7 Lastnosti binomskih koeficientov

36. Pokažite, da za $n > 0$ velja

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

37. Poiščite enostavnejši izraz za

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2z}{2}^k x^{n-k}.$$

Končni izraz mora biti $n$ta potenca kvadratnega polinoma v spremenljivkah x in z zapisana v poenostavljeni obliki (to je v obliki $ax^2 + bz^2 + cxz + dx + ez + f$ za nekatere konstante a, b, c, d, e, f).

38. Naj bo X množica moči $n > 0$.

(i) Naj bo $\mathcal{S}$ množica vseh podmnožic množice X, ki imajo sodo moč, in $\mathcal{L}$ množica vseh podmnožic množice X, ki imajo liho moč. Naj bo x poljuben element množice X in naj bo f preslikava, ki slika iz množice $\mathcal{S}$ v množico $\mathcal{L}$, podana s predpisom: za vse $A \in \mathcal{S}$ naj bo $f(A) = A \setminus \{x\}$, če je x element množice A, in $f(A) = A \cup \{x\}$, sicer.

Dokažite, da je preslikava f bijektivna.

(ii) Z uporabo rezultata v točki (i) podajte kombinatoričen dokaz enakosti $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$

39. Tat skuša odpreti vrata s kodo: ima 12 gumbov z oznakami 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, #, $*$ in pričakuje šest števk, ki jim sledi # ali *. Koliko kod je možnih:

(i) brez dodatnih omejitev?

(ii) če se nobena števka ne ponovi?

Z opazovanjem gumbov lahko poskušamo uganiti pogostost uporabe posameznega gumba. Dejansko tat opazi, da gumbi $4, 6, 7, 8, *$ niso nikoli uporabljeni (ni jih v kodi), gumb 1 se pojavi vsaj dvakrat, za ostale številke pa ni nobenega jamstva.

(iii) Koliko kod je možnih s tem novim namigom?

(iv) Koliko kod je možnih, če tat ugotovi tudi, da se 1 pojavi strogo večkrat kot 9, ki se pojavi strogo večkrat kot 2?

8 Načelo vključitev in izključitev

40. Dvojiški niz dolžine osem se imenuje zlog. Poiščite število zlogov z drugim bitom 0 ali tretjim bitom 1. Izračunajte natančno numerično vrednost vaše rešitve!

41. Koliko naravnih števil ≤ 70 je tujih številu 50 (tj., nimajo netrivialnih skupnih deliteljev s številom 50)?

42. Koliko desetmestnih binarnih nizov, ki se začnejo z 111 ali končajo z 101 (ali oboje) lahko sestavimo, če

(a) ni dodatnih omejitev?

(b) vsebuje niz natanko 6 enic?

43. Izmed 100 študentov se jih 46 ukvarja z odbojko, 47 z rokometom in 48 z nogometom, po 12 študentov se ukvarja s poljubnim parom od teh športov (ne pa tudi s preostalim, tretjim športom), 14 študentov pa se ukvarja z vsemi tremi športi. Koliko študentov ne igra nobenega od teh treh športov?

44. Med študenti v nekem študentskem domu se jih v prostem času 12 rekreativno ukvarja z nogometom (N), 20 s košarko (K), 20 z odbojko (O) in 8 z rokometom (R). 5 študentov se ukvarja z N in K, 7 študentov z N in O, 4 študenti z N in R, 16 študentov s K in O, 4 študenti s K in R, 3 študenti pa z O in R. 3 študenti se ukvarjajo z N, K in O, 2 študenta z N, K in R, 2 študenta s K, O in R, 3 študenti pa z N, O in R. 2 študenta se ukvarjata z vsemi štirimi športi. Znano je tudi, da se 71 študentov ne ukvarja z nobenim od omenjenih štirih športov. Poiščite skupno število študentov v študentskem domu.

45. Na koliko načinov lahko razdelimo 20 enakih bonbonov med tri otroke, če dovolimo, da kakšen izmed otrok ne prejme nobenega bonbona, in:

(a) ni omejitev glede števila bonbonov na otroka?

(b) vsaj en otrok dobi vsaj 7 bonbonov?

(c) vsaj en otrok dobi vsaj 10 bonbonov?

Vse naloge so prenesene z naslednje spletne strani:
https://osebje.famnit.upr.si/~penjic/teaching.html.
Na isti strani lahko bralec najde vse rešitve podanih nalog.