UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Lefschetzovo število in točke ujemanja para preslikav

Martin Raič

Delo je pripravljeno pod mentorstvom profesorja dr. Jožeta Vrabca.

Ljubljana, 1995

Povzetek

Delo temelji na članku [1] in obravnava povezavo med Lefschetzovim številom in *točkami ujemanja* para preslikav. Preslikavi f in g se ujemata v x, če je $f(x) = g(x)$. Če sta to preslikavi med dvema kompaktnima orientiranima mnogoterostma iste dimenzije in g slika rob v rob, jima lahko priredimo *Lefschetzovo število* $L(f, g)$, ki je posplošitev klasičnega Lefschetzovega števila.

Vsaki izolirani točki ujemanja, ki leži v notranjosti, lahko priredimo *indeks ujemanja.* Poseben primer takega indeksa je tudi večkratnost ničle kompleksnega polinoma. V delu dokažemo, da je vsota indeksov vseh točk ujemanja enaka Lefschetzovemu številu. Od tod sledi, da, če je Lefschetzovo število preslikav različno od 0, potem se le-ti ujemata v vsaj eni točki, kar je posplošitev znamenitega Lefschetzovega izreka o negibni točki.

V primeru, ko obe preslikavi slikata rob v rob, se da teorija posplošiti tudi na točke ujemanja na robu. Za določen razred parov preslikav se izpelje povezava med Lefschetzovim številom in vsoto indeksov točk ujemanja v notranjosti.

Abstract

This paper is based on [1] and studies the relation between the Lefschetz number and the coincidence points of two maps between compact oriented manifolds of the same dimension. If f and g are such maps and g preserves boundary points, we can define their *Lefschetz number* $L(f, g)$, analogous to the classical Lefschetz number.

Each isolated coincidence, which lies in the interior, can be assigned the *coincidence index*. A special case of this index is also the order of a root of a complex polynomial. We prove that the sum of the indices of all coincidence points is equal to the Lefschetz number. It follows that if the Lefschetz number is nonzero, f and g must have a coincidence point. This is a generalization of a well-known Lefschetz fixed-point theorem.

When both maps preserve boundary points, we can extend the index theory to the coincidences lying on the boundary. For a certain class of map pairs, a relation between the Lefschetz number and the sum of the coincidences which lie in the interior can also be established.

Math. Subj. Class. (1991): 55M20, 54H25

Keywords: Lefschetz number, coincidence point, index

Uvod

Leta 1923 je Solomon Lefschetz objavil formulo, s pomočjo katere je mogoče prešteti negibne točke preslikave, ki slika sklenjeno orientabilno mnogoterost vase. Natančneje, vsaki izolirani negibni točki prelikave iz mnogoterosti brez roba vase je mogoče prirediti indeks. V primeru, ko je mnogoterost sklenjena in orientabilna, je Lefschetz definiral število, ki je odvisno samo od delovanja preslikave na homologiji. Danes mu pravimo *Lefschetzovo število.* Pokazal je, da je to število enako vsoti indeksov vseh negibnih točk preslikave, brž ko je le-teh le končno mnogo. Iz te formule sledi znameniti *Lefschetzov izrek o negibni točki*: če je Lefschetzovo število preslikave različno od 0, ima le-ta vsaj eno negibno točko.

Kasneje je Lefschetz svojo formulo še posplošil. Negibne točke so poseben primer *točk ujemanja.* Preslikavi f in g se *ujemata* v točki x, če je $f(x) = g(x)$. S pomočjo Poincaréjeve dualnosti je mogoče Lefschetzovo število definirati tudi za pare preslikav iz sklenjene mnogoterosti M v sklenjeno mnogoterost N. Novo Lefschetzovo število je posplošitev starega: le-to je enako novemu Lefschetzovo število obravnavane preslikave in identitete. Tudi indeks negibnosti je mogoče posplošiti na *indeks ujemanja* para preslikav v dani točki. Vsota indeksov v vseh točkah ujemanja je spet enaka Lefschetzovemu številu. Od tod sledi *Lefschetzov izrek o točki ujemanja*: če je Lefschetzovo število para preslikav različno od 0, se preslikavi ujemata v vsaj eni točki.

Iz Lefschetzove teorije pa ni mogoče neposredno izpeljati niti znanega Brouwerjevega izreka o negibni točki. Mnogoterost B^n ima namreč rob. Posplošitev Lefschetzove teorije na mnogoterosti z robom obravnava članek [1]. Avtor v njem najprej posploši Lefschetzovo število tudi na mnogoterosti z robom. V definiciji namesto Poincaréjeve nastopa Poincaré-Lefschetzova dualnost, zato mora ena od preslikav rob slikati v rob. Avtor nato pokaže posplošitev Lefschetzovega izreka o točki ujemanja na mnogoterosti z robom. Iz te posplošitve sledi cela vrsta izrekov, med drugim tudi Brouwerjev izrek o negibni točki.

Iz vsake mnogoterosti je mogoče konstruirati mnogoterost brez roba tako, da dve njeni kopiji zlepimo vzdolž roba. Pravimo, da smo mnogoterost podvojili. Na ta način se v [1] teorija indeksov ujemanja za mnogoterosti z robom izpelje iz teorije indeksov za mnogoterosti brez roba. Avtor posploši indeks ujemanja in pokaše, da je vsota novih indeksov točk ujemanja spet enaka Lefschetzovemu številu. Za določen razred parov preslikav pa izpelje še formulo za vsoto indeksov *notranjih* točk ujemanja.

Članek [1] je primeren za bralca, ki se že nekaj časa ukvarja z algebraično topologijo mnogoterosti. Namen tega dela je snov članka predstaviti bralcu, ki pozna le njene osnove. V prvem poglavju so navedena osnovna orodja, s katerimi bomo delali. V glavnem so to znani izreki, ki jih najdemo v skoraj vsaki knjigi o algebraični topologiji. Zato so tudi skoraj vsi dokazi opuščeni. Namen poglavja je, da bo tudi bralec, ki pozna le osnove teorije homologije, lahko sledil nadaljnji snovi.

Drugo poglavje je posvečeno orientaciji. Le-ta se definira s pomočjo teorije homologije. Definirata se Thomov in fundamentalni razred. Izpelje se tudi teorija stopenj ter odnos med Poincaréjevo in Poincaré-Lefschetzovo dualnostjo.

Tretje poglavje obravnava snov članka [1]. Najprej definiramo Lefschetzovo število. Nato definiramo indeks ujemanja in izpeljemo osnovne lastnosti. V nasprotju s člankom [4], na katerega se sklicuje članek [1], indeks takoj definiramo v mnogoterostih z robom, in sicer za primer, ko so vse točke ujemanja v notranjosti. Nato pokažemo, da je vsota indeksov vseh točk ujemanja enaka Lefschetzovemu številu. Od tod takoj sledi Lefschetzov izrek o točki ujemanja. Indeks ujemanja po isti poti kot v [1] posplošimo tudi na robne točke ujemanja in dokažemo, da je le-ta na izoliranih točkah ujemanja celo število. Na koncu za nekoliko širši razred parov preslikav kot v [1] izpeljemo še zvezo med Lefschetzovim številom in vsoto indeksov točk ujemanja v notranjosti.

Del snovi članka [1] v tem delu ne nastopa. Opuščena sta primerjava s sorodnim člankom in dokaz gostosti razreda parov, za katere se vsota indeksov v notranjosti na podani način izraža z Lefschetzovim številom. Večina opuščene snovi presega okvir tega dela.

Kjer koli je v delu omenjena homologija topološkega prostora ali para prostorov, je mišljena singularna homologija. Kolobar koeficientov je v večini primerov opuščen. V kolikor ni navedeno drugače, teorija velja za poljuben (vnaprej predpisan) glavni kolobar R.

V delu se dostikrat sklicujemo na trditve iz prejšnjih razdelkov in poglavij. Le-te so označene bodisi z eno bodisi s tremi številkami. Oznaka z eno številko pomeni, da je trditev v istem razdelku. Oznaka s tremi številkami pa pove tudi, v katerem poglavju in razdelku je trditev. Tako npr. trditev 1.2.3 pomeni tretjo trditev iz drugega razdelka prvega poglavja.

Za konec naj se še zahvalim vsem, ki so mi kakor koli pomagali na poti do znanja, na podlagi katerega je nastalo to delo. Posebej naj se zahvalim mentorju prof. dr. Jožetu Vrabcu, ki je s svojimi nasveti pomagal poenostaviti kar nekaj stvari.

V Ljubljani, 20. oktobra 1995

Martin Raič

1.

Osnovni pojmi

V tem poglavju bomo navedli nekoliko zahtevnejša orodja iz teorije homologije in kohomologije, ki jih bomo potrebovali v naslednjih poglavjih. Bralec, ki teorijo homologije že dobro pozna, ga lahko mirne duše preskoči. V glavnem bomo navedli le definicije in izreke, večino dokazov pa bomo opustili. Dokazali bomo samo nekatere lažje izreke – toliko, da bralec dobi malo občutka. Marsikje tudi ne bomo navedli izrekov v vsej splošnosti. Bralec, ki se želi v snov bolj poglobiti, lahko vzame v roke [2], kjer so vsi izreki dokazani v vsej splošnosti. Po tej knjigi je to poglavje v glavnem tudi povzeto. Malo manj splošno, zato pa toliko bolj razumljivo, pa je snov podana v [3] in [4].

S pojmom *preslikava* bomo v tem delu razumeli morfizem v ustrezni kategoriji. Tako bomo na primer za preslikavo med topološkima prostoroma že privzeli, da je zvezna, za preslikavo med moduloma pa, da je homomorfizem modulov.

S pojmom *kolobar* bomo razumeli glavni kolobar.

1.1 Izrek o univerzalnih koeficientih

Naj bo R kolobar, X pa topološki prostor. Z $\Delta_n(X;R)$ bomo označili prost R-modul, generiran s singularnimi n-simpleksi, torej preslikavami $\Delta^n \to X$.

Naj bo $A \subset X$. Označimo

$$\Delta_n(X,A;R) := \Delta_n(X;R)/\Delta_n(A;R)$$

Ta modul lahko obravnavamo tudi kot prost R-modul, generiran s singularnimi n-simpleksi, ki ne ležijo celi v A.

Iz kompleksov $\Delta_n(X,A;R)$ zgradimo dobro znani verižni kompleks $\Delta(X,A;R)$, kanonično izomorfen $\Delta(X;R)/\Delta(A;R)$.

Definicija Naj bo G R-modul, $C = \bigoplus_n C_n$ pa stopničast modul nad R. Definirajmo njun *tenzorski produkt* po predpisu

$$G \otimes C := \bigoplus_n (G \otimes C_n)$$

Če je C verižni kompleks z robnim operatorjem ∂, je tudi $G \otimes C$ verižni kompleks z robnim operatorjem $\mathrm{id}_G \otimes \partial$.

Opomba 1 *Obstaja kanonični izomorfizem*

$$\Delta(X,A;R) \xrightarrow{\cong} R \otimes \Delta(X,A;\mathbb{Z})$$

Opomba 2 *Tenzorski produkt skalarja s ciklom je cikel, tenzorski produkt skalarja z robom pa je rob.*

Naj bo R kolobar, C pa modul nad $\mathbb{Z}$. Definirajmo preslikavo $\mu\colon R \otimes H_p(C) \to H_p(R \otimes C)$ po predpisu

$$\lambda \otimes [x] \mapsto [\lambda \otimes x] \tag{3}$$

Opomba 2 pove, da je gornja preslikava dobro definirana. Še več: *gornja preslikava je homomorfizem R-modulov in naravna transformacija.*

Definicija Naj bo G modul nad kolobarjem R. *Torzija modula G nad R* je množica vseh elementov $x \in G$, za katere obstaja tak neničeln element $\lambda \in R$, da je $\lambda x = 0$.
Pravimo, da je modul *brez torzije nad R*, če le-ta vsebuje le element 0.

Izrek 4 *Naj bo C prost modul. Bodisi R bodisi $H_{p-1}(C)$ naj bo brez torzije nad $\mathbb{Z}$. Potem je preslikava, definirana s formulo 3, funktorialni izomorfizem $R \otimes H_p(C) \to H_p(R \otimes C)$.*

Posledica 5 (Izrek o univerzalnih koeficientih za homologijo) *Naj bo R kolobar (X, A) pa topološki par. Če je bodisi R bodisi $H_{p-1}(X,A;\mathbb{Z})$ brez torzije nad $\mathbb{Z}$, potem obstaja funktorialni izomorfizem R-modulov $R \otimes H_p(X,A;\mathbb{Z}) \to H_p(X,A;R)$.*

Če torej pogledamo samo slike elementov $1 \otimes \xi$, kjer je $\xi \in H_*(X,A;\mathbb{Z})$, dobimo vložitev

$$\varepsilon_*\colon H_*(X,A;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(X,A;R)$$

Izrek 6 *Verižna preslikava med prostima verižnima kompleksoma, ki porodi izomorfizem na homologiji, je verižna ekvivalenca.*
Izrek je dokazan v [2] na strani 192 kot izrek 4.6.10.

Posledica 7 *Naj bo $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ preslikava med topološkima paroma. Če f porodi izomorfizem na homologiji s koeficienti iz $\mathbb{Z}$, porodi izomorfizem na homologiji in kohomologiji s poljubnimi koeficienti.*

Naj bosta G in H modula nad istim kolobarjem. Označimo $G^*_H := \mathrm{Hom}(G,H)$.

Naj bo H modul, $C = \bigoplus_n G_n$ pa stopničast modul nad istim kolobarjem R. Označimo:

$$\begin{aligned} C_n &:= G_n \\ C^n_H &:= \{\varphi \in \mathrm{Hom}(C,H) \mid \varphi|_{C_m} = 0 \text{ za vse } m \neq n\} \\ C^*_H &:= \textstyle\bigoplus_n C^n \end{aligned}$$

Če je H izpuščen, privzamemo, da je enak R. Če je C verižni kompleks z robnim operatorjem ∂, je C^*_H koverižni kompleks s korobnim operatorjem δ, delujočim po predpisu $\delta(\varphi) := \varphi \circ \partial$.

Naj bo R kolobar, C pa modul nad $\mathbb{Z}$. Definirajmo preslikavo $R \otimes C^*_{\mathbb{Z}} \to C^*_R$ po predpisu

$$\lambda \otimes \varphi \mapsto \lambda\varphi \tag{8}$$

Gornja preslikava slika produkte skalarjev iz R s kocikli v kocikle, produkte s korobovi pa v korobove. Zato porodi preslikavo $\mu\colon R \otimes H^p(C^*_{\mathbb{Z}}) \to H^p(C^*_R)$. Preslikava μ je tudi homomorfizem R-modulov in naravna transformacija. Velja pa še naslednji izrek.

Izrek 9 *Naj bo C prost in s končnogenerirano homologijo. Bodisi R bodisi $H^{p+1}(C^*_{\mathbb{Z}})$ naj bo brez torzije nad $\mathbb{Z}$. Potem je μ izomorfizem.*

Naj bo X topološki prostor in R kolobar. Označimo:

$$\begin{aligned} \Delta^n(X;R) &:= \big(\Delta(X;\mathbb{Z})\big)^n_R \\ \Delta^*(X;R) &:= \big(\Delta(X;\mathbb{Z})\big)^*_R \end{aligned}$$

Naj bo R kolobar in (X,A) topološki par. Označimo:

$$\begin{aligned} \Delta^n(X,A;R) &:= \{\varphi \in \Delta^n(X;R) \mid \varphi|_{\Delta_n(A;\mathbb{Z})} = 0\} \\ \Delta^*(X,A;R) &:= \{\varphi \in \Delta^*(X;R) \mid \varphi|_{\Delta(A;\mathbb{Z})} = 0\} \end{aligned}$$

Opomba 10 *Obstajajo kanonični funktorialni izomorfizmi*

$$\begin{aligned} \Delta^n(X,A;R) &\xrightarrow{\cong} \big(\Delta_n(X,A;\mathbb{Z})\big)^*_R \xrightarrow{\cong} \big(\Delta_n(X,A;R)\big)^* \\ \Delta^*(X,A;R) &\xrightarrow{\cong} \big(\Delta(X,A;\mathbb{Z})\big)^*_R \xrightarrow{\cong} \big(\Delta(X,A;R)\big)^* \end{aligned}$$

Od tod pa že sledi naslednji izrek.

Izrek 11 *Naj bo R kolobar (X,A) pa topološki par s končnogenerirano homologijo. Bodisi R bodisi $H^{p+1}(X,A;\mathbb{Z})$ naj bo brez torzije nad $\mathbb{Z}$. Potem obstaja funktorialni izomorfizem R-modulov*

$$R \otimes H^p(X,A;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^p(X,A;R)$$

Podobno kot pri homologiji tudi tu dobimo vložitev

$$\varepsilon^*\colon H^*(X,A;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(X,A;R)$$

Iz izreka 6 sledi še naslednji izrek.

Izrek 12 *Če preslikava med topološkima paroma porodi izomorfizem na kohomologiji s koeficienti iz $\mathbb{Z}$, potem velja to tudi za kohomologijo s poljubnimi koeficienti.*

Med homologijo in kohomologijo obstaja tesna povezava. Naj bo C verižni kompleks nad kolobarjem R. Vzemimo elementa $\alpha \in H^*(C)$ in $\xi \in H_*(C)$. Naj bosta φ in x njuna predstavnika v C^* oziroma C. Označimo

$$\langle \alpha\,,\, \xi \rangle := \varphi(x)$$

Gornjemu izrazu pravimo *parjenje* med homologijo in kohomologijo. Parjenje ima to lepo lastnost, da ga ohranjajo tako preslikave med topološkimi pari kot tudi menjava koeficientov. Brez posebnih težav se namreč dasta izpeljati naslednji trditvi.

Trditev 13 *Naj bo $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ preslikava med topološkima paroma. Potem za poljubna elementa $\xi \in H_*(X,A;R)$ in $\beta \in H^*(Y,B;R)$ velja enakost*

$$\langle f^*(\beta)\,,\,\xi\rangle = \langle \beta\,,\,f_*(\xi)\rangle$$

Trditev 14 *Naj bo (X,A) topološki par, $\varepsilon_*\colon H_*(X,A;\mathbb{Z}) \to H_*(X,A;R)$ in $\varepsilon^*\colon H^*(X,A;\mathbb{Z}) \to H^*(X,A;R)$ pa že opisani naravni vložitvi. Potem za poljubna elementa $\alpha \in H^*(X,A;\mathbb{Z})$ in $\xi \in H_*(X,A;\mathbb{Z})$ velja enakost*

$$\langle \varepsilon^*(\alpha)\,,\,\varepsilon_*(\xi)\rangle = \langle \alpha\,,\,\xi\rangle$$

Definirajmo zdaj še preslikavo $h\colon H^q(C) \to H_q(C)^*$ po predpisu $\alpha \mapsto (\xi \mapsto \langle\alpha\,,\,\xi\rangle)$. Tudi ta preslikava je naravna transformacija.

Izrek 15 (Izrek o univerzalnih koeficientih za kohomologijo) *Preslikava h je surjektivna in ima desni inverz. Če je H_{q-1} prost modul, pa je h izomorfizem.*

Posledica 16 *Vsak homološki razred je natančno določen z delovanjem ustreznih kohomoloških razredov na njem.*

Posebno lep je primer, ko je R obseg, homologija pa končnogenerirana. V tem primeru je $H_*(C)$ končnorazsežen vektorski prostor nad R, torej izomorfen svojemu dualu. Naj bo $\{\xi_1 \dots \xi_r\}$ njegova baza. K tej bazi potem obstaja dualna baza $\{\alpha_1 \dots \alpha_r\}$ v $H^*(C)$, enolično določena z enačbami

$$\langle \alpha_i\,,\,\xi_j\rangle = \delta_{ij}$$

1.2 Mayer-Vietorisovo zaporedje parov

Definicija Podprostora X_1 in X_2 topološkega prostora X sta *izrezljiva dvojica* v X, če inkluzija

$$\Delta(X_1;\mathbb{Z}) + \Delta(X_2;\mathbb{Z}) \hookrightarrow \Delta(X_1 \cup X_2;\mathbb{Z})$$

porodi izomorfizem na homologiji. To torej pomeni, da npr. homologijo unije podprostorov generirajo že tisti simpleksi, ki ležijo bodisi v enem bodisi v drugem. Iz izreka 1.1.6 pa sledi, da inkluzija porodi izomorfizem tudi na kohomologiji. Še več, tudi $\mathbb{Z}$ smemo zamenjati s poljubnim kolobarjem R.

Opomba 1 *Poljubna odprta prostora sta izrezljiva dvojica. Isto velja tudi za podkompleksa CW-kompleksa* (glej [2] ali [4], dodatek I, strani 211-217).

Izrek 2 (Izrek o izrezu) *Naj bosta X_1 in X_2 izrezljiva dvojica. Potem inkluzija*

$$(X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2, X_2)$$

na homologiji porodi izomorfizem.

Dokaz opuščamo. Bralec si ga lahko pogleda v [2] na strani 189 (izrek 4.6.4).

Definicija Para podprostorov (X_1, A_1) in (X_2, A_2) sta *izrezljiva dvojica parov*, če sta tako X_1 in X_2 kot A_1 in A_2 izrezljiva dvojica.

Lema 3 *Naj bo $f\colon (C, C') \to (D, D')$ preslikava med paroma verižnih kompleksov, ki porodi izomorfizma $H_*(C) \xrightarrow{\cong} H_*(D)$ in $H_*(C') \xrightarrow{\cong} H_*(D')$. Potem porodi tudi izomorfizem $H_*(C/C') \xrightarrow{\cong} H_*(D/D')$.*

Če sta C/C' in D/D' prosta modula, gornja trditev velja tudi za kohomologijo.

Dokaz Vsakemu paru verižnih kompleksov pripada kratko eksaktno zaporedje. Zaporedji skupaj s preslikavo tvorita kratko eksaktno lestev verižnih kompleksov, iz katere dobimo dolgo eksaktno homološko lestev. Dve od poljubnih treh zaporednih prečk v lestvi sta izomorfizma. Po lemi o petero homomorfizmih so potem vse prečke izomorfizmi.

Če sta C/C' in D/D' prosta modula, sta kratki eksaktni zaporedji razcepljeni, torej lahko sestavimo kratki eksaktni zaporedji iz pripadajočih dualnih kompleksov, od tod pa dolgo kohomološko lestev, v kateri so spet vse prečke izomorfizmi. ■

Posledica 4 *Naj bosta para (X_1, A_1) in (X_2, A_2) izrezljiva dvojica. Potem preslikava*

$$(\Delta(X_1) + \Delta(X_2))/(\Delta(A_1) + \Delta(A_2)) \longrightarrow \Delta(X_1 \cup X_2\,,\, A_1 \cup A_2)$$

porojena z inkluzijo, na homologiji in kohomologiji porodi izomorfizem. Kolobar koeficientov je povsod enak in je zato v pisavi opuščen.

Naj bosta para (X_1, A_1) in (X_2, A_2) izrezljiva dvojica. Naj bo $k = 1, 2$ in

$$\begin{array}{ll} i_k\colon & (X_1 \cap X_2\,,\, A_1 \cap A_2) \hookrightarrow (X_k, A_k) \\ j_k\colon & (X_k, A_k) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2\,,\, A_1 \cup A_2) \end{array}$$

ustrezne inkluzije. Po prejšnji posledici iz ustreznih kratkih eksaktnih zaporedij dobimo naslednji funktorialni *Mayer-Vietorisovi zaporedji parov*:

$$\begin{array}{l} \ldots \xrightarrow{\partial_*} H_q(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \xrightarrow{i_*} H_q(X_1, A_1) \oplus H_q(X_2, A_2) \xrightarrow{j_*} \\ \xrightarrow{j_*} H_q(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \xrightarrow{i_*} \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \ldots \xrightarrow{\delta^*} H^q(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \xrightarrow{j^*} H^q(X_1, A_1) \oplus H^q(X_2, A_2) \xrightarrow{i^*} \\ \xrightarrow{i^*} H^q(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \xrightarrow{\delta^*} H^{q+1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \xrightarrow{j^*} \ldots \end{array}$$

kjer je

$$\begin{array}{rclcrcl} i_*\xi & = & (i_{1*}\xi, -i_{2*}\xi) & \qquad & j_*(\xi_1, \xi_2) & = & j_{1*}\xi_1 + j_{2*}\xi_2 \\ j^*\alpha & = & (j_1^*\alpha, j_2^*\alpha) & & i^*(\alpha_1, \alpha_2) & = & i_1^*\alpha_1 - i_2^*\alpha_2 \end{array}$$

Če med $H^q(X_1, A_1) \oplus H^q(X_2, A_2)$ in $H_q(X_1, A_1) \oplus H_q(X_2, A_2)$ definiramo parjenje po predpisu

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2)\,,\, (\xi_1, \xi_2) \rangle := \langle \alpha_1\,,\, \xi_1 \rangle + \langle \alpha_1\,,\, \xi_2 \rangle + \langle \alpha_2\,,\, \xi_1 \rangle + \langle \alpha_2\,,\, \xi_2 \rangle$$

potem veljajo naslednje lahko izpeljive relacije:

$$\begin{array}{rcl} \langle i^*\alpha\,,\, \xi \rangle & = & \langle \alpha\,,\, i_*\xi \rangle \\ \langle j^*\alpha\,,\, \xi \rangle & = & \langle \alpha\,,\, j_*\xi \rangle \\ \langle \delta^*\alpha\,,\, \xi \rangle & = & \langle \alpha\,,\, \partial_*\xi \rangle \end{array}$$

Opomba Mayer-Vietorisovo zaporedje parov je posplošitev običajnega Mayer-Vietorisovega zaporedja in dolgega eksaktnega (ko)homološkega zaporedja para. Če namreč postavimo $X_1 = X$, $A_1 = \emptyset$, $X_2 = A$ in $A_2 = A$, dobimo ravno ustrezno zaporedje para (X, A).

1.3 Künnethova formula

V tem razdelku bomo obravnavali homologijo in kohomologijo produktnih prostorov. Izkaže se, da sta le-ti v tesni zvezi s tenzorskim produktom. V ta namen najprej definirajmo ustrezne tenzorske produkte.

Definicija Naj bosta C' in C'' stopničasta modula nad istim kolobarjem. Njun *tenzorski produkt* je stopničast modul C, definiran s predpisom $C_n := \bigoplus_{i+j=n} C'_i \otimes C''_j$.

Če sta C' in C'' verižna kompleksa, tudi na C definiramo robni operator po predpisu

$$\partial(x \otimes y) := \partial x \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes \partial y$$

Če sta kompleksa koverižna, definiramo korobni operator na isti način kot zgoraj, samo da vse robove zamenjamo s korobovi.

Opomba 1 Če sta C' in C'' verižna kompleksa, je prav lahko videti, da je tenzorski produkt ciklov spet cikel. Če je eden od ciklov rob, je produkt tudi rob. Podobna trditev velja tudi za koverižne komplekse.

Naj bosta C' in C'' verižna kompleksa. Definirajmo preslikavo $\mu\colon H_p(C') \otimes H_q(C'') \to H_{p+q}(C' \otimes C'')$ po predpisu

$$[x] \otimes [y] \mapsto [x \otimes y] \tag{2}$$

Opomba 1 pove, da je gornja preslikava dobro definirana. Še več: *gornja preslikava je naravna transformacija.*

Izrek 3 (Künnethova formula za homologijo) *Naj bosta C' in C'' prosta verižna kompleksa. Če je homologija enega od njiju brez torzije nad R, gornja preslikava porodi funktorialni izomorfizem $H_*(C') \otimes H_*(C'') \to H_*(C' \otimes C'')$.*

Definirajmo sedaj še preslikavo $\mu\colon H^p(C') \otimes H^q(C'') \to H^{p+q}(C' \otimes C'')$ po predpisu

$$[\varphi] \otimes [\psi] \mapsto [x \otimes y \mapsto \varphi(x)\psi(y)] \tag{4}$$

Spet se ni težko prepričati, da je preslikava dobro definirana in naravna transformacija. Velja tudi podoben izrek.

Izrek 5 (Künnethova formula za kohomologijo) *Naj bosta C' in C'' prosta verižna kompleksa. Če sta homologiji obeh kompleksov končnogenerirani, kohomologija enega ed kompleksov pa je brez torzije nad R, gornja preslikava porodi funktorialni izomorfizem $H^*(C') \otimes H^*(C'') \to H^*(C' \otimes C'')$.*

Definicija *Produkt parov topoloških prostorov* (X, A) in (Y, B) je par $(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$.

Izrek 6 (Eilenberg-Zilberjev izrek) *Naj bosta $X \times B$ in $A \times Y$ izrezljiva dvojica v $X \times Y$. Potem obstaja naravna verižna ekvivalenca*

$$\Delta(X, A; \mathbb{Z}) \otimes \Delta(Y, B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \Delta((X, A) \times (Y, B); \mathbb{Z})$$

Izrek velja tudi za splošne koeficiente. Obstaja namreč naslednja veriga funktorialnih izomorfizmov:

$$\begin{aligned} & \Delta(X, A; R) \otimes \Delta(Y, B; R) \xrightarrow{\cong} R \otimes \Delta(X, A; \mathbb{Z}) \otimes R \otimes \Delta(Y, B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \\ \xrightarrow{\cong}\ & R \otimes \Delta(X, A; \mathbb{Z}) \otimes \Delta(Y, B; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} R \otimes \Delta((X, A; \mathbb{Z}) \times (Y, B; \mathbb{Z})) \xrightarrow{\cong} \\ \xrightarrow{\cong}\ & \Delta((X, A) \times (Y, B); R) \end{aligned}$$

Verižna ekvivalenca iz Eilenberg-Zilberjevega izreka seveda porodi ustrezna izomorfizma na homologiji in kohomologiji. Če ju komponiramo s preslikavama, ki ju določata formuli 2 in 4, dobimo naslednji preslikavi stopnje 0:

$$\begin{aligned} \mu\colon\ & H_*(X, A; R) \otimes H_*(Y, B; R) \ \rightarrow\ H_*((X, A) \times (Y, B); R) \\ \nu\colon\ & H^*(X, A; R) \otimes H^*(Y, B; R) \ \rightarrow\ H^*((X, A) \times (Y, B); R) \end{aligned}$$

Vzemimo sedaj elementa ξ in η iz $H_*(Y, B; R)$. Element $\mu(\xi \otimes \eta)$ označimo s $\xi \times \eta$ in ga imenujemo *zunanji homološki produkt*. Podobno definiramo tudi zunanji kohomološki produkt iz ga tudi označimo z znakom $\times$.

Obe Künnethovi formuli zdaj lahko prepišemo še za topološke prostore.

Izrek 7 (Künnethova formula za homologijo) *Naj bosta (X, A) in (Y, B) topološka para. Naj bo $X \times B$ in $A \times Y$ izrezljiva dvojica v $X \times Y$. Bodisi $H_*(X, A; R)$ bodisi $H_*(Y, B; R)$ naj bo brez torzije nad R. Potem je preslikava*

$$H_*(X, A; R) \otimes H_*(Y, B; R) \longrightarrow H_*((X, A) \times (Y, B); R)$$

ki $\xi \otimes \eta$ preslika v $\xi \times \eta$, funktorialni izomorfizem.

Izrek 8 (Künnethova formula za kohomologijo) *Naj bosta (X, A) in (Y, B) topološka para. Naj bo $X \times B$ in $A \times Y$ izrezljiva dvojica v $X \times Y$. Homologiji $H_*(X, A; R)$ in $H_*(Y, B; R)$ naj bosta končnogenerirani. Bodisi $H^*(X, A; R)$ bodisi $H^*(Y, B; R)$ naj bo brez torzije nad R. Potem je preslikava*

$$H^*(X, A; R) \otimes H^*(Y, B; R) \longrightarrow H^*((X, A) \times (Y, B); R)$$

ki $\alpha \otimes \beta$ preslika v $\alpha \times \beta$, funktorialni izomorfizem.

Pri računanju z zunanjimi homološkimi in kohomološkimi produkti veljajo naslednja pravila.

Trditev 9 *Naj bosta $f\colon (X, A) \to (X', A')$ in $g\colon (Y, B) \to (Y', B')$ zvezni preslikavi. Naj bo $\xi \in H_*(X, A; R)$ in $\eta \in H_*(Y, B; R)$. Potem je*

$$(f \times g)_*(\xi \times \eta) = f_*(\xi) \times g_*(\eta)$$

Trditev 10 *Naj bosta* $f\colon (X,A) \to (X',A')$ *in* $g\colon (Y,B) \to (Y',B')$ *zvezni preslikavi. Naj bo* $\xi \in H^*(X',A';R)$ *in* $\eta \in H^*(Y',B';R)$*. Potem je*

$$(f \times g)^*(\xi \times \eta) = f^*(\xi) \times g^*(\eta)$$

Trditev 11 *Naj bo* V *topološki prostor,* (X,A) *pa topološki par. Naj bo* $p \in V$*. Z isto črko označimo tudi homološki razred te točke v* $H_0(V;R)$*. Naj bo* $1 \in H^0(V;R)$ *kohomološki predstavnik koverige, ki sešteva točke. Nadalje naj preslikava* $l_p\colon (X,A) \to V \times (X,A)$ *deluje po predpisu* $x \mapsto (p,x)$*, preslikava* $r_p\colon (X,A) \to (X,A) \times V$ *pa po predpisu* $x \mapsto (x,p)$*. Potem za poljubna elementa* $\xi \in H_*(X,A;R)$ *in* $\alpha \in H^*(X,A;R)$ *veljajo naslednje enakosti*

$$\begin{aligned} p \times \xi &= l_{p_*}(\xi) \\ \xi \times p &= r_{p_*}(\xi) \\ l_p^*(1 \times \alpha) &= \alpha \\ r_p^*(\alpha \times 1) &= \alpha \end{aligned}$$

Trditev 12 *Za poljubne elemente* $\alpha \in H^*(X,A;R)$*,* $\beta \in H^*(Y,B;R)$*,* $\xi \in H_*(X,A;R)$ *in* $\eta \in H_*(Y,B;R)$ *velja*

$$\langle \alpha \times \beta \, , \, \xi \times \eta \rangle = \langle \alpha \, , \, \xi \rangle \; \langle \beta \, , \, \eta \rangle$$

Trditev 13 *Naj bodo* x*,* y *in* z *vsi elementi homoloških ali vsi elementi kohomoloških modulov topoloških parov. Potem velja* `asociativnost`*:*

$$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$

Trditev 14 *Naj bo* $T\colon X \times Y \to Y \times X$ *preslikava, ki zamenja faktorja. Vzemimo poljubna elementa* $\xi \in H_p(X,A;R)$ *in* $\eta \in H_q(Y,B;R)$ *in še elementa* $\alpha \in H^p(X,A;R)$ *in* $\beta \in H^q(Y,B;R)$*. Potem velja* `komutativnost`*:*

$$\begin{aligned} y \times x &= (-1)^{pq} T_*(x \times y) \\ \alpha \times \beta &= (-1)^{pq} T^*(\beta \times \alpha) \end{aligned}$$

Trditev 15 *Naj bosta para* (X_1,A_1) *in* (X_2,A_2) *izrezljiva dvojica, prav tako pa tudi njuna produkta z* (Y,B)*. Dvojici in njenima produktoma z* (Y,B) *(z leve in desne) priredimo ustrezna homološka Mayer-Vietorisova zaporedja, vse njihove vezne homomorfizme pa označimo z* ∂_**. Potem za poljubna elementa* $\xi \in H_p(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$ *in* $\eta \in H_q(Y,B)$ *veljata formuli*

$$\begin{aligned} \partial_*(\xi \times \eta) &= \partial_* \xi \times \eta \\ \partial_*(\eta \times \xi) &= (-1)^q \eta \times \partial_* \xi \end{aligned}$$

Trditev 16 *Naj bosta para* (X_1,A_1) *in* (X_2,A_2) *izrezljiva dvojica, prav tako pa tudi njuna produkta z* (Y,B)*. Dvojici in njenima produktoma z* (Y,B) *(z leve in desne) priredimo ustrezna kohomološka Mayer-Vietorisova zaporedja, vse njihove vezne homomorfizme* *pa označimo z* δ^*. *Potem za poljubna elementa* $\alpha \in H^p(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$ *in* $\beta \in H^q(Y, B)$ *veljata formuli*

$$\begin{aligned} \delta^*(\alpha \times \beta) &= \delta^*\alpha \times \beta \\ \delta^*(\beta \times \alpha) &= (-1)^q \beta \times \delta^*\alpha \end{aligned}$$

Dokazi teh trditev niso zahtevni in so zato prepuščeni bralcu. Izjema pa sta trditvi 13 in 14, ki sta dokazani v [2]. Zelo dober dokaz kohomološkega dela trditve 14 (čeprav za manj splošen primer) je podan v [4] (lema 5.8).

1.4 Cup produkt

V evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$ označimo $e_0 := 0$, $e_1 := (1, 0, \dots 0), \dots e_n := (0, 0, \dots 1)$.

Naj bodo a_0, $a_1 \dots a_k$ točke v evklidskem prostoru. Z $[a_0 a_1 \dots a_k]$ označimo afino preslikavo, ki e_0 slika v a_0, e_1 v a_1 in tako naprej do e_k.

Naj bo σ singularni n-simpleks. Potem je za vsako injektivno preslikavo $\pi \colon \{0 \dots k\} \to \{0 \dots n\}$ kompozitum $\sigma \circ [e_{\pi(0)} \dots e_{\pi(k)}]$ *lice* simpleksa σ.

V tem in naslednjem razdelku bodo vsi verižni in koverižni kompleksi ter homološki in kohomološki moduli imeli koeficiente iz istega kolobarja R, ki ga bomo v pisavi opuščali.

Definicija Naj bo X topološki prostor, $\varphi \in \Delta^p(X)$ in $\psi \in \Delta^q(X)$ pa koverigi. Definirajmo njun *cup produkt* $\varphi \smile \psi \in \Delta^{p+q}(X)$ po predpisu

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) := \varphi(\sigma \circ [e_0 \dots e_p])\, \psi(\sigma \circ [e_p \dots e_{p+q}]) \tag{1}$$

za vsak singularni $(p+q)$-simpleks σ. Definicijo lahko napišemo splošneje: za $\varphi \in \Delta^*(X)$ in $\psi \in \Delta^*(X)$ definirajmo

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) := \sum_{p=0}^{n} \varphi(\sigma \circ [e_0 \dots e_p])\, \psi(\sigma \circ [e_p \dots e_n])$$

za vsak singularni n-simpleks σ.

Trditev 2 *Cup produkt je naravna transformacija.* Natančneje, naj bosta X in Y topološka prostora in $f \colon X \to Y$ preslikava, ki na koverižnem nivoju porodi preslikavo f^*. Potem velja

$$f^*(\varphi \smile \psi) = f^*(\varphi) \smile f^*(\psi)$$

Dokaz Enakost je dovolj dokazati za primer, da je φ stopnje p, ψ pa stopnje q. Za poljuben singularni simpleks σ dimenzije $p + q$ označimo $\underline{\sigma} := \sigma \circ [e_0 \dots e_p]$ in $\overline{\sigma} := \sigma \circ [e_p \dots e_{p+q}]$. Potem velja:

$$\begin{aligned} (f^*(\varphi \smile \psi))(\sigma) &= (\varphi \smile \psi)(f \circ \sigma) = \varphi(\underline{f \circ \sigma})\, \psi(\overline{f \circ \sigma}) \\ (f^*\varphi \smile f^*\psi)(\sigma) &= (f^*\varphi)(\underline{\sigma})\, (f^*\psi)(\overline{\sigma}) = \varphi(f \circ \underline{\sigma})\, \psi(f \circ \overline{\sigma}) \end{aligned}$$

Ni težko videti, da sta si izraza enaka, od koder sledi naša trditev. ■

Preslikava, ki smo jo definirali, je homomorfizem modulov, definirana pa je na koverižnih kompleksih. Nastane vprašanje, ali je preslikava tudi homomorfizem koverižnih kompleksov. Odgovor je pritrdilen.

Trditev 3 *Preslikava je koverižna, t.j. če je φ stopnje p, ψ pa stopnje q, potem je*

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta\varphi \smile \psi + (-1)^p \varphi \smile \delta\psi$$

DOKAZ Trditev je dovolj dokazati na singularnih $(p+q+1)$-simpleksih. Velja:

$$\begin{aligned}
&(\delta(\varphi \smile \psi))\,(\sigma) = \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i\,(\varphi \smile \psi)\,(\sigma\circ[e_0 \ldots \widehat{e_i} \ldots e_{p+q+1}]) = \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i\,\varphi(\sigma\circ[e_0 \ldots \widehat{e_i} \ldots e_{p+1}])\,\psi(\sigma\circ[e_{p+1} \ldots e_{p+q+1}]) + \\
&\quad + \sum_{i=p+1}^{p+q+1} (-1)^i\,\varphi(\sigma\circ[e_0 \ldots e_p])\,\psi(\sigma\circ[e_p \ldots \widehat{e_i} \ldots e_{p+q+1}])
\end{aligned}$$

Po drugi strani pa je:

$$\begin{aligned}
&(\delta\varphi \smile \psi + (-1)^p\,\varphi \smile \delta\psi)\,(\sigma) = \\
&= (\delta\varphi)(\sigma\circ[e_0 \ldots e_{p+1}])\,\psi(\sigma\circ[e_{p+1} \ldots e_{p+q+1}]) + \\
&\quad + (-1)^p\,\varphi(\sigma\circ[e_0 \ldots e_p])\,(\delta\psi)(\sigma\circ[e_p \ldots e_{p+q+1}]) = \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i\,\varphi(\sigma\circ[e_0 \ldots \widehat{e_i} \ldots e_{p+1}]\,\psi(\sigma\circ[e_{p+1} \ldots e_{q+1}]) + \\
&\quad + (-1)^{p+1}\,\varphi(\sigma\circ[e_0 \ldots e_p])\,\psi(\sigma\circ[e_{p+1} \ldots e_q]) + \\
&\quad + (-1)^p\,\varphi(\sigma\circ[e_0 \ldots e_p])\,\psi(\sigma\circ[e_{p+1} \ldots e_q]) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{q} (-1)^p\,(-1)^i\,\varphi(\sigma\circ[e_0 \ldots e_p])\,\psi(\sigma\circ[e_p \ldots \widehat{e_{p+i}} \ldots e_{p+q+1}])
\end{aligned}$$

Opazimo, da se srednja člena pokrajšata. Če rezultat primerjamo s prejšnjim, hitro vidimo, da sta res enaka. ■

Trditev 4 *Cup produkt je na koverižnem nivoju asociativen.*

DOKAZ Zaradi linearnosti je asociativnost dovolj dokazati samo za homogene elemente. Vzemimo torej koverige $\varphi \in \Delta^p(X)$, $\psi \in \Delta^q(X)$ in $\zeta \in \Delta^r(X)$. Asociativnost je dovolj preveriti na singularnih simpleksih dimenzije $p+q+r$.

$$((\varphi \smile \psi) \smile \zeta)\,(\sigma) = (\varphi \smile \psi)\,(\sigma\circ[e_0 \ldots e_{p+q}])\,\zeta(\sigma\circ[e_{p+q} \ldots e_{p+q+r}]) =$$

$$\varphi(\sigma\circ[e_0\dots e_p])\,\psi(\sigma\circ[e_p\dots e_{p+q}])\,\zeta(\sigma\circ[e_{p+q}\dots e_{p+q+r}])$$

$$\begin{aligned}(\varphi\smile(\psi\smile\zeta))\,(\sigma) = \varphi(\sigma\circ[e_0\dots e_p])\,(\psi\smile\zeta)\,(\sigma\circ[e_p\dots e_{p+q+r}]) =\\ \varphi(\sigma\circ[e_0\dots e_p])\,\psi(\sigma\circ[e_p\dots e_{p+q}])\,\zeta(\sigma\circ[e_{p+q}\dots e_{p+q+r}])\end{aligned}$$

Izraza sta si enaka, zato je trditev dokazana. ■

Ker je cup produkt koverižna preslikava, ga lahko spustimo na kohomološki nivo. Najprej si oglejmo, kako se cup produkt obnaša na parih. Naj bosta $\varphi \in \Delta^*(X, A_1)$ in $\psi \in \Delta^*(X, A_2)$ kocikla. Potem je $\varphi \smile \psi$ očitno kocikel, ki je na $\Delta(A_1) + \Delta(A_2)$ enak 0. Po posledici 1.2.4 pa lahko to koverigo s korobom koverige, ki je tudi enaka 0 na $\Delta(A_1)+\Delta(A_2)$, popravimo do koverige iz $\Delta^*(X, A_1 \cup A_2)$. Še več: vsi taki popravki ležijo v istem kohomološkem razredu v $H^*(X, A_1 \cup A_2)$.

Cup produkt na kohomološkem nivoju torej definiramo kot naslednji kompozitum:

$$\begin{aligned}H^*(X, A_1)\otimes H^*(X, A_2) \xrightarrow{\mu} H^*(\Delta^*(X, A_1)\otimes\Delta^*(X, A_2) \xrightarrow{\smile}\\ \xrightarrow{\smile} H^*\big(\big(\Delta(X)/(\Delta(A_1)+\Delta(A_2))\big)^*\big) \xrightarrow{\cong} H^*(X, A_1\cup A_2)\end{aligned}$$

in označimo z istim znakom. Preslikava μ je tu podana s formulo 1.3.4. Z drugimi besedami, cup produkt na koverižnem nivoju je definiran s formulo

$$[\varphi]\smile[\psi] = [\varphi\smile\psi + \delta\zeta]$$

kjer je $\delta\zeta$ prej opisani popravek.

Trditev 5 *Cup produkt je naravna transformacija tudi na kohomološkem nivoju.* Natančneje, naj bo X topološki prostor s podprostoroma A_1 in A_2, Y pa topološki prostor s podprostoroma B_1 in B_2. Obe dvojici podprostorov naj bosta izrezljivi. Naj bo $f\colon X \to Y$ preslikava in naj bo $f(A_1) \subset B_1$ in $f(A_2) \subset B_2$. Preslikava f porodi preslikave $f_1^*\colon H^*(Y, B_1) \to H^*(X, A_1)$, $f_2^*\colon H^*(Y, B_2) \to H^*(X, A_2)$ in $\bar{f}^*\colon H^*(Y, B_1\cup B_2) \to H^*(X, A_1 \cup A_2)$. Potem za poljubna kohomološka razreda $\alpha \in H^*(Y, B_1)$ in $\beta \in H^*(Y, B_2)$ velja

$$\bar{f}^*(\alpha\smile\beta) = f_1^*(\alpha)\smile f_2^*(\beta)$$

Trditev 6 *Cup produkt je asociativen tudi na kohomološkem nivoju.* Natančneje, za poljubne elemente $\alpha \in H^*(X, A_1)$, $\beta \in H^*(X, A_2)$ in $\gamma \in H^*(X, A_3)$ v $H^*(X, A_1\cup A_2\cup A_3)$ velja formula

$$(\alpha\smile\beta)\smile\gamma = \alpha\smile(\beta\smile\gamma)$$

Cup produkt je tesno povezan z zunanjim kohomološkim produktom. Definirajmo preslikavo $d\colon (X, A_1 \cup A_2) \to (X, A_1) \times (X, A_2)$ po predpisu $x \mapsto (x, x)$. Ta preslikava na kohomologiji porodi ustrezno preslikavo d^*. Velja naslednji izrek.

Izrek 7 $\alpha\smile\beta = d^*(\alpha\times\beta)$

Iz tega izreka in trditve 1.3.14 takoj sledi naslednji zelo pomemben izrek.

Izrek 8 *Cup produkt je* `komutativen`, *t.j. za poljubna kohomološka razreda $\alpha \in H^p(X, A_1)$ in $\beta \in H^q(X, A_2)$ velja*

$$\beta\smile\alpha = (-1)^{pq}\alpha\smile\beta$$

Opomba Tako bi mogli dokazati tudi asociativnost cup produkta, vendar pa je le-ta zelo nazorna že na koverižnem nivoju. Za komutativnost ne velja nič podobnega: cup produkt na koverižnem nivoju sploh ni nujno komutativen.

Izrek 9 *Naj bosta* (X, A) *in* (Y, B) *topološka para,* pr_1 *in* pr_2 *pa naravni projekciji prostora* $X \times Y$ *na njegova faktorja. Potem za poljubna elementa* $\alpha \in H^*(X, A)$ *in* $\beta \in H^*(Y, B)$ *velja*

$$\alpha \times \beta = \mathrm{pr}_1^*(\alpha) \smile \mathrm{pr}_2^*(\beta)$$

Označimo z $1 \in H^0(X)$ kohomološki razred koverige, ki sešteva koeficiente v $\Delta_0(X)$. Potem za poljuben kohomološki razred α velja enakost

$$\alpha \smile 1 = 1 \smile \alpha = \alpha \tag{10}$$

Izrek 11 *Naj bosta* A_1 *in* A_2 *podprostora v* X*,* B_1 *in* B_2 *pa podprostora v* Y*. Če privzamemo vse potrebne izrezljivosti, za poljubne elemente* $\alpha \in H^p(X, A_1)$*,* $\beta \in H^q(Y, B_1)$*,* $\gamma \in H^r(X, A_2)$ *in* $\vartheta \in H^s(Y, B_2)$ *velja*

$$(\alpha \times \beta) \smile (\gamma \times \vartheta) = (-1)^{qr}(\alpha \smile \gamma) \times (\beta \smile \vartheta)$$

Dokaz Iz izreka 7 sledi naslednja veriga enakosti:

$$\begin{aligned} & (\alpha \times \beta) \smile (\gamma \times \vartheta) = \mathrm{pr}_1^*(\alpha) \smile \mathrm{pr}_2^*(\beta) \smile \mathrm{pr}_1^*(\gamma) \smile \mathrm{pr}_2^*(\vartheta) = \\ = \; & (-1)^{qr}\,\mathrm{pr}_1^*(\alpha) \smile \mathrm{pr}_1^*(\gamma) \smile \mathrm{pr}_2^*(\beta) \smile \mathrm{pr}_2^*(\vartheta) = (-1)^{qr}\,\mathrm{pr}_1^*(\alpha \smile \gamma) \smile \mathrm{pr}_2^*(\beta \smile \vartheta) = \\ = \; & (-1)^{qr}(\alpha \smile \gamma) \times (\beta \smile \vartheta) \end{aligned}$$

■

Izrek 12 *Naj bosta* (X_1, A_1) *in* (X_2, A_2) *topološka para in* $A \subset X_1 \cup X_2$*. Označimo z* i *inkluzijo* $(X_1 \cap X_2, A \cap X_1 \cap X_2) \subset (X_1 \cup X_2, A)$*. Naj bo* $\alpha \in H^p(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$ *in* $\beta \in H^q(X_1 \cup X_2, A)$*. Z* δ^* *označimo vezna homomorfizma dvojic parov* (X_1, A_1) *in* (X_2, A_2) *ter parov* $(X_1, A_1 \cup (A \cap X_1))$ *in* $(X_2, A_2 \cup (A \cap X_2))$*. Privzemimo, da sta dvojici izrezljivi. Potem veljata v* $H^{p+q+1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2 \cup A)$ *enakosti*

$$\begin{aligned} \delta^*(\alpha \smile i^*\beta) &= \delta^*\alpha \smile \beta \\ \delta^*(i^*\beta \smile \alpha) &= (-1)^q \beta \smile \delta^*\alpha \end{aligned}$$

Izrek se dokaže podobno kot sorodni izrek za zunanji kohomološki produkt. Podrobnosti se prepuščajo bralcu.

1.5 Cap produkt

Cup produkt je definiran na kohomoloških razredih. Obstaja pa še množenje med kohomološkimi in homološkimi razredi, ki da za rezultat homološki razred.

Definicija Naj bo X topološki prostor, φ koveriga stopnje p in σ singularni simpleks dimenzije q. Njun *cap produkt* je singularni $(q-p)$-simpleks

$$\varphi \frown \sigma := \varphi(\sigma \circ [e_{q-p} \dots e_p])\,(\sigma \circ [e_0 \dots e_{q-p}]) \tag{1}$$

Podobno kot pri cup produktu lahko tudi tu definicijo razširimo na poljubne verige in koverige. Dobimo linearno preslikavo

$$\Delta^*(X) \otimes \Delta_*(X) \longrightarrow \Delta_*(X)$$

Cap produkt je tesno povezan z evaluacijo koverig na verigah.

Trditev 2 *Naj bo ε koveriga, ki sešteva koeficiente v $\Delta_0(X)$. Potem velja zveza*

$$\varphi(x) = \varepsilon(\varphi \frown x)$$

Trditev 3 *Naj bo ε kot prej. Potem za vsako verigo x velja*

$$\varepsilon \frown x = x$$

Trditvi takoj sledita iz definicije cap produkta. Slednji pa je tesno povezan tudi s cup produktom.

Trditev 4 *Za poljubni koverigi φ in ψ in za poljubno verigo x veljata zvezi*

$$\begin{aligned} (\varphi \smile \psi) \frown x &= \varphi \frown (\psi \frown x) \\ (\varphi \smile \psi)\,(x) &= \varphi(\psi \frown x) \end{aligned}$$

Dokaz Trditev je dovolj dokazati za primer, da sta φ in ψ stopnje q in r, x pa je singularni simpleks dimenzije $p+q+r$. Velja

$$\begin{aligned} (\varphi \smile \psi) \frown \sigma &= (\varphi \smile \psi)\,(\sigma \circ [e_p \dots e_{p+q+r}])\,(\sigma \circ [e_0 \dots e_p] = \\ &= \varphi(\sigma \circ [e_p \dots e_{p+q}])\,\psi(\sigma \circ [e_{p+q} \dots e_{p+q+r}])\,(\sigma \circ [e_0 \dots e_p]) = \\ &= \varphi \frown \big(\psi(\sigma \circ [e_{p+q} \dots e_{p+q+r}])\,(\sigma \circ [e_0 \dots e_{p+q}])\big) = \\ &= \varphi \frown (\psi \frown \sigma) \end{aligned}$$

od koder takoj sledi prva enačba. Druga enačba pa sledi iz prve enačbe in prejšnje trditve. ∎

Z drugo enačbo bi tudi lahko definirali cap produkt. Vsaka veriga je namreč natančno določena z delovanjem koverig na njej. Enačba pa nam da tudi navdih, kako razširiti definicijo cap produkta na pare. Naj bosta A_1 in A_2 podprostora prostora X. Potem je cap produkt dobro definiran tudi kot preslikava

$$\Delta^*(X, A_1) \otimes \Delta(X)/(\Delta(A_1) + \Delta(A_2)) \longrightarrow \Delta(X, A_2)$$

Če je namreč koveriga φ na $\Delta(A_1)$ enaka 0, veriga ξ pa pripada $\Delta(A_1) + \Delta(A_2)$, je njun zmnožek $\varphi \frown \xi$ gotovo v $\Delta(A_2)$.

Jasno je tudi, da prejšnja zveza med cup in cap produktom natančno določa slednjega tudi pri parih.

Nastane vprašanje, ali je mogoče tudi cap produkt spustiti na nivo homologije in kohomologije. V ta namen si najprej oglejmo delovanje robnega operatorja na cap produktu. Naj bo spet φ stopnje p, ψ stopnje q in x stopnje r. Po trditvi 4 je

$$\begin{aligned}\varphi(\partial(\psi \frown x)) &= (\delta\varphi)\,(\psi \frown x) = (\delta\varphi \smile \psi)\,(x) = \\ &= \big(\delta(\varphi \smile \psi) - (-1)^q(\varphi \smile \delta\psi)\big)\,(x) = \\ &= \varphi(\psi \frown \partial x) - (-1)^q\varphi(\delta\psi \frown x)\end{aligned}$$

Od tod pa sledi formula

$$\partial(\psi \frown x) = \psi \frown \partial x - (-1)^q \delta\psi \frown x$$

Cap produkt kocikla in cikla je torej cikel, če pa je poleg tega še bodisi prvi faktor korob bodisi drugi faktor rob, potem je produkt rob. Se pravi, da lahko tudi cap produkt spustimo na nivo homologije in kohomologije. Naj bosta podprostora A_1 in A_2 izrezljiva dvojica v X. Potem cap produkt definiramo kot kompozitum

$$\begin{aligned} & H^*(X, A_1) \otimes H_*(X, A_1 \cup A_2) \xrightarrow{\cong} \\ \xrightarrow{\cong}\; & H^*(X, A_1) \otimes H_*\big(\Delta(X)/(\Delta(A_1) + \Delta(A_2))\big) \xrightarrow{\frown} H_*(X, A_2)\end{aligned}$$

Izomorfizem je seveda spet tisti iz posledice 1.2.4. Pomeni pa, da je mogoče vsako verigo iz $\Delta(X)$, ki ima rob v $\Delta(A_1 \cup A_2)$, z elementom iz $\Delta(A_1 \cup A_2)$ popraviti do verige, ki ima rob v $\Delta(A_1) + \Delta(A_2)$, vsi taki popravki pa ležijo v istem homološkem razredu v $H^*\big(\Delta(X)/(\Delta(A_1) + \Delta(A_2))\big)$. Cap produkt lahko torej opišemo s formulo

$$[\varphi] \frown [\xi] := [\varphi \frown (\xi + \zeta)]$$

kjer je φ kocikel iz $\Delta^*(X, A_1)$, ξ veriga, ki ima rob v $\Delta(A_1 \cup A_2)$, ζ pa je prej opisani popravek.

Zveze, ki smo jih dokazali na nivoju verig in koverig, veljajo tudi na nivoju homologije in kohomologije.

Trditev 5 *Za poljubna kohomološka razreda $\alpha \in H^*(X, A_1)$ in $\beta \in H^*(X, A_2)$ in za poljuben homološki razred $\xi \in H_*(X, A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ v $H_*(A_3)$ veljata zvezi*

$$\begin{aligned}(\alpha \smile \beta) \frown \xi &= \alpha \frown (\beta \frown \xi) \\ \langle \alpha \smile \beta\,,\, \xi\rangle &= \langle \alpha\,,\, \beta \frown \xi\rangle\end{aligned}$$

Trditev 6 *Naj bo* 1 *kot v formuli 1.4.10. Potem za vsak homološki razred ξ velja*

$$1 \frown \xi = \xi$$

Trditev 7 *Naj bo* 1 *kot prej. Potem za poljubna (ko)homološka razreda α in ξ nad istim parom velja*

$$\langle \alpha\,,\, \xi\rangle = \langle 1\,,\, \alpha \frown \xi\rangle$$

Posledica 8 *Naj bo (X, A) topološki par in C kaka komponenta prostora X za povezanost s potmi. Naj bo $\varepsilon \in H_0(X)$ homološki predstavnik točke v C. Obravnavajmo cap produkt kot preslikavo*

$$H^p(X, A; R) \otimes H_p(X, A; R) \longrightarrow H_0(X)$$

Potem za poljubna elementa $\alpha \in H^p(X, A; R)$ in $\xi \in H_p(X, A; R)$, ki sta hkrati različna od nič kvečjemu na C, velja enakost

$$\alpha \frown \xi = \langle \alpha \, , \, \xi \rangle \; \varepsilon$$

Trditev 9 *Cap produkt je naravna transformacija.* Natančneje, naj bo X topološki prostor s podprostoroma A_1 in A_2, Y pa topološki prostor s podprostoroma B_1 in B_2. Obe dvojici podprostorov naj bosta izrezljivi. Naj bo $f\colon X \to Y$ preslikava in naj bo $f(A_1) \subset B_1$ in $f(A_2) \subset B_2$. Preslikava f porodi preslikave $f_1^*\colon H^*(Y, B_1) \to H^*(X, A_1)$, $f_{2*}\colon H^*(X, A_2) \to H^*(Y, B_2)$ in $\bar{f}_*\colon H^*(X, A_1 \cup A_2) \to H^*(Y, B_1 \cup B_2)$. Potem za poljubna elementa $\alpha \in H^*(Y, B_1)$ in $\xi \in H^*(X, A_1 \cup A_2)$ velja

$$f_{2*}(f_1^*(\alpha) \frown \xi) = \alpha \frown \bar{f}_*(\xi)$$

Trditev se dokaže podobno kot sorodna trditev za cup produkt, lahko pa jo iz nje tudi izpeljemo, in sicer prek trditve 5.

Izrek 10 *Naj bosta A_1 in A_2 podprostora v X, B_1 in B_2 pa podprostora v Y. Potem, če privzamemo vse potrebne izrezljivosti, za poljubne elemente $\alpha \in H^p(X, A_1)$, $\beta \in H^q(Y, B_1)$, $\xi \in H_m(X, A_1 \cup A_2)$ in $\eta \in H^n(Y, B_1 \cup B_2)$ velja*

$$(\alpha \times \beta) \frown (\xi \times \eta) = (-1)^{p(n-q)} (\alpha \frown \xi) \times (\beta \frown \eta)$$

Dokaz tega izreka se ne da tako lepo izpeljati kot dokaz sorodnega izreka za cup produkt. Zahteva globlje poznavanje cap produkta. Pač pa se v primeru, ko je preslikava iz Künnethove formule za kohomologijo izomorfizem, da izpeljati kar iz izreka za cup produkt. Izpeljava je naloga za bralca.

Izrek 11 *Naj bosta (X_1, A_1) in (X_2, A_2) topološka para in $A \subset X_1 \cup X_2$. Označimo z i inkluzijo $(X_1 \cap X_2, A \cap X_1 \cap X_2) \subset (X_1 \cup X_2, A)$. Naj bo $\alpha \in H^p(X_1 \cup X_2, A)$ in $\xi \in H_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2 \cup A)$. Z ∂_* označimo vezna homomorfizma dvojic parov (X_1, A_1) in (X_2, A_2) ter parov $(X_1, A_1 \cup (A \cap X_1))$ in $(X_2, A_2 \cup (A \cap X_2))$. Privzemimo, da sta obe dvojici izrezljivi. Potem v $H_{n-p-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$ velja enakost*

$$\partial_*(\alpha \frown \xi) = i^*\alpha \frown \partial_*\xi$$

Dokaz Spomnimo se, da je vsak homološki razred natančno določen z delovanjem ustreznih kohomoloških razredov na njem (posledica 1.1.16). Za vsak element $\beta \in H^{n-p-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$ velja:

$$\begin{aligned} & \langle \beta \, , \, \partial_*(\alpha \frown \xi) \rangle = \langle \delta^*\beta \, , \, \alpha \frown \xi \rangle = \langle \delta^*\beta \smile \alpha \, , \, \xi \rangle = \\ = \; & \langle \delta^*(\beta \smile i^*\alpha) \, , \, \xi \rangle = \langle \beta \smile i^*\alpha \, , \, \partial_*\xi \rangle = \langle \beta \, , \, i^*\alpha \frown \partial_*\xi \rangle \end{aligned}$$

Od tod takoj sledi naš izrek. ∎

Izrek 12 *Naj bodo X_1, X_2, A_1, A_2, A in i kot prej. Naj bo $\alpha \in H^p(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$ in $\xi \in H_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2 \cup A)$. Naj bo δ^* vezni homomorfizem dvojice parov (X_1, A_1) in (X_2, A_2), ∂_* pa vezni homomorfizem dvojice parov $(X_1, A_1 \cup (A \cap X_1))$ in $(X_2, A_2 \cup (A \cap X_2))$. Privzemimo, da sta obe dvojici izrezljivi. Potem v $H_{n-p-1}(X_1 \cup X_2, A)$ velja enakost*

$$\delta^*\alpha \frown \xi = (-1)^{n-p-1} i_*(\alpha \frown \partial_*\xi)$$

Dokaz Za vsak $\beta \in H^{n-p-1}(X_1 \cup X_2, A)$ velja:

$$\begin{aligned} & \langle \beta\,, \delta^*\alpha \frown \xi \rangle = \langle \beta \smile \delta^*\alpha\,, \xi \rangle = \\ = \ & (-1)^{n-p-1} \langle \delta^*(i^*\beta \smile \alpha)\,, \xi \rangle = (-1)^{n-p-1} \langle i^*\beta \smile \alpha\,, \partial_*\xi \rangle = \\ = \ & (-1)^{n-p-1} \langle i^*\beta\,, \alpha \frown \partial_*\xi \rangle = (-1)^{n-p-1} \langle \beta\,, i_*(\alpha \frown \partial_*\xi \rangle \end{aligned}$$

∎

Opomba Oba izreka se dasta dokazati tudi neposredno.

2.

Orientacija in dualnost v mnogoterostih

2.1 Orientacija mnogoterosti

Orientacijo mnogoterosti je mogoče definirati na veliko načinov. Mi bomo sledili tistemu in [4] in [5]. Definirali bomo torej orientacijski sveženj. Pokazali bomo tudi, da je mnogoterost, ki je orientabilna po naši definiciji, orientabilna tudi po definiciji iz [2].

Začnimo z orientacijo n-simpleksa σ, ki jo definiramo z vrstnim redom oglišč. Znana je naravna bijektivna korespondenca med orientacijama simpleksa σ in generatorjema grupe $H_n(\sigma, \partial\sigma; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Če je σ vložen v evklidsko podmnožico mnogoterosti M, po izreku o izrezu za poljuben kolobar R velja

$$H_n(\sigma, \partial\sigma; R) \cong H_n(M, M \setminus \operatorname{int} \sigma; R)$$

Pokazali bomo, da lahko množico $\operatorname{int} \sigma$ zamenjamo kar s poljubno njeno točko.

Od tod naprej bomo v tem poglavju kolobar koeficientov večinoma opuščali. Teorija velja za poljuben kolobar R.

Definicija Podmnožica V n-mnogoterosti M je *pravilna evklidska okolica*, če je $(\overline{V}, V) \approx (B^n, \mathring{B}^n)$.

Opomba *Če je M brez roba, pravilne evklidske okolice tvorijo njeno bazo.*

Trditev 1 *Naj bo V pravilna evklidska okolica točke x v mnogoterosti M. Potem inkluzija*

$$(M, M \setminus V) \hookrightarrow (M, M - x)$$

porodi izomorfizem na homologiji.

Dokaz Po lemi 1.2.3 je to dovolj pokazati samo za inkluzijo $M \setminus V \hookrightarrow M - x$. To pa je očitno, saj se druga množica krepko deformacijsko retraktira na prvo. ■

To torej pomeni, da za vsako točko x v notranjosti n-razsežne mnogoterosti M velja $H_n(M, M - x) \cong R$. Izomorfizmu $R \xrightarrow{\cong} H_n(M, M - x)$ bomo rekli *lokalna orientacija* mnogoterosti M v točki x nad kolobarjem R.

Ker je tak izomorfizem natančno določen že s sliko enote, je to pravzaprav izbira generatorja modula $H_n(M, M-x)$. Rekli mu bomo *predstavnik lokalne orientacije*, pogosto pa tudi kar lokalna orientacija. Po pričakovanju sta nad $\mathbb{Z}$ močni dve lokalni orientaciji, nad $\mathbb{Z}_2$ ena sama, nad $\mathbb{Q}$ pa obstaja neskončno mnogo lokalnih orientacij.

Za orientacijo celotne mnogoterosti je treba lokalne orientacije med seboj uskladiti. Najprej definirajmo usklajenost na pravilnih evklidskih okolicah. Naj bo V taka okolica točk x in y. Elementa $\xi \in H_n(M, M-x)$ in $\eta \in H_n(M, M-y)$ sta *usklajena glede na* V, če sta sliki istega elementa iz $H_n(M, M \setminus V$, in sicer glede na izomorfizma, porojena z inkluzijama. Lokalni orientaciji v x in y pa sta usklajeni, če sta njuni sliki poljubnega elementa iz R med seboj usklajeni. To torej pomeni izbiro med seboj usklajenih generatorjev modulov $H_n(M, M-x)$ in $H_n(M, M-y)$.

Lema 2 *Naj bosta U in V pravilni evklidski okolici točk x in y ter $U \subset V$. Potem sta elementa iz $H_n(M, M-x)$ in $H_n(M, M-y)$ usklajena glede na U natanko tedaj, ko sta usklajena glede na V.*

Dokaz Narišimo naslednji diagram preslikav, porojenih z inkluzijami:

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(M, M-x) \\
H_n(M, M \setminus V) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[r] \arrow[dr, "\cong"'] & H_n(M, M \setminus U) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[d, "\cong"'] \\
 & H_n(M, M-y)
\end{tikzcd}$$

Očitno je diagram komutativen. Srednja preslikava je izomorfizem, saj so vse ostale izomorfizmi. Od tod pa takoj sledi vse ostalo. ■

Definirajmo sedaj *orientacijski sveženj* nad mnogoterostjo M s koeficienti iz R. Totalni prostor naj bo

$$\widetilde{M} := \coprod_{x \in \operatorname{int} M} H_n(M, M-x)$$

z naravno projekcijo $\widetilde{M} \to M$. Naj bo V pravilna evklidska okolica. Usklajenost nad V je ekvivalenčna relacija v $M|_V$. Iz prejšnje leme sledi, da ekvivalenčni razredi teh relacij za vse pravilne evklidske okolice V tvorijo bazo topologije, s katero opremimo $\widetilde{M}$. Tako dobljen topološki prostor je sveženj nad M, in sicer z vlaknom R, opremljenim z diskretno topologijo. Še več: to je *R-modulski sveženj*, t. j. vsako vlakno ima strukturo R-modula, lokalne trivializacije pa so na vlaknih modulski izomorfizmi.

Definicija Mnogoterost M je *orientabilna* nad kolobarjem R, če je njen orientacijski sveženj s koeficienti iz R trivialen. *Orientacija* je trivializacija tega svežnja. Trivializacija, torej preslikava $\mathring{M} \times R \to \widetilde{M}$, je enolično določena z vrednostmi na listu $\mathring{M} \times 1$ (z $\mathring{M}$ bomo označevali notranjost mnogoterosti M). Ta zožitev trivializacije je prerez orientacijskega svežnja, ki vsebuje same generatorje vlaken. Velja tudi obratno: vsak prerez, ki vsebuje same generatorje vlaken, je predstavnik natančno ene orientacije celotne mnogoterosti M. Prerezu bomo rekli *predstavnik orientacije* ali tudi kar orientacija mnogoterosti.

Mnogoterost, vložena v neko drugo mnogoterost iste dimenzije, od nje podeduje orientacijo. Orientacijski sveženj manjše mnogoterosti je namreč le zožitev orientacijskega svežnja večje mnogoterosti na notranjost manjše, pri čemer so lokalne orientacije preslikane z ustreznimi izrezi.

Preslikava $s\colon M \to \widetilde{M}$ (gledana kot preslikava med množicami), ki vsako točko preslika v generator njenega vlakna, je prerez (se pravi zvezna) natanko tedaj, ko so za vsako pravilno evklidsko okolico V vsi elementi iz $s(V)$ usklajeni glede na V. Še več: usklajenost je dovolj preveriti le elementih kake baze mnogoterosti $\mathring{M}$, ki jo sestavljajo same pravilne evklidske okolice. Orientacija mnogoterosti potemtakem ni nič drugega kot izbira usklajenih lokalnih orientacij.

Vrednost prereza orientacijskega svežnja v neki točki $x \in \mathring{M}$ natančno določa tudi vrednosti v kaki njeni pravilni evklidski okolici. To pomeni, da je množica vseh točk, v katerih se poljubna prereza ujemata, brž ko se ujemata v x, odprta. Ker je $\widetilde{M}$ Hausdorffov prostor (dokaz je lahek in se prepušča bralcu), je ta množica tudi zaprta. Torej je vrednost prereza v točki x natančno določa vrednosti na vsej komponenti mnogoterosti M, ki vsebuje x. Nad $\mathbb{Z}$ ima torej povezana mnogoterost bodisi dve orientaciji bodisi nobene.

Naj bo mnogoterost orientabilna nad $\mathbb{Z}$. Iz usklajenih lokalnih orientacij nad $\mathbb{Z}$ po izreku o univerzalnih koeficientih dobimo družino lokalnih orientacij nad poljubnim kolobarjem R. Ker je preslikava iz izreka o univerzalnih koeficientih naravna transformacija, so tudi te usklajene. Od tod dobimo naslednji izrek.

Izrek 3 *Mnogoterost, ki je orientabilna nad $\mathbb{Z}$, je orientabilna nad vsakim kolobarjem.*

Takim mnogoterostim bomo rekli kar *orientabilne* mnogoterosti.

Izrek 4 *Vsaka mnogoterost ima natančno eno orientacijo nad $\mathbb{Z}_2$.*

DOKAZ Očitno obstaja en sam prerez orientacijskega svežnja, čigar elementi so generatorji ustreznih modulov, izomorfnih $\mathbb{Z}_2$. Naj bo V pravilna evklidska okolica točk x in y. Edina generatorja modulov $H_n(M, M-x; \mathbb{Z}_2)$ in $H_n(M, M-y; \mathbb{Z}_2)$ sta očitno usklajena, saj sta sliki edinega generatorja modula $H_n(M, M \setminus V; \mathbb{Z}_2)$. ■

Trditev 5 *Naj bosta M in N orientabilni nad kolobarjem R. Potem je tudi $M \times N$ orientabilna nad R.*

DOKAZ Naj bosta orientaciji mnogoterosti M in N predstavljeni s prerezoma s in t njunih orientacijskih svežnjev. Za poljubni točki $x \in M$ in $y \in N$ je $(M \times N, M \times N - (x,y)) = (M, M-x) \times (N, N-y)$. V točki (x,y) definirajmo lokalno orientacijo s predstavnikom $w(x,y) := s(x) \times t(y)$.

Preverimo zdaj usklajenost teh lokalnih orientacij. Naj bo U pravilna evklidska okolica točk x' in x'' v M, V pa pravilna evklidska okolica točk y' in y'' v N. Označimo naslednje inkluzije:

$$\begin{array}{rlcl@{\qquad}rlcl} i': & (M, M\setminus U) & \to & (M, M-x') & j': & (N, N\setminus V) & \to & (N, N-y') \\ i'': & (M, M\setminus U) & \to & (M, M-x'') & j'': & (N, N\setminus V) & \to & (N, N-y'') \end{array}$$

Obstajata taka elementa $u \in H_n(M, M \setminus U)$ in $v \in H_n(N, N \setminus V$, da je $s(x') = i'_*(u)$, $s(x'') = i''_*(u)$, $t(x') = i'_*(v)$ in $t(x'') = i''_*(v)$. Potem je tudi $w(x', y') = (i' \times j')_*(u \times v)$ in $w(x'', y'') = (i'' \times j'')_*(u \times v)$, torej sta lokalni orientaciji v (x', y') in $x'', y'')$ usklajeni glede na $U \times V$. Ker take množice tvorijo bazo za $\mathring{M} \times \mathring{N}$, je $M \times N$ res orientabilna. ■

Orientaciji, opisani v dokazu trditve, pravimo *produktna orientacija.*

Naj bosta M in N n-mnogoterosti, orientirani nad kolobarjem R. Dan naj bo homeomorfizem $f\colon M \to N$. Naj bo $x \in \mathring{M}$ in $y = f(x)$. Pravimo, da f *ohrani lokalno orientacijo v x*, če izbrano lokalno orientacijo v x preslika v izbrano lokalno orientacijo v y. Nadalje pravimo, da f *obrne* lokalno orientacijo v x, če izbrano lokalno orientacijo v x preslika v nasprotno vrednost lokalne orientacije v y. Če je $R = \mathbb{Z}$, seveda vsak homeomorfizem v dani notranji točki bodisi ohrani bodisi obrne orientacijo.

Homeomorfizem f izbrani orientaciji mnogoterosti M priredi neko orientacijo mnogoterosti N. Ta orientacija je enaka izbrani orientaciji mnogoterosti N natanko tedaj, ko f v vseh notranjih točkah ohrani orientacijo, nasprotno pa ji je enaka natanko tedaj, ko f v vseh notranjih točkah obrne orientacijo. Iz dejstva, da je orientacija povezane mnogoterosti natančno določena z lokalno orientacijo v eni sami točki, sledi naslednja trditev.

Trditev 6 *Naj bosta M in N povezani mnogoterosti iste dimenzije, orientirani nad kolobarjem R. Dan naj bo homeomorfizem $f\colon M \to N$. Potem f bodisi v vseh notranjih točkah ohrani orientacijo bodisi je ne ohrani nikjer. Prav tako f bodisi v vseh notranjih točkah obrne orientacijo bodisi je ne obrne nikjer.*

2.2 Orientacija evklidskih prostorov

V tem razdelku bomo pokazali, da so vsi evklidski prostori orientabilni. Definirali bomo tudi naravne orientacije prostorov $\mathbb{R}^n$ (nad $\mathbb{Z}$). Najprej bomo to storili za realno os. Naj bo $x \in \mathbb{R}$. *Naravno lokalno orientacijo v x* predstavimo s poljubnim singularnim 1-simpleksom (t. j. potjo), ki se začne v a in konča v b, pri čemer je $a < x < b$. Očitno je tako dobljena lokalna orientacija neodvisna od izbire poti.

Naj bo V pravilna evklidska okolica točk x in y v $\mathbb{R}$. Množica V je relativno kompaktna, zato je vsebovana v nekem končnem odprtem intervalu (a, b). Potem poljubna pot od a do b predstavlja tako generator grupe $H_n(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus V)$ kot tudi lokalni orientaciji v x in y. Le-ti sta torej usklajeni glede na V. To pa pomeni, da izbrane lokalne orientacije določajo prerez orientacijskega svežnja, ki nam da *naravno orientacijo realne osi*. Torej je $\mathbb{R}$ orientabilna mnogoterost. Dobljena orientacija je očitno *translacijsko invariantna*: vsaka translacija ohrani orientacijo. Nasprotno pa vsako zrcaljenje na realni osi obrne orientacijo.

Iz trditve 2.1.5 sledi, da so prostori $\mathbb{R}^n$ orientabilni za vse $n \in \mathbb{N}$. Njihove naravne orientacije naj bodo kar produktne orientacije. Definirajmo še naravno orientacijo prostora $\mathbb{R}^0 = \{0\}$, in sicer naj jo predstavlja njen edini singularni 0-simpleks.

Oglejmo si, kateri afini homeomorfizmi v $\mathbb{R}^n$ ohranijo orientacijo in kateri jo obrnejo. Vsako translacijo je mogoče zapisati kot kompozitum translacij, ki spremenijo le po eno koordinato. Le-te očitno ohranijo orientacijo, torej je tudi orientacija prostora $\mathbb{R}^n$ translacijsko invariantna.

Preostane nam le še pogledati, kako delujejo na orientacijo linearni izomorfizmi. Očitno identiteta ohrani orientacijo, zrcaljenje zadnje koordinate pa jo obrne. Sedaj pa se spomnimo na dejstvo, da je grupa linearnih izomorfizmov s pozitivno (negativno) determinanto povezana. Vsak linearni izomorfizem je torej homotopen bodisi identiteti bodisi našemu zrcaljenju, pri čemer je homotopija na vsakem koraku linearni izomorfizem, torej preslika

$\mathbb{R}^n - 0$ v $\mathbb{R}^n - 0$. Delovanje linearnega izomorfizma na orientacijo pa je dovolj pogledati na lokalni orientaciji v 0, torej na izbranem elementu grupe $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$. Iz dejstva, da homotopni preslikavi na homologiji porodita isto preslikavo, potem sledi naslednja trditev.

Trditev 1 *Linearni izomorfizem prostora $\mathbb{R}^n$ ohrani orientacijo, če je njegova determinanta pozitivna, v nasprotnem primeru pa jo obrne.*

Zdaj, ko smo definirali naravno orientacijo evklidskih prostorov, lahko za vsako lokalno karto orientirane mnogoterosti povemo, ali ohrani ali obrne orientacijo. Vsako lokalno karto, ki obrne orientacijo, lahko komponiramo s kakim zrcaljenjem in tako dobimo karto, ki orientacijo ohrani. Torej ima vsaka mnogoterost atlas iz kart, ki ohranijo orientacijo.

Z množenjem lahko pomočjo orientacij nižjedimenzionalnih mnogoterosti definiramo orientacijo višjedimenzionalnih mnogoterosti. Včasih pa gre tudi obratno. Označimo $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ in $\mathbb{R}^n_- := \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0]$. Para $(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+ - 0)$ in $(\mathbb{R}^n_-, \mathbb{R}^n_- - 0)$ sta izrezljiva dvojica. Dvojica $(\mathbb{R}^n_+ - 0, \mathbb{R}^n_- - 0)$ je namreč homotopsko ekvivalentna dvojici $(\mathbb{R}^n_+ \setminus \mathring{B}^n, \mathbb{R}^n_- \setminus \mathring{B}^n)$, ki je gotovo izrezljiva, saj gre za podkompleksa CW-kompleksa. Potem pa lahko napišemo Mayer-Vietorisovo zaporedje

$$\ldots \longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+ - 0) \oplus H_n(\mathbb{R}^n_-, \mathbb{R}^n_- - 0) \longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \xrightarrow{\partial_*}$$
$$\xrightarrow{\partial_*} H_n\big((\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1} - 0) \times \{0\}\big) \longrightarrow H_n(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+ - 0) \oplus H_n(\mathbb{R}^n_-, \mathbb{R}^n_- - 0) \longrightarrow \ldots$$

Para $(\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+ - 0)$ in $(\mathbb{R}^n_-, \mathbb{R}^n_- - 0)$ imata ničelno homologijo, saj se krepko deformacijsko retraktirata na $\big(\mathbb{R}^{n-1} \times [1, \infty), \mathbb{R}^{n-1} \times [1, \infty)\big)$ oziroma $\big(\mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, -1], \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, -1]\big)$. Zato je vezni homomorfizem izomorfizem. Zanima nas, kam preslika naravno lokalno orientacijo prostora $\mathbb{R}^n$ v točki 0, ki jo označimo z ω_n.

Trditev 2 *Vezni homomorfizem preslika ω_n v $(-1)^n \omega_{n-1} \times \omega_0$.*

Dokaz Trditev najprej pokažimo za $n = 1$. Gornje Mayer-Vietorisovo zaporedje je dobljeno iz kratkega eksaktnega zaporedja verižnih kompleksov, katerega delček kaže diagram:

$$\begin{array}{ccccc} & & \Delta_1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ - 0) \oplus \Delta_1(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_- - 0) & \xrightarrow{j} & \Delta_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0) \\ & & \partial\downarrow & & \\ \Delta_0(\{0\}) & \xrightarrow{i} & \Delta_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ - 0) \oplus \Delta_0(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_- - 0) & & \end{array}$$

Naj bo σ_- usmerjena daljica od -1 do 0, σ_+ pa usmerjena daljica od 0 do 1. Potem je veriga $\sigma_+ + \sigma_-$ predstavnik elementa ω_1. Naj bo e predstavnik elementa ω_0. Vstavimo te verige v gornji diagram:

$$\begin{array}{ccccc} & & (\sigma_+, \sigma_-) & \xrightarrow{j} & \sigma_+ + \sigma_- \\ & & \partial\downarrow & & \\ -e & \xrightarrow{i} & (-e, e) & & \end{array}$$

Od tod pa že sledi, da je $\partial_* \omega_1 = -\omega_0$. Od tod pa sledi:

$$\partial_* \omega_n = \partial_*(\omega_{n-1} \times \omega_1) = (-1)^{n-1} \omega_{n-1} \times \partial_* \omega_1 = (-1)^n \omega_{n-1} \times \omega_0$$

Trditev je dokazana. ■

2.3 Orientacija podvojitve in roba mnogoterosti

Iz poljubne mnogoterosti M lahko konstruiramo mnogoterost $\widehat{M}$ tako, da dve njeni kopiji naravno zlepimo vzdolž roba. Mnogoterosti $\widehat{M}$ pravimo *podvojitev* mnogoterosti M. Vloženi kopiji bomo označevali z M_+ in M_-. Za poljubno podmnožico V mnogoterosti M bomo z V_+ in V_- označevali njeni naravni vložitvi v M_+ in M_-, z $\widehat{V}$ pa bomo označevali njuno unijo. Podobno tudi vsaki točki $x \in M$ pripadata točki $x_+ \in M_+$ in $x_- \in M_-$. Rob ∂M bomo navadno kar enačili z njegovo vložitvijo v $\widehat{M}$.

Poseben primer podvojitve mnogoterosti je $\mathbb{R}^n$: dobimo ga namreč s podvojitvijo prostora $\mathbb{R}^n_+$. Seveda prostor $(\mathbb{R}^n_+)_+$ identificiramo z $\mathbb{R}^n_+$, prostor $(\mathbb{R}^n_+)_-$ pa z $\mathbb{R}^n_-$.

Poljubno preslikavo $f\colon (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ lahko razširimo do preslikave $\widehat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$ po predpisu $\widehat{f}(x_\pm) := (f(x))_\pm$. Preslikavi $\widehat{f}$ bomo rekli *liha razširitev* preslikave f. Vsaki tako dobljeni preslikavi iz $\widehat{M}$ v $\widehat{N}$ bomo rekli *liha preslikava*. Če za M in N vzamemo $\mathbb{R}^n_+$, potem je preslikava iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^n$ po naši definiciji liha, če je liha v zadnji koordinati.

Izrek 1 *Če je mnogoterost M orientabilna nad R, je tudi $\widehat{M}$ orientabilna nad R.*

DOKAZ Najprej orientirajmo mnogoterosti M_+ in M_-, in sicer tako, da ima M_+ isto, M_- pa nasprotno orientacijo kot M (glede na naravni identifikaciji). V skladu s tema orientacijama izberimo lokalne orientacije mnogoterosti $\widehat{M}$ v vseh točkah iz $\widehat{M} \setminus \partial M$.

Naj bo $x \in \partial M$. Obstaja okolica V točke x in *lih* homeomorfizem $h\colon (V_+, V_-, x) \to (\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_-, 0)$. Množica $\mathcal{U}_x := \{h^{-1}(r\mathring{B}^n) \mid r > 0\}$ je potem bazičen sistem okolic za x. Vzemimo zdaj poljubno točko $y \in V$. Označimo z η_+ in η_- predstavnika lokalnih orientacij v točkah y_+ in y_-. Očitno obstaja okolica $U \in \mathcal{U}_x$, ki vsebuje y_+ in y_-. Trdimo: lokalni orientaciji η_+ in η_- sta usklajeni glede na vsako tako okolico U. Z izrezom ju preslikajmo v predstavnika lokalnih orientacij mnogoterosti V. Dobljena elementa označimo z η'_+ in η'_-. Očitno sta η_+ in η_- usklajena glede na U natanko tedaj, ko sta tako usklajena elementa η'_+ in η'_-. To pa je natanko tedaj, ko sta $h_*(\eta'_+)$ in $h_*(\eta'_-)$ usklajena glede na $h(U)$.

Iz izbire orientacij mnogoterosti M_+ in M_- sledi, da zrcaljenje zadnje koordinate v $\mathbb{R}^n$ vsakega od elementov $h_*(\eta'_+)$ in $h_*(\eta'_-)$ preslika v nasprotno vrednost drugega. To zrcaljenje pa tudi obrne orientacijo prostora $\mathbb{R}^n$. Torej sta $h_*(\eta'_+)$ in $h_*(\eta'_-)$ elementa istega prereza orientacijskega svežnja, zato sta gotovo usklajena glede na $h(U)$. Sklep: η_+ in η_- sta usklajena glede na U.

Naj bo $U \in \mathcal{U}_x$. Ker sta množici $U \cap \mathring{M}_+$ in $U \cap \mathring{M}_-$ tudi pravilni evklidski okolici, so po lemi 2.1.2 vse lokalne orientacije v točkah iz $U \setminus \partial M$ med seboj usklajene glede na U. V skladu s temi orientacijami določimo tudi lokalno orientacijo v x.

Na ta način smo določili lokalne orientacije tudi na ∂M. Naj bo spet $x \in \partial M$ in $U \in \mathcal{U}_x$. Vzemimo poljubno točko $y \in U$. Trdimo: lokalni orientaciji v x in y sta usklajeni glede na U. Za $y \notin \partial M$ smo to že dokazali. Naj bo $y \in \partial M$. Obstaja okolica $W \in \mathcal{U}_y$, ki cela leži v U. Gotovo obstaja kakšna točka $z \in W \setminus \partial M$. Lokalna orientacija v njej je glede na W (torej po lemi 2.1.2 tudi glede na U) usklajena z lokalno orientacijo v y. Ker sta tudi lokalni orientaciji v x in z usklajeni glede na U, to velja tudi za lokalni orientaciji v x in y.

Pravilne evklidske okolice, ki so vsebovane bodisi v $\mathring{M}_+$ bodisi v $\mathring{M}_-$, skupaj s tistimi iz družin $\mathcal{U}_x$ tvorijo bazo prostora $\widehat{M}$. V vsaki od njih so vse lokalne orientacije med seboj usklajene. To pa pomeni, da je $\widehat{M}$ orientabilna mnogoterost. ■

Orientacija mnogoterosti $\widehat{M}$, dobljena iz prejšnjega dokaza, je karakterizirana z lastnostjo, da M_+ podeduje isto, M_- pa nasprotno orientacijo kot M (glede na naravni identifikaciji). Rekli ji bomo *naravna orientacija podvojitve mnogoterosti.*

Izrek 2 *Rob mnogoterosti, ki je orientabilna nad R, je tudi orientabilen nad R.*

DOKAZ Naj bo M naša mnogoterost. Po prejšnjem izreku je tudi $\widehat{M}$ orientabilna nad R. Vzemimo točko $x \in \partial M$. Naj bosta V in $\mathcal{U}_x$ kot v dokazu prejšnjega izreka. Vzemimo poljubno množico $\widehat{U} \in \mathcal{U}_x$. Označimo $U_+ := \widehat{U} \cap M_+$, $U_- := \widehat{U} \cap M_-$ in $U_0 := \widehat{U} \cap \partial M$. Izberimo še poljubno točko $y \in U_0$. Naslednje dvojice parov so izrezljive:

$$\begin{array}{ccc} (M_+, M_+ \setminus U_+) & \text{in} & (M_-, M_- \setminus U_-) \\ (M_+, M_+ - x) & \text{in} & (M_-, M_- - x) \\ (M_+, M_+ - y) & \text{in} & (M_-, M_- - y) \end{array}$$

Oglejmo si njihova Mayer-Vietorisova zaporedja! Vsi pari imajo ničelno homologijo, saj se krepko deformacijsko retraktirajo na $(M_+ \setminus W_+, M_+ \setminus W_+)$ ali na $(M_- \setminus W_-, M_- \setminus W_-)$ za neko množico $W \subset V$. Zato so vsi vezni homomorfizmi izomorfizmi. Naslednji diagram komutira:

$$\begin{array}{ccc} H_n(\widehat{M}, \widehat{M} - x) & \xrightarrow[\cong]{(-1)^n \partial_*} & H_{n-1}(\partial M, \partial M - x) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_n(\widehat{M}, \widehat{M} \setminus \widehat{U}) & \xrightarrow[\cong]{(-1)^n \partial_*} & H_{n-1}(\partial M, \partial M \setminus U_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(\widehat{M}, \widehat{M} - y) & \xrightarrow[\cong]{(-1)^n \partial_*} & H_{n-1}(\partial M, \partial M - y) \end{array}$$

V diagramu so vse navpične puščice dobljene iz inkluzij. Vstavimo zdaj v zgornji in spodnji levi del diagrama izbrani lokalni orientaciji mnogoterosti $\widehat{M}$ v točkah x in y! Na desni strani diagrama potem dobimo ustrezni lokalni orientaciji mnogoterosti ∂M. Ker sta lokalni orientaciji na levi usklajeni glede na $\widehat{U}$ in diagram komutira, sta tudi lokalni orientaciji na desni usklajeni glede na U_0.

Na ta način smo izbrali vse lokalne orientacije mnogoterosti ∂M. Za vsako množico U_0, dobljeno na zgornji način, so vse lokalne orientacije v njej usklajene. Ker te množice tvorijo bazo topološkega prostora ∂M, je le-ta res orientabilna mnogoterost. ■

Orientaciji, dobljeni iz dokaza, bomo rekli *naravna orientacija roba mnogoterosti.*

Opomba Faktor $(-1)^n$ v samem dokazu orientabilnosti ne igra nobene vloge. Dokaz bi bil prav tako dober, če bi ga izpustili. Faktor nastopa zgolj zato, ker je potem naravna orientacija prostora $\mathbb{R}^{n-1}$ dobljena tudi kot naravna orientacija roba mnogoterosti $\mathbb{R}^n_+$, ki orientacijo podeduje od $\mathbb{R}^n$ (glej trditev 2.2.2).

Orientacijo roba smo torej definirali v skladu s tem, da dovolj majhne okolice robnih točk navadno enačimo z $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$. Če bi jih enačili z $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$, popravek ne bi bil potreben.

Mnogoterost in evklidski prostor povezujejo lokalne karte. Naj bo $x \in \partial M$, V pa okolica točke x. Naj bo $\alpha \colon (V, V_+, V_-, x) \overset{\approx}{\to} (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_-, 0)$ lokalna karta in $\alpha_0 \colon V_0 \overset{\approx}{\to} \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ njena zožitev. Z V_0 smo označili presek $V_+ \cap V_-$.

Trditev 3 *Preslikava α ohrani orientacijo natanko tedaj, ko jo ohrani α_0.*

DOKAZ Vzemimo Mayer-Vietorisova zaporedja naslednjih dvojic:

$$\begin{array}{lcr} (M_+, M_+ - x) & \text{in} & (M_-, M_- - x) \\ (V_+, V_+ - x) & \text{in} & (V_-, V_- - x) \\ (\mathbb{R}^n_+, \mathbb{R}^n_+ - 0) & \text{in} & (\mathbb{R}^n_-, \mathbb{R}^n_- - x) \end{array}$$

Naslednji diagram komutira:

$$\begin{array}{ccc} H_n(\widehat{M}, \widehat{M} - x) & \xrightarrow[\cong]{(-1)^n \partial_*} & H_{n-1}(\partial M, \partial M - x) \\ \cong\uparrow & & \cong\uparrow \\ H_n(\widehat{V}, \widehat{V} - x) & \xrightarrow[\cong]{(-1)^n \partial_*} & H_{n-1}(V_0, V_0 - x) \\ \cong\downarrow\alpha_* & & \cong\downarrow\alpha_{0*} \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) & \xrightarrow[\cong]{(-1)^n \partial_*} & H_{n-1}((\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1} - 0) \times \{0\}) \end{array}$$

Če v zgornjo in spodnjo vrstico vstavimo ustrezne lokalne orientacije in se spomnimo še trditve 2.2.2, dobimo, kar smo iskali. ■

2.4 Thomov razred

Naj bo X topološki prostor in $A \subset X$. Označimo:

$$\begin{array}{rcl} \delta(X) & := & \{(x, x) \mid x \in X\} \\ X^\times & := & (X \times X, X \times X \setminus \delta(X)) \\ A^\times_X & := & (A \times X, A \times X \setminus \delta(A)) \end{array}$$

Naj bo M povezana mnogoterost. Par $M^\times$ skupaj s projekcijo pr_1 na prvo komponento tvori par svežnjev nad M. Vlakna tega para svežnjev so pari $\{x\} \times (M, M - x)$.

Naj bo M orientabilna mnogoterost nad kolobarjem R, nad katerim bomo do konca razdelka gledali tudi vse homološke in kohomološke module. Orientacija naj bo določena s prerezom orientacijskega svežnja s. Za poljubno točko $p \in M$ definirajmo še preslikavo $l_p\colon M \to M \times M$ po predpisu $x \mapsto (p, x)$.

Trditev 1 *Naj bo V pravilna evklidska okolica točke $p \in M$. Potem obstaja tak homeomorfizem $\theta\colon V \times M \to V \times M$, da komutira diagram*

$$\begin{array}{ccc} V^\times_M & \underset{\approx}{\xrightarrow{\theta}} & V \times (M, M - p) \\ & {}_{\mathrm{pr}_1}\searrow \quad \swarrow_{\mathrm{pr}_1} & \\ & V & \end{array}$$

in da za vsak $x \in M$ velja enakost $\theta_*\big(l_{x*}\big(s(x)\big)\big) = l_{x*}\big(s(p)\big)$.

Preslikava θ je torej lokalna trivializacija našega para svežnjev, ki ohranja tudi orientacijo. Dokaz trditve ni zahteven. Bralec si ga lahko pogleda v [4] na strani 158, lema 6.11.

Lema 2 *Naj bo M orientirana n-mnogoterost brez roba, orientacijo pa naj predstavlja prerez orientacijskega svežnja s. Potem velja:*

1. *$H_i(M^\times) = 0$ za $i < n$;*

2. *preslikava* $h_M\colon H_0(M) \to H_n(M^\times)$, *ki homološki razred točke* x *preslika v element* $l_{x*}\big(s(x)\big)$, *kjer je*
$$l_{x*}\colon H_n(M, M-x) \to H_n(M^\times)$$
je dobro definirana in izomorfizem.

DOKAZ Označimo z $\mathcal{L}$ družino vseh tistih odprtih podmnožic V mnogoterosti M, za katere velja izrek, t. j. $H_i(V_M^\times) = 0$ za $i < n$, preslikava $H_V\colon H_0(V) \to H_n(V_M^\times)$, definirana na isti način kot h_M, pa je dobro definirana in izomorfizem. Naša naloga je pokazati, da je $M \in \mathcal{L}$.

Vsaka odprta podmnočica V *pravilne evklidske okolice je v* $\mathcal{L}$. Izberimo $p \in V$. Očitno je, da lema 2 velja ne le za pravilne evklidske okolice, temveč tudi za njihove podmnožice. Obstaja torej izomorfizem
$$\theta_*\colon H_i(V_M^\times) \xrightarrow{\cong} H_i(V \times (M, M-p))$$
Ker je modul $H_*(M, M-p)$ brez torzije nad R in neničeln samo na n-ti stopnici, je po Künnethovi formuli
$$H_i(V \times (M, M-p)) \cong H_{i-n}(V) \times H_n(M, M-p)$$
Od tod takoj sledi, da je $H_i(V \times (M, M-p)) = 0$ za $i < n$. Zdaj pa se spomnimo, da je $s(p)$ generator modula $H_n(M, M-p)$. Iz izreka 1.3.11 sledi, da je $H_0(V) \cong H_n(V \times (M, M-p))$, pri čemer izomorfizem kohomološkega predstavnika točke $x \in V$ preslika v $l_{x*}\big(s(p)\big)$. Iz enačbe $\theta_*\big(l_{x*}\big(s(x)\big)\big) = l_{x*}\big(s(p)\big)$ sledi, da je V res v $\mathcal{L}$.

Za vsako odprto podmnožico W *mnogoterosti* M *je preslikava* h_W *dobro definirana.* Natančneje, brž ko točki x in y ležita v isti komponenti množice W, velja enakost $l_{x*}\big(s(x)\big) = l_{y*}\big(s(y)\big)$. To je gotovo res, če x in y ležita v isti pravilni evklidski okolici, saj so le-te vse v $\mathcal{L}$. Ker ima v W vsaka točka pravilno evklidsko okolico, relacija $\sim$, definirana po predpisu
$$x \sim y \iff l_{x*}\big(s(x)\big) = l_{y*}\big(s(y)\big)$$
razdeli množico W na odprte ekvivalenčne razrede, taki razredi pa so nujno unije njenih komponent. Preslikava h_W je torej res dobro definirana.

Brž ko so množice U, V *in* $U \cap V$ *v* $\mathcal{L}$, *je tudi* $U \cup V$ *v* $\mathcal{L}$. Označimo $P := U \cap V$ in $W := U \cup V$. Ker sta U in V odprti, sta U in V ter $U_M^\times$ in $V_M^\times$ izrezljivi dvojici. Iz eksaktnosti Mayer-Vietorisovega zaporedja druge dvojice takoj sledi, da je $H_i(W_M^\times) = H_i(U_M^\times \cup V_M^\times) = 0$ za vsak $i < n$. Povežimo zdaj Mayer-Vietorisovi zaporedji obeh dvojic:
$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dots & H_0(P) & \to & H_0(U) \oplus H_0(V) & \to & H_0(W) & \xrightarrow{\partial_*} & 0 & \to & 0 & \dots \\
 & {\scriptstyle h_P}\downarrow\cong & & {\scriptstyle h_U \oplus h_V}\downarrow\cong & & {\scriptstyle h_W}\downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow\cong & \\
\dots & H_n(P_M^\times) & \to & H_n(U_M^\times) \oplus H_n(V_M^\times) & \to & H_n(W_M^\times) & \xrightarrow{\partial_*} & 0 & \to & 0 & \dots
\end{array}$$
Nastane vprašanje, ali diagram komutira. Naj bo $A \subset B \subset M$. Potem komutira naslednji diagram:
$$\begin{array}{ccc}
H_0(M, M-p) & \xrightarrow{=} & H_0(M, M-p) \\
{\scriptstyle l_{p*}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l_{p*}} \\
H_n(A_M^\times) & \longrightarrow & H_n(B_M^\times)
\end{array}$$

Spodnja puščica je dobljena iz inkluzije. Od tod pa sledi tudi komutativnost prejšnjega diagrama. Iz leme o petero homomorfizmih pa sledi, da je tudi srednja navpična puščica v prejšnjem diagramu izomorfizem, torej je res $W \in \mathcal{L}$.

Od tod takoj sledi, da so v $\mathcal{L}$ vse odprte podmnožice mnogoterosti M, ki jih je mogoče pokriti s končno unijo pravilnih evklidskih okolic. Označimo to družino z $\mathcal{M}$. Le-ta je odprto pokritje za M, usmerjeno z inkluzijo. Ker je vsaka končna unija slik singularnih simpleksov v M vsebovana v kaki množici iz $\mathcal{M}$, je singularni verižni kompleks prostora M direktna limita singularnih verižnih kompleksov podprostorov iz $\mathcal{M}$. Podobno je tudi singularni verižni kompleks para $M^\times$ direktna limita singularnih verižnih kompleksov parov $U_M^\times$, kjer je $U \in \mathcal{M}$. Ker homologija komutira z direktnimi limitami (glej izrek 4.1.7 v [2] na strani 162), veljata enakosti:

$$H_*(M) = \varinjlim_{U \in \mathcal{M}} H_*(U) \quad H_*(M^\times) = \varinjlim_{U \in \mathcal{M}} H_*(U_M^\times)$$

Od tod takoj sledi, da je $H_i(M^\times) = 0$ za vse $i < n$. Brez težav se prepričamo, da je preslikava h_M direktna limita preslikav h_U, kjer $U \in \mathcal{M}$. To pa pomeni, da je tudi h_M izomorfizem, torej je tudi M v $\mathcal{L}$. ∎

Lema nam da kanoničen izomorfizem $H_0(M) \xrightarrow{\cong} H_n(M^\times)$. Ker je $H_{n-1}(M^\times) = 0$, po izreku o univerzalnih koeficientih za kohomologijo obstajata tudi kanonična izomorfizma $H^0(M) \xrightarrow{\cong} H_0(M)^*$ in $H^n(M^\times) \xrightarrow{\cong} H_n(M^\times)^*$. Torej obstaja tudi kanoničen izomorfizem $H^0(M) \xrightarrow{\cong} H^n(M^\times)$. Označimo z $U \in H^n(M^\times)$ element, v katerega se s tem izomorfizmom preslika element $1 \in H^0(M)$ (t. j. kohomološki razred koverige, ki sešteva točke). Če pogledamo, kako ti izomorfizmi delujejo, dobimo, da element U natančno določajo enačbe

$$\left\langle U \,,\, l_{p_*}(s(p)) \right\rangle = 1 \tag{3}$$

kjer $p \in M$. Pravimo mu *Thomov razred* mnogoterosti M. Če je M mnogoterost z robom, za njen Thomov razred vzamemo kar Thomov razred njene notranjosti.

Opomba Če je mnogoterost M povezana, Thomov razred tudi generira modul $H^n(M^\times)$, drugače pa ne.

Če je U Thomov razred mnogoterosti M brez roba, je za vsako točko $p \in M$ zožitev Thomovega razreda na $\{p\} \times (M, M - p)$ generator modula $H^n(\{p\} \times (M, M - p))$. Obstoj elementa iz $H^n(M^\times)$ s to lastnostjo je v [2] kar definicija orientabilnosti mnogoterosti. Mi smo pokazali, da, če je mnogoterost orientabilna po naši definiciji, potem je orientabilna tudi po definiciji iz [2]. Velja pa tudi obrat, vendar bomo njegov dokaz opustili.

Doslej smo Thomov razred definirali samo za mnogoterosti brez roba. Karakterizirali smo ga z enačbo 3. Nastane vprašanje, ali je to mogoče narediti tudi za mnogoterosti z robom. Odgovor je pritrdilen. Pomagamo si z obrobkom.

Definicija Naj bo M mnogoterost z nepraznim robom ∂M. *Zaprt obrobek* v M je okolica C roba ∂M skupaj s homeomorfizmom $c: C \xrightarrow{\approx} \partial M \times I$, ki vsak $x \in \partial M$ preslika v $(x, 0)$. Z I bomo označevali interval $[0, 1]$.

Pri *odprtem obrobku* namesto I vzamemo interval $[0, 1)$ ali $[0, \infty)$.

Izrek 4 (Brownov izrek o obrobku) *Vsaka mnogoterost z robom ima obrobek.*

Dokaz bomo opustili. Bralec si ga lahko pogleda v [6]. Za kompaktne mnogoterosti je dokaz krajši. Bralec ga najde v [4] na straneh 223-225, izrek II.7.

Opomba V izreku nismo navedli, ali gre za odprt ali zaprt obrobek. Vendar pa je prav lahko videti, da sta obstoja obeh obrobkov ekvivalentna.

Vsaka mnogoterost se torej krepko deformacijsko retraktira na podmnožico, na katero se krepko deformacijsko retraktira tudi njena notranjost. Od tod pa sledi, da sta za vsako mnogoterost M naslednji inkluziji homotopski ekvivalenci:

$$\begin{array}{ccc} \mathring{M} & \hookrightarrow & M \\ \mathring{M}^{\times} & \hookrightarrow & M^{\times} \end{array}$$

Torej lahko Thomov razred mnogoterosti $\mathring{M}$ enolično razširimo do elementa grupe $H^n(M^{\times})$. Temu elementu potem pravimo Thomov razred mnogoterosti M. Iz trditve 1.1.13 sledi, da je le-ta ravno tako enolično karakteriziran z enačbami 3, le točka p mora ležati v notranjosti.

Iz enačb 3 sledita naslednji trditvi:

Trditev 5 *Naj bo M orientirana mnogoterost in N podmnogoterost v M. Potem je Thomov razred, ki pripada orientaciji mnogoterosti N, podedovani od M, kar zožitev Thomovega razreda mnogoterosti M na N.*

Trditev 6 *Naj bosta M in N orientirani mnogoterosti in $f\colon M \to N$ homeomorfizem, ki ohrani orientacijo. Potem f^* preslika Thomov razred mnogoterosti N v Thomov razred mnogoterosti M.*

Naj bo M orientabilna mnogoterost. Naj bo s prerez, ki predstavlja orientacijo nad $\mathbb{Z}$. Naravni homomorfizem $\mathbb{Z} \to R$ porodi preslikavo, ki prerez s preslika v prerez $\bar{s}$, ki predstavlja orientacijo nad R. Naj bo $U \in H^n(M^{\times};\mathbb{Z})$ Thomov razred, ki pripada prerezu s. Tudi U lahko ustrezno preslikamo v element $\overline{U} \in H^n(M^{\times}; R)$. Iz dejstva, da so izomorfizmi iz izrekov o univerzalnih koeficientih naravne transformacije, formule 3 in trditve 1.1.14 sledi naslednji izrek.

Izrek 7 *Element $\overline{U}$ je Thomov razred, ki pripada prerezu $\bar{s}$.*

2.5 Fundamentalni razred

Ko smo definirali orientacijo mnogoterosti, smo imeli opravka z inkluzijami $(M, M \setminus V) \hookrightarrow (M, M - x)$. Pokazali bomo, da, če je M kompaktna mnogoterost, potem lahko okolico V razširimo kar na celo notranjost mnogoterosti.

Lema 1 *Naj bo M kompaktna n-mnogoterost in U odprta okolica njenega roba. Za vsako točko $p \in M \setminus U$ označimo z j_p inkluzijo $(M, U) \hookrightarrow (M, M - p)$. Naj bo $\xi \in H_n(M, U)$. Če je $j_{p*}(\xi) = 0$ za vsak $p \in M \setminus U$, je tudi $\xi = 0$.*

Ta lema je dokazana v [4] na strani 156 kot lema 6.8, in sicer za primer, ko je M brez roba, kolobar koeficientov pa je enak $\mathbb{Z}$. Posplošitev dokaza na mnogoterosti z robom in poljuben kolobar koeficientov R (ki ga bomo tudi v tem razdelku opuščali) pa ni težka.

Trditev 2 *Lema velja tudi za primer $U = \partial M$.*

DOKAZ Naj bo C odprt obrobek v M, ki ne vsebuje točke p. Označimo naslednji inkluziji:

$$(M, \partial M) \overset{j}{\hookrightarrow} (M, C) \overset{j_p}{\hookrightarrow} (M, M - p)$$

Le-ti na homologiji porodita preslikavi j_* in j_{p*}. Po lemi 1.2.3 je preslikava j_* izomorfizem. Naj bo $\xi \in H_n(M, \partial M)$. Če za vsak $p \in M \setminus W$ velja $j_{p*} j_* \xi = 0$, je tudi $j_* \xi = 0$, torej je tudi $\xi = 0$. ■

Naj bosta A in B topološka para in $i \colon A \hookrightarrow B$ inkluzija. Naj bo $\xi \in H_*(A)$ in $\alpha \in H^*(B)$. Označimo:

$$\xi\big|^B := i_* \xi \quad \alpha\big|_A := i^* \alpha$$

Naj bo i_* izomorfizem. Potem je tudi i^* izomorfizem. Naj bo $\eta \in H_*(B)$ in $\beta \in H^*(A)$. Označimo:

$$\eta\big|_A := i_*^{-1} \eta \quad \beta\big|^B := i^{*-1} \beta$$

Trditev 3 *Naj bo M kompaktna orientirana n-mnogoterost brez roba. Orientacijo naj predstavlja prerez s. Potem obstaja tak element $z \in H_n(M)$, da je $z\big|^{(M, M-p)} = s(p)$ za vsak $p \in M$.*

Trditev je dokazana v [4] na strani 157 kot lema 6.9. Iz opombe 2 sledi, da je element z, opisan v trditvi, en sam. Pravimo mu *fundamentalni razred* mnogoterosti M.

Nastane vprašanje, ali je pojem fundamentalnega razreda mogoče posplošiti tudi na mnogoterosti z robom. Odgovor je pritrdilen. Ena od možnih poti k posplošitvi vodi prek podvojitve mnogoterosti. Naj bo M mnogoterost z *nepraznim* robom. Iz izreka o obrobku sledi, da sta M_+ in M_- izrezljiva dvojica v $\widehat{M}$. Potem obstaja naslednje Mayer-Vietorisovo zaporedje:

$$\begin{gathered}\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_p(\partial M, \partial M) \xrightarrow{i_*} H_p(M_+, \partial M) \oplus H_p(M_-, \partial M) \xrightarrow{j_*} \\ \xrightarrow{j_*} H_p(\widehat{M}, \partial M) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(\partial M, \partial M) \xrightarrow{i_*} \ldots\end{gathered}$$

Trditev 4 *Preslikava $j_* \colon H_*(M_+, \partial M) \oplus H_*(M_-, \partial M) \to H_*(\widehat{M}, \partial M)$, definirana po predpisu*

$$(\xi_+, \xi_-) \mapsto \xi_+\big|^{(\widehat{M}, \partial M)} + \xi_-\big|^{(\widehat{M}, \partial M)}$$

je izomorfizem. Njegov inverz je preslikava, definirana po predpisu

$$\xi \mapsto \left(\xi\big|^{(\widehat{M}, M_-)}\big|_{(M_+, \partial M)}, \xi\big|^{(\widehat{M}, M_+)}\big|_{(M_-, \partial M)}\right)$$

DOKAZ Da je preslikava izomorfizem, sledi iz dejstva, da je $H_*(\partial M, \partial M) = 0$. Zato je dovolj dokazati, da je druga preslikava njegov levi inverz. To pa sledi iz enakosti:

$$\xi_\pm\big|^{(\widehat{M}, \partial M)}\big|^{(\widehat{M}, M_\pm)}\big|_{(M_\pm, \partial M)} = \xi_\pm\big|^{(M_\pm, M_\pm)}\big|^{(\widehat{M}, M_\pm)}\big|_{(M_\pm, \partial M)} = 0$$

$$\xi_\pm\big|^{(\widehat{M}, \partial M)}\big|^{(\widehat{M}, M_\mp)}\big|_{(M_\pm, \partial M)} = \xi_\pm\big|^{(\widehat{M}, M_\mp)}\big|_{(M_\pm, \partial M)} = \xi_\pm$$

■

Podobno iz kohomološkega Mayer-Vietorisovega zaporedja dobimo naslednjo trditev:

Trditev 5 *Preslikava* $j^*\colon H^*(\widehat{M}, \partial M) \to H^*(M_+, \partial M) \oplus H^*(M_-, \partial M)$*, definirana po predpisu*

$$\alpha \mapsto \left(\alpha\big|_{(M_+, \partial M)}, \alpha\big|_{M_-, \partial M)}\right)$$

je izomorfizem. Njegov inverz je preslikava, definirana po predpisu

$$(\alpha_+, \alpha_-) \mapsto \alpha_+\Big|^{(\widehat{M}, M_-)}\Big|_{(\widehat{M}, \partial M)} + \alpha_-\Big|^{(\widehat{M}, M_+)}\Big|_{(\widehat{M}, \partial M)}$$

To trditev pokažemo podobno kot prejšnjo, zato bomo njen dokaz opustili.

Naj bo zdaj M orientirana mnogoterost. Potem lahko tudi mnogoterost $\widehat{M}$ ustrezno orientiramo. Naj bo $\widehat{z}$ njen fundamentalni razred. Naj bo $(z_+, z_-) \in H_n(M_+, \partial M) \oplus H_n(M_-, \partial M)$ element, v katerega se z izomorfizmom iz trditve 4 preslika element $\widehat{z}\big|(\widehat{M}, \partial M)$. Elementa z_+ in z_- sta karakterizirana z enačbama:

$$\begin{aligned} z_+\Big|(\widehat{M}, M_-) &= \widehat{z}\Big|(\widehat{M}, M_-) \\ z_-\Big|(\widehat{M}, M_+) &= \widehat{z}\Big|(\widehat{M}, M_+) \end{aligned}$$

Od tod pa sledi, da je za vsako točko p iz $\mathring{M}_+$ (oziroma $\mathring{M}_-$) element $z_+\Big|(M_+, M_+ - p)$ (oziroma $z_-\Big|(M_-, M_- - p)$) ravno lokalna orientacija mnogoterosti M_+ (oziroma M_-) v točki p. Spomnimo se, da mnogoterost M_+ podeduje isto, mnogoterost M_- pa nasprotno orientacijo kot M. Iz trditve 2 potem sledi naslednji izrek.

Izrek 6 *Naj bo* M *kompaktna mnogoterost z orientacijo, ki jo predstavlja prerez* s*. Potem obstaja natanko en element* $z \in H_n(M, \partial M)$ *z lastnostjo, da je* $z\big|(M, M - p) = s(p)$ *za vsako točko* $p \in \mathring{M}$. Pravimo mu *fundamentalni razred* mnogoterosti M.

Trditev 7 *Naj bo* M povezana *kompaktna orientabilna mnogoterost in* $p \in \mathring{M}$*. Potem inkluzija* $(M, \partial M) \hookrightarrow (M, M - p)$ *porodi izomorfizem na vrhnji homologiji.*

Dokaz Ker se fundamentalni razred preslika v generator modula $H_n(M, M - p)$, je porojena preslikava surjektivna. Naj bo $w \in H_n(M, \partial M)$ in $w\big|(M, M - p) = 0$. Preslikava iz $\mathring{M}$ v $\widetilde{M}$, podana s predpisom $x \mapsto w\big|(\mathring{M}, \mathring{M} - x)$, je prerez orientacijskega svežnja, ki je v p enak 0. Ker je $\mathring{M}$ povezana, je ta prerez povsod enak 0. Po trditvi 2 je potem $w = 0$, torej je preslikava tudi injektivna. ■

Opomba *Grupa* $H_n(M, \partial M)$ *je torej prosto generirana z* z.

Trditev 8 *Naj bo* M *kompaktna orientabilna mnogoterost s komponentami* M_1, $M_2 \ldots \ldots M_k$*. Iz notranjosti vsake komponente* M_i *izberimo točko* p_i*. Potem je preslikava*

$$H_n(M, \partial M) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{k} H_n(M, M - p_i)$$

dobljena iz inkluzij, izomorfizem.

DOKAZ Naslednji diagram preslikav, dobljenih iz inkluzij, je komutativen:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^{k} H_n(M_i, \partial M_i) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & H_n(M, \partial M) \arrow[dl] \\
\bigoplus_{i=1}^{k} H_n(M_i, M_i - p_i) &
\end{tikzcd}$$

Iz prejšnje trditve sledi, da je navpična puščica izomorfizem. Tudi vodoravna puščica je izomorfizem. Potem pa je tudi poševna puščica izomorfizem. Po izreku o izrezu smemo $H_n(M_i, M_i - p_i)$ zamenjati s $H_n(M, M - p_i)$. Trditev je dokazana. ∎

Dokazali smo že, da je produkt orientabilnih mnogoterosti M in N dimenzij m in n tudi orientabilen in celo definirali produktno orientacijo. Če sta M in N kompaktni, jima lahko priredimo fundamentalna razreda z_M in z_N. Tudi produktu lahko priredimo fundamentalni razred $z_{M\times N}$, ki je element $(m+n)$-te homologije naslednjega para:

$$(M \times N, \partial(M \times N)) = (M \times N, (M \times \partial N) \cup (\partial M \times N)) = (M, \partial M) \times (N, \partial N)$$

Nastane vprašanje, ali je $z_{M\times N}$ kaj v zvezi z z_M in z_N. Naj bodo s_M, s_N in $s_{M\times N}$ prerezi ustreznih orientacijskih svežnjev. Potem za poljubni točki $p \in \mathring{M}$ in $q \in \mathring{N}$ velja enačba:

$$s_{M\times N}(p, q) = s_M(p) \times s_N(q)$$

Iz izreka 6 potem sledi:

$$\begin{aligned}(z_M \times z_N)\big|(M \times N, M \times N - (p, q)) &= z_M\big|(M, M - p) \times z_N\big|(N, N - q) = \\ &= s_M(p) \times s_N(q) = s_{M\times N}(p, q)\end{aligned}$$

Spet iz izreka 6 pa sledi, da je:

$$z_{M\times N} = z_M \times z_N \tag{9}$$

Oglejmo si, kako vpliva na fundamentalni razred zamenjava koeficientov. Naj bo M kompaktna mnogoterost, orientirana nad $\mathbb{Z}$. Naj bo z pripadajoči fundamentalni razred. Naj bo R poljuben kolobar. Orientaciji nad $\mathbb{Z}$ sveda pripada ustrezna orientacija nad R. Naj jo predstavlja prerez $\bar{s}$. Naj bo $\bar{z} \in H_n(M, \partial M; \mathbb{Z})$ element, ki po izreku o univerzalnih koeficientih pripada elementu z. Ker gre pri tem izreku za naravno transformacijo, za vsak $p \in \mathring{M}$ velja $\bar{z}\big|(M, M - p) = \bar{s}(p)$. Dokazali smo naslednjo trditev.

Trditev 10 *Naj bo M kompaktna orientabilna mnogoterost in z fundamentalni razred, ki pripada njeni orientaciji nad $\mathbb{Z}$. Element $\bar{z} \in H_n(M, \partial M; R)$, ki pripada elementu z po izreku o univerzalnih koeficientih, je ravno fundamentalni razred, ki pripada ustrezni orientaciji mnogoterosti M nad R.*

2.6 Fundamentalni razred podmnogoterosti

Naj bo M kompaktna mnogoterost, orientirana nad R, N pa njena kompaktna podmnogoterost iste dimenzije. Nastane vprašanje, ali obstaja kakšna zveza med njunima fundamentalnima razredoma z_M in z_N.

Lema 1 *Naj bosta M in N kot prej. Potem inkluzija $(N, \partial N) \hookrightarrow (M, M \setminus \mathring{N})$ na homologiji porodi izomorfizem.*

DOKAZ Naj bo V odprt obrobek v N. Potem je $N' := N \setminus V$ kompaktna množica, vsebovana v $\mathring{N}$. Naslednji diagram preslikav, dobljenih iz inkluzij, je komutativen:

$$\begin{tikzcd} & H_n(M, M \setminus \mathring{N}) \arrow[dr, "\cong"] & \\ H_n(N, \partial N) \arrow[ur] \arrow[r, "\cong"] & H_n(N, N \setminus N') \arrow[r, "\cong"] & H_n(M, M \setminus N') \end{tikzcd}$$

Množica $N \setminus N' = V$ se krepko deformacijsko retraktira na ∂N. Po izreku 1.2.3 je zato leva vodoravna puščica izomorfizem. Po izreku o invarianci odprtih množic je $\mathring{N}$ odprta množica, zato je $M \setminus \mathring{N}$ zaprta. Torej je $\{M \setminus \mathring{N}, N \setminus N'\}$ zaprto pokritje množice $M \setminus N'$, zato lahko krepko deformacijsko retrakcijo razširimo: tudi $M \setminus N'$ se krepko deformacijsko retraktira na $M \setminus \mathring{N}$, zato je tudi desna poševna puščica izomorfizem.

Množica N' je kompaktna, torej zaprta v M. Vsebovana je v odprti množici $\mathring{N}$. Zato sta N in N' izrezljiva dvojica v M, torej je tudi desna vodoravna puščica izomorfizem. Ker diagram komutira, je potem tudi leva poševna puščica izomorfizem, ravno to pa je bilo treba dokazati. ■

Izrek 2 *Naj bosta M in N kot prej. Potem z_N dobimo tako, da z_M preslikamo s kompozicijo*

$$H_n(M, \partial M) \longrightarrow H_n(M, M \setminus \mathring{N}) \xrightarrow{\cong} H_n(N, \partial N)$$

kjer je prva puščica dobljena iz inkluzije, druga pa je inverz izomorfizma iz prejšnje leme.

DOKAZ Naj bodo $N_1, N_2 \ldots N_k$ komponente mnogoterosti N. Iz notranjosti vsake komponente N_i izberimo točko p_i. Potem je naslednji diagram preslikav, dobljenih iz inkluzij, komutativen:

$$\begin{tikzcd} H_n(M, \partial M) \arrow[r] \arrow[dr] & H_n(M, M \setminus \mathring{N}) \arrow[d] & H_n(N, \partial N) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\cong"] \\ & \bigoplus_{i=1}^{k} H_n(M, M - p_i) & \bigoplus_{i=1}^{k} H_n(N, N - p_i) \arrow[l, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Ker je vodoravna puščica zgoraj desno izomorfizem, jo lahko obrnemo. Pri tem diagram ostane komutativen. Element $z_M \in H_n(M, \partial M)$ torej lahko preslikamo v modul $\bigoplus_{i=1}^{k} H_n(M, M - p_i)$ na dva načina: ali gremo naravnost ali pa čisto okoli. Obakrat dobimo isto. Isti element pa dobimo, če po diagramu preslikamo element $z_N \in H_n(N, \partial N)$. Kompozicija, s katero smo preslikali z_N, pa je izomorfizem. Od tod pa sledi, da, če z_M preslikamo po zgornji vrstici v diagramu, dobimo ravno z_N. To pa je bilo treba dokazati. ■

2.7 Fundamentalni razred roba

Naj bo M kompaktna mnogoterost z nepraznim robom, orientirana nad kolobarjem R. Potem je tudi njen rob kompaktna mnogoterost, ki od M podeduje orientacijo. Nastane vprašanje, ali obstaja kakšna povezava med fundamentalnima razredoma obeh mnogoterosti.

Najprej bomo fundamentalni razred roba povezali s fundamentalnim razredom $\widehat{z}$ mnogoterosti $\widehat{M}$. Izberimo poljubno točko $p \in \partial M$. Oglejmo si naslednji diagram:

$$\begin{array}{ccc} H_n(\widehat{M}) & \xrightarrow{(-1)^n\partial_*} & H_{n-1}(\partial M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(\widehat{M}, \widehat{M}-p) & \xrightarrow{(-1)^n\partial_*} & H_{n-1}(\partial M, \partial M - p) \end{array}$$

Zgornji vezni homomorfizem je iz Mayer-Vietorisovega zaporedja prostorov M_+ in M_-, spodnji pa je iz Mayer-Vietorisovega zaporedja parov $(M_+, M_+ - p)$ in $(M_-, M_- - p)$. Navpični puščici sta dobljeni iz inkluzij. Diagram je očitno komutativen. Postavimo v njegov zgornji levi kot element $\widehat{z}$! Označimo $z_\partial := (-1)^n\partial_*\widehat{z}$. Potem se $\widehat{z}$ preslika v lokalno orientacijo mnogoterosti $\widehat{M}$ v točki p, element z_∂ pa se preslika v ustrezno lokalno orientacijo mnogoterosti ∂M. Upoštevajoč definicijo naravne orientacije roba mnogoterosti, dobimo, da je z_∂ ravno fundamentalni razred mnogoterosti ∂M. Dokazali smo naslednji izrek.

Izrek 1 *Naj bo M kompaktna mnogoterost z nepraznim robom, orientirana nad kolobarjem R. Naj bo $\widehat{z}$ njen pripadajoči fundamentalni razred, z_∂ pa naj bo pripadajoči fundamentalni razred mnogoterosti ∂M. Naj bo ∂_* vezni homomorfizem Mayer-Vietorisovega zaporedja prostorov M_+ in M_-. Potem velja $z_\partial = (-1)^n\partial_*\widehat{z}$.*

Oglejmo si delovanje tega veznega homomorfizma še malo natančneje, na verigah.

$$\begin{array}{ccccc} & & \Delta_n(M_+) \oplus \Delta_n(M_-) & \xrightarrow{j} & \Delta_n(\widehat{M}) \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle\partial} & & \\ \Delta_{n-1}(\partial M) & \xrightarrow{i} & \Delta_{n-1}(M_+) \oplus \Delta_{n-1}(M_-) & & \end{array}$$

Zdaj pa se spomnimo elementa $(z_+, z_-) \in H_n(M_+, \partial M) \oplus H_-(M, \partial M)$, v katerega se z izomorfizmom iz trditve 2.5.4 preslika element $\widehat{z}\big|(\widehat{M}, \partial M)$. Izberimo točko $p \in \mathring{M}$. Videli smo že, da se z_+ in z_- s preslikavama, dobljenima iz ustreznih inkluzij, preslikata ravno v lokalni orientaciji mnogoterosti M_+ in M_- v točkah p_+ in p_-. Ker sta le-ti glede na naravno identifikacijo mnogoterosti M_+ in M_- ravno nasprotni, sta tudi z_+ in z_- ravno nasprotna. Zato imata nasprotna predstavnika $c_+ \in \Delta_n(M_+)$ in $c_- \in \Delta_n(M_-)$. Označimo $c_\partial := \partial c_+$. Očitno je $c_\partial \in \Delta_{n-1}(\partial M)$. Ker sta c_+ in c_- ravno nasprotna, je $\partial c_- = -c_\partial$. Iz trditve 2.5.4 sledi, da je $\widehat{c} := c_+ + c_-$ ravno predstavnik fundamentalnega razreda $\widehat{z}$ (to je tudi še en razlog, zakaj je $\partial c_- = -c_\partial$: veljati mora namreč $\partial(c_+ + c_-) = 0$). Vstavimo zdaj vse te elemente v gornji diagram! Dobimo:

$$\begin{array}{ccccc} & & (c_+, c_-) & \xrightarrow{j} & \widehat{c} \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle\partial} & & \\ c_\partial & \xrightarrow{i} & (c_\partial, -c_\partial) & & \end{array}$$

Od tod pa dobimo, da je $[c_\partial] = \partial_*[\widehat{c}]$. Če to primerjamo s trditvijo 1, dobimo, da je c_∂ ravno predstavnik fundamentalnega razreda z_∂, pomnoženega z $(-1)^n$.

Veriga $c_\partial = \partial c_+$ pa je ravno predstavnik homološkega razreda $\partial_* z_+$, kjer je $\partial_* \colon H_n(M_+, \partial M) \to H_{n-1}(\partial M)$ vezni homomorfizem dolgega homološkega zaporedja para $(M_+, \partial M)$. Od tod sledi še en izrek.

Izrek 2 *Naj bo M kompaktna mnogoterost z nepraznim robom, orientirana nad kolobarjem R. Njen rob naj bo naravno orientiran glede na M. Naj bosta z in z_∂ fundamentalnima razredama, ki pripadata orientacijama mnogoterosti M in ∂M. Naj bo ∂_* vezni homomorfizem dolgega homološkega zaporedja para $(M_+, \partial M)$. Potem velja $z_\partial = (-1)^n \partial_* z$.*

2.8 Stopnja preslikave

Definicija Naj bosta M in N orientirani n-mnogoterosti. Mnogoterost M naj bo kompaktna. Naj bo $V \subset M$. Dana naj bo preslikava $f \colon V \to M$. Naj bo množica $C \subset \operatorname{Int} V \cap \mathring{M}$ zaprta v M. Obstaja naj taka točka $y \in \mathring{N}$, da je $C = f^{-1}(\{y\})$. Naj bo z fundamentalni razred mnogoterosti M, ω pa lokalna orientacija mnogoterosti N v točki y. Preslikajmo z z naslednjo kompozicijo:

$$H_n(M, \partial M) \longrightarrow H_n(M, M \setminus C) \xrightarrow{\cong} H_n(V, V \setminus C) \xrightarrow{f_*} H_n(N, N - y)$$

Prva puščica je porojena z inkluzijo, druga pa z izrezom. *Za kolobar koeficientov bomo do konca razdelka privzeli, da je enak $\mathbb{Z}$.* Dobimo element $k\,\omega$ za neko celo število k. Temu številu pravimo *lokalna stopnja* preslikave f na množici C in ga označimo z $\deg_C f$.

Če C vsebuje eno samo točko x, stopnjo označimo tudi z $\deg_x f$. V tem primeru ni treba zahtevati, da je mnogoterost M kompaktna. V kompoziciji namreč lahko začnemo šele pri drugem členu $H_n(M, M \setminus C) = H_n(M, M - x)$ in vanj vstavimo lokalno orientacijo mnogoterosti M v točki x.

Opomba Če je $M = N$, je vseeno, kako orientiramo mnogoterosti, le obakrat je treba vzeti isto orientacijo.

V oznaki stopnje preslikave nastopa le množica C, ne pa tudi njena okolica V. Vendar stopnja ni odvisna od okolice. Velja namreč naslednja trditev.

Trditev 1 *Stopnja preslikave je lokalna lastnost. Natančneje, naj bosta M in N kot prej. Naj bosta V_1 in V_2 podmnožici v M. Dani naj bosta preslikavi $f_1 \colon V_1 \to N$ in $f_2 \colon V_2 \to N$. Označimo $V := V_1 \cap V_2$ in naj bo $f_1|_V = f_2|_V$. Naj bo $y \in \mathring{N}$ in $C = f_1^{-1}(\{y\}) = f_2^{-1}(\{y\})$. Množica C naj bo zaprta v M in vsebovana v $\mathring{M} \cap \operatorname{Int} V$. Potem velja* $\deg_C f_1 = \deg_C f_2$.

Dokaz Naslednji diagram, v katerem so puščice, ki so označene kot izomorfizmi, dobljene iz inkluzij, je komutativen:

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(V_1, V_1 \setminus C) \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "f_{1*}"] & \\
H_n(M, M \setminus C) & H_n(V, V \setminus C) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[u, "\cong"] \arrow[d, "\cong"] \arrow[r, "f_*"] & H_n(N, N - y) \\
 & H_n(V_2, V_2 \setminus C) \arrow[ul, "\cong"] \arrow[ur, "f_{2*}"'] &
\end{tikzcd}$$

V diagramu lahko puščice, ki so izomorfizmi, po potrebi obrnemo. Sledi komutativnost naslednjega diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(V_1, V_1 \setminus C) \arrow[dr, "\cong"] & \\
H_n(M, M-x) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"'] & & H_n(N, N-y) \\
 & H_n(V_2, V_2 \setminus C) \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Od tod pa že sledi enakost $\deg_C f_1 = \deg_C f_2$. ■

Opomba 2 *Stopnja preslikave na prazni množici je enaka* 0.

Opomba 3 *Homeomorfizmi, ki ohranijo orientacijo, ohranijo tudi lokalno stopnjo, homeomorfizmi, ki jo prevržejo, pa ji spremenijo predznak.* Natančneje, naj bodo M, M', N in N' orientirane mnogoterosti iste dimenzije. Mnogoterosti M in M' naj bosta kompaktni. Dana naj bosta homeomorfizma $g\colon M' \to M$ in $h\colon N \to N'$. Naj bo $V \subset M$ in $y \in \mathring{N}$. Dana naj bo preslikava $f\colon V \to N$. Množica $C := f^{-1}(\{y\})$ naj bo zaprta v M in vsebovana v $\operatorname{Int} V \cap \mathring{M}$. Naj bo $C' := g^{-1}(C)$. Potem je $\deg_{C'}(h \circ f \circ g) = \pm \deg_C f$. Predznak se ohrani, če homeomorfizma g in h bodisi oba ohranita bodisi oba obrneta orientacijo, drugače pa se prevrže.

Izrek 4 *Lokalna stopnja je neodvisna od ambientne mnogoterosti. Natančneje, naj bo M' kompaktna podmnogoterost kompaktne orientirane mnogoterosti M, N' pa podmnogoterost orientirane mnogoterosti N. Vse mnogoterosti naj imajo dimenzijo n. Naj bo $V \subset M'$. Dana naj bo preslikava $f\colon V \to N'$. Naj bo $y \in \mathring{N}$'. Množica $C := f^{-1}(\{y\})$ naj bo vsebovana v $\operatorname{Int} V \cap \mathring{M}$' in zaprta v M'. Potem je stopnja preslikave f na množici C glede na mnogoterosti M' in N' enaka stopnji glede na mnogoterosti M in N.*

Dokaz Naslednji diagram preslikav, dobljenih iz inkluzij in njihovih inverzov, je komutativen:

$$\begin{tikzcd}
H_n(M, \partial M) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(M, M \setminus C) \arrow[dr, "\cong"] & \\
H_n(M, M \setminus \mathring{M}') \arrow[ur] & & H_n(V, V \setminus C) \\
H_n(M', \partial M') \arrow[u, "\cong"'] \arrow[r] & H_n(M', M' \setminus C) \arrow[uu, "\cong"] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Spomnimo se izreka 2.6.2, ki pravi, da, če po diagramu preslikamo fundamentalni razred $z_M \in H_n(M, \partial M)$ v grupo $H_n(M', \partial M')$, potem dobimo ravno fundamentalni razred mnogoterosti M'. Naslednji diagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(N, N-y) \\
H_n(V, V \setminus C) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & \\
 & H_n(N', N'-y) \arrow[uu, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Iz komutativnosti obeh diagramov pa že sledi naš izrek. ■

Trditev 5 *Lokalna stopnja je aditivna. Natančneje, naj bodo $V_1, \ldots V_k$ podmnožice mnogoterosti M in $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$. Dana naj bo preslikava $f\colon V \to N$. Označimo*

$f_i := f|_{V_i}$. Naj bo $y \in \mathring{N}$. Množice $C_i := f_i^{-1}(\{y\})$ naj bodo disjunktne, zaprte v M in vsebovane v $\operatorname{Int} V_i \cap \mathring{M}$. Potem je $\deg_C f = \sum_{i=1}^k \deg_{C_i} f_i$.

Dokaz Ker je M normalen prostor, obstajajo take disjunktne odprte množice $W_1, \ldots$ $\ldots W_k$, da je $C_i \subset W_i \subset V_i$ za vsak i. Označimo $W := \bigcup_{i=1}^k W_i$. Po trditvi 1 lahko stopnje izračunamo tudi glede na okolice W in W_i. Označimo še $C := \bigcup_{i=1}^k C_i$. Naslednji diagram preslikav, dobljenih iz inkluzij, je komutativen:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^k H_n(M, M \setminus C_i) & \bigoplus_{i=1}^k H_n(W_i, W_i \setminus C_i) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\cong"] \\
H_n(M, M \setminus C) \arrow[u] & H_n(W, W \setminus C) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Vse puščice v diagramu so izomorfizmi, torej jih lahko po mili volji obračamo, diagram pa bo še vedno ostal komutativen. Dobimo naslednji komutativen diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{i=1}^k H_n(M, M \setminus C_i) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"] & \bigoplus_{i=1}^k H_n(W_i, W_i \setminus C_i) \arrow[dr, "\sum f_{i*}"] & \\
H_n(M, \partial M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & H_n(N, N-y) \\
 & H_n(M, M \setminus C) \arrow[r, "\cong"'] & H_n(W, W \setminus C) \arrow[uu, "\cong"'] \arrow[ur, "f_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Trditev je dokazana. ■

Trditev 6 *Lokalna stopnja je homotopsko invariantna. Natančneje, naj bosta M in N kot prej in $W \subset M$. Dana naj bo homotopija $F\colon W \times I \to N$. Označimo $f_t(x) := F(x,t)$. Naj bo $y \in \mathring{N}$ in $C_t := f_t^{-1}(\{y\})$. Množica $C := \bigcup_{t \in I} C_t$ naj bo zaprta v M. Potem velja $\deg_{C_0} f_0 = \deg_{C_1} f_1$.*

Opomba 7 *Če je $W = M$, je množica C avtomatično zaprta.* Množica $C' := F^{-1}(\{y\})$ je namreč zaprta v $M \times I$, torej kompaktna. Množica C je projekcija množice C' na M, zato je kompaktna, torej zaprta v M.

Dokaz trditve Ker je M normalen prostor, obstaja taka odprta množica V, da je $C \subset V \subset \overline{V} \subset W$. Za vsak $t \in I$ komutira naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(M, M \setminus V) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & H_n(W, W \setminus V) \arrow[d] \arrow[dr, "f_{t*}"] & \\
H_n(M, \partial M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & H_n(N, N-y) \\
 & H_n(M, M \setminus C_t) \arrow[r, "\cong"] & H_n(W, W \setminus C_t) \arrow[ur, "f_{t*}"'] &
\end{tikzcd}$$

Torej lahko za vsak $t \in I$ indeks $I(W; f_t, g_t)$ dobimo tudi z zgornjo kompozicijo. Ker so si vse preslikave $f_t\colon (W, W \setminus V) \to (N, N-y)$ homotopne, morajo biti vse stopnje $\deg_{C_t} f_t$ enake. ■

Iz definicije lokalne stopnje in trditev 1.3.9 in 2.5.9 po kratkem premisleku sledi še naslednja trditev:

Trditev 8 *Naj bodo M in N kompaktni orientirani mnogoterosti dimenzije n, M' in N' pa kompaktni orientirani mnogoterosti dimenzije n'. Naj bo $V \subset M$ in $V' \subset M'$. Dani* *naj bosta preslikavi $f\colon V \to N$ in $f'\colon M' \to N'$. Definirajmo preslikavo $f \times f'\colon M \times M' \to N \times N'$ po predpisu $(f \times f')(x, x') := (f(x), f'(x'))$. Naj bosta $C \subset \mathring{M}$ in $C' \subset \mathring{M}$' taki množici, da je na njiju mogoče definirati ustrezni stopnji. Potem velja formula:*

$$\deg_{C\times C'}(f \times f') = \deg_C f \, \deg_{C'} f'$$

Posvetimo se zdaj lokalnim stopnjam v točkah. Očitna je naslednja trditev:

Trditev 9 *Stopnja kompozituma je enaka produktu stopenj obeh preslikav. Natančneje, naj bodo M, N in P orientirane mnogoterosti iste dimenzije in naj bo $x \in \mathring{M}$, $y \in \mathring{N}$ in $z \in \mathring{P}$. Naj bo V okolica točke x, W pa okolica točke y. Dani naj bosta preslikavi $f\colon (V, x) \to (W, y)$ in $g\colon (W, y) \to (P, z)$. Naj bo $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$ in $g^{-1}(\{z\}) = \{y\}$. Potem je $\deg_x(g \circ f) = \deg_x f \, \deg_y g$.*

Posledica 10 *Stopnja lokalnega homeomorfizma v dani točki je lahko enaka le $+1$ ali -1.* Glede na to pravimo, da lokalni homeomorfizem *ohrani* ali *obrne* orientacijo.

Posledica 11 *Če preslikavo z lokalnima kartama, ki ohranita orientacijo, prenesemo na evklidski prostor, se njena stopnja ne spremeni.* Ker ima vsaka mnogoterost atlas iz kart, ki ohranijo orientacijo, je za poznavanje lokalnih stopenj preslikav med mnogoterostmi dovolj poznati lokalne stopnje preslikav med evklidskimi prostori.

Opomba Za (globalne) homeomorfizme med povezanimi mnogoterostmi smo že dokazali, da bodisi v vseh točkah ohranijo bodisi v vseh točkah obrnejo orientacijo. Malo kasneje bomo to še posplošili.

Znano je, da se da vsaka diferenciabilna preslikava lokalno aproksimirati z linearno preslikavo. Izkaže se, da sta stopnji obeh preslikav v dani točki enaki. Velja namreč naslednja trditev.

Trditev 12 *Naj bo V okolica točke 0 v $\mathbb{R}^n$. Dana naj bo preslikava $f\colon (V, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, ki naj bo v 0 diferenciabilna, njen odvod pa naj ne bo izrojen. Potem obstaja taka okolica W točke 0, vsebovana v V, da je stopnja zožitve preslikave f na množico W dobro definirana. Njena absolutna vrednost je enaka 1, njen predznak pa je enak predznaku determinante odvoda v točki 0.*

Dokaz Označimo odvod preslikave f v točki 0 z A. Ker ni izrojen, je število $\mu := \inf\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ večje od 0. Torej obstaja taka okolica W točke 0, vsebovana v V, da za vsak $x \in W$ velja

$$\frac{\|f(x) - Ax\|}{\|x\|} < \mu$$

Od tod pa sledi, da je $\|f(x) - Ax\| < \|Ax\|$. Torej daljica od $f(x)$ do Ax ne gre skozi 0. Preslikavi f in A sta si torej premočrtno homotopni kot preslikavi $(W, W - 0) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$, zato imata v 0 isti stopnji. ■

Opomba Če je odvod izrojen, se o stopnji ne da povedati prav nič. Na koncu razdelka bomo za vsako celo število k konstruirali preslikavo, katere odvod v 0 je izrojen, stopnja pa je enaka k.

Do zdaj smo se ukvarjali z lokalnimi stopnjami. Za preslikave med kompaktnimi povezanimi mnogoterostmi pa je mogoče definirati tudi globalno stopnjo.

Definicija Naj bosta M in N kompaktni orientirani mnogoterostmi s pripadajočima fundamentalnima razredoma z_M in z_N. Mnogoterost N naj bo povezana. Dana naj bo preslikava $f\colon (M, \partial M) \to (N, \partial N)$. Po trditvi 2.5.7 obstaja tako celo število k, da je $f_*(z_M) = k\, z_N$. Številu k pravimo *stopnja preslikave f na mnogoterosti M* in ga označimo z $\deg f$.

Opomba Če je $M = N$, je vseeno, kako orientiramo mnogoterosti, le obakrat je treba vzeti isto orientacijo.

Opomba Stopnja homeomorfizma, ki ohrani orientacijo, je enaka 1, stopnja homeomorfizma, ki obrne orientacijo, pa je enaka -1.

Opomba Podobno kot za lokalno stopnjo tudi za globalno stopnjo velja formula:

$$\deg(f \times g) = \deg f \ \deg g$$

Lokalna in globalna stopnja sta povezani. Velja namreč naslednja trditev.

Trditev 13 *Maj bodo M, N in f kot prej. Naj bo $y \in \mathring{N}$ in $C = f^{-1}(\{y\})$. Očitno je C zaprta v M in vsebovana n $\mathring{M}$. Potem velja* $\deg f = \deg_C f$.

Dokaz Trditev takoj sledi iz komutativnosti naslednjega diagrama, v katerem sta vodoravni puščici dobljeni iz inkluzij:

$$\begin{array}{ccc}
H_n(M, \partial M) & \longrightarrow & H_n(M, M \setminus C) \\
{\scriptstyle f_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_*} \\
H_n(N, \partial N) & \longrightarrow & H_n(N, N - y)
\end{array}$$

■

Posledica 14 (Kroneckerjev izrek) *Vsaka preslikava z neničelno stopnjo je surjektivna.*

Dokaz Naj bo stopnja preslikave različna od 0. Trdimo: njena slika vsebuje celotno notranjost mnogoterosti N. V nasprotnem primeru bi namreč obstajala taka točka $y \in \mathring{N}$, da bi bilo $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$, potem pa bi veljalo $\deg f = \deg_\emptyset f = 0$.

Ker je mnogoterost M kompaktna, je njena slika zaprta v N, torej mora vsebovati celotno mnogoterost. Preslikava f je res surjektivna. ■

Posledica 15 *Naj bodo M, N in f kot prej. Naj bo $y \in \mathring{N}$ in*

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x_1, x_2 \dots x_k\} \subset \mathring{M}$$

Potem je $\deg f = \sum_{i=1}^k \deg_{x_i} f$.

Pravkar smo ugotovili, kako se globalna stopnja izraža z lokalno. V $\mathbb{R}^n$ pa obstaja še izražava lokalne stopnje z globalno stopnjo, pri čemer se dimenzija zniža za 1. Lokalno stopnjo bomo izrazili s stopnjo na S^{n-1}.

Naj bo V okolica točke $0 \in \mathbb{R}^n$. Dana naj bo preslikava $f\colon (V, V - 0) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$. Obstaja tak $r > 0$, da je $r\, B^n \subset V$. Definirajmo preslikavo $\varphi\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ po predpisu:

$$\varphi(x) := \frac{f(rx)}{\|f(rx)\|}$$

Izrek 16 *Naj bo $n > 1$. Potem je* $\deg_0 f = \deg \varphi$.

DOKAZ Oglejmo si del dolgega homološkega zaporedja para $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$:

$$\ldots \to H_n(\mathbb{R}^n) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\mathbb{R}^n - 0) \to H_{n-1}(\mathbb{R}^n) \to \ldots$$

Prvi in zadnji element prikazanega dela zaporedja sta ničelna, zato je vezni homomorfizem izomorfizem. To velja tudi, če $\mathbb{R}^n$ zamenjamo z B^n. V tem primeru označimo vezni homomorfizem z ∂'_*. Označimo z ρ naravno retrakcijo $R^n - 0 \to S^{n-1}$, z i inkluzijo $S^{n-1} \to B^n - 0$, z μ množenje z r, z f' pa preslikavo, ki deluje po predpisu $x \mapsto f(rx)$. Potem je naslednji diagram komutativen:

$$\begin{array}{ccc}
H_n(r\,B^n, r\,B^n - 0) & \xrightarrow{f_*} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \\
\cong\uparrow\mu_* & & \| \\
H^n(B^n, B^n - 0) & \xrightarrow{f'_*} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \\
\cong\uparrow{\partial'_*}^{-1} & & \partial_*\downarrow\cong \\
H_{n-1}(B^n - 0) & \xrightarrow{f'_*} & H_{n-1}(\mathbb{R}^n - 0) \\
\cong\uparrow i_* & & \rho_*\downarrow\cong \\
H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_{n-1}(S^{n-1})
\end{array}$$

Naj bo prostor $\mathbb{R}^n$ naravno orientiran. Od njega podedujeta orientacijo tudi B^n in $r\,B^n$. Preslikava $\mu_* \circ {\partial'_*}^{-1} \circ i_*$ je izomorfizem, zato lahko sfero S^{n-1} orientiramo tako, da ta preslikava ohrani orientacijo, t. j. fundamentalni razred sfere preslika ravno v naravno lokalno orientacijo prostora $r\,B^n$. Preslikava $\mu\colon (B^n, B^n - 0) \to (rB^n, rB^n - 0)$ ohrani orientacijo, saj jo ohrani tudi kot preslikava $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$. Zato tudi preslikava ${\partial'_*}^{-1} \circ i_*$ ohrani orientacijo. Naslednji diagram je komutativen:

$$\begin{array}{ccc}
H_n(B^n, B^n - 0) & \xrightarrow{j_*} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \\
\cong\downarrow\partial'_* & & \partial_*\downarrow\cong \\
H_n(B^n - 0) & \xrightarrow{\kappa_*} & H_n(\mathbb{R}^n - 0)
\end{array}$$

Preslikavi j in κ sta inkluziji. Preslikava j ohrani orientacijo, zato jo ohrani tudi $j_* \circ {\partial'_*}^{-1} \circ i_*$. Ker diagram komutira, tudi $\partial_*^{-1} \circ \kappa_* \circ i_*$ ohrani orientacijo.

Preslikavi $\kappa \circ i$ in ρ sta si homotopsko inverzni, zato je preslikava $\partial_*^{-1} \circ \kappa_* \circ i_*$ inverz preslikave $\rho_* \circ \partial_*$, torej tudi slednja ohrani orientacijo. Iz prvega diagrama zdaj vidimo, da je izrek dokazan. ■

Za $n = 1$ izreka ne moremo formulirati v tej obliki, saj S^0 ni povezan prostor. Pač pa velja naslednja trditev:

Trditev 17 *Naj bo V interval na realni osi in 0 njegova notranja točka. Dana naj bo preslikava $f\colon (V, V - 0) \to (\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0)$. Očitno preslikava f poljubni števili z istim predznakom preslika v števili z istim predznakom. Če f vsem številom ohrani predznak, je njena stopnja enaka* 1. *Če f vsem številom prevrže predznak, je njena stopnja enaka* -1. *Drugače pa ima f stopnjo 0.*

DOKAZ V prvem primeru je f premočrtno homotopna identiteti, v drugem primeru je homotopna zrcaljenju prek ničle, v tretjem primeru pa je homotopna konstanti 1, v vseh primerih seveda kot preslikava $(V, V - 0) \to (\mathbb{R}, \mathbb{R} - 0)$. ■

Opomba 18 Trditev je mogoče povedati še malo drugače. Naj bo $[-r, r] \subset V$. Konstruirajmo spet preslikavo $\varphi\colon S^0 \to S^0$ po predpisu $\varphi(x) := \frac{f(rx)}{\|f(rx)\|}$. Potem je stopnja preslikave f enaka kar vsoti vseh elementov, ki jih φ preslika v 1.

Oglejmo si še, kaj se zgodi pri $n = 0$. V tem primeru gre za preslikavo $\{0\} \to \{0\}$, katere stopnja je očitno enaka 1.

Za konec si oglejmo še preprost zgled. Identificirajmo $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ in definirajmo naslednje preslikave $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ oziroma $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} f_p(z) &:= z^p \\ g_p(z) &:= \bar{z}^p \\ h(x,y) &:= (x, y^2) \end{aligned}$$

Preslikave f_p in g_p so dobro definirane za $p \in \mathbb{N}$. Z uporabo posledice 15 in izreka 16 se lahko prepričamo, da je stopnja preslikav f_p v točki 0 enaka p, stopnja preslikav g_p pa $-p$. Preslikava h je kot preslikava $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 - 0) \to (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 - 0)$ premočrtno homotopna konstanti 1, zato je njena stopnja enaka 0.

Definirajmo še preslikavo $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ po predpisu $\varphi(x, y) := (x^3, y^3)$. Definirajmo $f'_p := \varphi \circ f_p$ in $g'_p := \varphi \circ g_p$. Preslikave f'_p so homotopne preslikavam f_p, preslikave g'_p pa prelikavam g_p, vse kot preslikave $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 - 0) \to (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2 - 0)$. Zato se njihove stopnje ohranijo. Preslikave f'_p, g'_p in h so vse diferenciabilne, njihovi odvodi v 0 pa so enaki 0. Njihove stopnje zajemajo vsa cela števila. Torej se v primeru, ko je odvod izrojen, o stopnji brez dodatnih informacij res ne da nič povedati.

2.9 Poincaré-Lefschetzova dualnost

Izrek 1 (Poincaréjeva dualnost) *Naj bo M kompaktna n-mnogoterost brez roba, orientirana nad kolobarjem R. Naj bo z njen pripadajoči fundamentalni razred. Potem je preslikava $H^p(M) \to H_{n-p}(M)$, definirana po predpisu $\alpha \mapsto \alpha \frown z$, izomorfizem za vsak $p \in \mathbb{Z}$.* Za kolobar koeficientov bomo do konca razdelka privzeli, da je enak R.

Izrek je dokazan v [4] na strani 165 kot izrek 6.18. Naša naloga bo ta izrek posplošiti na mnogoterosti z robom in ugotoviti povezave med dualnostmi na M, $\widehat{M}$ in ∂M.

Naj bo M kompaktna n-mnogoterost z nepraznim robom, orientirana nad kolobarjem R. Naj bo z njen pripadajoči fundamentalni razred. Predpis $\alpha \mapsto \alpha \frown z$ določa dve preslikavi:

$$\begin{aligned} H^p(M, \partial M) &\longrightarrow H_{n-p}(M) \\ H^p(M) &\longrightarrow H_{n-p}(M, \partial M) \end{aligned}$$

Pokazali bomo, da je prva preslikava izomorfizem. Na isti način se da pokazati tudi, da je druga preslikava izomorfizem, vendar tega dejstva ne bomo potrebovali. Dejstvu, da sta obe preslikavi izomorfizma, pravimo *Poincaré-Lefschetzova dualnost.*

Trditev 2 (Združljivost Poincaréjeve in Poincaré-Lefschetzove dualnosti) *Naj bo M kompaktna mnogoterost z nepraznim robom, orientirana nad kolobarjem R. Naj bo z njen fundamentalni razred, z_∂ pa naj bo fundamentalni razred roba s podedovano* *orientacijo. Označimo z i inkluzijo $\partial M \hookrightarrow M$, z δ^* pa vezni homomorfizem dolgega kohomološkega zaporedja para $(M, \partial M)$. Potem naslednji diagram komutira:*

$$\begin{tikzcd}
H^{p-1}(\partial M) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "\frown z_\partial"] & H^p(M, \partial M) \arrow[d, "\frown z", "(-1)^p"'] \\
H_{n-p}(\partial M) \arrow[r, "i_*"] & H_{n-p}(M)
\end{tikzcd}$$

Dokaz Po izreku 2.7.2 je $z_\partial = (-1)^n \partial_* z$. Iz izreka 1.5.12 sledi enakost

$$\delta^* \alpha \frown z = (-1)^{n-p} i_*(\alpha \frown \delta_* z)$$

Iz obeh enakosti že sledi komutativnost diagrama. ■

Oglejmo si zdaj dolgo kohomološko zaporedje para $(\widehat{M}, \partial M)$. V skladu s trditvijo 2.5.5 ga lahko predelamo v naslednje eksaktno zaporedje:

$$\begin{aligned}
\ldots \xrightarrow{i^*} H^{p-1}(\partial M) \xrightarrow{\delta'^*} H^p(M_+, \partial M) \oplus H^p(M_-, \partial M) \xrightarrow{j^*} \\
\xrightarrow{j^*} H^p(\widehat{M}) \xrightarrow{i^*} H^p(\partial M) \xrightarrow{\delta'^*} \ldots
\end{aligned}$$

Preslikava i^* je porojena z inkluzijo. Iz trditve 2.5.5 sledi, da j^* deluje po predpisu

$$(\alpha_+, \alpha_-) \mapsto \alpha_+ \Big|(\widehat{M}, M_-)\Big|_{\widehat{M}} + \alpha_- \Big|(\widehat{M}, M_+)\Big|_{\widehat{M}}$$

Naj bodo δ^*, δ_+^* in δ_-^* vezni homomorfizmi dolgih homoloških zaporedij parov $(\widehat{M}, \partial M)$, $(M_+, \partial M)$ in $(M_-, \partial M)$. Iz funktorialnosti takih zaporedij sledi komutativnost naslednjega diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & H^p(M_+, \partial M) \\
H^{p-1}(\partial M) \arrow[ur, "\delta_+^*"] \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[dr, "\delta_-^*"'] & H^p(M, \partial M) \arrow[u] \arrow[d] \\
 & H^p(M_-, \partial M)
\end{tikzcd}$$

Navpični puščici sta dobljeni iz inkluzij. Iz diagrama dobimo, da je preslikava (δ_+^*, δ_-^*) enaka kompoziciji

$$H^{p-1}(\partial M) \xrightarrow{\partial^*} H^p(\widehat{M}, \partial M) \xrightarrow{\cong} H^p(M_+, \partial M) \oplus H^p(M_-, \partial M)$$

kjer je druga preslikava ravno izomorfizem iz trditve 2.5.5. Torej je preslikava δ'^* enaka kar (δ_+^*, δ_-^*).

Oglejmo si zdaj naslednjo eksaktno lestev:

$$\begin{tikzcd}
\ldots & H^{p-1}(\partial M) \arrow[r, "\delta'^*"] \arrow[d, "\frown z_\partial"] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{A}"] & H^p(M_+^\partial) \oplus H^p(M_-^\partial) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\frown (z_+, z_-)"] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{B}"] & H^p(\widehat{M}) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\frown \widehat{z}"] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{C}"] & H^p(\partial M) \arrow[d, "\frown z_\partial"] & \ldots \\
\ldots & H_{n-p}(\partial M) \arrow[r, "\varphi_*"'] & H_{n-p}(M_+) \oplus H_{n-p}(M_-) \arrow[r, "\psi_*"'] & H_{n-p}(\widehat{M}) \arrow[r, "\partial_*"'] & H_{n-p-1}(\partial M) & \ldots
\end{tikzcd}$$

Z M_+^∂ in M_-^∂ smo označili para $(M_+, \partial M)$ in $(M_-, \partial M)$. Zgornja vrstica je naše prirejeno eksaktno zaporedje, spodnja vrstica pa je Mayer-Vietorisovo zaporedje dvojice prostorov M_+ in M_-.

Trditev 3 *Lestev komutira do predznaka natančno. Menjava predznaka je odvisna samo od položaja v lestvi in dimenzije mnogoterosti, ne pa tudi od njenih drugih lastnosti.*

DOKAZ *Kvadrat* **A** *komutira, če eno kompozicijo pomnožimo z* $(-1)^p$. Najprej se spomnimo, da veljata naslednji enakosti:

$$\begin{aligned} \varphi_*(\xi) &= \left(\xi\big|M_+, -\xi\big|M_-\right) \\ \delta^*(\alpha) &= (\delta_+^*(\alpha), \delta_-^*(\alpha)) \end{aligned}$$

Element z_+ predstavlja fundamentalni razred mnogoterosti M, element z_- pa ravno njegovo nasprotno vrednost. Naša trditev potem sledi iz trditve 2.

Kvadrat **B** *komutira.* Spomnimo se enačb:

$$\begin{aligned} z_+\Big|(\widehat{M}, M_-) &= \widehat{z}\Big|(\widehat{M}, M_-) \\ z_-\Big|(\widehat{M}, M_+) &= \widehat{z}\Big|(\widehat{M}, M_+) \end{aligned}$$

Iz funktorialnosti cap produkta (glej trditev 1.5.9) sledi naslednja veriga enakosti:

$$\begin{aligned} &\psi_*(\alpha_+ \frown z_+ + \alpha_- \frown z_-) = (\alpha_+ \frown z_+)\Big|\widehat{M} + (\alpha_- \frown z_-)\Big|\widehat{M} = \\ &= \alpha_+\Big|(\widehat{M}, M_-) \frown z_+\Big|(\widehat{M}, M_-) + \alpha_-\Big|(\widehat{M}, M_+) \frown z_-\Big|(\widehat{M}, M_+) = \\ &= \alpha_+\Big|(\widehat{M}, M_-) \frown \widehat{z}\Big|(\widehat{M}, M_-) + \alpha_-\Big|(\widehat{M}, M_+) \frown \widehat{z}\Big|(\widehat{M}, M_+) = \\ &= \alpha_+\Big|(\widehat{M}, M_-)\Big|_{\widehat{M}} \frown \widehat{z} + \alpha_-\Big|(\widehat{M}, M_+)\Big|_{\widehat{M}} \frown \widehat{z} = j_*(\alpha_+, \alpha_-) \frown \widehat{z} \end{aligned}$$

Začetek in konec te verige enakosti pa pomenita ravno komutativnost kvadrata **B**.

Kvadrat **C** *komutira, če eno kompozicijo pomnožimo z* $(-1)^n$. Po izreku 2.7.1 je namreč $z_\partial = (-1)^n \widehat{z}$, po izreku 1.5.11 pa je $\partial_*(\alpha \frown \widehat{z}) = i^*\alpha \frown \partial_*\widehat{z}$. ■

Opomba Pozoren bralec je morda opazil, da se popravki predznakov ne skladajo s tistimi iz [1]. To je zato, ker je avtor privzel definicijo orientacije roba mnogoterosti brez faktorja $(-1)^n$, privzel pa je tudi definicijo korobnega operatorja iz [5], kjer je le-ta definiran po predpisu $(\delta^*\varphi)(x) := (-1)^{\deg x}\varphi(\partial x)$.

Izrek 4 (Poincaré-Lefschetzova dualnost) *Naj bo M kompaktna n-mnogoterost, orientirana nad kolobarjem R. Naj bo z njen pripadajoči fundamentalni razred. Potem sta preslikavi $H^p(M, \partial M) \to H_{n-p}(M)$ in $H^p(M) \to H_{n-p}(M, \partial M)$, definirani po predpisu $\alpha \mapsto \alpha \frown z$, izomorfizma za vsak p.*

DOKAZ Če je M brez roba, je izrek kar Poincaréjeva dualnost. Naj bo $\partial M \neq \emptyset$. Iz naše eksaktne lestve, Poincaréjeve dualnosti in leme o petero homomorfizmih sledi, da je prva preslikava izomorfizem. S konstrukcijo podobne eksaktne lestve lahko dokažemo, da je tudi druga preslikava izomorfizem. Slednje je mogoče tudi izpeljati iz dejstva, da je prva preslikava izomorfizem (glej [4], stran 172). ■

Oglejmo si zdaj še primer, ko je R obseg.

Izrek 5 *Naj bo M kompaktna mnogoterost, orientabilna nad kolobarjem R. Potem sta homologiji $H_*(M)$ in $H_*(M, \partial M)$ končnogenerirani.*

Dokaz opuščamo. Bralec si ga lahko pogleda v [2] na strani 298, izrek 6.2.21.

Naj bo R obseg. Po izreku o univerzalnih koeficientih za kohomologijo sta homologija in kohomologija kompaktne mnogoterosti M, orientabilne nad R, dualna končnorazsežna vektorska prostora. Iz Poincaré-Lefschetzove dualnosti sledi, da isto velja tudi za par $(M, \partial M)$. Izberimo *homogeno* bazo $\{\xi_1, \dots \xi_r\}$ prostora $H_*(M)$ (t. j. vsi njeni elementi naj bodo homogeni). Naj bo $\{\alpha_1, \dots \alpha_r\}$ njena dualna baza prostora $H^*(M)$ (t. j. $\langle \alpha_i\,,\, \xi_j \rangle = \delta_{ij}$). Izberimo zdaj orientacijo mnogoterosti M in pripadajoči fundamentalni razred. Preslikajmo bazo $\{\xi_1, \dots \xi_r\}$ po Poincaré-Lefschetzovi dualnosti! Dobimo bazo $\{\beta_1, \dots \beta_r\}$ prostora $H^*(M, \partial M)$. Podobno iz baze $\{\alpha_1, \dots \alpha_r\}$ dobimo bazo $\{\eta_1, \dots \eta_r\}$ prostora $H_*(M, \partial M)$. Nastane vprašanje, ali sta si tudi ti dve bazi dualni. Izračunajmo:

$$\begin{aligned}
&\langle \beta_i\,,\, \eta_j \rangle = \langle \beta_i\,,\, \alpha_j \frown z \rangle = \langle \beta_i \smile \alpha_j\,,\, z \rangle = \\
&= (-1)^{\deg \beta_i \deg \alpha_j} \langle \alpha_j \smile \beta_i\,,\, z \rangle = (-1)^{\deg \beta_i (n - \deg \beta_i)} \langle \alpha_j\,,\, \beta_i \frown z \rangle = \\
&= (-1)^{\deg \beta_i (n - \deg \beta_i)} \langle \alpha_j\,,\, \xi_i \rangle = (-1)^{\deg \beta_i (n - \deg \beta_i)} \delta_{ij}
\end{aligned}$$

Bazi sta si torej do predznaka natančno dualni. Bazam, dobljenim na zgoraj opisani način, bomo rekli *dvojno dualne homogene baze.*

2.10 Thomov razred v kompaktnih mnogoterostih

Naj bo M kompaktna mnogoterost z orientacijo nad kolobarjem R, ki jo predstavlja prerez s. Naj bo $z \in H_n(M, \partial M)$ njen fundamentalni razred, $U \in H^n(M^\times)$ pa njen Thomov razred. Naš cilj je povezati oba razreda.

Najprej definirajmo *zoženi Thomov razred* po predpisu

$$\widetilde{U} := U\big|\mathring{M} \times (M, \partial M)$$

Ker je inkluzija $\mathring{M} \hookrightarrow M$ homotopska ekvivalenca, je $\widetilde{U}$ mogoče razširiti na $M \times (M, \partial M)$. Dobljeni element označimo z $\boldsymbol{\widetilde{U}}$. Pravimo mu *razširjeni zoženi Thomov razred.*

Naj bo $p \in M$. Spomnimo se preslikave $l_{p*}\colon M \to M \times M$, ki deluje po predpisu $l_{p*}(p) := (p, x)$.

Lema 1 *Naj bo $\varepsilon \in H_0(\mathring{M})$ homološki predstavnik točke $x \in \mathring{M}$. Potem velja enakost*

$$(\varepsilon \times z)\big|^{M^\times} = l_{p*}\big(s(p)\big)$$

DOKAZ Po definiciji fundamentalnega razreda je $s(p) = z\big|(M, M-p)$. Označimo z i_p identifikacijo $(M, M-p) \to \{p\} \times (M, M-p)$. Označimo s črko p tudi homološki razred točke p v $H_0(\{p\})$. Po trditvi 1.3.11 za vsak $\xi \in H_*(M, M-p)$ velja enakost $i_{p_*}(\xi) = p \times \xi$. Zaradi funktorialnosti zunanjega homološkega množenja velja:

$$i_{p_*}\big(s(p)\big) = (p \times z)\big|\{p\} \times (M, M-p)$$

Sledi:

$$l_{p_*}\big(s(p)\big) = i_{p_*}\big(s(p)\big)\big|M^\times = (p \times z)\big|\{p\} \times (M, M-p)\big|M^\times =$$

$$= (p \times z)\big|\mathring{M} \times (M, M-p)\big|M^\times$$

Spet zaradi funktorialnosti zunanjega homološkega produkta velja $(p \times z)\big|M^\times = \varepsilon \times z$. Lema je dokazana. ■

Trditev 2 *Naj bo $\varepsilon \in H_0(M)$ homološki razred kakšne točke iz M. Potem velja enakost:*

$$\Big\langle \widetilde{\boldsymbol{U}}\,,\, \varepsilon \times z \Big\rangle = 1$$

DOKAZ Dovolj je dokazati enakost, ki jo iz prejšnje enakosti dobimo tako, da $\widetilde{\boldsymbol{U}}$ zamenjamo z $\widetilde{U}$, za ε pa postavimo homološki razred v $H_0(\mathring{M})$, ki predstavlja kakšno točko iz $\mathring{M}$. Po lemi velja:

$$\Big\langle \widetilde{U}\,,\, \varepsilon \times z \Big\rangle = \Big\langle U\big|_{\mathring{M} \times (M, \partial M)}\,,\, \varepsilon \times z \Big\rangle = \Big\langle U\,,\, (\varepsilon \times z)\big|M^\times \Big\rangle = \big\langle U\,,\, l_{p_*}\big(s(p)\big)\big\rangle$$

Enačba 2.4.3 pa pove, da je $\big\langle U\,,\, l_{p_*}\big(s(p)\big)\big\rangle = 1$. ■

Izrek 3 *Naj bo $1 \in H^0(M)$ kohomološki razred koverige, ki sešteva točke. Potem za poljuben element $\alpha \in H^*(M)$ velja enakost*

$$\widetilde{\boldsymbol{U}} \smile (1 \times \alpha) = \widetilde{\boldsymbol{U}} \smile (\alpha \times 1)$$

Izrek sledi iz leme 6.3.11 v [2] na strani 304 in izreka 1.4.9. V primeru, ko je M sklenjena mnogoterost, pa sledi tudi iz enačbe 6.20 v [4] na strani 166.

Lema 4 *Za poljubna elementa $\xi \in H_p(M)$ in $\alpha \in H^p(M)$ velja formula*

$$\Big\langle \widetilde{\boldsymbol{U}}\,,\, \xi \times (\alpha \frown z) \Big\rangle = (-1)^{np} \langle \alpha\,,\, \xi \rangle$$

DOKAZ Ker ima kompaktna mnogoterost končno mnogo komponent, je lemo dovolj dokazati za primer, ko sta ξ in α hkrati različna od nič kvečjemu na eni komponenti mnogoterosti M. Izberimo točko x iz te komponente. Naj bo ε njen homološki razred v $H_0(M)$. Iz prejšnjih trditev, trditve 1.5.3 in izreka 1.5.10 sledi naslednja veriga enakosti:

$$\Big\langle \widetilde{\boldsymbol{U}}\,,\, \xi \times (\alpha \frown z) \Big\rangle = \Big\langle \widetilde{\boldsymbol{U}}\,,\, (1 \frown \xi) \times (\alpha \frown z) \Big\rangle = \Big\langle \widetilde{\boldsymbol{U}}\,,\, (1 \times \alpha) \frown (\xi \times z) \Big\rangle =$$

$$= \Big\langle \widetilde{\boldsymbol{U}} \smile (1 \times \alpha)\,,\, \xi \times z \Big\rangle = \Big\langle \widetilde{\boldsymbol{U}} \smile (\alpha \times 1)\,,\, \xi \times z \Big\rangle = \Big\langle \widetilde{\boldsymbol{U}}\,,\, (\alpha \times 1) \frown (\xi \times z) \Big\rangle =$$

$$= (-1)^{np} \Big\langle \widetilde{\boldsymbol{U}}\,,\, (\alpha \frown \xi) \times z \Big\rangle = (-1)^{np} \langle \alpha\,,\, \xi \rangle \Big\langle \widetilde{\boldsymbol{U}}\,,\, \varepsilon \times z \Big\rangle = (-1)^{np} \langle \alpha\,,\, \xi \rangle$$

Lema je dokazana. ■

Posvetimo se zdaj primeru, ko je R obseg. Izberimo dvojno dualne homogene baze $\{\alpha_1, \ldots \alpha_r\}$, $\{\beta_1, \ldots \beta_r\}$, $\{\xi_1, \ldots \xi_r\}$ in $\{\eta_1, \ldots \eta_r\}$ prostorov $H^*(M)$, $H^*(M, \partial M)$, $H_*(M)$ in $H_*(M, \partial M)$. Po Künnethovi formuli je $\{\alpha_i \times \beta_j\}$ baza prostora $H^*(M \times (M, \partial M))$, $\{\xi_i \times \eta_j\}$ pa je baza prostora $H_*(M \times (M, \partial M))$. Bazi sta do predznaka natančno dualni. Natančneje, iz trditve 1.3.12 sledi:

$$\langle \alpha_i \times \beta_j \, , \, \xi_k \times \eta_l \rangle = \langle \alpha_i \, , \, \xi_k \rangle \, \langle \beta_j \, , \, \eta_l \rangle = (-1)^{\deg \beta_j (n - \deg \beta_j)} \delta_{ik} \delta_{jl}$$

Zapišimo sedaj element $\widetilde{\boldsymbol{U}}$ v bazi $\{\alpha_i \times \beta_j\}$! Iz leme 4 sledi:

$$\left\langle \widetilde{\boldsymbol{U}} \, , \, \xi_k \times \eta_l \right\rangle = (-1)^{n \deg \alpha_l} \delta_{kl}$$

Če postavimo $\widetilde{\boldsymbol{U}} = \sum_{i,j} \lambda_{ij} \alpha_i \times \beta_j$, dobimo:

$$\left\langle \widetilde{\boldsymbol{U}} \, , \, \xi_k \times \eta_l \right\rangle = \sum_{i,j} \lambda_{ij} (-1)^{\deg \beta_j (n - \deg \beta_j)} \delta_{ik} \delta_{jl} = \lambda_{kl} (-1)^{\deg \beta_l (n - \deg \beta_l)}$$

S primerjanjem obeh enakosti dobimo:

$$\widetilde{\boldsymbol{U}} = \sum_k (-1)^{n \deg \alpha_k + \deg \beta_k (n - \deg \beta_k)} \alpha_k \times \beta_k$$

Upoštevajoč enakost $\deg \beta_k = n - \deg \alpha_k$, dobimo:

$$n \deg \alpha_k + \deg \beta_k (n - \deg \beta_k) = n \deg \alpha_k + \deg \alpha_k (n - \deg \alpha_k) = (\deg \alpha_k)^2$$

Končno je:

$$\widetilde{\boldsymbol{U}} = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{\deg \alpha_k} \alpha_k \times \beta_k \tag{5}$$

To je torej iskani zapis razširjenega zoženega Thomovega razreda.

3.

Teorija točk ujemanja

3.1 Lefschetzovo število

Definicija Naj bo X topološki prostor s končnorazsežno homologijo (*za kolobar koeficientov bomo do konca razdelka privzeli, da je enak* $\mathbb{Q}$). *Lefschetzovo število* preslikave $f\colon X \to X$ je vsota

$$L(f) := \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \operatorname{sl} \theta_p$$

kjer so $\theta_p\colon H_p(X) \to H_p(X)$ preslikave, dobljene iz f. Z sl smo označili sled linearne preslikave v končnorazsežnem vektorskem prostoru.

Zgled 1 Lefschetzovo število konstantne preslikave je 1.

Zgled 2 Lefschetzovo število identitete je Eulerjeva karakteristika prostora.

Očitno je Lefschetzovo število homotopska invarianta. Od tod dobimo še en zgled.

Zgled 3 Lefschetzovo število poljubne preslikave v kontraktibilnem prostoru je enako 1.

Zgled 4 Naj bo $X = S^1 \subset \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ in $|a| = 1$. Definirajmo preslikavo $f\colon M \to M$ po predpisu $f(z) := a\, z^k$. Prostor X je kompaktna mnogoterost. Stopnja preslikave f je enaka k, zato je njeno Lefschetzovo število enako $1 - k$. Opazimo lahko, da, če je $k \neq 1$, potem ima f vsaj eno negibno točko. Še več: razen v primeru, ko je $k = 0$ in $a = 1$, je število negibnih točk preslikave f enako ravno absolutni vrednosti njenega Lefschetzovega števila.

Teorija se da posplošiti tudi na pare preslikav. Preslikavi f in g se *ujemata v točki* x*,* če je $f(x) = g(x)$. Točki x pravimo *točka ujemanja* ali tudi *koincidenca* preslikav f in g. Točke ujemanja so posplošitev negibnih točk. Posplošiti pa se da tudi Lefschetzovo število: definirati ga je mogoče tudi za pare preslikav. Med obema pojmoma obstaja povezava, podobna tisti iz zadnjega zgleda. Prav ta povezava pa je tema tega poglavja in celega dela.

Definicija Naj bosta M in N kompaktni orientirani n-mnogoterosti. Po izreku 2.9.5 je njuna homologija končnorazsežna. Dani naj bosta preslikavi f in $g: M \to N$. Naj bo $g(\partial M) \subset \partial N$. *Lefschetzovo število para preslikav f in g je vsota*

$$L(f,g) := \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \operatorname{sl} \theta_p$$

kjer so preslikave $\theta_p: H_p(M) \to H_p(N)$ podane s kompozicijo:

$$\begin{array}{ccc} H^{n-p}(M, \partial M) & \xleftarrow{g^*} & H^{n-p}(N, \partial N) \\ \cong \downarrow & & \uparrow \cong \\ H_p(M) & \xrightarrow{f_*} & H_p(N) \end{array}$$

Navpični puščici predstavljata Poincaré-Lefschetzovo dualnost, ki pripada izbranima orientacijama mnogoterosti M in N. *Pri Lefschetzovih številih bomo vedno privzeli, da je izbrana orientacija mnogoterosti nad $\mathbb{Q}$ dobljena iz kake orientacije nad $\mathbb{Z}$.*

Ker je sled kompozicije neodvisna od vrstnega reda, je pri definiciji preslikave θ_p vseeno, kje v diagramu začnemo. Pomembno je le, da pridemo natančno enkrat naokoli v predpisani smeri.

Če eni od mnogoterosti zamenjamo orientacijo, tudi Lefschetzovo število prevrže znak. Če sta torej mnogoterosti enaki, je Lefschetzovo število neodvisno od tega, katero orientacijo izberemo. Seveda pa mora biti mnogoterost orientabilna. Pač pa lahko pri neorientabilnih mnogoterostih teorijo Lefschetzovih števil razvijamo po modulu 2 (t. j. kolobarja $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Z}$ zamenjamo z $\mathbb{Z}_2$). *Rezultati tega poglavja, ki jih bomo dokazali za orientabilne mnogoterosti, po modulu 2 veljajo tudi za neorientabilne mnogoterosti.* Če bo kakšna izjema, bomo to posebej omenili.

Če postavimo $M = N$ in $g = \mathrm{id}_N$, je $L(f,g) = F(g)$. Novo Lefschetzovo število je torej posplošitev starega.

Po definiciji je Lefschetzovo število element množice racionalnih števil. Kasneje bomo pokazali, da je Lefschetzovo število vedno celo.

Izrek 1 *Naj bosta M in N brez roba. Potem je*

$$L(g,f) = (-1)^n L(f,g)$$

DOKAZ Velja $L(f,g) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \operatorname{sl} \theta_p$ in $L(g,f) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \operatorname{sl} \theta'_p$, kjer sta za vsak p preslikavi θ_p in θ'_{n-p} podani s kompozicijama:

$$\begin{array}{ccc} H^{n-p}(M) & \xleftarrow{g^*} & H^{n-p}(N) \\ \cong \downarrow & & \uparrow \cong \\ H_p(M) & \xrightarrow{f_*} & H_p(N) \end{array} \qquad \text{in} \qquad \begin{array}{ccc} H_{n-p}(M) & \xrightarrow{g_*} & H_{n-p}(N) \\ \cong \uparrow & & \downarrow \cong \\ H^p(M) & \xleftarrow{f^*} & H^p(N) \end{array}$$

Pri preslikavi θ_p začnemo in končamo levo spodaj, pri preslikavi θ'_{n-p} pa levo zgoraj. Naj bo preslikava $\theta''_{n-p}: H^p(M) \to H^p(M)$ definirana z isto kompozicijo kot θ'_{n-p}, samo da začnemo in končamo levo spodaj, tako kot pri preslikavi θ_p. Trdimo: preslikavi θ_p in preslikavi θ''_{n-p} sta si dualni (glede na naravno parjenje).

Če primerjamo diagrama, vidimo, da so si dualni vsi prostori na istih položajih, prav tako pa tudi vodoravne puščice. Poglejmo, kaj se dogaja pri levih navpičnih puščicah. Za poljubna $\alpha \in H^p(M)$ in $\beta \in H^{n-p}(M)$ velja:

$$\langle \alpha \,,\, \beta \frown z \rangle = \langle \alpha \smile \beta \,,\, z \rangle = (-1)^{p(n-p)} \langle \beta \smile \alpha \,,\, z \rangle = (-1)^{p(n-p)} \langle \beta \,,\, \alpha \frown z \rangle$$

Levi puščici sta si torej dualni s popravkom $(-1)^{p(n-p)}$. Podobno vidimo, da sta si z istim popravkom dualni tudi desni puščici. Oba popravka se uničita, torej sta si θ_p in θ''_{n-p} res dualni, zato imata enaki sledi.

V formuli za $L(g, f)$ smemo θ'_p zamenjati s θ''_p. Sledi:

$$L(g, f) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \operatorname{sl} \theta''_p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \operatorname{sl} \theta''_{n-p} = (-1)^n \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \operatorname{sl} \theta_p = (-1)^n L(f, g)$$

■

Opomba *Za mnogoterosti z robom izrek v splošnem ne velja.* Preslikave iz formule za $L(f, g)$ so namreč dualne naslednjim kompozicijam:

$$\begin{array}{ccc} H_{n-p}(M, \partial M) & \xrightarrow{g_*} & H_{n-p}(N, \partial N) \\ \cong \uparrow & & \downarrow \cong \\ H^p(M) & \xleftarrow{f^*} & H^p(N) \end{array}$$

To pa niso preslikave iz formule za $L(g, f)$. Da izrek dejansko ne velja, nam pove naslednji preprost zgled.

Zgled 5 Postavimo $M = N$, za f vzemimo konstantno preslikavo, ki svojo vrednost zavzame na robu, za g pa vzemimo identiteto. Potem je $L(f, g) = 1$ in $L(g, f) = 0$, brž ko ima M neprazen rob (v tem primeru je namreč $H_n(M) = 0$).

Zgled 6 Naj bo $K := S^1 \times [0, 1]$. Ta prostor je homeomorfen ravninskemu kolobarju. Predstavljajmo si prostor S^1 kot podmnožico v $\mathbb{C}$. Definirajmo preslikavi f in $g\colon K \to K$ po predpisu

$$\begin{aligned} f(z, t) &:= (z^p, t) \\ g(z, t) &:= (z^q, t^2) \end{aligned}$$

kjer $p, q \in \mathbb{Z}$. Izračunajmo $L(f, g)$! Preslikava $f_*\colon H_0(K) \to H_0(K)$ je identiteta. Prek Künnethove formule dobimo, da ima preslikava g stopnjo q. Zato je preslikava $g^*\colon H^2(K, \partial K) \to H^2(K, \partial K)$ množenje s q. Zato je $\operatorname{sl} \theta_0 = q$. Preslikava f je produkt preslikave s stopnjo p in identitete, zato je $f_*\colon H_1(K) \to H_1(K)$ množenje s p. Preslikava $g^*\colon H^1(K, \partial K) \to H^1(K, \partial K)$ pa je identiteta. Zato je $\operatorname{sl} \theta_1 = p$. Ker je $H_2(K) = 0$, je tudi $\operatorname{sl} \theta_2 = 0$. Od tod dobimo, da je $L(f, g) = q - p$. Podobno dobimo še $L(g, f) = p - q$.

Nekoliko težji primer dobimo, če mnogoterost K podvojimo. Dobimo torus. Preslikavi f in g liho razširimo. Za obdelavo tega primera je potrebno preučiti Poincaré-Lefschetzovo dualnost na torusu. Da se dokazati, da je $L(\widehat{f}, \widehat{g}) = L(\widehat{g}, \widehat{f}) = 0$. Kasneje bomo pokazali, da sta Lefschetzovi števili lihih razširitev odvisni le od Lefschetzovih števil prvotnih preslikav in Lefschetzovih števil njunih zožitev na rob mnogoterosti.

Za konec Lefschetzovo število še izrazimo v dvojno dualnih bazah. Izberimo dvojno dualne homogene baze $\{\xi_1, \ldots \xi_r\}$, $\{\eta_1, \ldots \eta_r\}$, $\{\alpha_1, \ldots \alpha_r\}$ in $\{\beta_1, \ldots \beta_r\}$ prostorov $H_*(M)$, $H_*(M, \partial M)$, $H^*(M)$ in $M^*(M, \partial M)$ in še dvojno dualne homogene baze $\{\xi'_1, \ldots \xi'_r\}$, $\{\eta'_1, \ldots \eta'_r\}$, $\{\alpha'_1, \ldots \alpha'_r\}$ in $\{\beta'_1, \ldots \beta'_r\}$ prostorov $H_*(N)$, $H_*(N, \partial N)$, $H^*(N)$ in $H^*(N, \partial N)$. Izberimo sedaj take koeficiente a_{ij}, da bo veljalo:

$$f_*(\xi_j) = \sum_i a_{ij} \xi'_i$$

Potem velja tudi:

$$f^*(\alpha'_i) = \sum_j a_{ij} \alpha_j$$

Izberimo še take koeficiente b_{ij}, da bo veljalo:

$$g^*(\beta'_i) = \sum_j b_{ij} \beta_j$$

Izrazimo sedaj s temi koeficienti Lefschetzovo število $L(f,g)$! Iz preslikav θ_p iz definicije Lefschetzovega števila sestavimo preslikavo $\theta\colon H_*(M) \to H_*(M)$, ki deluje po predpisu $\xi \mapsto (-1)^{\deg \xi} \theta_{\deg \xi}(\xi)$. Potem je $L(f,g) = \operatorname{sl} \theta$. Če za $X = M, N$ z $\mathcal{D}_X\colon H^*(X, \partial X) \to H_*(X)$ označimo Poincaré-Lefschetzovo dualnost, dobimo:

$$\theta(\xi_j) = (-1)^{\deg \xi_j} (\mathcal{D}_M \circ g^* \circ \mathcal{D}_N^{-1} \circ f_*)(\xi_j) =$$
$$= (-1)^{\deg \xi_j} (\mathcal{D}_M \circ g^*) \big(\sum_i a_{ij} \beta'_i\big) = (-1)^{\deg \xi_j} \sum_{i,k} a_{ij} b_{ik} \xi_k$$

Končno je:

$$L(f,g) = \sum_{i,j} (-1)^{\deg \xi_j} a_{ij} b_{ij} \tag{2}$$

3.2 Indeks ujemanja

Da bi točke ujemanja povezali z Lefschetzovimi števili, jih moramo prenesti v teorijo homologije. Prvi korak k temu je, da opazimo, da so točke ujemanja para preslikav f in g ravno presečišča zaloge vrednosti preslikave $(f,g)\colon M \to N \times N$, definirane po predpisu $x \mapsto (f(x), g(x))$, z diagonalo $\delta(N)$. Opazimo, da ima domena preslikave (f,g) zvezo s fundamentalnim, kodomena pa s Thomovim razredom. Natančneje, naj bo C množica vseh točk, v katerih se preslikavi ujemata. Potem lahko (f,g) gledamo kot preslikavo $(M, M \setminus C) \to N^\times$.

Definicija Naj bosta M in N orientirani mnogoterosti. Mnogoterost M naj bo kompaktna. Naj bo $V \subset M$. Dani naj bosta preslikavi f in $g\colon V \to N$. Množica

$C := \{x \in V \mid f(x) = g(x)\}$ točk ujemanja v V naj bo zaprta v M in vsebovana v $\mathring{M}$, V pa naj bo njena okolica (t. j. $C \subset \operatorname{Int} V$). *Indeks ujemanja* preslikav f in g na množici V je število $I(V; f, g)$, ki ga dobimo tako, da pripadajoči fundamentalni razred mnogoterosti M preslikamo s kompozicijo

$$H_n(M, \partial M) \longrightarrow H_n(M, M \setminus C) \longrightarrow H_n(V, V \setminus C) \xrightarrow{(f,g)_*} H_n(N^\times) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Prva puščica je porojena z inkluzijo, druga je izrez, zadnja pa je parjenje s pripadajočim Thomovim razredom U_N mnogoterosti N (t. j. ξ preslika v $\langle U\,,\,\xi\rangle$). *Za kolobar koeficientov bomo do konca razdelka privzeli, da je enak* $\mathbb{Z}$.

Če je $M = N$ in $g = \mathrm{id}_N$, so točke ujemanja para (f, g) ravno negibne točke preslikave f. V tem primeru indeks ujemanja imenujemo *indeks negibnosti* in ga označimo z $I(V; f)$.

Trditev 1 *Indeks ujemanja je lokalna lastnost. Natančneje, naj bosta M in N kot prej. Naj bosta V_1 in V_2 podmnožici v M. Dani naj bosta preslikavi f_1 in $g_1\colon V_1 \to N$ ter preslikavi f_2 in $g_2\colon V_2 \to N$. Naj bo $V := V_1 \cap V_2$ ter $f_1|_V = f_2|_V$ in $g_1|_V = g_2|_V$. Naj bosta množici $\{x \in V_1 \mid f_1(x) = g_1(x)\}$ in $\{x \in V_2 \mid f_2(x) = g_2(x)\}$ enaki. To množico označimo s C in naj bo zaprta v M, V_1 in V_2 pa naj bosta njeni okolici. Potem velja $I(V_1; f_1, g_1) = I(V_2; f_2, g_2)$.*

Dokaz Označimo s f in g zožitvi ustreznih preslikav na V. Iz gornjih pogojev sledi, da komutira naslednji diagram, v katerem so puščice na levi dobljene iz izrezov, navpični puščici pa z inkluzijo:

$$\begin{tikzcd}
& H_n(V_1, V_1 \setminus C) \arrow[dr, "(f_1,g_1)_*"] & \\
H_n(M, M \setminus C) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"'] & H_n(V, V \setminus C) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "(f,g)_*"] & H_n(N^\times) \\
& H_n(V_2, V_2 \setminus C) \arrow[ur, "(f_2,g_2)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Ker diagram komutira, je vseeno, kako po njem preslikamo kak element grupe $H_n(M, M \setminus C)$ v grupo $H_n(N^\times)$. Naj gremo po zgornji, srednji ali spodnji poti, vedno dobimo isto. Od tod pa že sledi naša trditev. ■

Definicijo indeksa ujemanja lahko zdaj še malo razširimo. Naj bo V podmnožica mnogoterosti M, preslikavi f in g pa naj bosta definirani na neki okolici W množice V. Naj bo množica točk ujemanja preslikav f in g na množici W vsebovana v $V \cap \mathring{M}$ in zaprta v M. Potem indeks ujemanja $I(V; f, g)$ na množici V definiramo kot indeks $I(W; f, g)$ ujemanja na množici W. Posebej, naj bosta f in g definirani v okolici neke točke $x \in \mathring{M}$ in naj bo x njuna *izolirana* točka ujemanja. Potem lahko definiramo indeks ujemanja $I(x; f, g)$ v točki x. Seveda je indeks ujemanja mogoče definirati le, če x leži v notranjosti mnogoterosti.

Izrek 2 *Indeks ujemanja je neodvisen od ambientne mnogoterosti. Natančneje, naj bo M' kompaktna podmnogoterost kompaktne orientirane mnogoterosti M, N' pa podmnogoterost orientirane mnogoterosti N. Vse mnogoterosti naj imajo dimenzijo n. Naj bo $V \subset M'$. Dani naj bosta preslikavi f in $g\colon V \to N'$. Množica C točk ujemanja preslikav f in g na množici V naj bo vsebovana v $\mathring{M}'$, zaprta v M in naj bo V njena okolica. Potem* *je indeks ujemanja obeh preslikav na množici V glede na mnogoterosti M' in N' enak indeksu glede na mnogoterosti M in N.*

Dokaz Naslednji diagram preslikav, dobljenih iz inkluzij in njihovih inverzov, je komutativen:

$$\begin{tikzcd}
H_n(M,\partial M) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(M, M\setminus C) \arrow[dr, "\cong"] & \\
H_n(M, M\setminus \mathring{M}') \arrow[ur] & & H_n(V, V\setminus C) \\
H_n(M',\partial M') \arrow[u, "\cong"] \arrow[r] & H_n(M', M'\setminus C) \arrow[uu, "\cong"] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Spomnimo se izreka 2.6.2, ki pravi, da, če po diagramu preslikamo fundamentalni razred $z_M \in H_n(M,\partial M)$ v grupo $H_n(M',\partial M')$, potem dobimo ravno fundamentalni razred mnogoterosti M'. Označimo sedaj z U in U' Thomova razreda mnogoterosti N in N'. Po trditvi 2.4.5 velja $U' = U|_{M'}$. Potem pa komutira tudi naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(N^\times) \arrow[dr, "{\langle U, \cdot\rangle}"] & \\
H_n(V, V\setminus C) \arrow[ur, "{(f,g)_*}"] \arrow[dr, "{(f,g)_*}"'] & & \mathbb{Z} \\
 & H_n(N'^\times) \arrow[ur, "{\langle U', \cdot\rangle}"'] &
\end{tikzcd}$$

Iz komutativnosti obeh diagramov pa že sledi naš izrek. ∎

Trditev 3 *Če se f in g ne ujemata nikjer na V, je $I(V; f, g) = 0$.*

Dokaz Velja $I(V; f, g) = I(\emptyset; f, g)$. Slednji indeks lahko izračunamo po osnovni definiciji. Ker v tem primeru kompozicija vsebuje člen $H_n(\emptyset, \emptyset)$, mora biti indeks enak 0. ∎

Trditev 4 *Indeks ujemanja je aditiven. Natančneje, naj bodo $V_1, \ldots V_k$ podmnožice mnogoterosti M in $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$. Dani naj bosta preslikavi f in $g\colon V \to N$. Množice $C_i := \{x \in V_i \mid f(x) = g(x)\}$ naj bodo disjunktne, zaprte v M in vsebovane v $\mathring{M}$. Za vsak i naj bo V_i okolica množice C_i. Potem je $I(V; f, g) = \sum\limits_{i=1}^{k} I(V_i; f, g)$.*

Dokaz Ker je M normalen prostor, obstajajo take disjunktne odprte množice $W_1, \ldots \ldots W_k$, da je $C_i \subset W_i \subset V_i$ za vsak i. Označimo $W := \bigcup_{i=1}^k W_i$. Po trditvi 1 je $I(V_i; f, g) = I(W_i; f, g)$ in $I(V; f, g) = I(W; f, g)$. Označimo še $C := \bigcup_{i=1}^k C_i$. Naslednji diagram preslikav, dobljenih iz inkluzij, je komutativen:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{i=1}^{k} H_n(M, M\setminus C_i) & \bigoplus\limits_{i=1}^{k} H_n(W_i, W_i\setminus C_i) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\cong"] \\
H_n(M, M\setminus C) \arrow[u] & H_n(W, W\setminus C) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Vse puščice v diagramu so izomorfizmi, torej jih lahko po mili volji obračamo, diagram pa bo še vedno ostal komutativen. Označimo še $f_i := f|_{W_i}$ in $g_i := g|_{g_i}$. Dobimo naslednji komutativen diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{i=1}^{k} H_n(M, M \setminus C_i) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dd, "\cong"] & \bigoplus_{i=1}^{k} H_n(W_i, W_i \setminus C_i) \arrow[dd, "\cong"'] \arrow[dr, "\sum (f_i,g_i)_*"] & \\
H_n(M, \partial M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & H_n(N^\times) \\
 & H_n(M, M \setminus C) \arrow[r, "\cong"'] & H_n(W, W \setminus C) \arrow[ur, "(f,g)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Trditev je dokazana. ■

Trditev 5 *Indeks ujemanja je homotopsko invarianten. Natančneje, naj bosta M in N kot prej, $W \subset M$, F in $G\colon W \times I \to N$ pa homotopiji. Označimo $f_t(x) := F(x,t)$ in $g_t(x) := G(x,t)$. Naj bo $C_t := \{x \in W \mid f_t(x) = g_t(x)\}$. Množica $C := \bigcup_{t \in I} C_t$ naj bo zaprta v M. Potem velja $I(W; f_0, g_0) = I(W; f_1, g_1)$.*

Opomba 6 *Če je $W = M$, je množica C avtomatično zaprta.* Množica $C' := \{(x,t) \in M \times I \mid F(x,t) = G(x,t)\}$ je namreč zaprta v $M \times I$, torej kompaktna. Množica C je projekcija množice C' na M, zato je kompaktna, torej zaprta v M.

Dokaz trditve Ker je M normalen prostor, obstaja taka odprta množica V, da je $C \subset V \subset \overline{V} \subset W$. Za vsak $t \in I$ komutira naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(M, M \setminus V) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dd] & H_n(W, W \setminus V) \arrow[dd] \arrow[dr, "(f_t,g_t)_*"] & \\
H_n(M, \partial M) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & H_n(N^\times) \\
 & H_n(M, M \setminus C_t) \arrow[r, "\cong"] & H_n(W, W \setminus C_t) \arrow[ur, "(f_t,g_t)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Torej lahko za vsak $t \in I$ indeks $I(W; f_t, g_t)$ dobimo tudi z zgornjo kompozicijo. Ker so si vse preslikave $(f_t, g_t)\colon (W, W \setminus V) \to M^\times$ homotopne, morajo biti vsi indeksi $I(W; f_t, g_t)$ enaki. ■

Posvetimo se zdaj indeksu v izoliranih točkah ujemanja. Naj bo x taka točka in $y = f(x) = g(x)$. Indeks je mogoče definirati le, če je x notranja točka. *Naj bo tudi y notranja točka.* Potem obstajata taki evklidski okolici V in W točk x in y s pripadajočima lokalnima kartama $v\colon (V, x) \xrightarrow{\approx} (\mathbb{R}^n, 0)$ in $w\colon (W, y) \xrightarrow{\approx} (\mathbb{R}^n, 0)$, da sta f in g definirani na množici V in jo preslikata v W ter da je na x edina njuna točka ujemanja na V. Smemo privzeti, da karti ohranjata orientacijo. Potem sta $\varphi := w \circ f \circ v^{-1}$ in $\psi := w \circ g \circ v^{-1}$ taki preslikavi $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, da preslikava $\psi - \varphi$ preslika v 0 le točko 0. Spomnimo se definicije indeksa ujemanja v x:

$$H_n(M, \partial M) \longrightarrow H_n(M, M - x) \longrightarrow H_n(V, V - x) \xrightarrow{(f,g)_*} H_n(N^\times) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Mnogoterost V podeduje orientacijo od M, mnogoterost W pa od N. Naj bo ω lokalna orientacija mnogoterosti V v točki x. Če v grupo $H_n(M, \partial M)$ vstavimo fundamentalni razred z_M mnogoterosti M in ga po diagramu preslikamo v $H_n(V, V - x)$, dobimo ravno ω. Ker preslikavi f in g množico V preslikata v W, njun indeks dobimo tudi tako, da ω preslikamo s kompozicijo:

$$H_n(V, V - x) \xrightarrow{(f,g)_*} H_n(W^\times) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

kjer druga puščica predstavlja parjenje z $U_N|_{W^\times}$, torej (po trditvi 2.4.5) s Thomovim razredom mnogoterosti W. Po trditvi 2.4.6 lahko potem indeks ujemanja dobimo tudi tako, da naravno lokalno orientacijo ω_n prostora $\mathbb{R}^n$ v točki 0 preslikamo s kompozicijo:

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \xrightarrow{(\varphi,\psi)_*} H_n((\mathbb{R}^n)^\times) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Druga puščica je zdaj parjenje s Thomovim razredom U mnogoterosti $\mathbb{R}^n$. Naj bo spet $l_p(x) := (p, x)$. Spomnimo se enačbe 2.4.3. Iz nje sledi:

$$\langle U \,,\, l_{0*}\omega_n \rangle = 1$$

Zdaj pa se spomnimo, da je par $(\mathbb{R}^n)^\times = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \delta(\mathbb{R}^n)$ homotopsko ekvivalenten paru $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$. Homotopska ekvivalenca je preslikava Φ, ki (x, y) preslika v $y - x$. Njen homotopski inverz je ravno preslikava l_0. Od tod dobimo:

$$I(x; f, g) = \langle U \,,\, (\varphi, \psi)_*\omega_n \rangle = \langle l_0^* U \,,\, \Phi_*(\varphi, \psi)_*\omega_n \rangle = \langle l_0^* U \,,\, (\psi - \varphi)_*\omega_n \rangle$$

Tu je zdaj $\psi - \varphi$ preslikava $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$. Naj bo k njena stopnja v 0 ! Potem je:

$$I(x; f, g) = \langle l_0^* U \,,\, k\omega_0 \rangle = k \,\langle U \,,\, l_{0*}\omega_0 \rangle = k$$

Dokazali smo naslednji izrek.

Izrek 7 *Naj bosta M in N orientirani n-mnogoterosti. Mnogoterost M naj bo kompaktna. Naj bo $x \in \mathring{M}$ in $y \in \mathring{N}$. Dani naj bosta preslikavi f in g iz neke okolice točke x v N. Naj bo $y = f(x) = g(x)$. Naj bosta $v\colon (V, x) \overset{\approx}{\to} (\mathbb{R}^n, 0)$ in $w\colon (W, y) \overset{\approx}{\to} (\mathbb{R}^n, 0)$ lokalni karti, ki ohranita orientacijo. Preslikavi f in g naj na množici V definirani in naj jo slikata v W, x pa naj bo njuna edina točka ujemanja na V. Definirajmo preslikavi $\varphi := w \circ f \circ v^{-1}$ in $\psi := w \circ g \circ v^{-1}$. Potem je indeks ujemanja preslikav f in g v točki x enak stopnji preslikave $\psi - \varphi\colon (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$.*

Podoben postopek bi lahko ubrali tudi v primeru, ko je y robna točka. Par $(\mathbb{R}^n)^\times$ bi pač nadomestili s parom $(\mathbb{R}^n_+)^\times$. Tudi ta je homotopsko ekvivalenten paru $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$, samo da je homotopska ekvivalenca veliko manj pregledna. Indeks je torej ravno tako enak stopnji neke preslikave v $\mathbb{R}^n$, vendar pa je njena izražava s φ in ψ bolj zamotana.

Oglejmo si zdaj primer še v kategoriji $\mathcal{C}^1$-mnogoterosti. V razdelku o stopnji preslikave smo izračunali stopnjo $\mathcal{C}^1$-preslikave v primeru, ko je njen odvod neizrojen. Rekli bomo, da sta si preslikavi f in g *transverzalni* v njuni točki ujemanja x, če ima preslikava $\psi - \varphi$, dobljena na zgoraj opisani način, v 0 neizrojen odvod. Če je njegova determinanta pozitivna, je indeks ujemanja enak 1, če je negativna, pa je enak -1. Bralec lahko sam preveri, da je pojem transverzalnosti neodvisen od izbire lokalnih kart.

Določanje indeksa ujemanja s pomočjo odvoda deluje le, če je y notranja točka. V nasprotnem primeru namreč preslikava, katere stopnja v 0 je enaka indeksu ujemanja, ni nujno diferenciabilna, čeprav sta to f in g.

3.3 Indeks ujemanja in Lefschetzovo število

Izrek 1 *Naj bosta M in N kompaktni orientirani mnogoterosti. Dani naj bosta preslikavi $f\colon M \to N$ in $g\colon (M, \partial M) \to (N, \partial N)$, ki naj se ne ujemata nikjer na ∂M. Potem velja*

$$I(M; f, g) = L(f, g)$$

Dokaz Izrek bomo najprej dokazali za primer, ko je $f(M) \subset \mathring{N}$. Naj bo C množica točk ujemanja preslikav f in g. Njun indeks ujemanja na celotni mnogoterosti M dobimo tako, da njen fundamentalni razred z_M preslikamo s kompozicijo

$$H_n(M, \partial M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(M, M \setminus C) \longrightarrow H_n(N^\times; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Naj bo U_N Thomov razred mnogoterosti N. Potem je:

$$I(M; f, g) = \langle U_N \,,\, (f, g)_* z_M \rangle$$

Naj bosta $\bar{z}_M \in H_n(M, \partial M; \mathbb{Q})$ in $\overline{U}_N \in H^n(N^\times; \mathbb{Q})$ elementa, ki pripadata elementoma z_M in U_N po izreku o univerzalnih koeficientih. Po trditvah 2.5.10 in 2.4.7 sta $\bar{z}_M$ in $\overline{U}_N$ tudi fundamentalni in Thomov razred, ki pripadata orientacijama obeh mnogoterosti nad $\mathbb{Q}$, dobljenima iz orientacij nad $\mathbb{Z}$. Po trditvi 1.1.14 velja:

$$I(M; f, g) = \left\langle \overline{U}_N \,,\, (f, g)_* \bar{z}_M \right\rangle$$

Preslikava (f, g) preslika par $(M, \partial M)$ v par $\mathring{N} \times (N, \partial N)$, ki je vsebovan v paru $N^\times$. Če torej z $\widetilde{\overline{U}}_N$ označimo zožitev razreda $\overline{U}_N$ na $\mathring{N} \times (N, \partial N)$, potem velja:

$$I(M; f, g) = \left\langle \widetilde{\overline{U}}_N \,,\, (f, g)_* \bar{z}_M \right\rangle$$

Element $\widetilde{\overline{U}}_N$ pa lahko enolično razširimo na $N \times (N, \partial N)$. Označimo razširitev z $\widetilde{\overline{\boldsymbol{U}}}_N$. Potem velja:

$$I(M; f, g) = \left\langle \widetilde{\overline{\boldsymbol{U}}}_N \,,\, (f, g)_* \bar{z}_M \right\rangle = \left\langle (f, g)^* \widetilde{\overline{\boldsymbol{U}}}_N \,,\, \bar{z}_M \right\rangle$$

Element $(f, g)^* \widetilde{\overline{\boldsymbol{U}}}_N$ imenujemo *Lefschetzov razred.* Izberimo zdaj v mnogoterostih M in N dvojno dualne homogene baze, in sicer z istimi oznakami kot v prejšnjem razdelku. Spomnimo se formule 2.10.5:

$$\widetilde{\overline{\boldsymbol{U}}}_N = \sum_i (-1)^{\deg \alpha'_i} \alpha'_i \times \beta'_i$$

Naj bo spet $f_*(\xi_j) = \sum_i a_{ij} \xi'_i$. Zaradi dualnosti baz je potem $f^*(\alpha'_i) = \sum_j a_{ij} \alpha_j$. Naj bo tudi $g^*(\beta'_i) = \sum_j b_{ij} \beta_j$. Označimo z $d\colon M \to M \times M$ diagonalno preslikavo, z $f \times g\colon M \times M \to N \times N$ pa preslikavo, dobljeno iz f in g. Potem velja:

$$\begin{aligned}(f, g)^* \widetilde{\overline{\boldsymbol{U}}}_N &= \sum_i (-1)^{\deg \alpha'_i} d^* (f \times g)^* \alpha'_i \times \beta'_i = \sum_{i,j,k} (-1)^{\deg \alpha'_i} a_{ij} b_{ik}\, d^*(\alpha_j \times \beta_k) = \\ &= \sum_{i,j,k} (-1)^{\deg \alpha'_i} a_{ij} b_{ik}\, \alpha_j \smile \beta_k\end{aligned}$$

Sledi:

$$I(M;f,g) = \sum_{i,j,k} (-1)^{\deg \alpha'_i} a_{ij} b_{ik} \ \langle \alpha_j \smile \beta_k \, , \, \bar{z}_M \rangle = \sum_{i,j,k} (-1)^{\deg \alpha'_i} a_{ij} b_{ik} \ \langle \alpha_j \, , \, \beta_k \frown \bar{z}_M \rangle =$$
$$= \sum_{i,j,k} (-1)^{\deg \alpha'_i} a_{ij} b_{ik} \ \langle \alpha_j \, , \, \xi_k \rangle = \sum_{i,j} (-1)^{\deg \alpha'_i} a_{ij} b_{ij}$$

V prejšnjem razdelku pa smo izračunali, da je

$$L(f,g) = \sum_{i,j} (-1)^{\deg \xi_j} a_{ij} b_{ij}$$

Če je $a_{ij} \neq 0$, je $\deg \alpha'_i = \deg \alpha_j = \deg \xi_j$, torej je res $I(M;f,g) = L(f,g)$.

Zdaj smo izrek dokazali za primer, ko je $f(M) \subset N$. Dokažimo ga še v splošnem. Iz izreka o obrobku sledi, da obstaja taka homotopija $F\colon M \times I \to N$, da je $f_0 = f$ in $f_t(M) \subset \mathring{N}$ za vse $t > 0$. Označili smo $f_t(x) := F(x,t)$. Potem je množica

$$C := \{x \in M \mid (\exists t \in I) f_t(x) = g_t(x)\}$$

vsebovana v $\mathring{M}$ in po opombi 3.2.6 zaprta v M. Iz izreka 3.2.5 in dokazanega dela tega izreka potem sledi:

$$I(M;f,g) = I(M;f_1,g_1) = L(f_1,g_1) = L(f,g)$$

Izrek je dokazan. ■

Posledica 2 *Lefschetzovo število poljubnih preslikav je celo.*

DOKAZ Trditev smo že dokazali za primer, ko se preslikavi f in g ne ujemata nikjer na robu, saj je indeks ujemanja celo število. Naj bosta f in g čisto splošni preslikavi. Preslikava f je homotopna preslikavi φ, ki vse svoje vrednosti zavzame v notranjosti mnogoterosti. Potem se φ in f gotovo ne ujemata nikjer na robu, torej je $L(f,g) = L(\varphi,g)$ celo število. ■

Iz rezultatov tega in prejšnjega razdelka sledi naslednji pomemben izrek.

Izrek 3 *Naj bosta M in N kompaktni orientirani mnogoterosti. Dani naj bosta preslikavi $f\colon M \to N$ in $g\colon (M,\partial M) \to (N,\partial N)$. Preslikavi naj se ujemata le v točkah $x_1, \ldots x_k$, ki naj vse ležijo v notranjosti. Potem velja formula:*

$$L(f,g) = \sum_{i=1}^{k} I(x_i;f,g)$$

Za zgled si oglejmo ničle kompleksnega polinoma p, podanega s formulo

$$p(z) := z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots a_1 z + a_0$$

S preprostimi algebrskimi sredstvi, brez uporabe osnovnega izreka algebre, se da dokazati, da ima p največ n ničel. S teorijo indeksov ujemanja bomo pokazali dobro znano resnico, da ima p natančno n ničel, upoštevajoč večkratnosti.

Definirajmo $f(z) := -a_{n-1}z^{n-1} - \ldots\ a_0$ in $g(z) := z^n$. Naj bo $R := \max\{|a_0|, \ldots \ldots |a_{n-1}|\} + 1$. Potem lahko f gledamo kot preslikavo $R\,B^2 \to R^n\,\mathring{B}^2$, g pa kot preslikavo $(R\,B^2, R\,S^1) \to (R^n\,B^2, R^n\,S^1)$. Njune točke ujemanja so natančno ničle polinoma p in vse so v množici $R\,\mathring{B}^2$.

Naj bo z_0 k-kratna ničla polinoma p in V kaka odprta krogla, ki ničel polinoma p vsebuje natančno z_0. Iz rezultatov prejšnjega razdelka po kratkem premisleku dobimo, da je indeks točke ujemanja z_0 enak stopnji preslikave $g - f = p\colon (V, V - z_0) \to (\mathbb{C}, \mathbb{C} - 0)$. Polinom p lahko prepišemo v obliki

$$p(z) = b_k(z - z_0)^k + \ldots b_{n-1}(z - z_0)^{n-1} + (z - z_0)^n$$

kjer je $a_k \neq 0$. Če je krogla V dovolj majhna, podobno kot v prejšnjem razdelku dobimo premočrtno homotopijo med p in preslikavo $z \mapsto a_k(z - z_0)^k$. Ker je z_0 edina njena ničla, jo lahko pri izračunu stopnje gledamo kot preslikavo $(\mathbb{C}, \mathbb{C} - z_0) \to (\mathbb{C}, \mathbb{C} - 0)$. Množenje z neničelnim kompleksnim številom ohrani orientacijo, saj ima kot realno linearna preslikava pozitivno determinanto. Ker tudi translacije ohranijo orientacijo, je indeks ujemanja v z_0 enak kar stopnji preslikave $z \mapsto z^k$ v točki 0. Za to preslikavo pa smo izračunali, da ima stopnjo k. Sklep: indeks ujemanja preslikav f in g v točki z_0 je enak kar večkratnosti ničle z_0 polinoma p.

Obravnavajmo preslikavi f in g kot preslikavi $R\,B^2 \to R^n\,B^2$. Izračunajmo njuno Lefschetzovo število! Preslikava f je premočrtno homotopna konstanti. Zato je Lefschetzovo število enako kar stopnji preslikave g na mnogoterosti $R\,B^2$. Po posledici 2.8.15 je le-ta enaka kar stopnji preslikave g v točki 0, ta pa je enaka n. Iz prejšnjega izreka potem sledi, da ima polinom p res natančno n ničel, upoštevajoč seveda večkratnosti. Dokazali smo torej osnovni izrek algebre.

Včasih nas ne zanima, koliko točk ujemanja imata dani preslikavi, zanima nas le, ali se sploh kje ujemata. Iz izreka 1 takoj sledi naslednji izrek.

Izrek 4 (Izrek o točki ujemanja) *Naj bosta M in N kompaktni orientabilni mnogoterosti. Dani naj bosta preslikavi $f\colon M \to N$ in $g\colon (M, \partial M) \to (N, \partial N)$. Če je $L(f, g) \neq 0$, se f in g ujemata v vsaj eni točki.*

Ta izrek je posplošitev cele vrste izrekov. Navedino jih samo nekaj.

Posledica 5 *Naj bo M kompaktna orientabilna mnogoterost. Dana naj bo preslikava $f\colon M \to M$. Če je $L(f) = 0$, ima f vsaj eno negibno točko.*

To je posplošitev znamenitega Lefschetzovega izreka o negibni točki na mnogoterosti z robom. Iz nje sledi še en znamenit izrek.

Posledica 6 (Brouwerjev izrek o negibni točki) *Vsaka preslikava $B^n \to B^n$ ima negibno točko.*

Vrnimo se zdaj na izrek 4 in se omejimo na primer, ko je f homotopna konstanti, mnogoterost, v katero slikami, pa je povezana. V tem primeru je $L(f, g) = \deg g$. Od tod takoj sledi naslednja trditev.

Posledica 7 *Naj bosta M in N kompaktni orientirani mnogoterosti. Mnogoterost N naj bo povezana. Potem se poljubna preslikava $(M, \partial M) \to (N, \partial N)$ neničelne stopnje s poljubno preslikavo $M \to N$, homotopno konstanti, ujema v vsaj eni točki.*

Spet smo dokazali Kroneckerjev izrek (glej posledico 2.8.14), ki trdi, da so preslikave z neničelno stopnjo surjektivne.

3.4 Indeks ujemanja na robu

Teorijo indeksov ujemanja smo zaenkrat razvili le za točke ujemanja v notranjosti. Nastane vprašanje, ali je mogoče v teorijo vključiti tudi točke ujemanja na robu. V ta namen je treba najprej ustrezno popraviti definicijo indeksa. Dosedanji način razmišljanja ni dober, saj točke ujemanja na robu že vnaprej izključuje. Seveda bi se moral tam, kjer bi bila definirana oba indeksa, novi indeks ujemati s starim, prav tako pa bi moral biti tudi novi indeks na celi mnogoterosti enak Lefschetzovemu številu.

Za *transverzalne* točke ujemanja smo videli, da je indeks enak 1, če razlika preslikav, ki ju ustrezno prenesemo na evklidski prostor, ohrani orientacijo, in -1, če obrne orientacijo. Če bi se omejili le na pare preslikav, ki so v vseh točkah ujemanja transverzalne, bi na ta način lahko na novo definirali indeks ujemanja. Definicija bi delovala tudi za robne točke. Žal pa v tem primeru vsota indeksov ne bi bila nujno enaka Lefschetzovemu številu, kar kaže naslednji zgled.

Naj bo $K = S^1 \times [0,1]$, $p, q \in \mathbb{Z}$ in $p < q$. Definirajmo preslikavi f in $g\colon K \to K$ po predpisu $f(z,t) = (z^p, t)$ in $g(z,t) := (z^q, t^2)$. V razdelku o Lefschetzovih številih smo že izračunali, da je $L(f,g) = q - p$. Preslikavi imata na vsaki komponenti $q - p$ točk ujemanja in v vseh sta transverzalni. Drugje točk ujemanja ni. Jasno je, da bi morali biti indeksi ujemanja v točkah iz iste robne komponente enaki. Toda naj jim priredimo vrednosti $+1$ ali -1, v nobenem primeru ne bo njihova vsota enaka $q - p$. Pravilo, da je indeks ujemanja v transverzalnih točkah ujemanja enak $+1$ ali -1, torej za robne točke ujemanja ne bo veljalo.

Teorijo indeksov ujemanja bomo razvili za primer, ko obe preslikavi rob preslikata v rob. V tem primeru ju je namreč mogoče liho razširiti na podvojitvi obeh mnogoterosti (glej poglavje o orientaciji). Dobili smo torej preslikavi $\widehat{f}$ in $\widehat{g}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$.

S f_∂ in $g_\partial\colon \partial M \to \partial N$ označimo zožitvi preslikav f in g na rob. Potem so $\widehat{f}$, $\widehat{g}$, f_∂ in g_∂ vse preslikave med sklenjenimi mnogoterostmi, torej zanje teorija točk ujemanja v vsakem primeru deluje. Opazimo, da, če seštejemo število točk ujemanja para preslikav $\widehat{f}$ in $\widehat{g}$ ter para preslikav f_∂ in g_∂, potem dobimo ravno dvakratno število točk ujemanja preslikav f in g. To pa velja tudi za Lefschetzova števila.

Izrek 1 *Naj bosta M in N kompaktni orientirani mnogoterosti z nepraznim robom. Dani naj bosta preslikavi f in $g\colon (M, \partial M) \to (N, \partial N)$. Naj bodo $\widehat{f}$, $\widehat{g}$, f_∂ in g_∂ kot prej. Potem velja formula:*

$$2\,L(f,g) = L(\widehat{f},\widehat{g}) + L(f_\partial, g_\partial)$$

Za dokaz izreka bomo najprej potrebovali lemo.

Lema 2 *Naj bo*

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "f_{i+2}"] & C_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] \arrow[d, "\varphi_{i+1}"] & C_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_i"] & C_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] \arrow[d, "\varphi_{i-1}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r, "f_{i+2}"] & C_{i+1} \arrow[r, "f_{i+1}"] & C_i \arrow[r, "f_i"] & C_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

eksaktna lestev iz samih končnorazsežnih vektorskih prostorov, od katerih je le končno mnogo neničelnih. Potem je

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \operatorname{sl} \varphi_i = 0$$

Dokaz Označimo $A_i := \operatorname{Im} f_{i+1} = \operatorname{Ker} f_i$. Obstajajo taki podprostori B_i, da je $C_i = A_i \oplus B_i$ za vse i. Glede na ta razcep lahko preslikave φ bločno zapišemo v obliki:

$$\varphi_i = \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_i' \\ \beta_i' & \beta_i \end{bmatrix}$$

Oglejmo si naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd}
B_i \arrow[r, "f_i", "\cong"'] \arrow[d, "\beta_i"'] & A_{i-1} \arrow[d, "\alpha_{i-1}"] \\
B_i \arrow[r, "f_i", "\cong"'] & A_{i-1}
\end{tikzcd}$$

Trdimo: diagram je komutativen. Ker je $f_i \circ \beta_i' = 0$, velja:

$$f_i \circ \beta_i = f_i \circ (\beta_i + \beta_i') = f_i \circ \varphi_i = \varphi_{i-1} \circ f_i = (\alpha_{i-1} + \alpha_{i-1}') \circ f_i$$

Naj bo $x \in B_i$. Ker sta $f_i(\beta_i(x))$ in $\alpha_{i-1}(f_i(x))$ v A_i v A_{i-1}, je tam tudi $\alpha_{i-1}'(f_i(x))$. Toda ta element je tudi v B_{i-1}, zato je enak 0. Potem pa je $f_i \circ \beta_i = \alpha_{i-1} \circ f_i$, zato je diagram res komutativen.

Zaradi eksaktnosti je preslikava $f_i \colon B_i \to A_{i-1}$ izomorfizem. Ker je sled neodvisna od baze, je $\operatorname{sl} \beta_i = \operatorname{sl} \alpha_{i-1}$. Od tod pa sledi:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i (\operatorname{sl} \beta_i - \operatorname{sl} \alpha_{i-1}) &= 0 \\
\sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \operatorname{sl} \beta_i + \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^{i-1} \operatorname{sl} \alpha_{i-1} &= 0 \\
\sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i (\operatorname{sl} \alpha_i + \operatorname{sl} \beta_i) &= 0
\end{aligned}$$

Izrek zdaj sledi iz enačbe $\operatorname{sl} \varphi_i = \operatorname{sl} \alpha_i + \operatorname{sl} \beta_i$. ■

Dokaz izreka Najprej se spomnimo naslednje eksaktne lestve:

$$\begin{tikzcd}
\ldots & H^{p-1}(\partial M) \arrow[r, "\delta'^*"] \arrow[d, "\frown", "z_\partial"'] & H^p(M_+^\partial) \oplus H^p(M_-^\partial) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\frown", "(z_+, z_-)"'] & H^p(\widehat{M}) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\frown", "\widehat{z}"'] & H^p(\partial M) \arrow[d, "\frown", "z_\partial"'] & \ldots \\
\ldots & H_{n-p}(\partial M) \arrow[r, "\varphi_*"'] & H_{n-p}(M_+) \oplus H_{n-p}(M_-) \arrow[r, "\psi_*"'] & H_{n-p}(\widehat{M}) \arrow[r, "\partial_*"'] & H_{n-p-1}(\partial M) & \ldots
\end{tikzcd}$$

Po trditvi 2.9.3 lestev komutira do predznaka natančno, menjava predznaka pa je odvisna samo od položaja v lestvi. Naj bodo θ_p, $\widehat{\theta}_p$ in θ_p^∂ preslikave iz definicije Lefschetzovih števil $L(f,g)$, $L(\widehat{f},\widehat{g})$ in $L(f_\partial, g_\partial)$. Iz preslikav θ_p po naravni poti konstruiramo še preslikave $\theta_p^\pm\colon H_p(M_\pm) \to H_p(N_\pm)$. Dobimo naslednjo eksaktno lestev:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \to & H_p(\partial M) & \to & H_p(M_+) \oplus H_p(M_-) & \to & H_p(\widehat{M}) & \to & \ldots \\ & & \downarrow{\scriptstyle \theta_p^\partial} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_p^+ \oplus \theta_p^-} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\theta}_p} & & \\ \ldots & \to & H_p(\partial M) & \to & H_p(M_+) \oplus H_p(M_-) & \to & H_p(\widehat{M}) & \to & \ldots \end{array}$$

Ker menjava predznaka v vsakem kvadratu nastopi dvakrat ali pa nobenkrat, je lestev v celoti komutativna. Ker sta orientaciji mnogoterosti M_+ in N_+ obe enaki, orientaciji mnogoterosti M_- in N_- pa obe nasprotno enaki orientacijama mnogoterosti M in N, je $\operatorname{sl}\theta_p^+ = \operatorname{sl}\theta_p^- = \operatorname{sl}\theta_p$. Iz leme sledi enakost

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p (\operatorname{sl}\theta_p^\partial - 2\operatorname{sl}\theta_p + \operatorname{sl}\widehat{\theta}_p) = 0$$

od koder že sledi izrek. ■

Definicija novega indeksa je sedaj na dlani.

Definicija Naj bosta M in N kompaktni orientirani n-mnogoterosti. Naj bo $V \subset \operatorname{Int} W \subset W \subset M$. Dani naj bosta preslikavi f in $g\colon W \to N$. Množica točk ujemanja preslikav f in g na W naj bo vsebovana v V in zaprta v M. Obe preslikavi naj množico $W \cap \partial M$ slikata v ∂N. Potem lahko definiramo preslikavi f_∂ in $g_\partial\colon W \cap \partial M \to \partial N$. *Indeks* ujemanja preslikav f in g na množici V potem definiramo s formulo:

$$\boldsymbol{I}(V; f, g) := \frac{1}{2}\big(I(\widehat{V}; \widehat{f}, \widehat{g}) + I(V_\partial; f_\partial, g_\partial)\big)$$

Za novi indeks veljajo podobne lastnosti kot za stari indeks. Neodvisnost od ambienta velja, če sta podmnogoterosti pravilno vloženi. Aditivnost velja v nespremenjeni obliki. Homotopska invariantnost velja, če homotopiji na vsakem koraku slikata $W \cap \partial M$ v ∂N. Ohrani pa se tudi povezava z Lefschetzovim številom: iz izreka 1 takoj sledi, da je tudi novi indeks ujemanja na celi mnogoterosti enak Lefschetzovemu številu preslikav f in g.

V precej primerih je mogoče indeks ujemanja definirati na stari in novi način. Nastane seveda vprašanje, ali se v tem primeru oba indeksa ujemata. Odgovor je pritrdilen.

Trditev 3 *Naj bosta M in N kompaktni n-mnogoterosti. Naj bo $V \subset \operatorname{Int} W \subset W \subset M$. Dani naj bosta preslikavi f in $g\colon (W, W \cap \partial M) \to (N, \partial N)$. Množica točk ujemanja obeh preslikav na W naj bo vsebovana v $V \cap \mathring{M}$ in zaprta v M. Potem velja:*

$$\boldsymbol{I}(V; f, g) = I(V; f, g)$$

Dokaz Po izreku 3.2.2 je indeks ujemanja neodvisen od ambientne mnogoterosti. Ker naravni vložitvi $M \hookrightarrow M_+$ in $N \hookrightarrow N_+$ obe ohranita, vložitvi $M \hookrightarrow M_-$ in $N \hookrightarrow N_-$ pa obe obrneta orientacijo, velja

$$I(W_+; \widehat{f}, \widehat{g}) = I(W_-; \widehat{f}, \widehat{g}) = I(W; f, g) = I(V; f, g)$$

Množici $\{x \in W_+ \mid f(x) = g(x)\}$ in $\{x \in W_- \mid f(x) = g(x)\}$ sta disjunktni, zato po izreku 3.2.4 velja $I(\widehat{W}; \widehat{f}, \widehat{g}) = 2\, I(V; f, g)$. Množica $\{x \in W \cap \partial M \mid f_\partial(x) = g_\partial(x)\}$ pa je prazna, zato je $I(W \cap \partial M; f_\partial, g_\partial) = 0$. Od tod pa že sledi naša trditev. ∎

Ker sta torej stari in novi indeks tam, kjer sta oba definirana, enaka, bomo enačili tudi njuni oznaki. Oba bomo označevali z I.

Opomba Naj bo x izolirana točka ujemanja. Iz definicije novega indeksa ujemanja in dokaza prejšnje trditve sledi:

$$I(x; f, g) = \begin{cases} I(x_+; \widehat{f}, \widehat{g}) = I(x_-; \widehat{f}, \widehat{g}) & x \in \mathring{M} \\ \frac{1}{2}(I(x; \widehat{f}, \widehat{g}) + I(x; f_\partial, g_\partial)) & x \in \partial M \end{cases}$$

Za konec si še enkrat oglejmo zgled z začetka razdelka, kolobar K. S pomočjo izreka 3.2.7 se da preveriti, da so indeksi ujemanja preslikav f_∂ in g_∂ v vseh točkah ujemanja enaki 1. Indeksi ujemanja preslikav $\widehat{f}$ in $\widehat{g}$ pa so na $S^1 \times \{0\}$ enaki -1, na $S^1 \times \{1\}$ pa 1. Če torej točka ujemanja x leži na $S^1 \times \{0\}$, je $I(x; f, g) = 0$, če leži na $S^1 \times \{1\}$, pa je $I(x; f, g) = 1$. Vsota vseh indeksov je enaka $q-p$, kar je res Lefschetzovo število preslikav.

3.5 Celoštevilskost indeksa ujemanja

Novi indeks ujemanja je po definiciji lahko bodisi celo število bodisi celo število in pol. Pokazali bomo, da je indeks ujemanja v izolirani točki vedno celo število. Splošen primer bomo pustili odprt.

Izrek 1 *Naj bosta M in N kompaktni orientirani mnogoterosti. Dani naj bosta preslikavi f in $g\colon (M, \partial M) \to (N, \partial N)$. Naj bo x njuna izolirana točka ujemanja. Potem je $I(x; f, g)$ celo število.*

DOKAZ Očitno je izrek dovolj dokazati za primer, ko točka x leži na robu mnogoterosti M. Treba je torej dokazati, da sta $I(x; \widehat{f}, \widehat{g})$ in $I(x; f_\partial, g_\partial)$ iste parnosti.

Naj bo $y = f(x) = g(x)$. Obstajata taki lokalni karti $\alpha\colon (V, x) \overset{\cong}{\to} (\mathbb{R}^n_+, 0)$ in $\beta\colon (W, y) \overset{\cong}{\to} (\mathbb{R}^n_+, 0)$, da je $V \subset M$, $W \subset N$, $f^{-1}(\{y\}) \cap V = \{x\}$ in $f(V) \subset W$. Karti liho razširimo do kart $\widehat{\alpha}\colon (\widehat{V}, x) \overset{\cong}{\to} (\mathbb{R}^n, 0)$ in $\widehat{\beta}\colon (\widehat{W}, y) \overset{\cong}{\to} (\mathbb{R}^n, 0)$. Definirajmo $\varphi := \widehat{\beta} \circ \widehat{f} \circ \widehat{\alpha}$ in $\psi := \widehat{\beta} \circ \widehat{g} \circ \widehat{\alpha}$. Ti preslikavi sta *lihi v zadnji koordinati* in seveda slikata $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ vase. Naj bosta φ_0 in $\psi_0\colon \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \to \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ ustrezni zožitvi.

Točka 0 je edina ničla preslikave $\psi - \varphi$. Po izreku 3.2.7 je $I(x; \widehat{f}, \widehat{g}) = \pm \deg_0(\psi - \varphi)$ in $I(x; f_\partial, g_\partial) = \pm \deg_0(\psi_0 - \varphi_0)$ (glede na to, ali karti ohranita ali obrneta orientacijo). Dovolj je torej dokazati, da sta $\deg_0(\psi - \varphi)$ in $\deg_0(\psi_0 - \varphi_0)$ iste parnosti. To je gotovo res za $n = 1$, saj je $\deg_0(\psi - \varphi) = \pm 1$ (saj je funkcija $\psi - \varphi$ liha) in $\deg_0(\psi_0 - \varphi_0) = 1$. Naj bo od zdaj naprej $n > 1$. Definirajmo preslikavo $\gamma\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ po predpisu

$$\gamma(p) := \frac{\psi(p) - \varphi(p)}{\|\psi(p) - \varphi(p)\|}$$

Tudi ta preslikava je liha v zadnji koordinati. Po izreku 2.8.16 je $\deg_0(\psi - \varphi) = \deg \gamma$. Če z $\gamma_0\colon S^{n-2} \times \{0\} \to S^{n-1} \times \{0\}$ označimo ustrezno zožitev preslikave γ, je za $n > 2$ tudi

$\deg_0(\psi_0 - \varphi_0) = \deg \gamma_0$. Za $n = 2$ pa je po opombi 2.8.18 stopnja presikave $\psi_0 - \varphi_0$ v točki 0 enaka kar vsoti vseh elementov iz S^0, ki jih γ_0 preslika v 1 ($S^0 \times \{0\}$ smo identificirali z S^0).

Za $n > 2$ je torej treba dokazati, da sta $\deg \gamma$ in $\deg \gamma_0$ iste parnosti. To bomo storili tako, da bomo globalni stopnji zapisali kot lokalni stopnji. Izbrali bomo poljubno točko $q \in S^{n-2} \times \{0\}$ in pogledali stopnjo na njeni prasliki. Prasliko $\gamma^{-1}(\{q\})$ bomo razdelili na del, ki leži na ekvatorju $S^{n-2} \times \{0\}$, in na dela, ki ležita na odprtih hemisferah. Seveda ti trije deli niso nujno zaprti v S^{n-1}, zato je treba preslikavo γ ustrezno popraviti. Konstruirali bomo preslikavo γ', homotopno γ in liho v zadnji koordinati, ki v primerni okolici ekvatorja slika v ekvator samo točke na ekvatorju.

Označimo $S^{n-1}_+ := S^{n-1} \cap \mathbb{R}^n_+$. Označimo s C valj $S^{n-2} \times [0, 1)$, s P pa severni pol $(0, 1)$ na sferi. Definirajmo homeomorfizem $h\colon C \xrightarrow{\cong} S^{n-1}_+ - P$ po predpisu

$$h(x, s) := (\sqrt{1 - s^2}\, x, s)$$

Definirajmo preslikavo

$$g\colon \{(x, s, t) \in C \times [0, \frac{1}{2}] \mid s \geq t\} \longrightarrow C$$

po predpisu

$$g(x, s, t) := \left(x, 1 - \frac{1 - s}{1 - t}\right)$$

in označimo še $g_t(x, s) := g(x, s, t)$. Definirajmo sedaj preslikavo

$$G\colon \{(x, s, t) \in S^{n-1}_+ \times [0, \frac{1}{2}] \mid s \geq t\} \longrightarrow S^{n-1}$$

po predpisu

$$G(x, s, t) := \begin{cases} (h \circ g_t \circ h^{-1})(x, s) & s < 1 \\ P & s = 1 \end{cases}$$

Preslikava G je nekakšna homotopija. Brez težav se prepričamo, da je zvezna. Njeni koraki predstavljajo raztege delov hemisfere $S^{n-1}_+ \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times [t, 1])$ na celotno hemisfero S^{n-1}_+.

Definirajmo še preslikavo

$$f\colon \{(s, t) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \mid s \leq t\} \longrightarrow [0, \frac{1}{2}]$$

po predpisu

$$f(s, t) := \begin{cases} s & s \leq \frac{t}{2} \\ t - s & s \geq \frac{t}{2} \end{cases}$$

in označimo $f_t(s) := f(s, t)$. Končno definirajmo homotopijo $H\colon S^{n-1}_+ \times [0, \frac{1}{2}] \to S^{n-1}_+$ po predpisu

$$H(x, s, t) := \begin{cases} (h \circ (\gamma_0 \times f_t) \circ h^{-1})(x, s) & s \leq t \\ \gamma(G(x, s, t)) & s \geq t \end{cases}$$

V primeru, ko je $s = t$, sta obe veji enaki $\gamma_0(h^{-1}(x,0))$, torej je homotopija dobro definirana. Lahko jo liho razširimo do homotopije $S^{n-1} \times [0, \frac{1}{2}] \to S^{n-1}$. Če označimo $H_t(x,s) := H(x,s,t)$, je potem $H_0 = \gamma$. Definirajmo $\gamma' := H_{1/2}$. Na ekvatorju homotopija miruje, zato je tudi zožitev preslikave γ' na ekvator ravno preslikava γ_0.

Izberimo poljubno točko $q \in S^{n-2} \times \{0\}$. Označimo $K := \gamma'^{-1}(\{q\})$ in $K_0 := \gamma_0^{-1}(\{q\}) = K \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$. Preslikava γ' točkam, ki imajo zadnjo koordinato po absolutni vrednosti manjšo od $\frac{1}{4}$, le-to ohranja, zato od teh točk slika v ekvator le točke na ekvatorju. Torej lahko množico K razdelimo na tri disjunktne podmnožice K_0, K_+ in K_-, in sicer glede na to, ali je njihova zadnja koordinata enaka 0, pozitivna ali negativna. Vse tri množice so zaprte v S^{n-1}. Zato ima preslikava γ' dobro definirano stopnjo na K, K_0, K_+ in K_-. Po trditvi 2.8.5 je stopnja na prvi množici enaka vsoti stopenj na ostalih množicah. Naj bo $\zeta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zrcaljenje, ki zadnji koordinati prevrže predznak. Ker je preslikava γ' liha v zadnji koordinati, je $\gamma' = \zeta \circ \gamma' \circ \zeta$. Zato je po opombi 2.8.3 $\deg_{K_+} \gamma' = \deg_{K_-} \gamma'$. Torej sta $\deg_K \gamma'$ in $\deg_{K_0} \gamma'$ iste parnosti.

Po trditvi 2.8.13 je $\deg \gamma = \deg \gamma' = \deg_K \gamma'$. Naj bo $n > 2$. Potem seveda velja tudi $\deg \gamma_0 = \deg_{K_0} \gamma_0$. Izrek bo dokazan, če bomo dokazali še enakost $\deg_{K_0} \gamma_0 = \deg_{K_0} \gamma'$.

Naj bo $C' := S^{n-2} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ in $S' := S^{n-1} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$. Homeomorfizem h liho razširimo, nato pa ga spet zožimo do homeomorfizma $h'\colon C' \to S'$. Prostora S' in C' sta kompaktni orientabilni mnogoterosti. Pri tem S' podeduje orientacijo od S^{n-1}, ki podeduje orientacijo od B^n, ta pa od $\mathbb{R}^n$. Orientirajmo še C', in sicer tako, da bo homeomorfizem h' ohranjal orientacijo.

Stopnjo preslikave γ' na množici K_0 lahko gledamo tudi na mnogoterosti S', saj je po trditvi 2.8.4 stopnja neodvisna od ambientne mnogoterosti. Po opombi 2.8.3 je le-ta enaka stopnji preslikave $h \circ \gamma' \circ h^{-1}$, ravno tako na množici K_0. Ta preslikava pa je v dovolj majhni okolici ekvatorja enaka $\gamma_0 \times \mathrm{id}_{[-1/4,1/4]}$ ($S^{n-2} \times \{0\}$ smo identificirali z S^{n-2}). Lokalna stopnja identitete v točki 0 je očitno enaka 1, zato je po trditvi 2.8.8 res $\deg_{K_0} \gamma_0 = \deg_{K_0} \gamma'$.

Za $n > 2$ smo torej izrek že dokazali. Pri $n = 2$ ne moremo več definirati stopnje preslikave γ_0 na množici K_0. Pač pa je v tem primeru stopnja preslikave $\psi_0 - \varphi_0$ v točki 0 enaka kar vsoti vseh elementov iz S^0, ki jih γ_0 preslika v 1. Brž ko preslikava γ_0 število 1 (oziroma točko $(1,0)$) preslika v 1 (oziroma $(1,0)$), preslikava γ' tam ohrani orientacijo. In brž ko γ_0 točko $(-1,0)$ preslika v $(1,0)$, preslikava γ' tam obrne orientacijo. Torej je stopnja preslikave $\psi_0 - \varphi_0$ v točki 0 tudi za $n = 2$ enaka stopnji preslikave γ' na množici K_0, zato izrek velja tudi v tem primeru. ■

Ta izrek se dokazuje tudi v članku [1], vendar pa je v dokazu napaka. Osnovna ideja je ista. Razlika je v tem, da hoče avtor konstruirati tako preslikavo γ', da bi imela praslika kake točke iz $S^{n-2} \times \{0\}$ le končno mnogo elementov in da bi bila preslikava v okolici vsakega od njih lokalni homeomorfizem. Potem bi bila stopnja preslikave γ' iste parnosti kot moč praslike, podobno pa bi veljalo tudi za njeno zožitev na ekvator γ_0' (ki v nasprotju z našim dokazom ni nujno enaka γ_0). Ker bi v prasliki izven ekvatorja ležalo sodo mnogo točk, bi bili stopnji res iste parnosti.

Avtor konstruira gladko preslikavo γ', homotopno γ, pri čemer je homotopija na vsakem koraku liha v zadnji koordinati. Preslikava γ' se v okolici ekvatorja obnaša podobno kot v našem dokazu, torej je vsaka regularna točka preslikave γ_0' tudi regularna točka preslikave γ'. Avtor se nato skliče na Morse-Sardov izrek in tako poišče regularno vrednost preslikave γ_0'. Potem pa napačno sklepa, da je to tudi regularna vrednost preslikave γ'. To seveda ni res, saj lahko preslikava γ' tudi točke izven ekvatorja poljubno grdo preslika v točke na ekvatorju.

3.6 Indeks ujemanja v notranjosti

Naj bosta M in N kompaktni orientirani mnogoterosti. Naj bo $x \in \partial M$ in V okolica točke x. Dani naj bosta preslikavi f in $g\colon (V, V \cap \partial M) \to (N, \partial N)$. Naj bo x edina točka v V, v kateri se f in g ujemata. Oglejmo si indeksa $I(x; \widehat{f}, \widehat{g})$ in $I(x; f_\partial, g_\partial)$. Spoznali smo, da še zdaleč ni nujno, da sta indeksa enaka. Zanima nas, ali morda obstaja vsaj kakšen razred parov preslikav, za katere sta indeksa vseeno enaka.

V zgledu s kolobarjem smo videli, da sta bila indeksa enaka na "zunanji" robni komponenti, t. j. na $S^1 \times \{1\}$, ko je bila preslikava g pri robu "hitrejša" od f. Zanima nas, ali je to vedno res.

Naj bo $c\colon (C, \partial N) \to \partial N \times (\mathbb{R}_+, 0)$ odprt obrobek v N. Označimo $c_1 := \mathrm{pr}_1 \circ c$ in $c_2 := \mathrm{pr}_2 \circ c$. Preslikavi pr_1 in pr_2 sta kot običajno naravni projekciji. Za $i = 1, 2$ definirajmo preslikavi f_i in g_i, definirani na $f^{-1}(C)$ oziroma $g^{-1}(C)$, kot kompoziciji $c_i \circ f$ in $c_i \circ g$. Preslikava g *pri robu prehiteva* f, če obstaja tak obrobek (C, c), da je z gornjimi oznakami $f_2(x) \leq g_2(x)$ za vsak $x \in f^{-1}(C) \cap g^{-1}(C)$.

Izrek 1 *Če preslikava g pri robu prehiteva preslikavo f, velja $I(x; \widehat{f}, \widehat{g}) = I(x; f_\partial, g_\partial)$.*

Opomba Po definiciji indeksa ujemanja na robu je potem $I(x; \widehat{f}, \widehat{g}) = I(x; f_\partial, g_\partial) = I(x; f, g)$. Z drugimi besedami, vseeno je, ali indeks ujemanja gledamo na $\widehat{M}$, ∂M ali M.

Dokaz izreka Naj bo $c\colon C \to \partial N \times \mathbb{R}_+$ ustrezen obrobek. Iz njega konstruiramo dvojni obrobek $\widehat{c}\colon \widehat{C} \to \partial N \times \mathbb{R}$. Naj bo $y = f(x) = g(x)$ in $w_0\colon (W_0, y) \overset{\approx}{\to} (\mathbb{R}^{n-1}, 0)$ lokalna karta na ∂N, ki ohrani orientacijo. Definirajmo $W := c^{-1}(W_0 \times \mathbb{R}^n_+)$. Potem je $W_+ = \widehat{c}^{-1}(W_0 \times \mathbb{R}^n_+)$, $W_- = \widehat{c}^{-1}(W_0 \times \mathbb{R}^n_-)$ in $\widehat{W} = \widehat{c}^{-1}(W_0 \times \mathbb{R}^n)$. Definirajmo lokalno karto $\widehat{\beta}\colon \widehat{W} \overset{\approx}{\to} \mathbb{R}^n$ kot kompozitum $(\beta_0 \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \circ \widehat{c}$. Ker $\widehat{\beta}$ slika W_+ v $\mathbb{R}^n_+$ in W_- v $\mathbb{R}^n_-$, njena zožitev na W_0 pa ohrani orientacijo (saj je enaka β_0), jo po trditvi 2.3.3 ohrani tudi $\widehat{\beta}$.

Izberimo zdaj še tako lokalno karto $v\colon (V', x) \overset{\approx}{\to} (\mathbb{R}^n_+, 0)$, da bo $V' \subset f^{-1}(C) \cap g^{-1}(C)$. Iz nje konstruirajmo lokalno karto $\widehat{v}\colon \widehat{V'} \overset{\approx}{\to} \mathbb{R}^n$. Smemo privzeti, da $\widehat{v}$ ohrani orientacijo. Definirajmo zdaj preslikavi φ in $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kot kompozituma $\widehat{w} \circ f \circ \widehat{v}^{-1}$ in $\widehat{w} \circ g \circ \widehat{v}^{-1}$. Naj bosta φ_0 in $\psi_0\colon \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \to \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ njuni zožitvi. Po izreku 3.2.7 je $I(x; \widehat{f}, \widehat{g}) = \deg_0(\psi - \varphi)$ in $I(x; f_\partial, g_\partial) = \deg_0(\psi_0 - \varphi_0)$.

Preslikavi φ in ψ sta lihi v zadnji koordinati. Če s pr_1 označimo projekcijo na n-to komponento, je $\mathrm{pr}_n(\varphi(u)) \leq \mathrm{pr}_n(\psi(u))$ za vsak $u \in \mathbb{R}^n_+$. Zato preslikava $\psi - \varphi$ slika $\mathbb{R}^n_+$ v $\mathbb{R}^n_+$ in $\mathbb{R}^n_-$ v $\mathbb{R}^n_-$. Potem pa naslednji diagram komutira:

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) & \xrightarrow{(-1)^n \partial_*} & H_{n-1}((\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1} - 0) \times \{0\}) \\ {\scriptstyle (\psi-\varphi)_*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (\psi_0-\varphi_0)_*} \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) & \xrightarrow{(-1)^n \partial_*} & H_{n-1}((\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1} - 0) \times \{0\}) \end{array}$$

Od tod pa že sledi, da je $\deg(\psi - \varphi) = \deg(\psi_0 - \varphi_0)$. Izrek je dokazan. ■

V primeru, ko g pri robu prehiteva f in se preslikavi ujemata le v končno mnogo točkah, je pomočjo obeh Lefschetzovih števil preslikav f in g mogoče določiti indeks ujemanja na robu in indeks ujemanja v notranjosti mnogoterosti. Spomnimo se na izrek 3.4.1:

$$2\,L(f,g) = L(\widehat{f},\widehat{g}) + L(f_\partial, g_\partial)$$

Zamenjajmo preslikavi f in g in se spomnimo izreka 3.1.1. Dobimo:

$$2\,(-1)^n L(g,f) = L(\widehat{f},\widehat{g}) - L(f_\partial, g_\partial)$$

Enačbi odštejemo in dobimo:

$$\begin{aligned} L(f,g) - (-1)^n L(g,f) &= L(f_\partial, g_\partial) \\ (-1)^n L(g,f) &= L(f,g) - L(f_\partial, g_\partial) \end{aligned}$$

Oglejmo si izraz na desni! Prvi člen je enak vsoti indeksov vseh točk ujemanja preslikav f in g, drugi člen pa je enak vsoti indeksov vseh robnih točk ujemanja (glede na M, $\widehat{M}$ ali ∂M). Iz aditivnosti indeksa ujemanja takoj sledi naslednja trditev.

Trditev 2 *Naj g pri robu prehiteva f in naj imata preslikavi le končno mnogo točk ujemanja. Potem je indeks ujemanja v notranjosti mnogoterosti M enak $(-1)^n L(g,f)$.*

Za konec si oglejmo še preprost zgled. Naj bosta p in q naravni števili in $p < q$. Definirajmo preslikavi f in $g\colon (B^2, S^1) \to (B^2, S^1)$ po predpisu $f(z) := z^p$ in $g(z) := z^q$ ($\mathbb{R}^2$ enačimo s $\mathbb{C}$). Očitno g pri robu prehiteva f. Ni težko izračunati, da je $L(f,g) = q$ in $L(g,f) = p$. Preslikavi f in g se ujemata v 0 in še v $q - p$ točkah na enotski krožnici. S pomočjo teorije stopenj se lahko prepričamo, da je indeks ujemanja v 0 enak q, indeksi točk ujemanja na enotski kročnici pa so enaki 1. Lefschetzovo število $L(g,f)$ torej od točk ujemanja "vidi" samo ničlo, ki leži v notranjosti diska, $L(f,g)$ pa "vidi" vse točke ujemanja.

Kazalo

Literatura

[1] Kalyan Mukherjea: *Coincidence theory for manifolds with boundary*, Topology and its Applications **46** (1992), 23-39.

[2] Edwin H. Spanier: *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York 1966.

[3] R. Stöcker, H. Zieschang: *Algebraische Topologie*, B.G. Teubner, Stuttgart 1988.

[4] James W. Vick: *Homology Theory - An Introduction To Algebraic Topology*, Springer, New York 1994.

[5] Albrecht Dold: *Algebraic Topology*, Springer, 1972.

[6] M. Brown: *Locally flat imbeddings of topological manifolds*, Ann. of Math. **75** (1962), 331-341