

1 Množice in matematična indukcija.

1. Naj bo A množica moči $n \in \mathbb{Z}^+$ in naj bo $\mathcal{P}(A)$ potenčna množica množice A . Z matematično indukcijo dokažite naslednjo enakost:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

2. Pokažite naslednjo trditev: če n knjig razdelimo v m škatel, bo ena od škatel vsebovala vsaj $\lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor + 1$ knjig. Podrobno razložite vsak korak svojega dokaza.

2 Osnovna kombinatorična načela: Načelo vsote. Načelo produkta. Načelo enakosti.

3. Predpostavimo, da imamo na voljo 5 (identičnih) pomaranč in 8 (identičnih) jabolk. Koliko različnih nepraznih zbirk sadja lahko naredimo, če zbirka lahko vsebuje največ 3 pomaranče? Preden izračunate numerično vrednost, podajte vsaj tri primere izbir, ki jih lahko naredimo.

4. Koliko različnih petmestnih števil lahko sestavimo iz števk 1, 2, 3 in 4, če

- (a) ni dodatnih omejitev?
- (b) mora biti vsota števk soda?
- (c) mora biti sodih števk več kot lihih?

Rezultat naj bo podan kot numerična vrednost.

5. Koliko različnih 4-mestnih števil lahko sestavimo iz cifer 2, 3, 5, 6, 7 in 8, če upoštevamo naslednje pogoje:

- (a) cifre v številu so paroma različne?
- (b) vse cifre v številu so enake?
- (c) število je večje od 5688?
- (d) število je deljivo s 5?
- (e) število je palindrom¹?
- (f) število je sodo in je palindrom?

Rezultat naj bo podan kot točna numerična vrednost. V vseh delih naloge, preden izračunate numerične vrednosti, podajte vsaj tri primere 4-mestnih števil, ki jih lahko naredimo.

6. Na koliko različnih načinov lahko formiramo niz dolg 5 črk, če imamo na voljo črke x, y, a, b, u in v in upoštevamo naslednje pogoje

- (i) črke v nizu se lahko ponavljajo?
- (ii) črke v nizu se ne smejo ponavljati, niz pa vsebuje črko x ?
- (iii) črke v nizu se lahko ponavljajo, niz pa vsebuje črko x ?

7. Naj bo $A = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$. Na koliko načinov lahko iz množice A izberemo štiri števila, če morajo izbrana števila biti različna po absolutni vrednosti

- (a) in je vrstni red pomemben.
- (b) in vrstni red ni pomemben.

¹Palindrom je niz, ki se bere enako naprej in nazaj. Primeri: nežen, 12321, potop, dovod, omilimo, radar, V elipsi spi lev,...

3 Dirichletovo načelo

- 8.** V družini Dioklecijan je 12 otrok. Dokažite, da sta vsaj dva družinska člana rojena v istem mesecu.
- 9.** Koliko študentov mora biti na pisnem izpitu iz Diskretne matematike II, da zagotovimo, da bodo vsaj štirje študenti prejeli enako število točk, če je izpit ocenjen na lestvici od 0 do 100 točk?
- 10.** Danih imamo pet točk znotraj enakostraničnega trikotnika z dolžino stranice 2 cm. Pokažite, da obstajata dve točki, ki ležita na razdalji največ 1 cm.
- 11.** Na zabavi se je zbralo 8 študentov, starih med 18 in 30 let. Utemeljite, da med njimi lahko izberemo dve različni skupini oseb, tako da je vsota let oseb iz ene skupine enaka vsoti let oseb iz druge skupine.
- 12.** Iz množice $\{1, 2, \dots, 2n\}$ izberemo $n + 1$ različnih števil. Dokažite, da sta med izbranimi celimi števili vedno dve, katerih največji skupni delitelj je 1.
- 13.** V Luko Koper vsak teden pripluje 200 tovornih ladij. Utemeljite, da obstajata vsaj dve ladji, ki v pristanišče priplujeta v razmaku manj kot ene ure.
- 14.** Na družinskem srečanju se je zbralo devet oseb, starih med 18 in 58 let. Utemeljite, da med njimi lahko izberemo dve različni skupini oseb, tako da je vsota let oseb iz ene skupine enaka vsoti let oseb iz druge skupine.
- 15.** Opazujemo igro 10 teniških igralcev (ena na ena). Vsak od njih igra vsaj eno tekmo in nobena dva igralca ne igrata več kot enkrat drug proti drugemu (natančnega števila iger posameznega igralca ne poznamo; dva različna igralca sta lahko vključena v različno število iger). Pokažite, da obstajata dva igralca, ki sta odigrala enako število iger.
- 16.** Vzemite običajno kocko s 6 ploskvami (s ploskvami oštevilčenimi od 1 do 6) in izberite štiri ploskve. Dokažite, da sta izmed teh štirih ploskev dve na nasprotnih straneh kocke.

Vse naloge so prenesene z naslednje spletne strani:

<https://osebje.famnit.upr.si/~penjic/teaching.html>.

NA ISTI STRANI LAHKO BRALEC NAJDE VSE REŠITVE PODANIH NALOG.