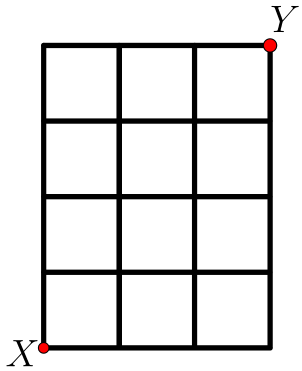
4 Urejen izbor s ponavljanjem. Urejeni izbori brez ponavljanja.



17. Študent bi se rad po ulicah sprehodil od točke X do točke Y, kot je prikazano na sliki desno. Koliko različnih najkrajših poti lahko izbere?

18. Iz škatle, ki vsebuje kroglice oštevilčene od 1 do 20, izberemo 6 kroglic. Na koliko načinov lahko to storimo, če

(a) kroglice izbiramo eno po eno in jih vračamo v škatlo?

(b) kroglice izbiramo eno po eno in jih ne vračamo v škatlo?

(c) kroglice izbiramo po dve naenkrat in jih ne vračamo v škatlo?

(d) izberemo vseh 6 kroglic naenkrat?

Rezultat naj bo podan kot točna numerična vrednost. V vseh delih naloge, preden izračunate numerične vrednosti, podajte vsaj tri primere razvrstitev, ki jih lahko naredimo.

19. Na koliko načinov se lahko konča plavalno tekmovanje s štirimi plavalci, če so mogoči tudi izenačeni rezultati?

20. Nek moški ima 12 sorodnikov, 5 je moških in 7 žensk. Tudi njegova žena ima 12 sorodnikov, od tega je 7 moških in 5 žensk. Skupnih sorodnikov nimata. Odločila sta se, da na obisk povabita 12 sorodnikov. Na koliko načinov lahko to storita, če

(a) povabita vsak 6 sorodnikov in bo med njimi natanko 6 moških?

(b) povabita oba enako število žensk?

Odgovorov ni potrebno zapisovati z natančnimi numeričnimi vrednostmi.

5 Permutacije

21. Na koliko načinov lahko 10 ljudi razporedimo v pare? Preden izračunate numerično vrednost, podajte vsaj tri primere možnih razporeditev.

22. Na koliko različnih načinov lahko zložimo na polico 4 različne matematične in 3 leposlovne knjige ter 5 različnih leksikonov, če

(a) so knjige lahko poljubno pomešane med seboj?

(b) naj matematične knjige stojijo skupaj?

(c) knjige iste vrste stojijo skupaj?

23. Na koliko načinov se lahko skupina 6 žensk in 5 moških postavi v vrsto za fotografiranje, če nobeni dve sosednji osebi nista istega spola?

24. Najprej podajte 12 paroma različnih permutacij naslednjih 10 črk: $a, a, a, b, b, n, n, e, s, t$. Nato pa dokažite, da je število paroma različnih permutacij n objektov, v katerih se prvi objekt pojavi k_1-krat, drugi k_2-krat, tretji k_3-krat, vsi ostali objekti pa se pojavijo natanko enkrat, enako

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!}.$$

Podrobno razložite vsak korak svojega dokaza.

25. (a) Koliko različnih besed lahko dobimo s premetavanjem črk besede *banana*?

(b) Koliko besed iz točke (a) je takih, da črka b stoji neposredno pred črko a?

(c) Koliko besed iz točke (a) je takih, da se v njih skupaj ne pojavi zaporedje črk bnn?

(d) Koliko besed iz točke (a) je takih, da b stoji pred vsemi a-ji (ne nujno neposredno pred njimi)?

6 Načelo dvojnega preštevanja

26. Pokažite, da velja enakost

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

tako da podate kombinatoričen dokaz (z uporabo načela dvojnega preštevanja) in obravnavate naslednje vprašanje: Na koliko različnih načinov lahko formiramo eno besedo dolžine n, če imamo na voljo poljubno mnogo črk A in B?

27. Pokažite, da velja enakost

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1},$$

tako da podate kombinatoričen dokaz (z uporabo načela dvojnega preštevanja).

28. Pokažite, da velja enakost

$$\sum_{j=0}^{t} \binom{a}{j} \binom{b}{t-j} = \binom{a+b}{t}$$

tako da podate kombinatoričen dokaz (z uporabo načela dvojnega preštevanja) in obravnavate naslednje vprašanje: Na koliko različnih načinov lahko formiramo dve besedi dolžine a in b, če imamo na voljo t črk A, ki jih moramo nujno uporabiti, ter poljubno mnogo črk B?

29. Podajte kombinatoričen dokaz (z uporabo načela dvojnega preštevanja) nasledenje enakosti

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell} \cdot \binom{m}{k-\ell} \qquad (0 \le k \le m \le n).$$

30. Pokažite, da velja enakost

$$\sum_{k=0}^{m} k \cdot \binom{n}{k} \binom{m}{k} = n \cdot \binom{n+m-1}{n}$$

tako da podate kombinatoričen dokaz (z uporabo načela dvojnega preštevanja).

31. Pokažite, da velja enakost
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n.$$

(a) Podajte algebraičen dokaz.

(b) Podajte kombinatoričen dokaz (z uporabo načela dvojnega preštevanja), tako da obravnavate naslednji vprašanji: Na koliko različnih načinov lahko iz n-elementne množice izberemo tak par množic (X, Y), da velja $X \subseteq Y$? Koliko je različnih nizov dolžine n, ki jih lahko sestavimo iz števk 0, 1, 2?

32. Pokažite, da velja enakost
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$
tako da podate kombinatoričen dokaz.

33. Pokažite, da velja enakost
$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=r+1}^{n+1} \binom{k-1}{r}$$
tako da podate kombinatoričen dokaz.

34. (a) Podajte kombinatoričen dokaz enakosti
$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{2} = \binom{n}{2} 2^{n-2} \tag{1}$$
za $n \geq 2$.

(b) Identiteto (1) zapišite za $n = 5$ in jo interpretirajte s pomočjo Pascalovega trikotnika.

35. (a) Podajte (algebraičen ali kombinatoričen) dokaz enakosti
$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k+j}{j} = \binom{n+k+1}{n} \tag{2}$$
za poljubni dve števili $n, k \in \mathbb{Z}_+$.

(b) Identiteto (2) zapišite za $k = 1$ in z uporabo identitete izračunajte vsoto $\sum_{j=0}^{n} j$.

(c) Z uporabo identitete (2) izračunajte $\sum_{j=0}^{n} j^2$.

(d) Identiteto (2) zapišite za $n = 4$ in $k = 2$ ter jo interpretirajte s pomočjo Pascalovega trikotnika.

Vse naloge so prenesene z naslednje spletne strani:
https://osebje.famnit.upr.si/~penjic/teaching.html.
Na isti strani lahko bralec najde vse rešitve podanih nalog.