lin}\{x_i\}$. Zgoraj smo razmislili, da poljubna $n$ terica vektorjev iz $\{x_0, \ldots, x_n\}$ tvori bazo za $V$. Tako nobena $n$-terica točk iz $\{X_0, \ldots, X_n\}$ ne leži na isti hiperravnini. Torej je $\{X_0, \ldots, X_n\}$ projektivno ogrodje za $\mathcal{P}V$. Spomnimo se, da je v afini bazi $\{a, a + x_1, \ldots, a + x_{n-1}\}$ za $\mathcal{A}$ točka $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathcal{A}$ enaka $(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i)a + \alpha_1(a + x_1) + \ldots + \alpha_{n-1}(a + x_{n-1})$. Torej je vložitev $l\colon \mathcal{A} \to \mathcal{P}V$ podana kot

$$l(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = [\alpha_1 \colon \ \ldots : \alpha_{n-1} \colon 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i].$$

Katere točke so točke v neskončnosti? Po definiciji so to tiste točke, ki niso v sliki vložitve $l$, to pa so tisti enorazsežni vektorski podprostori $X$, ki ležijo v $W$. Točka $X < V$ leži v $W$ natanko tedaj, ko v razvoju neničelnega vektorja $x \in X$ po bazi $\{x_1, \ldots, x_{n-1}, a\}$ vektor $a$ ne nastopa. Torej je $[\alpha_1 \colon \ \ldots : \alpha_n]$ točka v neskončnosti natanko tedaj, ko je $\alpha_n = 0$.

## DVORAZMERJE

Naj bo $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = 2$. Označimo projektivno premico $\mathcal{P}V$ s $p$. Naj bodo $A$, $B$ in $C$ tri različne točke na $p$. Po definiciji je $\{A, B, C\}$ projektivno ogrodje za $p$ in zato po lemi 4.38 obstajajo neničelni vektorji $a \in A$, $b \in B$ in $c \in C$, da je $c = a + b$. Za točko $D \in p$, različno od $A$, in poljuben neničelen $d' \in D$ obstajata $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$, da je $d' = \alpha a + \beta b$. Če je $\beta = 0$, je $d = \alpha a$ in zato $D = A$, kar smo predpostavili, da ni res. Torej je $\beta \neq 0$ in zato je $d := \beta^{-1} d' = \beta^{-1}\alpha a + b = \lambda a + b$, kjer je $\lambda = \beta^{-1}\alpha$. Homogene koordinate točke $D$ v projektivnem ogrodju $\{C, A, B\}$ so tako $[\alpha \colon \beta] = [\lambda \colon 1]$. Spomnimo se, da so homogene koordinate določene do množenja s skalarjem. Če torej zadnji skalar v homogenih koordinatah postavimo na 1, je prvi skalar natanko določen s točko $D$ in projektivnim ogrodjem $\{C, A, B\}$.

**Definicija 4.50** *Skalar $\lambda$ imenujemo* ***dvorazmerje*** *točk $A$, $B$, $C$ in $D$ in ga označimo $\mathcal{D}(A, B, C, D) = \lambda$.*

**Trditev 4.51** *Projektivno ogrodje $\{C, A, B\}$ projektivne premice $p$ in dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, X)$ natanko določajo točko $X$ na $p$.*

**Dokaz:** Točka $X$ je, zapisana v homogenih koordinatah v projektivnem ogrodju $\{C, A, B\}$, enaka $[\mathcal{D}(A, B, C, X) \colon 1]$. □

Iz definicije dvorazmerja je jasno, da se vrednost spremeni, če vrstni red točk na premici zamenjamo.

**Trditev 4.52** *Za različne točke $A$, $B$, $C$ in $D$ na projektivni premici velja*

**a**. $\mathcal{D}(B, A, C, D) = \mathcal{D}(A, B, D, C) = \mathcal{D}(A, B, C, D)^{-1}$ *in*
**b**. $\mathcal{D}(A, C, B, D) = \mathcal{D}(D, B, C, A) = 1 - \mathcal{D}(A, B, C, D)$.

**Dokaz:** Označimo $\lambda = \mathcal{D}(A, B, C, D)$. Naj bodo $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ in $d \in D$ taki neničelni vektorji, da je $c = a + b$ in $d = \lambda a + b$.

• Iz zgornjih enakosti dobimo $c = b + a$ in $\lambda^{-1} d = \lambda^{-1} b + a$. Za $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$ in $d' = \lambda^{-1} d$ velja $c' = b' + a'$ in $d' = \lambda^{-1} b' + a'$. Torej je $\mathcal{D}(B, A, C, D) = \lambda^{-1} = \mathcal{D}(A, B, C, D)^{-1}$.

• Ker je $d = \lambda a + b$, označimo $a' = \lambda a$, $b' = b$ in $d' = d$. Tako je $c' = c = a + b = \lambda^{-1}a' + b'$, zato je $\mathcal{D}(A, B, D, C) = \mathcal{D}(A, B, C, D)^{-1}$.

• Ker je $b = -a + c$, označimo $a' = -a$, $b' = b$ in $c' = c$. Tedaj je $d = \lambda a + b = \lambda a + (-a + c) = (\lambda - 1)a + c = (1 - \lambda)a' + c'$. Zato je $\mathcal{D}(A, C, B, D) = 1 - \mathcal{D}(A, B, C, D)$.

• Za dokaz zadnje enakosti lahko uporabimo že dokazane. Torej je

$$\mathcal{D}(D, B, C, A) = \mathcal{D}(B, D, C, A)^{-1} = \mathcal{D}(B, D, A, C) = 1 - \mathcal{D}(B, A, D, C) = \\ = 1 - \mathcal{D}(A, B, D, C)^{-1} = 1 - \mathcal{D}(A, B, C, D).$$

Seveda lahko tudi to enakost pokažemo direktno brez uporabe prejšnjih enakosti. Iz $c = a + b$ in $d = \lambda a + b$ najprej izračunamo zvezo med $d$, $b$ in $c$. Torej $d = \lambda a + b = \lambda(c - b) + b = (1 - \lambda)b + \lambda c$ oziroma $\lambda c = (\lambda - 1)b + d$. Označimo $b' = (\lambda - 1)b$, $c' = \lambda c$ in $d' = d$. Tedaj je $(1 - \lambda)\lambda a = (1 - \lambda)d + (\lambda - 1)b = (1 - \lambda)d' + b'$. Če označimo $a' = (1 - \lambda)\lambda a$, je $a' = (1 - \lambda)d' + b'$.
□

Katere transformacije projektivne premice ohranjajo dvorazmerja? V definiciji dvorazmerja nastopata seštevanje vektorjev in množenje s skalarjem. Ti dve operaciji se ohranjata z linearno preslikavo, s semilinearno pa ne, zato lahko domnevamo, da projektivnosti in tako tudi perspektivnosti ohranjajo dvorazmerja, kolineacije pa ne.

**Trditev 4.53** *Naj bosta $V$ in $V'$ vektorska prostora nad poljem $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = \dim V' = 2$. Naj bodo $\vartheta_M : \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V'$ projektivnost in $A$, $B$, $C$ in $D$ različne točke na $\mathcal{P}V$. Tedaj je $\mathcal{D}(\vartheta_M(A), \vartheta_M(B), \vartheta_M(C), \vartheta_M(D)) = \mathcal{D}(A, B, C, D)$.*

**Dokaz:** Označimo $\lambda = \mathcal{D}(A, B, C, D)$. Naj bodo $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ in $d \in D$ taki neničelni vektorji, da je $c = a + b$ in $d = \lambda a + b$. Preslikava $M$ je linearna, zato je $Mc = M(a + b) = Ma + Mb$ in $Md = M(\lambda a + b) = \lambda Ma + Mb$. Ker so tako $Ma \in MA = \vartheta_M(A)$, $Mb \in MB = \vartheta_M(B)$, $Mc \in MC = \vartheta_M(C)$ in $Md \in MD = \vartheta_M(D)$ taki neničelni vektorji, da je $Mc = Ma + Mb$ in $Md = \lambda Ma + Mb$, je $\mathcal{D}(\vartheta_M(A), \vartheta_M(B), \vartheta_M(C), \vartheta_M(D)) = \lambda$. □

V dokazu vidimo, da kolineacija v splošnem ne ohranja dvorazmerja. Če je namreč $f$ avtomorfizem polja $\mathcal{O}$, ki pripada semilinearni preslikavi $M$, je $\mathcal{D}(\vartheta_M(A), \vartheta_M(B), \vartheta_M(C), \vartheta_M(D)) = f(\mathcal{D}(A, B, C, D))$.

Dokazali smo, da je vsaka perspektivnost projektivnost, zato tudi perspektivnosti ohranjajo dvorazmerja.

**Trditev 4.54** *Naj bosta $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ razsežnosti 2 in $\vartheta\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V$ projektivnost, različna od identitete. Tedaj je $\vartheta$ involucija ($\vartheta^2 = id$) natanko tedaj, ko obstajata različni točki $A, B \in \mathcal{P}V$, da je $\vartheta(A) = B$ in $\vartheta(B) = A$.*

**Dokaz:** Naj bo $\vartheta\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V$ involucija. Ker je $\vartheta \neq id$, obstaja $A \in \mathcal{P}V$, da je $\vartheta(A) = B \neq A$. Ker je $\vartheta$ involucija, je $A = \vartheta^2(A) = \vartheta(\vartheta(A)) = \vartheta(B)$ in $B = \vartheta^2(B) = \vartheta(\vartheta(B)) = \vartheta(A)$.

Denimo, da obstajata različni točki $A, B \in \mathcal{P}V$, da je $\vartheta(A) = B$ in $\vartheta(B) = A$. Naj bo $C \in \mathcal{P}V$ različna od $A$ in $B$. Ker $\vartheta$ ohranja dvorazmerja, je

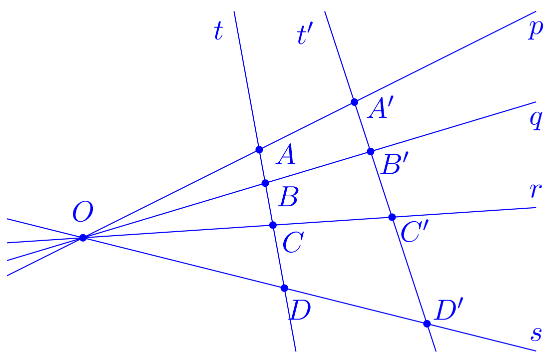
$$\mathcal{D}(A, B, \vartheta(C), C) = \mathcal{D}(\vartheta(A), \vartheta(B), \vartheta^2(C), \vartheta(C)) = \mathcal{D}(B, A, \vartheta^2(C), \vartheta(C)).$$

Z uporabo leme 4.52 tako sledi

$$\mathcal{D}(A, B, \vartheta(C), C) = \mathcal{D}(A, B, \vartheta^2(C), \vartheta(C))^{-1} = \mathcal{D}(B, A, \vartheta(C), \vartheta^2(C)).$$

Ker je (zadnja) točka natanko določena z dvorazmerjem, je $\vartheta^2(C) = C$, torej je $\vartheta$ involucija. □

S pomočjo dejstva, da perspektivnosti ohranjajo dvorazmerja, lahko definiramo dvorazmerje šopa štirih različnih projektivnih premic v projektivni ravnini. Naj bo $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = 3$. Naj bodo $p$, $q$, $r$ in $s$ različne projektivne premice v projektivni ravnini $\mathcal{P}V$, ki se sekajo v skupni točki $O$. Naj bo $t$ poljubna projektivna premica v $\mathcal{P}V$, ki ne gre skozi $O$. Ker so $p$, $q$, $r$, $s$ in $t$ projektivne premice v projektivni ravnini, se paroma sekajo v natanko eni točki.




Točke $A = p \cap t$, $B = q \cap t$, $C = r \cap t$ in $D = s \cap t$ so različne in ležijo na isti projektivni premici, zato lahko izračunamo njihovo dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, D)$. Ker bi radi ta skalar proglasili za dvorazmerje šopa projektivnih premic, se moramo prepričati, da je neodvisen od izbire premice $t$. Naj bo $t'$ še ena projektivna premica v $\mathcal{P}V$, ki ne gre skozi $O$. Označimo $A' = p \cap t'$, $B' = q \cap t'$, $C' = r \cap t'$ in $D' = s \cap t'$. Tedaj za perspektivnost $\vartheta\colon t \to t'$ s centrom $O$ velja $\vartheta(A) = A'$, $\vartheta(B) = B'$,

$\vartheta(C) = C'$ in $\vartheta(D) = D'$. Ker perspektivnost ohranja dvorazmerje, je $\mathcal{D}(A, B, C, D) = \mathcal{D}(A', B', C', D')$.

**Definicija 4.55** *Naj bo $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = 3$. Naj bodo $p$, $q$, $r$ in $s$ projektivne premice v projektivni ravnini $\mathcal{P}V$, ki se sekajo v isti točki $O$. Naj bo $t$ projektivna premica v $\mathcal{P}V$, ki ne gre skozi točko $O$.* ***Dvorazmerje šopa premic*** *je $\mathcal{D}(p, q, r, s) = \mathcal{D}(p \cap t, q \cap t, r \cap t, s \cap t)$.*

Spomnimo se, da nam preslikava $^\perp : \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V^*$ preslika premice, ki gredo skozi isto točko, v kolinearne točke. Torej imamo dvorazmerje točk $p^\perp$, $q^\perp$, $r^\perp$ in $s^\perp$ na projektivni premici $O^\perp$. Pokažimo, da je to dvorazmerje enako dvorazmerju šopa premic.

**Trditev 4.56** *Naj bo $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ razsežnosti $\dim V = 3$. Naj bodo $p$, $q$, $r$ in $s$ projektivne premice v projektivni ravnini $\mathcal{P}V$, ki se sekajo v isti točki. Tedaj je $\mathcal{D}(p, q, r, s) = \mathcal{D}(p^\perp, q^\perp, r^\perp, s^\perp)$.*

**Dokaz:** Označimo $\lambda = \mathcal{D}(p, q, r, s)$. Naj bo $t$ projektivna premica v $\mathcal{P}V$, ki ne gre skozi skupno presečišče premic $p$, $q$, $r$ in $s$. Naj bodo $a \in A = p \cap t$, $b \in B = q \cap t$, $c \in C = r \cap t$ in $d \in D = s \cap t$ taki neničelni vektorji, da je $c = a + b$ in $d = \lambda a + b$. Označimo $\mu = \mathcal{D}(p^\perp, q^\perp, r^\perp, s^\perp)$ in izberimo netrivialne funkcionale $\alpha \in p^\perp$, $\beta \in q^\perp$, $\gamma \in r^\perp$ in $\delta \in s^\perp$, da je $\gamma = \alpha + \beta$ in $\delta = \mu\alpha + \beta$.

Spomnimo se definicije zgornjega anhilatorja. Vsak funkcional $V \to \mathcal{O}$ iz $p^\perp$ preslika dvorazsežen prostor $p$ v 0. Torej je $\alpha(a) = 0$. Ker pa je $\alpha$ netrivialen, je $\alpha(b) \neq 0$. V nasprotnem primeru bi $\alpha$ v 0 preslikal $\mathrm{Lin}\{p \cup \{b\}\} = V$. Enako razmislimo za ostale funkcionale. Torej velja

$$0 = \gamma(c) = (\alpha + \beta)(a + b) = \alpha(a) + \alpha(b) + \beta(a) + \beta(b) = \alpha(b) + \beta(a)$$

in

$$0 = \delta(d) = (\mu\alpha+\beta)(\lambda a+b) = \mu\alpha(\lambda a)+\mu\alpha(b)+\beta(\lambda a)+\beta(b) = \mu\alpha(a)+\lambda\beta(a).$$

Prvo enakost pomnožimo z $\mu$ ter ji odštejemo drugo in dobimo $(\mu-\lambda)\beta(a) = 0$. Po zgornjem razmisleku je $\beta(a) \neq 0$, zato je $\lambda = \mu$. $\square$

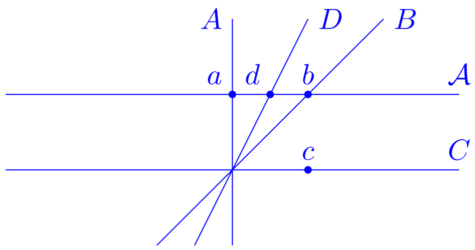
## HARMONIČNA ČETVERKA

**Definicija 4.57** *Naj bo $V$ dvorazsežen vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ karakteristike $k(\mathcal{O}) \neq 2$. Različne točke $A$, $B$, $C$ in $D$ na projektivni premici $\mathcal{P}V$ tvorijo* ***harmonično četverko****, če je njihovo dvorazmerje $\mathcal{D}(A,B,C,D) = -1$.*

Kot pri definiciji dvorazmerja je tudi tu vrstni red točk pomemben. Iz enakosti $\mathcal{D}(B,A,C,D) = \mathcal{D}(A,B,D,C) = \mathcal{D}(A,B,C,D)^{-1}$ (Trditev 4.52) pa sledi, da če so točke $A$, $B$, $C$ in $D$ harmonična četverka, so tudi $B$, $A$, $C$ in $D$ harmonična četverka ter tudi $A$, $B$, $D$ in $C$. Niso pa $A$, $C$, $B$ in $D$, saj je $\mathcal{D}(A,C,B,D) = 1-\mathcal{D}(A,B,C,D) = 2$, kar je v obsegu $\mathcal{O}$ s karakteristiko $\mathrm{k}(\mathcal{O}) \neq 2$ različno od $-1$.

**Izrek 4.58** *Naj bo $l\colon \mathcal{A} \to p$ vložitev afine premice $\mathcal{A}$ v projektivno premico $p$. Naj bodo $a,b,d \in \mathcal{A}$ različne točke in $C \in p$ (edina) točka v neskončnosti. Potem so $A = l(a)$, $B = l(b)$, $C$ in $D = l(d)$ harmonična četverka natanko tedaj, ko točka $d$ razpolavlja daljico $ab$.*

**Dokaz:** Točke $A$, $B$ in $C$ so različne, zato je $\{B,C,A\}$ projektivno ogrodje projektivne premice $p$. Označimo $\mathcal{D}(C,A,B,D) = \lambda$. Tedaj je $c := b-a$ smerni vektor afine premice $\mathcal{A}$, zato je $d = \lambda c + a = \lambda(b-a)+a = (1-\lambda)a+\lambda b$. Z uporabo enakosti iz trditve 4.52 dobimo




$$\mathcal{D}(A,B,C,D) = 1-\mathcal{D}(A,C,B,D) = 1-\mathcal{D}(C,A,B,D)^{-1} = 1-\lambda^{-1}.$$

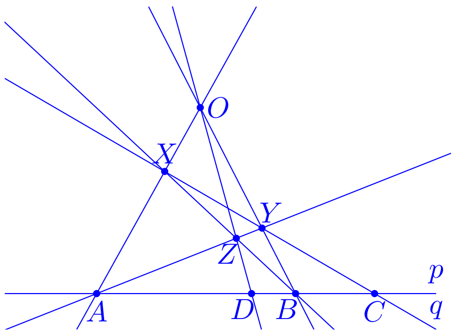
Točke $A$, $B$, $C$ in $D$ tvorijo harmonično četverko natanko tedaj, ko je $1-\lambda^{-1} = -1$ kar je natanko tedaj, ko je $\lambda = \frac{1}{2}$. To je natanko tedaj, ko je $d = (1-\lambda)a + \lambda b = \frac{1}{2}(a+b)$ oziroma $d$ razpolavlja daljico $ab$. □

Denimo, da imamo podane tri različne točke na projektivni premici. Zastavimo si nalogo, poiskati četrto točko na premici, da bodo skupaj tvorile harmonično četverko.

**Trditev 4.59** *Naj bo $V$ vektorski prostor razsežnosti* $\dim V = 3$ *nad poljem $\mathcal{O}$ karakteristike $k(\mathcal{O}) \neq 2$. Naj bodo $p$ projektivna premica v $\mathcal{P}V$ in $A$, $B$*

*in $C$ različne točke na $p$. Naj bosta $q$ poljubna projektivna premica v $\mathcal{P}V$, ki je različna od $p$ in gre skozi $C$, in $O$ točka, ki ne leži ne na $p$ ne na $q$. Označimo $X = AO \cap q$, $Y = BO \cap q$, $Z = AY \cap BX$ in $D = p \cap OZ$. Tedaj so $A$, $B$, $C$ in $D$ harmonična četverka.*

**Dokaz:** Afino ravnino vložimo v projektivno ravnino $\mathcal{P}V$ tako, da bo $CO$ premica v neskončnosti. Naj bosta torej $W = C \oplus O$ in $a \in A$ poljuben neničelen vektor. Tedaj je za standardno vložitev $l\colon a + W \to \mathcal{P}V$ premica $W = C \oplus O$ premica v neskončnosti. Naj bodo $b, c, d, o, x, y, z \in a + W$, da je $l(b) = B$, $l(c) = C$, $l(d) = D$, $l(o) = O$, $l(x) = X$, $l(y) = Y$ in $l(z) = Z$.




Po konstrukciji vložitve afine ravnine $a+W$ v projektivno $\mathcal{P}V$ se projektivni premici $AX$ in $BY$ sekata v točki $O$, ki je v neskončnosti. Torej sta afini premici $ax$ in $by$ vzporedni v afini ravnini $a + W$. Prav tako se projektivni premici $AB$ in $XY$ sekata v neskončnosti, zato sta afini premici $ab$ in $xy$ vzporedni. Torej je $abxy$ paralelogram in diagonali $ay$ in $bx$ se razpolavljata. Tudi projektivna premica $DZ$ seka premici $AX$ in $BY$ v neskončnosti, zato je $dz$ vzporednica afinima premicama $ax$ in $by$, ki gre skozi razpolovišče diagonal paralelograma $abxy$, zato je $d$ razpolovišče daljice $ab$. Po prejšnjem izreku je tako $A$, $B$, $C$ in $D$ harmonična četverka. $\square$

## STOŽNICE

Stožnica v evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$ je množica ničel kvadratnega polinoma $p(x, y) = ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$. Ali obstaja razširitev $\hat{p}\colon \mathcal{P}\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, da diagram na desni komutira? Preslikava $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbf{P}\mathbb{R}^3$ je standardna vložitev afine ravnine v projektivno. Seveda je smiselno zahtevati zveznost preslikave $\hat{p}$. To pomeni, da je za vsako točko $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ limita $\lim_{\lambda\to\pm\infty} p(\lambda x, \lambda y) = \hat{p}[x : y : 0]$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "l"'] & \mathbb{R} \\ \mathcal{P}\mathbb{R}^3 \arrow[ur, dashed, "\hat{p}"'] & \end{tikzcd}$$

Vendar gre skoraj za vsako točko limita čez vse meje; v primeru elipse in parabole pa celo za vsako točko. Torej z zvezno razširitvijo ne bo nič.

Pri definicije stožnice nas ne zanimajo vrednosti polinoma $p$, ampak le množica njenih ničel. Morda pa obstaja razširitev $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, da diagram na levi

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^3 \arrow[ur, dashed, "q"'] & \end{tikzcd}$$

komutira. Preslikava $i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je vložitev $\mathbb{R}^2$ na ravnino $z = 1$. Da bo množica ničel v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ dobro definirana, za preslikavo $q$ zahtevamo, da če je $q(x) = 0$, je $q(\lambda x) = 0$ za vse $\lambda \in \mathbb{R}$. Tokrat obstaja več razširitev, ki zadoščajo pogoju. Morda najbolj naravna je

$$q(x, y, z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Naj bo $V$ vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ in fiksirajmo bazo $\{x_1, \ldots, x_n\}$ za $V$. Vektorski prostor $V$ bomo od sedaj naprej na naravni način enačili z vektorskim prostorom $\mathcal{O}^n$; vsakemu vektorju $v$ priredimo stolpec $n$ skalarjev, kjer $i$-ti skalar jasno predstavlja koeficient pri baznem vektorju $x_i$ v razvoju vektorja $v$.

**Definicija 4.60** *Naj bosta $V(\equiv \mathcal{O}^n)$ vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ razsežnosti* $\dim V = n$ *in $M \in \mathcal{O}^{n\times n}$ simetrična matrika. Preslikava $q_M\colon V \to \mathcal{O}$, definirana s predpisom $q_M(v) = v^T M v$, je **kvadratna forma** na $V$, ki pripada matriki $M$.*

**Definicija 4.61** *Bilinearna preslikava $\Phi\colon V \times V \to \mathcal{O}$, za katero velja $\Phi_M(u, v) = \Phi_M(v, u)$, se imenuje **simetrična bilinearna forma** na vektorskem prostoru $V$.*

Naj bo $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza za vektorski prostor $V$ in $M$ simetrična matrika. Tedaj je $\Phi_M\colon V\times V \to \mathcal{O}$, podana s predpisom $\Phi(u, v) = u^T M v$, simetrična bilinearna forma.

Naj bosta $\Phi\colon V \times V \to \mathcal{O}$ simetrična bilinearna forma in $\{x_1, \ldots, x_n\}$ baza za $V$. Za matriko $M = [\Phi(x_i, x_j)]_{1\le i,j\le n}$ tedaj velja $\Phi(u, v) = u^T M v$. Pripadajoča kvadratna forma $q_M\colon V \to \mathcal{O}$ je tako podana s predpisom $q_M(v) = \Phi(v, v)$.

Lahko pa tudi iz kvadratne forme $q\colon V \to \mathcal{O}$ določimo pripadajočo simetrično bilinearno formo in s tem tudi simerično matriko. Namreč, za poljubna vektorja $u, v \in V$ velja

$$\begin{aligned} q(u + v) = \Phi(u + v, u + v) &= \Phi(u, u) + 2\Phi(u, v) + \Phi(v, v) = \\ &= q(u) + q(v) + 2\Phi(u, v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(u-v) &= \Phi(u-v, u-v) = \Phi(u,u) - 2\Phi(u,v) + \Phi(v,v) = \\ &= q(u) + q(v) - 2\Phi(u,v), \end{aligned}$$

zato je $\Phi(u,v) = \frac{1}{4}\big(q(u+v) - q(u-y)\big)$. Torej je vseeno, ali podamo simetrično matriko $M$ (v bazi, ki smo jo fiksirali), kvadratno formo $q$ ali simetrično bilinearno formo $\Phi$, saj ostala dva podatka lahko izračunamo.

Simetrični matriki $M$ in $N$ sta si podobni, če obstaja obrnljiva matrika $Q$, da je $N = Q^T M Q$.

**Definicija 4.62** *Kvadratni formi $q_M, q_N \colon V \to \mathcal{O}$ sta* ***ekvivalentni****, če obstaja obrnljiva matrika $Q$, da je $N = Q^T M Q$.*

**Definicija 4.63** *Naj bo $q$ kvadratna forma nad vektorskim prostorom $V$ razsežnosti $\dim V = 3$. Množico $\mathcal{S}_q = \{\mathrm{Lin}\{v\} \mid v \in V - \{0\}, q(v) = 0\}$ imenujemo* ***stožnica****, ki pripada formi $q$.*

Prej smo razmislili, da namesto s kvadratno formo $q$ lahko ekvivalentno stožnico podamo s simetrično matriko $M$ in jo označimo $\mathcal{S}_M$ ali pa s simetrično bilinearno formo $\Phi$ in jo iznačimo $\mathcal{S}_\Phi$.

**Primeri:** • Naj bo $q_M(v) = 0$ trivialna kvadratna forma na $V$, ki pripada ničelni matriki. Tedaj je $\mathcal{S}_M$ cela projektivna ravnina $\mathcal{P}V$.

• Naj bosta $V = \mathcal{O}^3$ s standardno bazo in $q_M(x,y,z) = z^2$ kvadratna forma, ki pripada matriki $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tedaj je $\mathcal{S}_M = \{[x\colon y\colon 0] \mid y, z \in \mathcal{O}\}$ projektivna premica (v neskončnosti) v $\mathcal{P}\mathcal{O}^3$.

• Naj bosta $V = \mathcal{O}^3$ s standardno bazo in $q_M(x,y,z) = x^2 + y^2$ kvadratna forma, ki pripada matriki $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tedaj je $\mathcal{S}_M = \{[0\colon 0\colon 1]\}$ le točka v $\mathcal{P}\mathcal{O}^3$.

• Naj bosta $V = \mathbb{R}^3$ s standardno bazo in $q_M(x,y,z) = x^2 - y^2$ kvadratna forma, ki pripada matriki $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tedaj je $\mathcal{S}_M = \{[x\colon x\colon y] \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\} \cup \{[x\colon -x\colon y] \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\}$ unija dveh projektivnih premic v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$.

Vse kaže, da v primeru, ko rang matrike $M$ ni maksimalen, ne dobimo "pravih" stožnic.

**Definicija 4.64** *Stožnica $\mathcal{S}_M$ je **neizrojena**, če je rang matrike $M$ maksimalen.*

Vendar so tudi pri nekaterih neizrojenih stožnicah zatakne.

• Naj bosta $V = \mathbb{R}^3$ s standardno bazo in $q_M(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ kvadratna forma, ki pripada identični matriki. Tedaj je $\mathcal{S}_M$ prazna množica. To, da bi bila stožnica prazna, se nikoli ne zgodi v primeru kompleksnih vektorskih prostorih – še splošneje v nobenem vektorskem prostoru nad algebraično zaprtim poljem. Če polje ne bo algebraično zaprto, bomo poleg neizrojenosti za stožnico predpostavili še, da je neprazna.

**Definicija 4.65** *Stožnici $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ v projektivni ravnini $\mathcal{P}V$ sta **ekvivalentni**, če obstaja projektivnost $\vartheta\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V$, da je $\vartheta(\mathcal{S}_1) = \mathcal{S}_2$.*

**Trditev 4.66** *Naj bosta $q_M$ in $q_N$ ekvivalentni kvadratni formi na $V$. Tedaj sta pripadajoči stožnici $\mathcal{S}_M$ in $\mathcal{S}_N$ ekvivalentni.*

**Dokaz:** Ker sta $q_M$ in $q_N$ ekvivalentni, obstaja obrnljiva matrika $Q$, da je $N = Q^T MQ$. Naj bo $X = \mathrm{Lin}\{x\} \in \mathcal{S}_N$, torej je $q_N(x) = x^T Nx = 0$. Tedaj je $q_M(Qx) = (Qx)^T M(Qx) = x^T(Q^T MQ)x = x^T Nx = 0$, in zato $\vartheta_Q(X) = \mathrm{Lin}\{Qx\} \in \mathcal{S}_M$. Torej je $\vartheta_Q(\mathcal{S}_N) \subset \mathcal{S}_M$ in enako pokažemo, da je $\vartheta_Q^{-1}(\mathcal{S}_M) = \vartheta_{Q^{-1}}(\mathcal{S}_M) \subset \mathcal{S}_N$. Torej za projektivnost $\vartheta_Q\colon \mathcal{P}V \to \mathcal{P}V$ velja $\vartheta_Q(\mathcal{S}_N) = \mathcal{S}_M$, zato sta stožnici $\mathcal{S}_M$ in $\mathcal{S}_N$ ekvivalentni. $\square$

Vsaka simetrična matrika v $\mathbb{C}^{3\times 3}$ maksimalnega ranga je podobna identični matriki. Torej v $\mathcal{P}\mathbb{C}^3$ do ekvivalence natanko obstaja ena neizrojena stožnica, ki pripada kvadratni formi $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Med simetričnimi matrikami v $\mathbb{R}^{3\times 3}$ maksimalnega ranga pa obstajajo štirje ekvivalenčni razredi. Matrike se ločijo glede na število pozitivnih lastnih vrednosti, tako da je vsaka realna simetrična matrika maksimalnega ranga podobna eni od matrik

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

Za simetrično matriko $M$ očitno velja $\mathcal{S}_M = \mathcal{S}_{-M}$, zato v realni projektivni ravnini dobimo dve neizomorfni neizrojeni stožnici, od katerih pa je ena prazna. Torej imamo v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ do ekvivalence natanko eno neprazno neizrojeno stožnico, ki pripada kvadratni formi $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

**Trditev 4.67** *Naj bo $V$ trorazsežen vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ karakteristike $k(\mathcal{O}) \neq 2$. Naj bosta $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica in $p$ premica v projektivni ravnini $\mathcal{P}V$. Presek $\mathcal{S} \cap p$ vsebuje največ 2 točki. Če je $\mathcal{O}$ algebraično zaprt, pa je presek vedno neprazen.*

**Dokaz:** Naj bosta $\Phi\colon V \times V \to \mathcal{O}$ simetrična bilinearna forma in $q\colon V \to \mathcal{O}$ kvadratna forma, ki pripadata neprazni neizrojeni stožnici $\mathcal{S}$.

Denimo, da v preseku $\mathcal{S} \cap p$ obstajajo tri točke, ki jih označimo $A$, $B$ in $C$. Po lemi 4.38 lahko izberemo neničelne vektorje $a \in A$, $b \in B$ in $c \in C$, da je $c = a + b$. Ker sta točki $A$ in $B$ na stožnici $\mathcal{S}$, je $q(a) = q(b) = 0$. Tudi $C$ je na stožnici $\mathcal{S}$, zato je

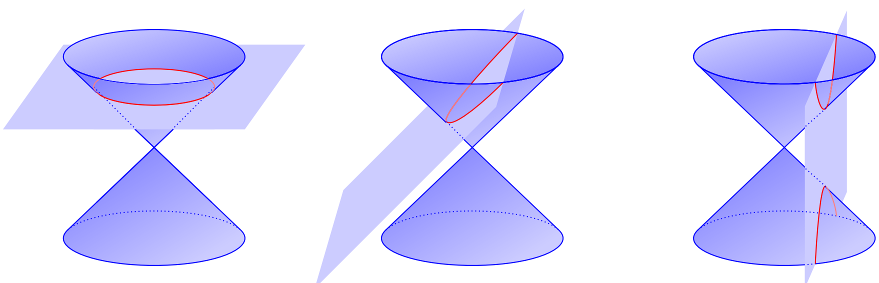
$$\Phi(c,c) = \Phi(a+b, a+b) = \Phi(a,a) + \Phi(a,b) + \Phi(b,a) + \Phi(b,b) = 2\Phi(a,b) = 0.$$

Velja $\mathrm{k}(\mathcal{O}) \neq 2$, zato je $\Phi(a,b) = 0$. Izberimo $d \in V$, da je $\{a,b,d\}$ baza vektorskega prostora $V$. Matrika, ki pripada kvadratni formi $q$, zapisana v bazi $\{a,b,d\}$, je

$$\begin{bmatrix} \Phi(a,a) & \Phi(a,b) & \Phi(a,d) \\ \Phi(b,a) & \Phi(b,b) & \Phi(b,d) \\ \Phi(d,a) & \Phi(d,b) & \Phi(d,d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi(a,d) \\ 0 & 0 & \Phi(b,d) \\ \Phi(d,a) & \Phi(d,b) & \Phi(d,d) \end{bmatrix}.$$

Ker matrika ni polnega ranga, je $\mathcal{S}$ izrojena, kar je v protislovju s predpostavko. $\square$

Oglejmo si primer neprazne neizrojene stožnice v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$; torej je podane s kvadratno formo $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Projektivna premica $W_1 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ne seka stožnice $\mathcal{S}$. Pri standardni vložitvi afine ravnine $a + W_1$ v projektivno $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ je tako $l(a + W_1) \cap \mathcal{S}$ elipsa. (Glej spodnjo levo sliko.)



elipsa parabola hiperbola

Projektivna premica $W_2 = \{(x, y, z\} \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$ seka stožnico v eni točki $\{(x, 0, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Pri standardni vložitvi afine ravnine $a + W_2$ v projektivno $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$, je tako $l(a + W_1) \cap \mathcal{S}$ parabola. (Glej zgornjo srednjo sliko.)

Projektivna premica $W_2 = \{0\} \times \mathbb{R}^2$ seka stožnico v dveh točkah $\{(0, x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ in $\{(0, x, -x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Pri standardni vložitvi afine ravnine $a + W_3$ v projektivno $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$, je tako $l(a + W_3) \cap \mathcal{S}$ hiperbola. (Glej zgornjo desno sliko.)

**Definicija 4.68** *Projektivna premica $p$ je* ***tangenta*** *na stožnico $\mathcal{S}$ v točki $A$, če je presek $\mathcal{S} \cap p = \{A\}$.*

V naslednjem razdelku se bomo prepričali, da na neizrojeni neprazni stožnici v vsaki točki obstaja natanko ena tangenta.

## POLARA

V tem razdelku naj bo $\mathcal{O}$ obseg s karakteristiko $\mathrm{k}(\mathcal{O}) \neq 2$ in $V$ trorazsežen vektorski prostor nad $\mathcal{O}$. Naj bo $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica v projektivni ravnini $\mathcal{P}V$, ki ji pripadata simetrična bilinearna forma $\Phi\colon V \times V \to \mathcal{O}$ in kvadratna forma $q\colon V \to \mathcal{O}$.

**Definicija 4.69** ***Polara*** *točke $A \in \mathcal{P}V$ glede na stožnico $\mathcal{S}$ je množica $p_A = \{\mathrm{Lin}\{x\} \mid \Phi(x, a) = 0\}$ kjer je $a$ poljuben neničelen vektor v $A$.*

Zaradi linearnosti preslikave $\Phi$ v drugem faktorju je množica $p_A$ neodvisna od izbire neničelnega vektorja $a \in A$.

**Trditev 4.70** *Naj bosta $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica in $A \in \mathcal{P}V$ poljubna točka. Polara $p_A$ je projektivna premica.*

**Dokaz:** Naj bo $\Phi\colon V \times V \to \mathcal{O}$ simetrična bilinearna forma, ki pripada stožnici $\mathcal{S}$. Izberimo neničelen vektor $a \in A$. Tedaj je $\varphi_a\colon V \to \mathcal{O}$, definiran s predpisom $\varphi_a(x) = \Phi(x, a)$, linearen funkcional. Ker je $\mathcal{S}$ neizrojena, je $\varphi_a$ netrivialen. Zato je $p_A = \operatorname{Ker} \varphi_a < V$ dvorazsežen vektorski podprostor oziroma projektivna premica v $\mathcal{P}V$. $\square$

**Posledica 4.71** *Naj bosta $V$ trorazsežen vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ karakteristike $k(\mathcal{O}) \neq 2$ in $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica v $\mathcal{P}V$.*

**a.** *Točka $A$ leži na polari $p_B$ točke $B$ natanko tedaj, ko točka $B$ leži na polari $p_A$ točke $A$.*

**b.** *Točka $A$ leži na svoji polari $p_A$ natanko tedaj, ko je $A \in \mathcal{S}$.*

**Dokaz:** Obe trditvi sta neposredni posledici definicije.

**a.** Točka $A = \mathrm{Lin}\{a\}$ leži na polari točke $B = \mathrm{Lin}\{b\}$ natanko tedaj, ko je $\Phi(a, b) = 0$. Ker pa je $\Phi$ simetrična, je to natanko tedaj, ko je $\Phi(b, a) = 0$ oziroma $B \in p_A$.

**b.** Točka $A = \mathrm{Lin}\{a\}$ leži na polari $p_A$ natanko tedaj, ko je $\Phi(a, a) = 0$. To pa je natanko tedaj, ko je $A \in \mathcal{S}$. □

**Trditev 4.72** *Naj bosta $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica in $A \in \mathcal{S}$ točka na stožnici. Tedaj je polara $p_A$ točke $A$ glede na $\mathcal{S}$ tangenta na $\mathcal{S}$ v $A$.*

**Dokaz:** Naj bosta $\Phi\colon V \times V \to \mathcal{O}$ simetrična bilinearna forma in $q\colon V \to \mathcal{O}$ kvadratna forma, ki pripadata stožnici $\mathcal{S}$. Ker je $A = \mathrm{Lin}\{a\} \in \mathcal{S}$, je $\Phi(a, a) = 0$, zato je $A \in p_A$. Denimo, da je $B$ še ena točka v preseku $\mathcal{S} \cap p_A$. Za $b \in B$ je $\Phi(b, b) = 0$, saj je $B \in \mathcal{S}$. Ker pa je tudi $B \in p_A$, je $\Phi(b, a) = \Phi(b, a) = 0$. Naj bo $c \in V$ poljuben vektor, da je $\{a, b, c\}$ baza za $V$. Matrika, ki pripada kvadratni formi $q$, zapisana v bazi $\{a, b, c\}$ je

$$\begin{bmatrix} \Phi(a,a) & \Phi(a,b) & \Phi(a,c) \\ \Phi(b,a) & \Phi(b,b) & \Phi(b,c) \\ \Phi(c,a) & \Phi(c,b) & \Phi(c,c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi(a,c) \\ 0 & 0 & \Phi(b,c) \\ \Phi(c,a) & \Phi(c,b) & \Phi(d,d) \end{bmatrix}.$$

Ker matrika ni polnega ranga, je $\mathcal{S}$ izrojena, kar je v protislovju s predpostavko, da je v preseku $\mathcal{S} \cap p_A$ več kot ena točka. □

**Trditev 4.73** *Naj bo $V$ trorazsežen vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ karakteristike $k(\mathcal{O}) \neq 2$. Naj bosta $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica v $\mathcal{P}V$ in $A \in \mathcal{S}$ poljubna točka. Tedaj obstaja natanko ena tangeta na $\mathcal{S}$ v $A$.*

**Dokaz:** Naj bosta $\Phi\colon V \times V \to \mathcal{O}$ simetrična bilinearna forma in $q\colon V \to \mathcal{O}$ kvadratna forma, ki pripadata stožnici $\mathcal{S}$. Iz prejšnje trditve sledi, da je $p_A$ tangenta na $\mathcal{S}$ v točki $A$. Naj bosta $p$ še ena tangenta na $\mathcal{S}$ v $A$ in $B \in p$ različna od $A$. Ker je $p \neq p_A$, točka $B \notin p_A$. Izberimo neničelna vektorja

$a \in A$ in $b \in B$, tedaj je $p = \operatorname{Lin}\{a, b\}$. Vsako točko $X \in p$, različno od $A$, lahko predstavimo z vektorjem $x = \lambda a + b$ za nek $\lambda \in \mathcal{O}$. Ker je $p$ tangenta, $X \notin \mathcal{S}$ in zato je

$$0 \neq \Phi(x, x) = \Phi(\lambda a + b, \lambda a + b) = 2\lambda\Phi(a, b) + \Phi(b, b).$$

Ker tudi $B \notin p_A$, je $\Phi(b, a) \neq 0$. Zato za $\lambda = -\Phi(b, b)(2\Phi(a, b))^{-1}$ velja $\Phi(\lambda a + b, \lambda a + b) = 0$, kar pa je protislovje. Torej obstaja le ena tangenta na $\mathcal{S}$ v $A$. $\square$

**Trditev 4.74** *Naj bosta $V$ trorazsežen vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ karakteristike $k(\mathcal{O}) \neq 2$ in $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica v $\mathcal{P}V$. Točki $A, B \in \mathcal{P}V$ sta enaki natanko tedaj, ko sta polari $p_A$ in $p_B$ enaki.*

**Dokaz:** Jasno iz enakosti točk sledi enakost polar. Denimo, da obstajata različni točki $A$ in $B$, za kateri je $p_A = p_B$. Če je $p_A = AB$, je po posledici 4.71 $A \in \mathcal{S}$ in zato je $p_A$ tangenta na $\mathcal{S}$ v $A$. Enako je $p_B = p_A$ tangenta na $\mathcal{S}$ v $B$, zato je $A = B$. To pa je v protislovju z našo predpostavko. Torej je $p_A \neq AB$, zato izberimo $C \in p_A$, različno od preseka $p_A \cap AB$. Izberimo neničelne vektorje $a \in A$, $b \in B$ in $c \in C$. Ker so točke $A$, $B$ in $C$ nekolinearne, je $\{a, b, c\}$ baza za $V$. Izračunajmo matriko $M$ v tej bazi, ki pripada neizrojeni stožnici $\mathcal{S}$. Ker je

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha & \delta & \epsilon \\ \delta & \beta & \psi \\ \epsilon & \psi & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha & \delta & \epsilon \\ \delta & \beta & \psi \\ \epsilon & \psi & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \psi,$$

je matrika $M$ oblike

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & \delta & 0 \\ \delta & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Naj bo $X = \operatorname{Lin}\{(d, e, f)\} \in p_A \cap p_B$. Tedaj je

$$d\alpha + e\delta = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha & \delta & 0 \\ \delta & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha & \delta & 0 \\ \delta & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = d\delta + e\beta,$$

od koder dobimo $e(\alpha\beta - \delta^2) = 0 = d(\alpha\beta - \delta^2)$. Ker je matrika $M$ maksimalnega ranga, je $(\alpha\beta - \delta^2) \neq 0$, zato je $e = d = 0$. Torej je $X = C$ in zato je $p_A \cap p_B = C$, kar je v protislovju z našo predpostavko. Zato različnima točkama $A$ in $B$ pripadata različni polari. $\square$

**Trditev 4.75** *Naj bosta $V$ trorazsežen vektorski prostor nad poljem $\mathcal{O}$ karakteristike $k(\mathcal{O}) \neq 2$ in $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica v $\mathcal{P}V$. Če za točko $A \notin \mathcal{S}$ obstaja tangenta na $\mathcal{S}$, ki poteka skozi $A$, potem obstajata natanko dve tangenti na $\mathcal{S}$, ki potekata skozi $A$.*

**Dokaz:** Naj bo $p$ tangenta na $\mathcal{S}$, ki poteka skozi $A$. Po trditvi 4.72 je $p$ polara na $\mathcal{S}$ za točko $B = \mathcal{S} \cap p$. Po posledici 4.71 točka $B$ leži na polari $p_A$ točke $A$ glede na $\mathcal{S}$. Zato vsako dotikališče tangente na $\mathcal{S}$, ki gre skozi točko $A$, leži na polari $p_A$. Po trditvi 4.67 premica seka stožnico $\mathcal{S}$ v največ dveh točkah, zato obstajata največ dve tangenti na $\mathcal{S}$, ki gresta skozi $A$.

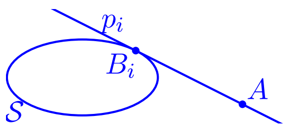
Ker točka $A$ ne leži na stožnici $\mathcal{S}$, je $\Phi(a, a) \neq 0$, zato $A$ ne leži na polari $p_A$. Torej $p_A$ poteka skozi točko $B$, a ni enaka tangenti $p$ na $\mathcal{S}$ v $B$. Po trditvi 4.73 tako premica $p_A$ ni tangenta na $\mathcal{S}$, zato po trditvi 4.67 premica $p_A$ seka stožnico $\mathcal{S}$ v natanko dveh točkah. Označimo drugi presek s $C$. Ker je $C \in p_A$, po posledici 4.71 točka $A$ leži na polari $p_C$. Po trditvi 4.72 je $p_C$ tangenta na $\mathcal{S}$ skozi $C$. Torej skozi točko $A$ potekata natanko dve tangenti na $\mathcal{S}$. $\square$

Kako geometrično konstruiramo polaro?

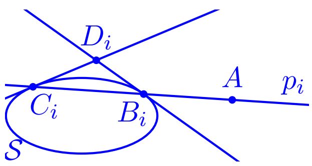
1) Če je točka $A$ na stožnici $\mathcal{S}$, je polara $p_A$ edina tangenta na $\mathcal{S}$ v točki $A$.

2) Naj točka $A$ ne leži na stožnici $\mathcal{S}$. Izberimo taki različni točki $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$, da so točke $A$, $B_1$ in $B_2$ nekolinearne. Za $i \in \{1, 2\}$ naj bo $p_i$ projektivna premica skozi $A$ in $B_i$. Vemo, da presek $\mathcal{S} \cap p_i$ vsebuje največ dve točki.

2.1) Denimo, da je $\mathcal{S} \cap p_i = \{B_i\}$. Tedaj je $p_i$ tangenta na $\mathcal{S}$ v točki $B_i$ in zato je polara točke $B_i$ glede na $\mathcal{S}$ enaka $p_i$. Ker točka $A$ leži na polari točke $B_i$, zaradi simetričnosti točka $B_i$ leži na polari točke $A$. V tem primeru označimo $D_i = B_i$.




2.2) Denimo, da je $\mathcal{S} \cap p_i = \{B_i, C_i\}$ za neko točko $C_i$. Naj bosta $p_{B_i}$ in $p_{C_i}$ tangenti na $\mathcal{S}$ v točkah $B_i$ in $C_i$. Tedaj sta $p_{B_i}$ in $p_{C_i}$ tudi polari točk $B_i$ in $C_i$ glede na $\mathcal{S}$. Naj bo $D_i$ presek projektivnih premic $p_{B_i}$ in $p_{C_i}$. Ker točka $D_i$ leži na polarah točk $B_i$ in $C_i$ glede na $\mathcal{S}$, točki $B_i$ in $C_i$ ležita na polari točke $D_i$ glede na



$\mathcal{S}$. Ker je polara projektivna premica in je tako določena z dvema točkama, je polara $p_{D_i}$ točke $D_i$ glede na $\mathcal{S}$ projektivna premica skozi $B_i$ in $C_i$, kar pa je ravno projektivna premica $p_i$. Torej točka $A$ leži na polari $p_{D_i}$ in zato točka $D_i$ leži na polari $p_A$.

Našli smo dve točki $D_1$ in $D_2$, ki ležita na polari $p_A$ točke $A$ glede na $\mathcal{S}$, zato je polara $p_A$ enaka projektivni premici skozi $D_1$ in $D_2$.

Pokazali smo, da za vsako projektivno premico $p$ obstaja največ ena točka $A$, da je $p_A = p$. Bralec se lahko prepriča, da taka točka vedno obstaja in naj kot zgoraj za vsako premico konstruira njej pripadajočo točko.

**Trditev 4.76** *Naj bo $V$ trorazsežen vektorski prostor nad poljem karakteristike $k(\mathcal{O}) \neq 2$. Naj bodo $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica v projektivni ravnini $\mathcal{P}V$, $A \in \mathcal{P}V$, ki ni na $\mathcal{S}$, in $p$ premica skozi točko $A$, ki seka $\mathcal{S}$ v točkah $C$ in $D$. Za točko $B = p_A \cap p$ je $A$, $B$, $C$ in $D$ harmonična četverka.*

**Dokaz:** Označimo $\lambda = \mathcal{D}(A, B, C, D)$. Po trditvi 4.52 je $\mathcal{D}(A, B, C, D) = \mathcal{D}(D, C, B, A)$, zato obstajajo vektorji $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ in $d \in D$, da je $b = d + c$ in $a = \lambda d + c$. Izberimo vektor $e \in V$, da je $\{c, d, e\}$ baza za $V$.

Ker $C, D \in \mathcal{S}$, je $c^T Mc = d^T Md = 0$, kjer je $M$ matrika, ki pripada stožnici $\mathcal{S}$ v bazi $\{c, d, e\}$. Torej lahko $M$ zapišemo kot

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

za neke skalarje $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{O}$. Ker je $\mathcal{S}$ neizrojena, je $M$ maksimalnega ranga, zato je $\alpha \neq 0$. Ker $B$ leži na polari točke $A$, je $b^T Ma = 0$. Zato je

$$\begin{aligned} 0 =& b^T Ma = (d + c)^T M(\lambda d + c) = \\ =& \lambda d^T Md + d^T Mc + \lambda c^T Md + c^T Mc = \\ =& (1 + \lambda)d^T Mc = \\ =& (1 + \lambda)\alpha. \end{aligned}$$

Ker je $\alpha \neq 0$, je $\lambda = -1$. Torej točke $A$, $B$, $C$ in $D$ tvorijo harmonično četverko. □

## GEOMETRIJA NA STOŽNICAH

Za različni točki $A, B \in \mathcal{P}V$ v projektivnem prostoru smo z $AB$ označili edino premico, ki poteka skozi ti dve točki. Oznaka $AA$ v splošnem nima pomena. Če pa je $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica v $\mathcal{P}V$ in je $A \in \mathcal{S}$, naj $AA$ označuje edino tangento na $\mathcal{S}$ v točki $A$. Oznako upravičimo z naslednjim razmislekom. Če na neprazni neizrojeni stožnici v $\mathcal{P}\mathbb{R}^3$ ali v $\mathcal{P}\mathbb{C}^3$ izberemo različni točki $A, B$ in točko $B$ pošljemo proti točki $A$, bo premica $AB$ "skonvergirala" k tangenti na stožnico v točki $A$.

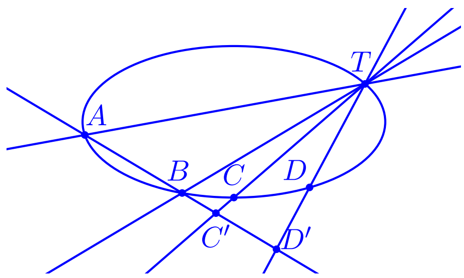
**Izrek 4.77** *(Steinerjev izrek) Naj bodo $V$ vektorski prostor razsežnosti $\dim V = 3$ nad poljem $\mathcal{O}$ karakteristike $k(\mathcal{O}) \neq 2$ in $A, B, C, D \in \mathcal{S}$ različne točke na neprazni neizrojeni stožnici $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}V$. Tedaj je dvorazmerje šopa premic $\mathcal{D}(TA, TB, TC, TD)$ neodvisno od točke $T \in \mathcal{S}$.*

**Dokaz:** Po trditvi 4.67 premica seka neizrojeno stožnico v največ dveh točkah, zato so premice $AT$, $BT$, $CT$ in $DT$ različne. Poleg tega nobene tri točke izmed $A$, $B$, $C$ in $D$ ne ležijo na isti projektivni premici, zato je $\{A, B, C, D\}$ projektivno ogrodje za $\mathcal{P}V$. Izberimo vektorje $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ in $d \in D$, da je $d = a + b + c$. Naj bo $M$ matrika v bazi $\{a, b, c\}$, ki pripada neizrojeni stožnici $\mathcal{S}$. Ker točke $A$, $B$ in $C$ ležijo na $\mathcal{S}$, je $a^T M a = b^T M b = c^T M c = 0$ in zato je

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

za neke $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{O}$. Ločimo dve možnosti.

• Točka $T \in \mathcal{S}$ je različna od točk $A$, $B$, $C$ in $D$. Dvorazmerje šopa premic $TA$, $TB$, $TC$ in $TD$ bomo računali na premici $AB$. Izberemo $t \in T$. Ker je $\{a, b, c\}$ baza za $V$, lahko zapišemo $t = xa + yb + zc$ za neke $x, y, z \in \mathcal{O}$. Ker je $A = [1\colon 0\colon 0]$, $B = [0\colon 1\colon 0]$, $C = [0\colon 0\colon 1]$, $D = [1\colon 1\colon 1]$ in $T = [x\colon y\colon z]$, je




$$C' := TC \cap A = [x\colon y\colon 0],$$
$$D' := TD \cap A = [x - z\colon y - z\colon 0].$$

Če je $x = 0$, točke $B$, $C$ in $T$ ležijo na isti premici. To ni možno, saj premica ne seka neizrojene stožnice v treh točkah. Torej je $x \neq 0$. Enak razmislek pokaže, da je tudi $y \neq 0$ in $z \neq 0$. Če je $x = y$, točke $C$, $D$ in $T$ ležijo na isti premici, kar tudi ni možno. Torej je $x \neq y$ in enako pokažemo, da $x \neq z$ in $y \neq z$.

Za vektorje $a' = (x, 0, 0) \in A$, $b' = (0, y, 0) \in B$, $c' = (x, y, 0) \in C'$ in $d' = (x - z, y - z) \in D'$ velja $c' = a' + b'$ in $d' = \frac{x-z}{x}a' + \frac{y-z}{y}b'$. Zato je

$$\mathcal{D}(TA, TB, TC, TD) = \mathcal{D}(A, B, C', D') = \frac{(x-z)y}{(y-z)x}.$$

Sedaj želimo pokazati, da je to dvorazmerje neodvisno od točke $T$ oziroma od skalarjev $x$, $y$ in $z$.

Ker sta $D, T \in \mathcal{S}$, za vektorja $d = (1, 1, 1)$ in $t = (x, y, z)$ (zapisana v bazi $\{a, b, c\}$) velja

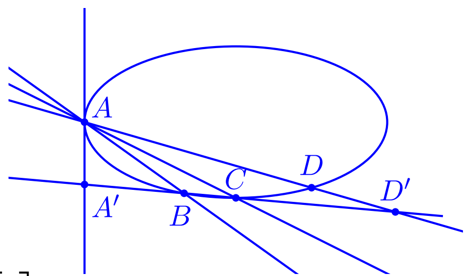
$$0 = d^T M d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

in

$$0 = t^T M t = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2(\alpha xy + \beta xz + \gamma yz).$$

Ker je $\mathrm{k}(\mathcal{O}) \neq 2$, je $\alpha + \beta + \gamma = 0$ in $\alpha xy + \beta xz + \gamma yz = 0$. Če prvo enakost pomnožimo z $-xy$ in enakosti seštejemo, dobimo $\frac{(x-z)y}{(y-z)x} = -\frac{\beta}{\gamma}$. Skalarja $\beta$ in $\gamma$ sta neodvisna od točke $T$. Tako je dvorazmerje $\mathcal{D}(TA, TB, TC, TD) = -\frac{\beta}{\gamma}$ neodvisno od točke $T$, če je le ta različna od točk $A$, $B$, $C$ in $D$.

• Naj bo $T$ enaka eni izmed točk $A$, $B$, $C$ ali $D$. Zaradi simetrije lahko predpostavimo, da je $T = A$. Dvorazmerje šopa premic $TA = p_A$, $TB$, $TC$ in $TD$ bomo izračunali na premici $BC$. Tangenta na $\mathcal{S}$ v točki $A$ je polara




$$p_A = \{\mathrm{Lin}\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\} \mid \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha y + \beta z = 0\}.$$

Zato je $A' := p_A \cap BC = [0\colon -\beta\colon \alpha]$ in $D' := AD \cap BC = [0\colon 1\colon 1]$. Za vektorje $a' = (0, -\beta, \alpha) \in A'$, $b' = (0, \beta, 0) \in B$, $c' = (0, 0, \alpha) \in C$ in $d' = (0, \alpha, \alpha) \in D'$ velja $c' = a' + b'$ in $d' = a' + \frac{\alpha+\beta}{\beta} b'$. Zato je

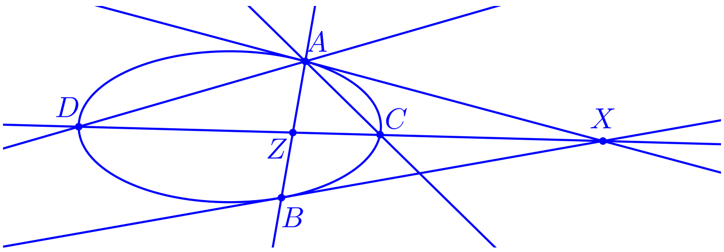
$$\mathcal{D}(TA, TB, TC, TD) = \mathcal{D}(A', B, C, D') = \frac{\beta}{\alpha + \beta}.$$

Ker $D \in M$, je $\alpha + \beta + \gamma = 0$ oziroma $\alpha + \beta = -\gamma$. Torej je dvorazmerje $\mathcal{D}(TA, TB, TC, TD) = -\frac{\beta}{\gamma}$ kot v primeru, ko $T$ ni enaka eni izmed točk $A$, $B$, $C$ ali $D$. Torej je dvorazmerje res neodvisno od izbire točke $T \in \mathcal{S}$. $\square$

Steinerjev izrek nam omogoča, da lahko definiramo dvorazmerje točk na stožnici.

**Definicija 4.78** *Naj bo $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica.* ***Dvorazmerje*** *različnih točk $A, B, C, D \in \mathcal{S}$ je $\mathcal{D}(A, B, C, D) = \mathcal{D}(TA, TB, TC, TD)$, kjer je $T \in \mathcal{S}$ poljubna točka.*

Tudi v tem v tem primeru definiramo harmonično četverko enako kot pri kolinearnih točkah. Kako pri danih treh točkah $A$, $B$ in $C$ na neprazni neizrojeni stožnici konstruiramo četrto, da bodo tvorile harmonično četverko? Naj bo točka $X$ presek polar $p_A$ in $p_B$. Vemo, da sta $p_A$ in $p_B$ edini tangenti na $\mathcal{S}$, ki gresta skozi točko $X$. Zato premica $XC$ seka stožnici $\mathcal{S}$ v dveh točkah.




Označimo drugo presečišče z $D$. Iz trditve 4.76 sledi, da so točke $X$, $Z := AB \cap XC$, $C$ in $D$ harmonična četverka. To pomeni, da je

$$-1 = \mathcal{D}(X, Z, C, D) = \mathcal{D}(AX, AZ, AC, AY) = \mathcal{D}(A, B, C, D).$$

Tako smo dokazali naslednjo trditev.

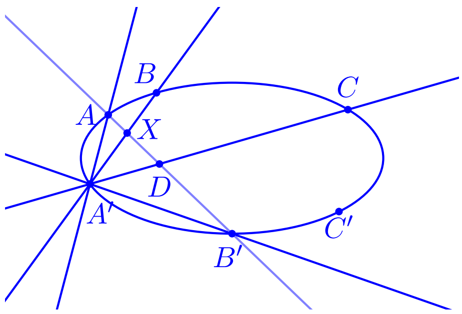
**Trditev 4.79** *Naj bodo $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica in $A$, $B$, $C$ različne točke na njej. Nadalje naj bosta $X$ presečišče polar $p_A \cap p_B$ in $D$ presečišče stožnice $\mathcal{S}$ in premice $CX$, ki ni enako $C$. Tedaj so točke $A$, $B$, $C$ in $D$ harmonična četverka.*

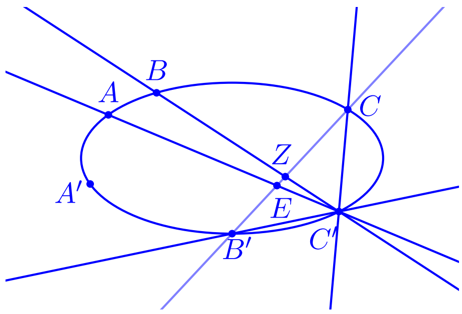
**Izrek 4.80** *(Pascalov izrek) Naj bodo $A, A', B, B', C, C'$ različne točke na neprazni neizrojeni stožnici $\mathcal{S}$. Potem so točke $X = AB' \cap A'B$, $Y = AC' \cap A'C$ in $Z = BC' \cap B'C$ kolinearne.*

**Dokaz:** Izračunajmo dvorazmerje točk $A$, $B$, $C$ in $B'$ na dva različna načina. Najprej ga izračunajmo kot dvorazmerje šopa premic, ki gredo skozi točko $A'$, in to na premici $AB'$. (Glej spodnjo levo sliko.) Torej je

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A, B, C, B') =& \mathcal{D}(A'A, A'B, A'C, A'B') = \\ =& \mathcal{D}(A, X, D, B'),\end{aligned}$$

kjer je $D = A'C \cap AB'$.

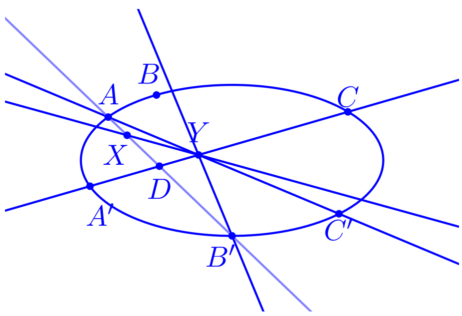


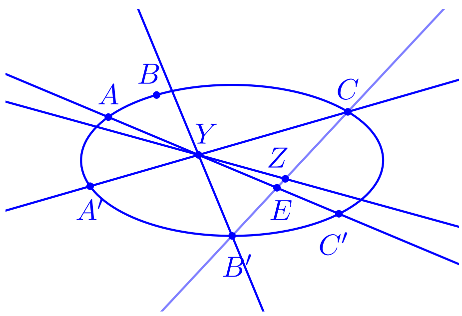




Sedaj pa dvorazmerje izračunajmo kot dvorazmerje šopa premic, ki gredo skozi točko $C'$, in to na premici $CB'$. (Glej zgornjo desno sliko.) Torej je

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A, B, C, B') =& \mathcal{D}(C'A, C'B, C'C, C'B') = \\ =& \mathcal{D}(E, Z, C, B'),\end{aligned}$$

kjer je $E = C'A \cap CB'$. Torej je $\mathcal{D}(A, X, D, B') = \mathcal{D}(E, Z, C, B')$. S pomočjo te enakosti bomo primerjali dve dvorazmerji šopov premic, ki potekajo skozi točko $Y$. Glej spodnji sliki.



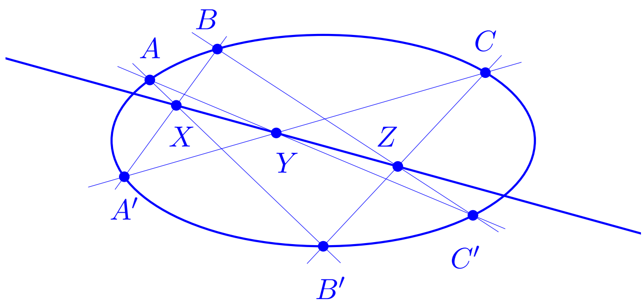
Velja

$$\mathcal{D}(YA, YX, YD, YB') = \mathcal{D}(YA \cap AB', YX \cap AB', YD \cap AB', YB' \cap AB') = \\ = \mathcal{D}(A, X, D, B')$$

in

$$\mathcal{D}(YE, YZ, YC, YB') = \mathcal{D}(YE \cap CB', YZ \cap CB', YC \cap CB', YB' \cap CB') = \\ = \mathcal{D}(E, Z, C, B'),$$

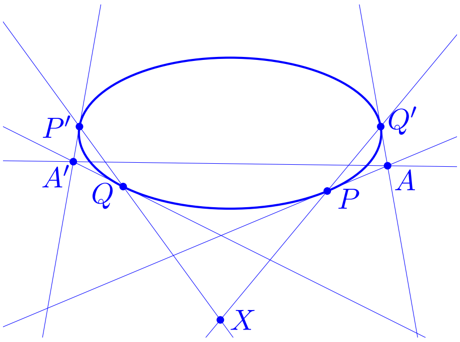
zato je $\mathcal{D}(YA, YX, YD, YB') = \mathcal{D}(YE, YZ, YC, YB')$. Ker je $YA = YE$ in $YD = YC$, sta enaki tudi premici na drugem mestu v dvorazmerju.

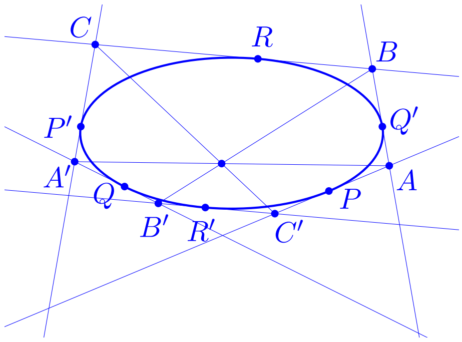



Torej je $YX = YZ$, kar pomeni, da so točke $X$, $Y$ in $Z$ kolinerne. □

**Izrek 4.81** *(Brianchonov izrek) Naj bodo $p, p', q, q', r, r'$ različne tangente na neprazni neizrojeni stožnici $\mathcal{S}$. Označimo presečišča $A = p \cap q'$, $B = q' \cap r$, $C = r \cap p'$, $A' = p' \cap q$, $B' = q \cap r'$ in $C' = r' \cap p$. Tedaj se premice $AA'$, $BB'$ in $CC'$ sekajo v isti točki.*

**Dokaz:** Naj bodo $P = p \cap \mathcal{S}$, $P' = p' \cap \mathcal{S}$, $Q = q \cap \mathcal{S}$, $Q' = q' \cap \mathcal{S}$, $R = r \cap \mathcal{S}$ in $R' = r' \cap \mathcal{S}$. Po Pascalovem izreku so točke $X = PQ' \cap P'Q$, $Y = PR' \cap P'R$ in $Z = QR' \cap Q'R$ kolinearne. Točka $D = p_X \cap p_Y$ leži na polarah točk $X$ in $Y$, zato po posledici 4.71 točki $X$ in $Y$ ležita na polari $p_D$. To pomeni, da je $p_D = XY$. Enako dobimo, da je polara točke $E = p_X \cap p_Z$ enaka $p_E = XZ$. Ker so točke $X$, $Y$ in $Z$ kolinearne, velja $p_D = p_E$. Po trditvi 4.74 je zato $D = E$ in se tako polare $p_X$, $p_Y$ in $p_Z$ sekajo v isti točki. Spomnimo se, kako konstruiramo polaro za točko $X$, ki ni na stožnici. Glej spodnjo levo sliko. Izberemo dve premici, ki potekata skozi $X$. Torej $PQ'$ in $P'Q$.




Polara $p_X$ je tedaj premica skozi točko $A$, ki je presek tangent na $\mathcal{S}$ v točkah $\{P, Q'\} = PQ' \cap \mathcal{S}$, in točko $A'$, ki je presek tangent na $\mathcal{S}$ v točkah $\{P', Q\} = P'Q \cap \mathcal{S}$. Enako iz konstrukcije polare dobimo $p_Y = BB'$ in $p_Z = CC'$. Torej se premice $AA'$, $BB'$ in $CC'$ sekajo v isti točki (zgornja desna slika). $\square$

# Stvarno kazalo