11 Linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi koeficienti

54. Rešite rekurzivno enačbo $F(n) = 4F(n-2)$ z začetnima pogojema $F(0) = 0$ in $F(1) = 4$.

55. Rešite rekurzivno enačbo $F(n) = 4F(n-1) - 3F(n-2)$ z začetnima pogojema $F(0) = 2$ in $F(1) = 5$.

56. Rešite rekurzivno enačbo

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) - F(n-3)$$

z začetnima pogojema $F(0) = F(1) = 0$ in $F(2) = 4$. Uporabite metodo s karakteristično enačbo.

57. **Lucasovo zaporedje** je mogoče definirati kot $L(0) = 2$, $L(1) = 1$ in $L(n) = L(n-1) + L(n-2)$ za $n \geq 2$.

(a) Izračunajte prvih šest členov zaporedja.

(b) Pridobite eksplicitno (nerekurzivno) formulo za $L(n)$.

12 Rekurzivne enačbe

58. (i) Alja položi 1000 evrov v lokalno banko po letni obrestni meri 8% na leto. Rekurzivno definirajte znesek a_n, ki ga bo imela na svojem računu ob koncu n let.

(ii) V sejni dvorani je n gostov. Vsaka oseba se rokuje z vsemi ostalimi natanko enkrat. Rekurzivno definirajte število rokovanj $h(n)$, ki se zgodijo, in rešite dobljeno rekurzivno enačbo.

59. (i) Voznik avtobusa plača cestnino, pri čemer uporablja samo kovance po 1€ in 2€, tako da vrže po en kovanec naenkrat v mehanski zbiralnik cestnine. Poiščite rekurzivno zvezo za število različnih načinov, na katere lahko voznik plača cestnino v višini n€ (pri čemer je pomemben vrstni red, v katerem so uporabljeni kovanci).

(ii) Rešite rekurzivno enačbo $F(n) = 8F(n-1) - 16F(n-2)$ z začetnima pogojema $F(0) = -1$ in $F(1) = 4$. Uporabite metodo s karakteristično enačbo.

60. Na razpolago imamo kvadratne ploščice, ki imajo obliko črke L in pokrijejo 3 kvadrate. Pokriti želimo pravokotna tla velikosti $2 \times n$ kvadratkov za $n \geq 0$. Poiščite rekurzivno zvezo za število načinov, na katere lahko pokrijemo pravokotna tla velikosti $2 \times n$, za $n \geq 2$. Določite tudi število (numerično vrednost) načinov, na katere lahko pokrijemo pravokotna tla velikosti 2×12 kvadratkov.

61. Naj bo a_n število vseh nizov dolžine n, ki vsebujejo le črke A, B in C, ne vsebujejo pa podniza "CA". Poiščite rekurzivno zvezo za a_n. Določite tudi numerično vrednost števila a_5.

62. Naj bo a_n število vseh takih dvojiških zaporedij dolžine n (zaporedja dolžine n, ki vsebujejo le cifre 0 in 1), ki ne vsebujejo podzaporedja 001.
Poiščite rekurzivno zvezo za a_n in začetne vrednosti.
Določite tudi numerično vrednost števila a_6.

63. Na koliko načinov lahko pokrijemo pravokotna tla velikosti $2 \times n$ kvadratkov, $n > 0$, če imamo na razpolago pravokotne ploščice velikosti 1×2 in 2×2 kvadratka? Poiščite rekurzivno zvezo in dobljeno enačbo rešite. Na koliko načinov lahko pokrijemo tla velikosti 2×5 kvadratkov?

64. Na robu nekega ribnika se pasejo žabe in štorklje. V vsaki minuti se zgodi naslednje: v prvi polovici minute vsaka od žab, ki so se pasle v začetku te minute, privabi tri nove žabe in eno novo štorkljo. V drugi polovici minute pa vsaka od štorkelj poje po eno žabo. V začetku sta se pasli dve žabi in ena štorklja. Zapišite rekurzivno zvezo, ki bo podala število žab in štorkelj na začetku n-te minute za vse $n \in \mathbb{Z}_0^+$.

65. Na razpolago imamo kvadratne ploščice velikosti 1×1 kvadratek in pravokotne ploščice velikosti 1×2 kvadratka. Pokriti želimo pravokotna tla velikosti $2 \times n$ kvadratkov za $n \geq 0$, pri čemer morata daljša robova dveh vzporedno postavljenih pravokotnih ploščic sovpadati v celoti, tj. ne dovolimo postavitev

Naj $F(n)$ označuje število različnih postavitev ploščic, ki jih imamo pri pokrivanju tal velikosti $2 \times n$.

(a) Utemeljite, da v tem primeru enačba $F(n) = 2F(n-1) + 3F(n-2)$ podaja rekurzivno zvezo za število različnih postavitev ploščic za $n \geq 2$.

(b) Zapišite začetna pogoja in svoj rezultat preverite tako, da naštejete vse možne postavitve ploščic za tla velikosti 2×2 kvadratkov in dobljeno primerjate z rezultatom izračunanim s pomočjo rekurzivne enačbe.

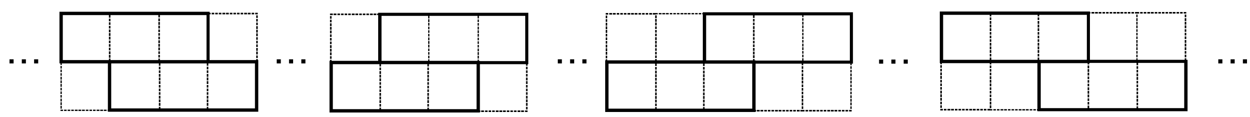
(c) Podajte eksplicitno enačbo za $F(n)$.

66. Na razpolago imamo kvadratne ploščice velikosti 1×1 kvadratek in ploščice ki imajo obliko črke L (in pokrijejo 3 kvadrate). Pokriti želimo pravokotna tla velikosti $2 \times n$ kvadratkov za $n \geq 0$, pri čemer ne dovolimo postavitve oblike

(a) Poiščite rekurzivno zvezo za število načinov na katere lahko pokrijemo pravokotna tla velikosti $2 \times n$, za $n \geq 2$.

(b) Zapišite začetna pogoja in svoj rezultat preverite tako, da naštejete vse možne postavitve ploščic za tla velikosti 2×2 kvadratkov in dobljeno primerjate z rezultatom izračunanim s pomočjo rekurzivne enačbe.

67. Na razpolago imamo kvadratne ploščice velikosti 1×1 kvadratek in ploščice ki imajo obliko črke I (in pokrijejo 3 kvadrate). Pokriti želimo pravokotna tla velikosti $2 \times n$ kvadratkov za $n \geq 0$, pri čemer ne dovolimo postavitve naslednjih oblik:



Naj $F(n)$ označuje število različnih postavitev ploščic, ki jih imamo pri pokrivanju tal velikosti $2 \times n$.

(a) Poiščite rekurzivno zvezo za $F(n)$ za $n \geq 3$.

(b) Izračunajte $F(6)$.

Vse naloge so prenesene z naslednje spletne strani:
https://osebje.famnit.upr.si/~penjic/teaching.html.
NA ISTI STRANI LAHKO BRALEC NAJDE VSE REŠITVE PODANIH NALOG.