UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika — raziskovalna smer

Martin Raič

Normalna aproksimacija po Steinovi metodi

Doktorska disertacija
z dopolnitvami in popravki

Izšlo junija 2006.
Zadnji popravek: 4. 4. 2020

Zahvala

Mnogo je ljudi, brez katerih pričujoča disertacija še zdaleč ne bi bila takšna, kakršna je. Prav vsem iskrena hvala! Še posebej pa bi se želel zahvaliti:

- mentorju prof. dr. Mihaelu Permanu, ki me je seznanil s tem čudovitim področjem teorije verjetnosti, me opozoril na nekaj novih stvari in prebral disertacijo;
- prof. dr. Vidmantasu Bentkusu iz Vilniusa, ki mi je razkril povezavo med Steinovo in Lindeberg–Bergströmovo metodo ter me seznanil z velikostnim redom Gaussovih perimetrov konveksnih množic. Slava njegovemu spominu!
- prof. dr. Andrewu D. Barbourju iz Züricha za nekaj koristnih namigov in vzpodbudne besede ter Oddelku za uporabno matematiko Univerze v Zürichu, ki je pokril potne stroške poletne šole iz Steinove metode leta 2003 v Singapuru;
- Inštitutu matematičnih ved (Institute of Mathematical Sciences) Singapurske nacionalne univerze (National University of Singapore), ki je pokril stroške bivanja prej omenjene poletne šole;
- prof. dr. Matjažu Omladiču in prof. dr. Borisu Lavriču za terminološke nasvete;
- vsem domačim, še zlasti staršem, ženi Urši, njenim staršem ter Alenki in Heleni za nesebično podporo, vzpodbudo, razumevanje in pomoč pri varstvu.

Povzetek

Steinova metoda je domiseln način ocenjevanja napake pri aproksimaciji porazdelitev določenih slučajnih spremenljivk, ki temelji na ocenjevanju matematičnih upanj določenih linearnih operatorjev (navadno diferencialnih ali diferenčnih). Razvita je bila najprej za normalno aproksimacijo, kasneje pa so jo modificirali še za vrsto drugih aproksimacij, med katerimi so najbolj znane Poissonova s posplošitvami, binomska, polinomska, gama in vrsta drugih.

Glavna odlika Steinove metode je, da dobro deluje pri aproksimaciji vsot slučajnih spremenljivk z določeno vrsto odvisnosti, predvsem tam, kjer vrstni red seštevancev ni pomemben (v nasprotju npr. z martingali). Področja uporabe med drugim zajemajo statistiko, slučajne grafe, analizo DNK, epidemiologijo, teorijo iger, verjetnostno teorijo števil in zavarovalniško matematiko.

V tem delu se osredotočimo na normalno aproksimacijo, in sicer tako eno- kot tudi večrazsežno. V dobršni meri se posvetimo reševanju Steinove enačbe, ki je ključen korak pri uporabi metode. To je netrivialen problem v večrazsežnem primeru, ko gre za parcialno diferencialno enačbo eliptičnega tipa, ki se da rešiti s pomočjo operatorskih polgrup. Tu pokažemo, da ta konstrukcija deluje za vse zvezne testne funkcije, ki so integrabilne glede na ustrezno normalno porazdelitev.

Oceno napake formuliramo v dveh oblikah. Pri prvi aproksimiramo matematična upanja dovolj gladkih testnih funkcij. To obliko ocene formuliramo v dokaj splošni obliki v eni in več dimenzijah. Pri drugi pa aproksimiramo verjetnosti, da slučajna spremenljivka pripada določenemu poltraku na realni osi (ocene Berry–Esseenovega tipa) ali, splošneje, določeni, praviloma konveksni pomnožici prostora $\mathbb{R}^n$. Ocene Berry–Esseenovega tipa izpeljemo v skoraj tako splošni obliki kot ocene za gladke testne funkcije (dodatno privzamemo določeno omejenost), pri večrazsežnem primeru pa se omejimo le na vsote neodvisnih slučajnih vektorjev, zato pa izboljšamo doslej znane konstante. Le-te v veliki meri temeljijo na ocenah Gaussovih perimetrov konveksnih množic, ki jih izpeljemo v eksplicitni obliki in prav tako z izboljšano konstanto.

V delu podamo pregled večine konceptov odvisnosti, za katere je bila uporabljena Steinova metoda za normalno porazdelitev. Ti med drugim zajemajo tudi koncept lokalne odvisnosti. Rezultate podpremo z nekaj zgledi iz statistike, fiksnih in slučajnih grafov ter Nashevih ravnovesij.

Ključne besede:

Verjetnost; Steinova metoda; Centralni limitni izrek; Berry–Esseenov izrek; Večrazsežna normalna aproksimacija; Lokalna odvisnost; Statistika; Statistike končnih populacij; Barvanja grafov; Slučajni grafi; Nashevo ravnovesje; Gaussovi perimetri konveksnih množic; Tenzorski račun; Norme tenzorjev; Parcialne diferencialne enačbe eliptičnega tipa; Operatorske polgrupe

Matematična predmetna klasifikacija (2000):

60F05; 62F12, 60C05, 05C80, 05C15, 91A60, 52A40, 15A69, 46B28, 35J05, 47D07

Abstract

Stein's method provides an ingenious tool for giving bounds for the accuracy of the distribution approximation for certain random variables. It is based on the estimation of the expectations of certain linear operators (usually differential or difference). It was originally designed for the normal approximation, but later extended to numerous other approximations, like Poisson approximation with several extensions, binomial, gamma and many others.

A remarkable feature of Stein's method is that it works very well for sums of random variables with certain dependence structure, especially when the ordering of the summands plays no role (in contrast with e. g. the martingale approach). Its broad range of applications includes statistics, random graphs, DNA analysis, epidemiology, game theory, probabilistic number theory, insurance mathematics and many other areas.

In the dissertation, we focus on the uni- and multivariate normal approximation. We study the behavior of the solutions of the Stein equation, fundamental to the success of the method, in great detail. This is non-trivial in the multivariate case, where Stein's equation turns out to be an elliptic partial differential equation, which can be solved by means of operator semigroups. We show that this construction works for all test functions which are integrable with respect to the appropriate normal distribution.

The accuracy of the approximation is given in two forms. The first one is based on the expectations of sufficiently smooth test functions. This form is given for quite a general case, which includes uni- as well as multivariate bounds. The second form is based on the probabilities of half-lines (the Berry–Esseen type estimates) or, more generally, certain (usually convex) subsets of $\mathbb{R}^n$. The Berry–Esseen type estimates are given in almost as general form as the estimates based on smooth test functions (under some additional boundedness assumptions). In the multivariate case, we only consider sums of independent random vectors. However, we improve the constants, which are to great extent based on Gaussian perimeters of convex sets. We derive explicit bounds for them with improved constants as well.

We give a survey of most concepts of dependence for which Stein's method for normal approximation has been applied, including the concept of local dependence. The results are illustrated with several applications from statistics, fixed and random graphs, and Nash equilibrium points.

Key words:
Probability; Stein's Method; Central Limit Theorem; Berry–Esseen Theorem; Multivariate Normal Approximation; Local Dependence; Statistics; Finite Population Statistics; Graph Colorings; Random Graphs; Nash Equilibrium; Gaussian Perimeters of Convex Sets; Tensor Products; Tensor Norms; Elliptic Partial Differential Equations; Operator Semigroups

Mathematics Subject Classification (2000):
60F05; 62F12, 60C05, 05C80, 05C15, 91A60, 52A40, 15A69, 46B28, 35J05, 47D07

Kazalo

Uvod

Računanje porazdelitev vsot velikega števila slučajnih spremenljivk (npr. računanje verjetnosti, da taka slučajna spremenljivka pripada določenemu intervalu, ali računanje matematičnega upanja njene nelinearne funkcije) je lahko zelo težavno, zato so že zelo zgodaj začeli iskati približne obrazce. Že leta 1718 je de Moivre [82] izpeljal formulo, ki aproksimira simetrično binomsko porazdelitev. Njegovo delo je leta 1812 dopolnil Laplace [43]. Laplaceov rezultat lahko formuliramo v naslednji obliki:

Izrek 1. *Če so $X_1, X_2, \dots X_n$ neodvisne in enako porazdeljene Bernoullijeve slučajne spremenljivke z vsoto W, je le-ta porazdeljena približno normalno. Z drugimi besedami, velja približna enakost:*

$$\mathbb{P}\Big(\operatorname{var}(W)^{-1/2}(W - \mathbb{E}\, W) \le x\Big) \approx \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

Natančneje, ko gre n proti neskončno, porazdelitev slučajnih spremenljivk X_i pa ostaja fiksna, gre napaka v zgornji zvezi proti nič za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Čebišev [43] je leta 1890 z uporabo metode momentov zgornji izrek posplošil na primer, ko so X_i splošnejše slučajne spremenljivke, privzel pa je dokaj stroge pogoje glede njihovih momentov. Nato je v letih 1900 in 1901 Ljapunov [75], [76] z uporabo karakterističnih funkcij pogoje omilil le na obstoj absolutnega momenta reda več kot 2. Izrek Ljapunova velja tudi za primer, ko slučajne spremenljivke X_i niso nujno enako porazdeljene. Leta 1922 pa je Lindeberg [74] spet z novo, neposredno metodo izpeljal konvergenco vsot neodvisnih slučajnih spremenljivk proti normalni porazdelitvi pod pogoji, za katere je leta 1935 Feller [58] dokazal, da so tudi potrebni. Neodvisno je leta 1925 Lévy [73] izpeljal poseben primer Lindebergovega izreka, ki se nanaša na enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Lindebergov in Lévyjev rezultat privzemata le končne druge momente.

Poleg dokaza konvergence pa je pomembna tudi ocena napake. Le-to je prvi izpeljal Ljapunov [76], a njegova ocena hitrosti konvergence je nekoliko šibkejša od najboljše možne. Le-to pa sta za primer, ko so slučajne spremenljivke X_i enako porazdeljene, neodvisno drug od drugega izpeljala Berry [27] leta 1941 in Esseen [53] leta 1942. Ta rezultat je leta 1945 Esseen [54]) posplošil še na primer, ko sumandi niso nujno enako porazdeljeni, kar lahko formuliramo v naslednji obliki.

Izrek 2. *Če so $X_1, X_2, \dots X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke z vsoto W ter če velja $\mathbb{E}\, X_i = 0$ in $\operatorname{var}(W) = 1$, za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja ocena:*

$$\Big|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)\Big| \le C \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\, |X_i|^3 \tag{2}$$

kjer je C univerzalna konstanta.

Vse do današnjih dni je bilo precej dela posvečenega izboljševanju konstante. Zadnjo izboljšavo je leta 2010 naredila Ševcova [121], ki je dokazala, da zgornji izrek velja za $C = 0{,}56$.

Vsi navedeni rezultati veljajo za vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk. Neodvisnost pa je v praksi prej izjema kot pravilo. Posplošitve na vsote odvisnih slučajnih spremenljivk so začeli intenzivno študirati po letu 1950. Zelo domiselno metodo, po kateri se da razmeroma lahko oceniti napako pri normalni aproksimaciji, je leta 1970 odkril Charles Stein [124]. Ta metoda, danes splošno znana kot Steinova metoda, se še zlasti obnese pri vsotah slučajnih spremenljivk z določeno vrsto odvisnosti, pri kateri vrstni red seštevancev ne igra vloge (v nasprotju denimo z martingali). Področja uporabe Steinove metode zajemajo veliko primerov, med drugim:

- statistiko (glej Rinott in Rotar [105] ter Chen in Shao [42]);
- slučajne grafe (glej Barbour [8], Barbour, Karoński in Ruciński [7], Goldstein in Rinott [63], Konieczna [71] ter Rinott in Rotar [104]);
- teorijo iger (glej Rinott in Scarsini [108]);
- teorijo ekstremov: (glej Smith [123], Mihajlov [80] in Tawn [128])
- zavarovalniško matematiko (glej Barbour in Chryssaphinou [15]);
- analizo zaporedij v DNK (glej spet Barbour in Chryssaphinou [15]);
- epidemiologijo (glej Reinert [100, 102]);
- verjetnostno teorijo števil (glej Diaconis [49] in Stein [125]);
- markovske verige (glej Diaconis [51]).

Ker nekaj zanimivih primerov uporabe je predstavljenih tudi v Dembovem in Rinottovem članku [47].

Osnovna ideja Steinove metode je, da za dano slučajno spremenljivko W z $\mathbb{E}\, W = 0$ in $\operatorname{var}(W) = 1$ ocenimo matematično upanje:

$$\mathbb{E}\Big[h'(W) - h(W)W\Big] \tag{3}$$

kjer je h primerno gladka funkcija (če je W porazdeljena standardizirano normalno, ni težko preveriti, da je zgornje matematično upanje enako nič). Nato za h vstavimo rešitev *Steinove enačbe*:

$$h'(w) - h(w)w = f(w) - \mathrm{N}(0,1)\{f\} \tag{4}$$

in dobimo oceno razlike $\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}$.

Steinova metoda nikakor ni omejena le na normalno aproksimacijo. Leta 1975 je Chen [38] metodo razširil na Poissonovo aproksimacijo, kasneje pa so jo razširili še na vrsto drugih aproksimacij, med drugimi binomsko (glej Loh [77], enakomerno (glej [50]) in gama (glej Luk [78]). Splošen koncept uporabe Steinove metode za vnaprej določeno porazdelitev z vrsto primerov je predstavljen v Schoutensovem članku [118].

Steinova metoda dopušča tudi bolj rafinirane aproksimacije, kot je npr. Edgeworthov razvoj (glej Barbour [9], Schneller [117] ter Rinott in Rotar [107]). Zelo zanimiva je uporaba Steinove metode pri sestavljeni Poissonovi (angl. *compound Poisson*) aproksimaciji (glej Barbour, Chen in Loh [14], Barbour in Utev [18], [19], Barbour in Xia [20] ter tudi Barbour in Čekanavičius [16]). Barbour in Čekanavičius [16] pa ocenjujeta tudi napako pri Poisson–Charlierovi aproksimaciji.

Steinova metoda tudi ni omejena le na realne slučajne spremenljivke. Tako se da Poissonova aproksimacija razširiti na aproksimacijo s Poissonovim procesom (glej Barbour, Holst in Janson [17] ter Barbour in Xia [20]). Prav tako se da enorazsežna normalna aproksimacija razširiti na večrazsežno (le-to je prvi izpeljal Götze [64]) in aproksimacijo z Brownovim gibanjem (glej Barbour [10]). S pomočjo Steinove metode se da izpeljati tudi aproksimacija procesov, ki imajo vrednosti v merah (glej Reinert [101]).

Steinova metoda je podrobno predstavljena v Steinovi monografiji [125], kjer je podanih tudi nekaj zgledov iz normalne in Poissonove aproksimacije. Podroben pregled Poissonove aproksimacije po Steinovi metodi je prikazan v Barbourjevi, Holstovi in Jansonovi monografiji [17]. Delen pregled normalne aproksimacije je podan tudi v Rinottovem in Rotarjevem [106] ter avtorjevem prispevku [96]. Nekaj zanimivih primerov je zbranih v Chenovem prispevku [39]. Sodoben pregled Steinove metode z najnovejšimi rezultati pa je narejen v monografijah [12] in [13].

V tem delu se večinoma osredotočimo na normalno aproksimacijo. V prvem poglavju prikažemo, kako pridemo do operatorja v (3), in konstrukcijo izpeljemo za normalno in Poissonovo aproksimacijo. Drugo poglavje je večinoma posvečeno reševanju Steinove enačbe v več dimenzijah, ki je neprimerno zahtevnejše kot v enorazsežnem primeru (gre za parcialno diferencialno enačbo eliptičnega tipa). Enačbo rešimo za najsplošnejši primer, kjer je normalna aproksimacija sploh še smiselna (t. j. za vse testne funkcije f, ki so integrabilne glede na standardizirano normalno porazdelitev – izrek 2.6.1). Prikažemo tudi pomembne kvalitativne razlike med obnašanjem rešitve Steinove enačbe v eni in več dimenzijah (izrek 2.8.3). Poleg tega pa pokažemo tudi, da se da Steinova metoda izvesti tudi brez reševanja Steinove enačbe.

Tretje poglavje je namenjeno izčrpni predstavitvi konceptov odvisnosti, za katere je bila razvita normalna aproksimacija po Steinovi metodi. Pokažemo, da je večina teh konceptov v dobršni meri ekvivalentna, in rezultate ilustriramo na nekaj standardnih zgledih. Rezultate izpeljemo za gladke in Lipschitzeve testne funkcije v eno- in večrazsežnem primeru (natančneje, ocenjujemo razlike $\mathbb{E} f(W) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f\}$, kjer je f primerno gladka funkcija). Med drugim izpeljemo tudi posplošitev Lindebergovega izreka na vsote odvisnih slučajnih spremenljivk: izrek 3.10.5 nam omogoča izpeljavo šibke konvergence proti normalni porazdelitvi le pri končnih drugih momentih (glej tudi trditev 3.10.9 in avtorjev članek [97]).

V četrtem poglavju pa izpeljemo ocene Berry–Esseenovega tipa (t. j. ocenjujemo levo stran v (2)). Tako izpeljemo razmeroma splošno posplošitev Berry–Esseenovega izreka na vsote odvisnih slučajnih spremenljivk (izrek 4.2.1). Izpeljemo pa tudi večrazsežne posplošitve Berry–Esseenovega izreka (t. j. ocenjujemo razlike $\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\}$, kjer je A praviloma konveksna množica). Pri tem se omejimo le na vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk, zato pa izboljšamo doslej znane konstante (izreka 4.3.1 in 4.3.2).

Peto, šesto in sedmo poglavje so namenjena zgledom. Podamo zglede iz statistike, teorije grafov in slučajnih grafov, študiramo pa tudi število Nashevih ravnovesij. Pri vseh zgledih izpeljemo Berry–Esseenove ocene, in sicer s pomočjo izreka 4.2.1.

Delo ima tudi osem dodatkov. Večinoma so namenjeni seznanjanju z oznakami, formulaciji pomožnih rezultatov in prikazu širšega ozadja določenih stvari, ki se pojavljajo v glavnem delu disertacije. V dodatku H pa tudi nekoliko izboljšamo oceno Gaussovih perimetrov konveksnih množic, pri čemer rezultat podamo v popolnoma eksplicitni obliki (izrek H.1.3). To igra pomembno vlogo pri oceni napake v večrazsežnem primeru.

Pričujoča disertacija nikakor ne zajema vsega, kar je na njenem področju doslej znanega. Prav gotovo bi bilo lahko zajetih še več zgledov (nekaj zelo zanimivih zgledov je podanih v Goldsteinovih člankih [60] in [61]). Manjka tudi večrazsežna različica Berry–Esseenovega izreka za vsote odvisnih slučajnih vektorjev, neenakomerne ocene (t. j. take, pri katerih ocena napake $|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)|$ pada z x, glej Chen in Shao [40, 41, 42]), verjetnosti velikih odklonov (glej avtorjev članek [94]) in še kaj bi se našlo. Vendar pa bi to že preseglo okvir tega dela.

I. del:

Teorija

1.

Izpeljava Steinove metode

1.1 Steinov operator in Steinova enačba

Steinova metoda nudi aproksimacijo porazdelitev slučajnih spremenljivk, tako da aproksimira matematična upanja njihovih funkcij. V izvirniku za primerno določeno spremenljivko W in testne funkcije f iz primernega linearnega prostora $\mathcal{F}$ iščemo aproksimacije:

$$\mathbb{E} f(W) \approx \mathcal{N} f \tag{1.1.1}$$

kjer je $\mathcal{N}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ linearni funkcional, ki ga je lažje izračunati kot levo stran, želeli pa bi tudi oceniti napako.

Včasih se izkaže, da je operator $\mathcal{N}$ ugodno spet izraziti kot matematično upanje funkcije slučajne spremenljivke W. Tako bomo iskali aproksimacije tipa:

$$\mathbb{E} f(W) \approx \mathbb{E} \mathcal{P} f(W) \tag{1.1.2}$$

kjer je $\mathcal{P}$ projektor iz $\mathcal{F}$ na primeren podprostor funkcij, za katere je matematična upanja lažje računati kot za splošne funkcije iz $\mathcal{F}$. Ker lahko za ta podprostor vedno vzamemo prostor konstantnih funkcij, s tem nismo nič izgubili na splošnosti.

Zadeva se da formulirati še nekoliko bolj abstraktno, v duhu funkcionalne analize: vzamemo abstrakten linearni prostor $\mathcal{F}$ in funkcional ε na njem, ki ga je za splošne elemente iz $\mathcal{F}$ težko izračunati. Zato bi želeli aproksimirati:

$$\varepsilon f \approx \varepsilon \mathcal{P} f \tag{1.1.3}$$

kjer je $\mathcal{P}$ spet primeren projektor. Še splošneje, želeli bi aproksimirati zapleten element f z enostavnejšim elementom $\mathcal{P} f$ v dani seminormi p, definirani na $\mathcal{F}$, t. j. želeli bi oceniti $p(f - \mathcal{P} f)$. To se prevede na (1.1.3) oz. (1.1.2), če postavimo:

$$p(h) = |\varepsilon h| \quad \text{oziroma} \quad p(h) = |\,\mathbb{E}\, h(W)| \tag{1.1.4}$$

Osnovna Steinova [125] ideja je, da najprej z verjetnostno konstrukcijo, opisano v naslednjem razdelku, poiščemo operator $\mathcal{A}$ (*Steinov operator*) iz nekega drugega linearnega prostora $\mathcal{G}$ v $\mathcal{F}$, pri čemer je tudi na prostoru $\mathcal{G}$ definirana seminorma q in je:

$$p(\mathcal{A} g) \ll q(g) \tag{1.1.5}$$

Če je seminorma p podana z (1.1.4), pa lahko zapišemo:

$$\varepsilon \mathcal{A} g \approx 0 \quad \text{oziroma} \quad \mathbb{E}\, \mathcal{A} g(W) \approx 0 \tag{1.1.6}$$

Projektor $\mathcal{P}$ poiščemo tako, da je *Steinova enačba*:

$$\mathcal{A} g = f - \mathcal{P} f \tag{1.1.7}$$

rešljiva in da količina $q(g)$ ni prevelika v primerjavi s $p(f)$. Z drugimi besedami, obstajati mora dovolj krotek desni inverz operatorja $\mathcal{A}$, definiran na zalogi vrednosti projektorja $\mathcal{I} - \mathcal{P}$ (t. j. jedru projektorja $\mathcal{P}$). Tako lahko zapišemo:

$$p(f - \mathcal{P} f) = p(\mathcal{A} g) \ll p(f) \tag{1.1.8}$$

Vsak projektor $\mathcal{P}$ predstavlja dekompozicijo prostora na direktno vsoto njegovega jedra $\mathcal{H} = \ker \mathcal{P}$ in zaloge vrednosti $\mathcal{K} = \operatorname{im} P$. Stvar lahko pogledamo tudi obratno: projektor $\mathcal{P}$ konstruiramo tako, da konstruiramo tako dekompozicijo $\mathcal{F} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$, da ima operator $\mathcal{A}$ na prostoru $\mathcal{H}$ krotek desni inverz, elementi prostora $\mathcal{K}$ pa so enostavni. Najenostavneje bi bilo, da bi bil $\mathcal{K}$ kar ničelni podprostor, toda to bi pomenilo, da bi ocenjevali le $p(f)$, kar v večini primerov ni dovolj. Pač pa je v primeru, ko iščemo (1.1.3), za $\mathcal{K}$ navadno dovolj vzeti enorazsežen podprostor (to je zato, ker ima $\ker \varepsilon$ kodimenzijo ena). V primeru, ko je $\varepsilon f = \mathbb{E}\, f(W)$, bomo za $\mathcal{K}$ navadno vzeli kar prostor konstant. V tem primeru naš projektor $\mathcal{P}$ iz (1.1.2) sovpade s funkcionalom $\mathcal{N}$ iz (1.1.1). Včasih pa je ugodneje vzeti kaj drugega: v avtorjevem članku [94], ki obravnava velike odklone, se tako za $\mathcal{K}$ vzame prostor večkratnikov eksponentne funkcije $x \mapsto e^{\lambda x}$ (za fiksen λ).

Možnosti, kako konstruirati operator $\mathcal{A}$, je veliko. V naslednjem razdelku bomo predstavili izvirno Steinovo konstrukcijo, predstavljeno v [125], ki temelji na izmenljivih parih, in jo še nekoliko posplošili. Obstajajo pa tudi druge poti. Tako npr. Schoutens [118] opiše cel razred operatorjev $\mathcal{A}$ skupaj z verjetnostnimi merami ν in rešitvami Steinovih enačb:

$$\mathcal{A} g = f - \int f \, \mathrm{d}\nu \tag{1.1.9}$$

Tako $\mathbb{E}\, f(W)$ aproksimiramo z $\int f \, \mathrm{d}\nu$, izbrati moramo le še par $(\mathcal{A}, \nu)$, za katerega lahko $\mathbb{E}\, \mathcal{A} g(W)$ najugodneje ocenimo. Nabor porazdelitev ν je zelo širok in med drugim obsega večrazsežno normalno, Poissonovo, binomsko in gama porazdelitev. Veliko primerov konstrukcij Steinovega operatorja je zbrano tudi v monografiji [12].

Omenimo naj še, da ni potrebno za vsak problem posebej konstruirati Steinovega operatorja: Steinova metoda se odlikuje po tem, da se lahko en in isti operator uporablja za zelo širok razred problemov. Tako lahko Steinov operator najprej konstruiramo za razmeroma preprost razred slučajnih spremenljivk, pri katerih Steinova metoda niti ni najpreprostejši način aproksimacije porazdelitve. Svojo pravo moč pa metoda pokaže šele na širšem, zapletenejšem razredu slučajnih spremenljivk, za katere je primeren isti operator. Pri ocenjevanju napake pri enorazsežni normalni aproksimaciji (centralnem limitnem izreku) tako navadno vzamemo operator:

$$\mathcal{A} g(w) = g'(w) - g(w) w \tag{1.1.10}$$

ki ga v razdelku 1.4 na precej naraven način dobimo iz vsot neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Nato pa isti operator pri aproksimaciji vsot odvisnih slučajnih spremenljivk, pri katerih nam Steinova metoda ne bo dala dosti več dela kot za vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk, druge metode pa odpovedo ali pa se precej zapletejo.

1.2 Konstrukcija Steinovega operatorja

V prejšnjem razdelku smo iskali aproksimacijo težko izračunljivih matematičnih upanj $\mathbb{E} f(W)$ z lažje izračunljivimi matematičnimi upanji $\mathbb{E}\mathcal{P}f(W)$. Splošneje, za dan zapleten element f bi radi poiskali tak enostavnejši element $\mathcal{P}f$, da bi bila dana seminorma $p(f - \mathcal{P}f)$ majhna. Pri tem smo potrebovali operator $\mathcal{A}$, za katerega je količina $p(\mathcal{A}g)$ majhna, nič pa nismo povedali, kako ga konstruirati. Ena možnost je, da najprej konstruiramo operator $\tilde{\mathcal{A}}$, za katerega je $p(\tilde{\mathcal{A}}) = 0$. Tak operator sam po sebi še ni ravno najprimernejši za Steinov operator: če g reši (1.1.7) za $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$, velja $p(f - \mathcal{P}f) = 0$, kar navadno pomeni, da je $\mathcal{P}f$ prav tako zapleten kot f (če je $\mathbb{E}\mathcal{P}f(W) = \mathbb{E} f(W)$, s $\mathcal{P}f$ bržkone nismo nič pridobili). Zato operator $\mathcal{A}$ iščemo kot perturbacijo operatorja $\tilde{\mathcal{A}}$.

Izvirna konstrukcija Steinovega operatorja izkorišča preprosto dejstvo, da za slučajni spremenljivki W in W', ki sta enako porazdeljeni in definirani na istem verjetnostnem prostoru, velja:

$$\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big[g(W') - g(W) \,\Big|\, W\Big]\Big] = 0 \tag{1.2.1}$$

Operator $\mathcal{A}$ tako iščemo kot operator, ki zadošča približni enakosti:

$$\mathcal{A}g(W) \approx \mathbb{E}\Big[g(W') - g(W) \,\Big|\, W\Big] \tag{1.2.2}$$

Za tak operator bo potem $p(\mathcal{A}g(W)) = |\mathbb{E}\mathcal{A}g(W)|$ majhna količina. Če privzamemo še, da sta slučajni spremenljivki W in W' *izmenljivi* (t. j. slučajni vektor (W, W') je porazdeljen enako kot (W', W)), lahko zgornjo konstrukcijo še nadgradimo, tako da konstruiramo operator $\mathcal{T}$ iz prostora $\mathcal{G}$ v prostor antisimetričnih funkcij, za katerega zahtevamo, da je:

$$\mathcal{A}g(W) \approx \mathbb{E}\Big[\mathcal{T}g(W, W') \,\Big|\, W\Big] \tag{1.2.3}$$

Ta konstrukcija je fleksibilnejša in se prevede na prejšnjo, če vzamemo $\mathcal{T}g(w, w') := g(w') - g(w)$.

Vendar pa je tudi prejšnja konstrukcija marsikdaj nekoliko nerodna. Barbour [11] sam priznava, da nam (1.2.2) in (1.2.3) dasta zgolj idejo, dejanska konstrukcija pa poteka nekoliko drugače. V pričujočem delu bomo uporabljali še nekoliko splošnejšo konstrukcijo, ki poteka takole: vzamemo enako porazdeljeni slučajni spremenljivki X in X' ter linearni operator $\mathcal{L}$, ki slika v prostor funkcij, definiranih na prostoru, v katerega slikata X in X', in za katerega velja približna enakost:

$$\mathcal{A}g(W) \approx \mathbb{E}\Big[\mathcal{L}g(X') - \mathcal{L}g(X) \,\Big|\, W\Big] \tag{1.2.4}$$

Ta konstrukcija je res splošnejša od prejšnje: operator iz (1.2.2) dobimo tako, da postavimo $X = W$ in $X' = W'$, za $\mathcal{L}$ pa vzamemo identiteto. Operator iz (1.2.3) pa dobimo tako, da postavimo $X = (W, W')$, $X' = (W', W)$ in za $x = (w, w')$ definiramo:

$$\mathcal{L}g(x) := \tfrac{1}{2}\mathcal{T}g(w, w') \tag{1.2.5}$$

Še splošneje, vzamemo lahko še slučajno spremenljivko Z, ki je porazdeljena podobno kot W, $\mathcal{A}$ pa iščemo tako, da velja približna enakost:

$$\mathcal{A}g(Z) \approx \mathbb{E}\Big[\mathcal{L}g(X') - \mathcal{L}g(X) \,\Big|\, Z\Big] \tag{1.2.6}$$

Opomba. Če prostor $\mathcal{F}$ obsega dovolj funkcij (npr. vse merljive funkcije f, za katere je $\mathbb{E}\,|f(W)| < \infty$), lahko operator $\mathcal{A}$ gledamo kot perturbacijo operatorja $\tilde{\mathcal{A}}$, za katerega ena izmed zvez (1.2.2)–(1.2.4) in (1.2.6) velja točno. Če je to ena izmed zvez (1.2.2)–(1.2.4), za tak operator velja $\mathbb{E}\,\tilde{\mathcal{A}}(W) = 0$.

Dober operator $\mathcal{A}$ mora biti tak, da se da iz njega v skladu z izvajanji prejšnjega razdelka izpeljati ustrezna aproksimacija matematičnih upanj $\mathbb{E}\,f(W)$. Tak operator pa mora med drugim imeti tudi dovolj veliko zalogo vrednosti, namreč tako, da jo lahko do celotnega prostora $\mathcal{F}$ dopolnimo s prostorom funkcij, na katerih je vrednost $\mathbb{E}\,f(W)$ lahko izračunljiva.

Kako kakovosten operator $\mathcal{A}$ dobimo, pa je odvisno od navzkrižne porazdelitve (sklapljanja) slučajnih spremenljivk W in W' ter, če delamo z (1.2.3) ali (1.2.4), od izbire operatorja $\mathcal{T}$ oziroma $\mathcal{L}$, pri (1.2.6) pa še od izbire slučajne spremenljivke Z. Če npr. izberemo kar $W' = W$, v zvezi (1.2.2) enakost velja za $\tilde{\mathcal{A}} = 0$, kar ni prav dober kandidat za aproksimacijo: operator, ki je blizu ničelnega, bo imel bodisi zelo revno zalogo vrednosti bodisi bo imel njegov desni inverz zelo visoko normo. Druga možnost, ki nam hitro pade na pamet, pa je, da za W' izberemo neodvisno kopijo slučajne spremenljivke W. V tem primeru velja:

$$\tilde{\mathcal{A}}g(w) = \mathbb{E}\,g(W) - g(w) \tag{1.2.7}$$

kar je operator z bogato zalogo vrednosti – slednjo namreč tvorijo vse funkcije f, za katere je $\mathbb{E}\,f(W) = 0$. Vendar pa je aproksimacija tega operatorja prav tako težak problem kot aproksimacija same porazdelitve slučajne spremenljivke W. Nam pa operator (1.2.7) da misliti, da ne bo težko priti do operatorjev $\mathcal{A}$ z bogato zalogo vrednosti, recimo takih s kodimenzijo 1, ki so še posebej ugodni, saj lahko potem njihovo zalogo vrednosti večinoma dopolnimo kar s prostorom konstant, na katerih funkcionala ε ni težko izražunati.

Uporabni pari (W, W') so navadno zastavljeni tako, da se W' *malo* razlikuje od W. Potem namreč lahko pri aproksimaciji operatorja $\tilde{\mathcal{A}}$ uporabimo npr. Taylorjev razvoj. Konstrukcije uporabnih parov (W, W') odražajo strukturo slučajne spremenljivke W in dobljeni Steinovi operatorji $\mathcal{A}$ so netrivialni – s funkcijo g naredijo kaj več, kot pa da jo le uničijo ali premaknejo. V razdelkih 1.3 in 1.4 bomo tako videli, da je v primeru, ko je $W = X_1 + \cdots + X_n$, kjer so $X_1, \ldots X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke, učinkovito konstruirati $W' = W - X_I + X_I'$, kjer so X_i' neodvisne kopije sumandov X_i, I pa je slučajni indeks, enakomerno porazdeljen po $\{1, \ldots n\}$. To nam bo potem dalo Steinova operatorja, s pomočjo katerih bomo učinkovito ocenjevali napako pri Poissonovi in normalni aproksimaciji.

1.3 Poissonova aproksimacija

Naj bodo $X_1, \ldots X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke z Bernoullijevo porazdelitvijo. Natančneje, naj bo $X_i \sim \mathrm{Be}(p_i)$, t. j. $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p_i$ in $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i$. Želeli bi aproksimirati porazdelitev slučajne spremenljivke:

$$W := X_1 + X_2 + \cdots + X_n \tag{1.3.1}$$

V duhu tega, kar smo nakazali na koncu prejšnjega razdelka, konstruirajmo še slučajne spremenljivke:

$$W_i := W - X_i, \qquad W_i' := W - X_i + X_i' \tag{1.3.2}$$

kjer je X_i' neodvisna kopija slučajne spremenljivke X_i. Očitno ima W_i' enako porazdelitev kot W_i. Med slučajnimi spremenljivkami definirajmo relacijo $\sim$ po predpisu:

$$U \sim V :\Longleftrightarrow \mathbb{E}(U \mid W) = \mathbb{E}(V \mid W) \tag{1.3.3}$$

in za poljubno funkcijo $g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ pišimo:

$$\begin{aligned} g(W_i') - g(W) &= \big[g(W_i') - g(W_i)\big] - \big[g(W) - g(W_i)\big] = \\ &= \Delta g(W_i) X_i' - \Delta g(W-1) X_i \sim \\ &\sim p_i \Delta g(W_i) - \Delta g(W-1) X_i \sim \\ &\sim p_i \Delta g(W) - p_i \Delta^2 g(W-1) X_i - \Delta g(W-1) X_i \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

kjer je $\Delta g(w) = g(w+1) - g(w)$. Zdaj pa vse skupaj seštejmo po i. Dobimo:

$$\sum_{i=1}^{n} \big[g(W_i') - g(W)\big] \sim \mathcal{A} g(W) + Rg \tag{1.3.5}$$

kjer je $\mathcal{A}$ Steinov operator, definiran po predpisu:

$$\mathcal{A} g(w) = \lambda \Delta g(w) - \Delta g(w-1) w \tag{1.3.6}$$

in $\lambda = p_1 + \cdots + p_n$, R pa je operator iz prostora funkcij v prostor slučajnih spremenljivk, definiran po predpisu:

$$Rg := -\sum_{i=1}^{n} p_i \Delta^2 g(W-1) X_i \tag{1.3.7}$$

Ker sta W_i in W_i' enako porazdeljeni, je matematično upanje leve strani zveze (1.3.5) enako nič, torej velja:

$$|\,\mathbb{E}\,\mathcal{A} g(W)| = |\,\mathbb{E}\, Rg| \le \mathbb{E}\,|Rg| \le \|\Delta^2 g\|_\infty \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \tag{1.3.8}$$

kjer smo z $\|\cdot\|_\infty$ označili supremum normo. Matematično upanje $\mathbb{E}\,\mathcal{A} g(W)$ je torej majhno, če sta λ in $\|\Delta^2 g\|_\infty$ v razumnih okvirih, verjetnosti p_i pa približno enake (t. j. reda velikosti $1/n$). V tem primeru je tudi $\mathbb{E}\,\mathcal{A} g(W)$ reda velikosti $1/n$.

Zdaj ko smo našli operator $\mathcal{A}$, pa moramo, če želimo aproksimirati $\mathbb{E} f(W)$, v skladu z razdelkom 1.1 rešiti še Steinovo enačbo (1.1.7). Iskali bomo aproksimacijo tipa (1.1.1), ki ne bo zahtevala nadaljnjega računanja matematičnih upanj. Rešiti bo torej treba enačbo:

$$\Delta g(w) - \Delta g(w-1)w = f(w) - \mathcal{N} f \tag{1.3.9}$$

kjer bo $\mathcal{N}$ tak linearni funkcional, da bo za primerne funkcije $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ norma $\|\Delta^2 g\|_\infty$ v razumnih okvirih.

Postopek pa lahko še nekoliko poenostavimo. Ker za vsako funkcijo h obstaja taka funkcija g, da je $\Delta g(w-1) = h(w)$, lahko namesto (1.3.8) zapišemo tudi:

$$\Big|\mathbb{E}\Big[\lambda h(W+1) - h(W)W\Big]\Big| \le \|\Delta h\|_\infty \sum_{i=1}^n p_i^2 \tag{1.3.10}$$

Tako je potem dovolj rešiti enačbo:

$$\lambda h(w+1) - h(w)w = f(w) - \mathcal{N} f \tag{1.3.11}$$

in oceniti $\|\Delta h\|_\infty$. Tako lahko tudi zgornjo enačbo razumemo kot Steinovo enačbo, izraz na njeni levi strani pa kot Steinov operator za Poissonovo porazdelitev.

Postavimo:

$$\varphi(w) := f(w) - \mathcal{N} f \tag{1.3.12}$$

$$\psi(w) := \frac{\lambda^w}{(w-1)!}\, h(w)\,, \quad w > 0\,; \qquad \psi(0) := 0 \tag{1.3.13}$$

Tedaj velja:

$$\Delta\psi(w) = \frac{\lambda^w}{w!}\, \varphi(w) \tag{1.3.14}$$

od koder sledi:

$$\psi(w) = \sum_{k=0}^{w-1} \frac{\lambda^k}{k!}\, \varphi(k) \tag{1.3.15}$$

$$h(w) = \frac{(w-1)!}{\lambda^w} \sum_{k=0}^{w-1} \frac{\lambda^k}{k!}\, \varphi(k) \tag{1.3.16}$$

Če želimo, da je Δh omejena, sme biti h največ linearne rasti, torej mora biti $\lim_{w\to\infty} \psi(w) = 0$. To pa je mogoče edinole, če velja:

$$\mathcal{N} f = \mathrm{Po}(\lambda)\{f\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\, f(k) \tag{1.3.17}$$

kar pomeni, da bomo porazdelitev slučajne spremenljivke W aproksimirali s Poissonovo porazdelitvijo $\mathrm{Po}(\lambda)$.

Za primer, ko napako pri Poissonovi aproksimaciji ocenjujemo v metriki *totalne variacije* (glej razdelek A.2), t. j. za poljubno podmnožico $A \subseteq \mathbb{N}_0$ ocenjujemo:

$$\Big|\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{Po}(\lambda)(A)\Big| \tag{1.3.18}$$

velja naslednja lema.

Lema 1.3.1 (Barbour, Eagleson). *Naj bo $A \subseteq \mathbb{N}_0$ poljubna množica. Tedaj obstaja rešitev h_A Steinove enačbe:*

$$\lambda h_A(w+1) - h_A(w)w = f(w) - \mathrm{Po}(\lambda)(A) \tag{1.3.19}$$

za katero velja:

$$\|\Delta h_A\| \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \leq \min\Big\{1, \frac{1}{\lambda}\Big\} \tag{1.3.20}$$

Če v enačbi (1.3.19) pogledamo matematično upanje glede na W in upoštevamo (1.3.10), dobimo *Le Camov izrek*:

Izrek 1.3.2. *Če je W tako kot zgoraj, za poljubno množico $A \subseteq \mathbb{N}_0$ velja:*

$$\Big|\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{Po}(\lambda)(A)\Big| \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \tag{1.3.21}$$

■

Če smo natančni, je ta izrek izboljšava Le Camovega izreka, pri čemer pa je izboljšana le konstanta. Le Cam namreč v članku [37] dokaže oceno:

$$\Big|\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{Po}(\lambda)(A)\Big| \leq \min\left\{1, \frac{8}{\lambda}\right\} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \tag{1.3.22}$$

Pripomnimo pa naj, da je Le Cam svoj izrek dokazal s popolnoma drugačnimi sredstvi. Steinova metoda se odlikuje po tem, da se da razmeroma preprosto posplošiti na vsote slučajnih spremenljivk, ki so na določen način odvisne. Obilo tovrstnih primerov predstavijo Barbour, Holst in Janson v monografiji [17].

V primeru, ko so vsi parametri p_i enaki, dobimo naslednjo oceno:

$$\Big|\mathrm{Bi}(n,p)(A) - \mathrm{Po}(np)(A)\Big| \leq p(1-e^{-np}) \leq p \min\{1, np\} = \frac{\min\{\lambda, \lambda^2\}}{n} \tag{1.3.23}$$

Drugače povedano, za vsak $\lambda > 0$ zaporedje binomskih porazdelitev $\mathrm{Bi}\big(n, \lambda/n\big)$ v metriki totalne variacije konvergira proti Poissonovi porazdelitvi $\mathrm{Po}(\lambda)$ in hitrost konvergence je velikostnega reda vsaj $1/n$.

Dokazati moramo še lemo 1.3.1. Dokaz povzemamo iz Barbourjeve, Holstove in Jansonove monografije [17], str. 8.

Dokaz leme 1.3.1. Naj bo najprej $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ poljubna funkcija, za katero je $\sum_{w=0}^{\infty} \lambda^w |f(w)|/w! < \infty$, in:

$$\varphi(w) = f(w) - \mathrm{Po}(\lambda)\{f\} \tag{1.3.24}$$

Tedaj funkcija h, definirana tako kot v (1.3.16), reši enačbo:

$$\lambda h(w+1) - h(w)w = \varphi(w) \tag{1.3.25}$$

Velja:

$$\begin{aligned}\Delta h(w) &= \frac{w!}{\lambda^{w+1}}\sum_{k=0}^{w}\frac{\lambda^k}{k!}\varphi(k) - \frac{(w-1)!}{\lambda^w}\sum_{k=0}^{w-1}\frac{\lambda^k}{k!}\varphi(k) = \\ &= \frac{w!}{\lambda^{w+1}}\varphi(0) + \frac{w!}{\lambda^{w+1}}\sum_{k=1}^{w}\frac{\lambda^k}{k!}\varphi(k) - \frac{(w-1)!}{\lambda^{w+1}}\sum_{k=1}^{w}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\varphi(k-1) = \\ &= \frac{w!}{\lambda^{w+1}}\varphi(0) + \frac{(w-1)!}{\lambda^{w+1}}\sum_{k=1}^{w}\frac{\lambda^k}{k!}\Big(w\varphi(k) - k\varphi(k-1)\Big)\end{aligned} \tag{1.3.26}$$

Formula (1.3.16) nam pove, da je vrednost $h(w)$ odvisna le od $\varphi(0), \dots \varphi(w-1)$. Potrebovali pa bomo tudi, da je vrednost $h(w)$ odvisna tudi le od $\varphi(w), \varphi(w+1), \dots$ To sledi iz dejstva, da je $\mathrm{Po}(\lambda)\{\varphi\} = 0$ in zato velja:

$$h(w) = -\frac{(w-1)!}{\lambda^w}\sum_{k=w}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\varphi(k) \tag{1.3.27}$$

Sledi:

$$\begin{aligned}\Delta h(w) &= \frac{(w-1)!}{\lambda^w}\sum_{k=w}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\varphi(k) - \frac{w!}{\lambda^{w+1}}\sum_{k=w+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\varphi(k) = \\ &= \frac{(w-1)!}{\lambda^w}\sum_{k=w}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\varphi(k) - \frac{w!}{\lambda^w}\sum_{k=w}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+1)!}\varphi(k) = \\ &= \frac{(w-1)!}{\lambda^w}\sum_{k=w}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+1)!}\Big((k+1)\varphi(k) - w\varphi(k+1)\Big)\end{aligned} \tag{1.3.28}$$

Naj bo zdaj za poljubno množico $A \subseteq \mathbb{N}_0$ funkcija f_A kar njen indikator. Ustrezno definirajmo še pripadajoči funkciji φ_A in h_A. Najprej bomo ocenili $\|\Delta h_{\{j\}}\|_\infty$. Naj bo najprej $w < j$. Tedaj je $\varphi(k) = -\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$ za vse $k = 0, \dots r$. Iz verige neenakosti (1.3.26) sledi:

$$\Delta h_{\{j\}}(w) = -\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\left(\frac{w!}{\lambda^{w+1}} + \frac{(w-1)!}{\lambda^{w+1}}\sum_{k=1}^{w}\frac{\lambda^k}{k!}(w-k)\right) \le 0 \tag{1.3.29}$$

V primeru, ko je $w = j$, prav tako iz (1.3.26) dobimo:

$$\Delta h_{\{j\}}(j) = -\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\left(\frac{j!}{\lambda^{j+1}} + \frac{(j-1)!}{\lambda^{j+1}}\sum_{k=1}^{j}\frac{\lambda^k}{k!}(j-k)\right) + \frac{(j-1)!}{\lambda^{j+1}}\frac{\lambda^j}{j!}j \tag{1.3.30}$$

Drugi člen izraza v oklepaju je večji ali enak 0. Če ga spustimo, dobimo oceno:

$$\Delta h_{\{j\}}(j) \le \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \tag{1.3.31}$$

Če je $w > j$, pa enakost $\varphi(k) = -\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$ velja za $k = w, w+1, \ldots$ Sledi:

$$\Delta h_{\{j\}}(w) = -\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\frac{(w-1)!}{\lambda^w}\sum_{k=w}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+1)!}(k+1-w) \le 0 \tag{1.3.32}$$

Dobili smo, da za vsak $w \in \mathbb{N}$ in vsak $k \in \mathbb{N}_0$ velja:

$$\Delta h_{\{j\}}(w) \le 0\,, \quad \text{če je } j \neq w \tag{1.3.33}$$

$$\Delta h_{\{j\}}(j) \le \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \tag{1.3.34}$$

Ocenili smo $h_{\{j\}}$, zdaj pa ocenimo še h_A. Plavzibilno je, da velja:

$$h_A = \sum_{j \in A} h_{\{j\}} \tag{1.3.35}$$

Dokažimo to še rigorozno, in sicer konvergenco po točkah. Očitno za vsako množico A velja $\varphi_A = \sum_{j\in A}\varphi_{\{j\}}$. V primeru, ko je A neskončna, vrsta konvergira po točkah. Iz formule (1.3.16) pa je jasno, da je vrednost $h_A(w)$ odvisna le od $\varphi_A(0), \ldots \varphi_A(w-1)$, torej vrsta po točkah konvergira tudi v formuli (1.3.35).

Iz formule (1.3.35) zdaj dobimo, da je za oceno diferenc funkcije h_A treba le sešteti ocene (1.3.33) in (1.3.34) po vseh $j \in A$. Pri tem je največ en člen pozitiven, pa še ta je navzgor omejen z $(1-e^{-\lambda})/\lambda$. Sledi:

$$\Delta h_A(w) \le \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \tag{1.3.36}$$

Če postavimo $f = 1$, je $\varphi = 0$ in tudi $h = 0$. Zato je $h_{A^c} = -h_A$. Dobimo:

$$\Delta h_A(w) \ge -\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \tag{1.3.37}$$

kar nam skupaj z (1.3.36) da želeni rezultat. ■

1.4 Enorazsežna normalna aproksimacija

Podobno kot v razdelku 1.3 bomo tudi tu preučevali vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki pa bodo imele porazdelitve drugačnega tipa. Naj bodo $X_1, \ldots X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke z vrednostmi v realnih številih in naj bo $\mathbb{E}\, X_i = 0$ za vsak i. Spet naj bo:

$$W = X_1 + \cdots + X_n \tag{1.4.1}$$

in privzemimo še, da je $\mathrm{var}(W) = 1$. Začeli bomo podobno kot v prejšnjem razdelku: spet konstruirajmo slučajne spremenljivke:

$$W_i := W - X_i, \qquad W_i' := W - X_i + X_i' \tag{1.4.2}$$

kjer je X_i' neodvisna kopija slučajne spremenljivke X_i, in naj bo relacija $\sim$ definirana tako kot v (1.3.3). Nadalje naj bo funkcija g dvakrat zvezno odvedljiva. Taylorjev razvoj okoli W z ostankom v integralski obliki nam da:

$$g(W_i) - g(W) \sim -g'(W)X_i + \theta g''(W_i + \theta X_i)X_i^2 \tag{1.4.3}$$

kjer je θ porazdeljena enakomerno po $[0, 1]$ in neodvisna od vsega ostalega. Podobno dobimo:

$$\begin{aligned} g(W_i') - g(W_i) &\sim g'(W_i)X_i' + (1-\theta)g''(W_i + \theta X_i')X_i'^2 \sim \\ &\sim (1-\theta)g''(W_i + \theta X_i')X_i'^2 \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Ko vse skupaj seštejemo, dobimo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Big[g(W_i') - g(W_i)\Big] &\sim -g'(W)W + \theta \sum_{i=1}^n g''(W_i + \theta X_i)X_i^2 + \\ &\quad + (1-\theta)\sum_{i=1}^n g''(W_i + \theta X_i')X_i'^2 \sim \\ &\sim -g'(W)W + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \Big[g''(W_i')X_i^2 + g''(W)X_i'^2\Big] + Rg \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

kjer je:

$$\begin{aligned} Rg = \theta &\sum_{i=1}^n \Big[g''(W_i + \theta X_i) - g''(W_i')\Big]X_i^2 + \\ &+ (1-\theta)\sum_{i=1}^n \Big[g''(W_i + \theta X_i') - g''(W)\Big]X_i'^2 \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Velja:

$$\sum_{i=1}^n g''(W)X_i'^2 \sim \sum_{i=1}^n g''(W)\,\mathbb{E}\,X_i^2 = g''(W) \tag{1.4.7}$$

Za člen z $g''(W_i')X_i^2$ ne moremo reči nič podobnega. To težavo bomo odpravili tako, da bomo spremenili levo stran v (1.4.5). Izkoristili bomo dejstvo, da velja:

$$\mathbb{E}\,g''(W)X_i'^2 = \mathbb{E}\,g''(W_i')X_i^2 \tag{1.4.8}$$

Iz (1.4.5) in (1.4.7) dobimo:

$$\sum_{i=1}^n \Big[g(W_i') - g(W_i) + \tfrac{1}{2}g''(W)X_i'^2 - \tfrac{1}{2}g''(W_i')X_i^2\Big] \sim \mathcal{A}g(W) + Rg \tag{1.4.9}$$

kjer je:

$$\mathcal{A}g(w) = g''(w) - g'(w)w \tag{1.4.10}$$

Dobili smo Steinov operator za enorazsežno normalno porazdelitev.

Opomba. Leva stran zveze (1.4.5) je v duhu zveze (1.2.2), leva stran zveze (1.4.9) pa je v duhu zveze (1.2.4), če za posamezen i postavimo $X = (W, X'_i)$, $X' = (W'_i, X_i)$ in $\mathcal{L}g(w,x) := g(w) - \frac{1}{2}g''(w)x^2$.

Ker sta W in W' enako porazdeljeni ter zaradi (1.4.8) je matematično upanje leve strani v (1.4.9) enako nič, torej velja $\mathbb{E}\,\mathcal{A}g(W) = -\mathbb{E}\,Rg$. Če je še $M_3(g) < \infty$, kjer tako kot v (E.5.9) definiramo:

$$M_r(g) := \sup_{x \neq y} \frac{|g^{(r-1)}(x) - g^{(r-1)}(y)|}{|x-y|} \tag{1.4.11}$$

lahko potem ocenimo:

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}\,\mathcal{A}g(W)| \le \mathbb{E}\,|Rg| &\le M_3(g) \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[\theta X_i^2(\theta|X_i| + |X'_i|) + (1-\theta)|X'_i|^2(\theta|X'_i| + |X_i|)\Big] \le \\ &\le M_3(g) \sum_{i=1}^{n} \Big[\tfrac{1}{2}\,\mathbb{E}\,|X_i|^3 + \mathbb{E}\,X_i^2|X'_i|\Big] \le \\ &\le \frac{3}{2} M_3(g) \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

(zadnjo oceno dobimo npr. z uporabo Hölderjeve neenakosti). Če so X_i približno enako porazdeljene, je $\mathbb{E}\,X_i^2$ reda $1/n$, torej lahko tipično pričakujemo, da je $\mathbb{E}\,|X_i|^3$ reda $n^{-3/2}$, $|\mathbb{E}\,\mathcal{A}g(W)|$ pa reda $1/\sqrt{n}$ (glej tudi posledico 1.4.3).

Če želimo aproksimirati $\mathbb{E}\,f(W)$, moramo rešiti *Steinovo enačbo*:

$$g''(w) - g'(w)w = f(w) - \mathcal{N}f \tag{1.4.13}$$

kjer $\mathcal{N}f$ postavimo tako, da bo za primerne funkcije f količina $M_3(g)$ v razumnih okvirih. Ekvivalentno je poiskati funkcijo h, ki reši enačbo:

$$h'(w) - h(w)w = f(w) - \mathcal{N}f \tag{1.4.14}$$

in za katero bo $M_2(h)$ v razumnih okvirih. Tudi to lahko razumemo kot Steinovo enačbo, izraz na levi strani pa kot Steinov operator za enorazsežno normalno porazdelitev.

Enačba (1.4.19) je navadna linearna diferencialna enačba prvega reda, ki ima splošno rešitev:

$$h(w) = e^{w^2/2}\left(C + \int_{-\infty}^{w} \big(f(x) - \mathcal{N}f\big) e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right) \tag{1.4.15}$$

Če želimo, da je $M_2(h) < \infty$, mora biti h polinomske rasti, torej mora veljati tudi $\lim_{w\to\pm\infty} h(w)\,e^{-w^2/2} = 0$. Če od limite proti plus neskončno odštejemo limito proti minus neskončno, dobimo, da mora veljati:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big(f(x) - \mathcal{N}f\big) e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.4.16}$$

To pa velja natanko tedaj, ko je:

$$\mathcal{N}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = \mathrm{N}(0,1)\{f\} \tag{1.4.17}$$

kar pomeni, da bomo porazdelitev slučajne spremenljivke W aproksimirali s standardizirano normalno, rešitev Steinove enačbe pa se bo izražala s formulo:

$$h(w) = e^{w^2/2} \int_{-\infty}^{w} \big(f(x) - \mathcal{N}f\big) e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x = -e^{w^2/2} \int_{w}^{\infty} \big(f(x) - \mathcal{N}f\big) e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x \tag{1.4.18}$$

Obnašanje rešitev Steinove enačbe (1.4.14) bomo opisali z naslednjim rezultatom, ki je posplošitev dela Steinove leme iz [125] (drugo poglavje, lema 3, stran 25; za posplošitev preostanka pa glej lemo 2.6.2).

Lema 1.4.1. *Naj bo* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *merljiva funkcija, za katero velja* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, e^{-x^2/2}\, \mathrm{d}x < \infty$.

(1) *Če je f zvezna, je funkcija h, podana s formulo* (1.4.18), *edina klasična rešitev Steinove enačbe:*

$$h'(w) - h(w)w = f(w) - \mathrm{N}(0,1)\{f\} \tag{1.4.19}$$

za katero velja $\lim_{w\to\pm\infty} h(w)\, e^{-x^2/2} = 0$.

(2) *Naj bo h tako kot v* (1.4.18) *in f omejena. Tedaj velja ocena* $M_1(h) \le \sup f - \inf f$.

(3) *Naj bo h tako kot v* (1.4.18), $r \in \mathbb{N}$ *in* $M_r(f) < \infty$. *Tedaj velja ocena* $M_{r+1}(h) \le 2\, M_r(f)$.

Opomba. Če izpustimo predpostavko, da je f zvezna, je h še vedno *šibka rešitev*, t. j. absolutno zvezna funkcija, za katero enačba (1.4.19) velja skoraj povsod tam, kjer je odvedljiva. To je ekvivalentno temu, da je f šibko odvedljiva in da enačba (1.4.19) velja za neko verzijo šibkega odvoda (glej razdelka E.3 in E.4). Vendar pa za oceno napake pri normalni aproksimaciji šibke rešitve nasploh niso dovolj: tu bomo potrebovali, da ima h Lipschitzev odvod. Zato se s šibkimi rešitvami ne bomo posebej ukvarjali.

Opomba. Ocene iz leme 1.4.1 so optimalne, t. j. konstante se ne dajo izboljšati: glej zgled 1.4.1 na koncu razdelka.

Lemo 1.4.1 bomo dokazali malo kasneje, zdaj pa se raje posvetimo oceni napake pri normalni aproksimaciji slučajne spremenljivke W (t. j. hitrosti konvergence v centralnem limitnem izreku). Iz leme 1.4.1 in ocene (1.4.12) sledi, da bomo le-to lahko ocenili v *Wassersteinovi metriki* (glej razdelek A.8). Iz leme 1.4.1 namreč sledi, da obstaja rešitev Steinove enačbe (1.4.19), za katero velja $M_2(h) \le 2\, M_1(f)$. Tako dobimo naslednji rezultat.

Izrek 1.4.2. *Če je W kot zgoraj, za poljubno Lipschitzevo funkcijo f velja:*

$$\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| \le 3\, M_1(f) \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\, |X_i|^3 \tag{1.4.20}$$

■

Za enako porazdeljene slučajne spremenljivke tako dobimo naslednjo hitrost konvergence v Wassersteinovi metriki.

Posledica 1.4.3. *Naj bodo $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $\mathbb{E}\, Y_i = 0$, $\operatorname{var}(Y_i) = 1$ in $\gamma_3 := \mathbb{E}\,|Y_i^3| < \infty$. Tedaj za slučajno spremenljivko $W := \sum_{i=1}^n Y_i/\sqrt{n}$ velja ocena:*

$$\left|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\right| \le \frac{3\gamma_3}{\sqrt{n}} \tag{1.4.21}$$

Opomba. Dobljena hitrost konvergence $O(n^{-1/2})$ v Wassersteinovi metriki je tudi dosežena, kar bomo pokazali v zgledu 1.4.2 na koncu razdelka.

Opomba. Konvergenca v Wassersteinovi metriki implicira šibko konvergenco (glej trditev A.8.1). Wassersteinova metrika sicer v splošnem ni primerljiva z metriko Kolmogorova (glej zgleda A.10.1 in A.10.2). Toda če gre za konvergenco proti porazdelitvi z omejeno gostoto, je šibka konvergenca ekvivalentna konvergenci v metriki Kolmogorova (glej zgled A.10.3).

Konvergenca proti normalni porazdelitvi v Wassersteinovi metriki torej implicira konvergenco v metriki Kolmogorova. Po trditvi A.10.2 pa se da razdalja Kolmogorova tudi eksplicitno oceniti z Wassersteinovo razdaljo, in sicer velja ocena $d_{\mathrm{K}}\big(\mu, \mathrm{N}(0,1)\big) \le C\sqrt{d_{\mathrm{W}}\big(\mu, \mathrm{N}(0,1)\big)}$, kjer je C univerzalna konstanta. Zgled A.10.6 pokaže, da je zgornja meja v tej oceni tudi dosežena. Izkaže pa se, da se to v večini primerov, pri katerih je smiselna uporaba Steinove metode, ne zgodi: razdalja Kolmogorova je često kar istega velikostnega reda kot Wassersteinova razdalja (za neodvisne slučajne spremenljivke to pove Berry–Esseenov izrek). V 4. poglavju bomo Steinovo metodo izboljšali, tako da bo dala ocene prave velikosti tudi v metriki Kolmogorova.

Dokaz leme 1.4.1.

(1): Sledi iz (1.4.15).

(2) in (3): Definirajmo naslednje funkcije:

$$\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \tag{1.4.22}$$

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \phi(z)\,\mathrm{d}z \tag{1.4.23}$$

$$\psi(x) := \frac{\Phi(x)}{\phi(x)} = e^{\frac{1}{2}x^2} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z \tag{1.4.24}$$

Funkcija Φ je torej porazdelitvena funkcija standardizirane normalne porazdelitve, funkcija ψ pa je znana kot *Millsovo razmerje* (glej dodatek C).

Formula (1.4.18) nam rešitev Steinove enačbe h poda na dva načina, z dvema integraloma. Torej lahko funkcijo h zapišemo tudi kot konveksno kombinacijo teh dveh integralov. Če koeficienta v konveksni kombinaciji izberemo tako, da se člen z $\mathcal{N}f$ odšteje, po nekaj računanja dobimo:

$$h(w) = \psi(-w)\int_{-\infty}^{w} f(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x - \psi(w)\int_{w}^{\infty} f(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.4.25}$$

Zgornjo formulo pa bomo še malo posplošili. Najprej tako kot v (C.3.4) induktivno definirajmo funkcije Φ_r po predpisu:

$$\Phi_0(x) := \phi(x)\,, \quad \Phi_{r+1}(x) := \int_{-\infty}^{x} \Phi_r(z)\,\mathrm{d}z \tag{1.4.26}$$

(torej je $\Phi_1 = \Phi$). Pokažimo sedaj, da za vsak $r \in \mathbb{N}_0$ in vsako merljivo funkcijo f z $M_r(f) < \infty$ veljata naslednji dve izjavi:

$$A(r)\colon \quad h^{(r)}(w) = \psi^{(r)}(-w)\int_{-\infty}^{w} f^{(r)}(x)\,\Phi_r(x)\,\mathrm{d}x - \psi^{(r)}(w)\int_{w}^{\infty} f^{(r)}(x)\,\Phi_r(-x)\,\mathrm{d}x \tag{1.4.27}$$

$$B(r)\colon \quad h^{(r+1)}(w) = f^{(r)}(w) - \psi^{(r+1)}(-w)\int_{-\infty}^{w} f^{(r)}(x)\,\Phi_r(x)\,\mathrm{d}x - \psi^{(r+1)}(w)\int_{w}^{\infty} f^{(r)}(x)\,\Phi_r(-x)\,\mathrm{d}x \tag{1.4.28}$$

Izjava $A(r)$ je smiselna, ker, brž ko je $M_r(f) < \infty$, funkcija f pripada $C^{(r-1)}(\mathbb{R})$, $f^{(r-1)}$ pa je Lipschitzeva, torej absolutno zvezna ter zato skoraj povsod odvedljiva in integral svojega odvoda. Pri izjavi $B(r)$ pa moramo biti nekoliko previdnejši in jo interpretiramo tako, da velja v vsaki Lebesguovi točki funkcije $f^{(r)}$.

Izjavo $A(0)$ smo že dokazali, to je formula (1.4.25). Z odvajanjem in upoštevanjem formule (C.3.9) lahko dokažemo implikacijo $A(r) \Rightarrow B(r)$. Nadalje z integracijo per partes, pri čemer $f^{(r)}$ odvajamo, Φ_r pa integriramo, pokažemo še, da velja implikacija $B(r) \Rightarrow A(r+1)$. Tako so z indukcijo po r vse izjave $A(r)$ in $B(r)$ dokazane.

Iz $B(r)$, zveze (C.3.9) in posledice E.5.10 zdaj sledi točka (3), in sicer za vse $r \in \mathbb{N}_0$. Točko (2) pa dobimo iz dejstva, da se funkcija h ne spremeni, če f nadomestimo z $f - \frac{1}{2}(\sup f + \inf f)$. ■

Za konec podajmo še obljubljena zgleda, ki pokažeta, da so ocene iz leme 1.4.1 optimalne, prav tako pa tudi ocena hitrosti konvergence v Wassersteinovi metriki iz posledice 1.4.3.

Zgled 1.4.1. Naj bo $r \in \mathbb{N}_0$. Izberimo točko $w \in \mathbb{R}$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ konstruirajmo zvezno funkcijo $g_n\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$, za katero je $g_n(w) = 1$, sicer pa je, površno povedano, g_n v večini točk enaka -1. Natančneje, funkcija g_n naj doseže vrednost -1, velja pa naj še:

$$\left|\psi^{(r+1)}(-w)\int_{-\infty}^{w} g_n(x)\,\Phi_r(x)\,\mathrm{d}x + \psi^{(r+1)}(w)\int_{w}^{\infty} g_n(x)\,\Phi_r(-x)\,\mathrm{d}x \;+\; 1\right| \le \frac{1}{n} \tag{1.4.29}$$

(to lahko dosežemo, ker je po zvezi (C.3.9) leva stran enaka nič, če za g_n vstavimo kar konstanto -1). Naj bo zdaj f_n r-kratni nedoločeni integral funkcije g_n in naj bo h_n rešitev Steinove enačbe iz leme 1.4.1 za testno funkcijo f_n. Očitno je $M_r(g_n) = 1$ (in pri $r = 0$ tudi $M_0^*(g_n) = 1$), iz formule (1.4.27) pa sledi, da je $h_n^{(r+1)}(w) \ge 2 - 1/n$ in zato $M_{r+1}(h_n) \ge 2 - 1/n$. □

Zgled 1.4.2. Naj bo $S_n \sim \mathrm{Bi}(n, 1/2)$ in $W_n = \mathrm{var}(S_n)^{-1/2}(S_n - \mathbb{E}\,S_n) = (2S_n - n)/\sqrt{n}$. Tedaj za posamezen n slučajna spremenljivka W_n zavzame vrednosti le na množici

$2\mathbb{N}/\sqrt{n}$ (če je n sod) ali pa na $(2\mathbb{N}+1)/\sqrt{n}$. Vzemimo zdaj testno funkcijo f_n, ki naj bo na množici $2\mathbb{N}/\sqrt{n}$ enaka $1/(2\sqrt{n})$, na množici $(2\mathbb{N}+1)/\sqrt{n}$ naj bo enaka $-1/(2\sqrt{n})$ na posameznem intervalu $[2k/\sqrt{n},(2k+1)/\sqrt{n}]$ pa naj bo linearna (graf funkcije f_n je torej žagaste oblike). Očitno je $M_1(f) = 1$. Poleg tega je $\mathbb{E}\, f_n(W_n) = \pm 1/(2\sqrt{n})$, z integracijo per partes pa dobimo še:

$$\mathrm{N}(0,1)\{f_n\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,\phi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.4.30}$$

Ni težko preveriti, da za vsak x velja $\left|\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \le 1/(4n)$. Sledi:

$$\left|\mathrm{N}(0,1)\{f_n\}\right| \le \frac{1}{4n}\int_{-\infty}^{\infty} |\phi'(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n\sqrt{2\pi}} \tag{1.4.31}$$

torej je:

$$\left|\mathbb{E}\, f_n(W_n) - \mathrm{N}(0,1)\{f_n\}\right| \ge \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2n\sqrt{2\pi}} \tag{1.4.32}$$

torej v tem primeru konvergenca res ne more biti hitrejša kot $O(n^{-1/2})$. □

2.

Večrazsežna normalna aproksimacija

V razdelkih 1.3 in 1.4 smo izpeljali Steinovo metodo za Poissonovo in normalno aproksimacijo. Namen tega poglavja je izpeljati Steinovo metodo za večrazsežno normalno aproksimacijo. Videli bomo, da se Steinov operator v $\mathbb{R}^d$ izraža v obliki:

$$\mathcal{A}g(w) := \Delta g(w) - \langle \operatorname{grad} g(w)\,,\, w \rangle \tag{2.0.1}$$

in rešili Steinovo enačbo:

$$\mathcal{A}g(w) = f(w) - \mathbb{E}\, f(Z) \tag{2.0.2}$$

kjer je $Z \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{I})$ slučajni vektor, porazdeljen standardizirano normalno. Pokazali bomo (glej izrek 2.6.1), da brž ko je $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$ in f dovolj gladka v smislu prostorov Soboljeva, obstaja klasična rešitev enačbe (2.0.2). Le pod nekoliko ostrejšimi pogoji pa bomo pokazali tudi enoličnost "krotkih" rešitev (glej izrek 2.7.2).

Pri Poissonovi in enorazsežni normalni aproksimaciji je bilo Steinovo enačbo preprosto rešiti. Pri večrazsežni normalni aproksimaciji pa je reševanje Steinove enačbe bolj zapleteno, saj dobimo parcialno diferencialno enačbo. Konstrukcija rešitve bo šla z roko v roki z izpeljavo Steinove metode. Izhajali bomo iz Lindeberg–Bergströmove metode, ki je eno od klasičnih sredstev za ocenjevanje napake pri normalni aproksimaciji. Bržkone bi se celo dalo vse ocene, dobljene v tem delu, dobiti tudi z Lindeberg–Bergströmovo metodo, vendar pa bi bila izpeljava zelo zapletena. Steinovo metodo (skupaj s plavzibilno rešitvijo Steinove enačbe) bomo dobili kot neke vrste simetrizacijo Lindeberg–Bergströmove metode, kar postopek ocenjevanja napake znatno poenostavi. Konstrukcija, ki jo bomo izpeljali, je tesno povezana z markovskimi procesi (glavna ideja je, da je Steinov operator generator markovskega procesa). Več različic konstrukcije je podanih tudi v monografiji [12].

Izhajanje iz Lindeberg–Bergströmove metode je pomembno zato, ker nam vso stvar prikaže v drugačni luči: videli bomo namreč, da za oceno napake pri (večrazsežni) normalni aproksimaciji Steinove enačbe pravzaprav sploh ni potrebno reševati. Tako lahko bralec, ki ga ne zanima ozadje postopka, marveč le golo ocenjevanje napake, od vsega poglavja prebere le razdelek 2.5, ki potrebuje še del razdelka 2.4. To je tudi vse, kar v resnici potrebujemo v naslednjih poglavjih (res je sicer, da se bomo precej sklicevali na lemo 2.6.2, toda namesto le-te lahko uporabimo tudi lemo 2.5.2).

Tako se v prvih razdelkih tega poglavja od Steinove metode nekoliko oddaljimo. Kasneje sicer pokažemo, da nam postopek, ki ga razvijemo, dejansko da normalno aproksimacijo po Steinovi metodi. Vendar pa naš postopek še zdaleč ni omejen zgolj na normalno aproksimacijo in v splošnem ni rečeno, da iz njega dobimo Steinovo metodo. Natančneje, ocenjujemo sicer izraze tipa $\mathbb{E}\,\mathcal{A}g(W)$, kjer je $\mathcal{A}$ primeren operator, vendar pa zdaj g ni več ena sama funkcija, ki reši Steinovo enačbo, marveč zgornje izraze ocenjujemo za celo družino funkcij g, ki jih ne dobimo kot rešitve določene enačbe. To bi bila lahko prednost tam, kjer je reševanje Steinove enačbe slabo pogojeno. To se zgodi pri Edgeworthovem razvoju, ki je posplošitev normalne aproksimacije. Barbour [9] zaobide to težavo z iteracijo, tako da je funkcija g v končni fazi vsota rešitev več enačb Steinovega tipa; eno pomembnih posplošitev Barbourjevega rezultata predstavita Rinott in Rotar v članku [107]). Posplošitev ideje, razvite v razdelku 2.5, bi bila lahko alternativa Barbourjevemu pristopu.

Omenili smo že, da pri normalni aproksimaciji na koncu vendarle dobimo Steinovo metodo. Vendar pa rešitev Steinove enačbe konstruiramo na popolnoma drug način, iz katerega dobimo drugačne ocene odvodov rešitve. Tako npr. tretji odvod rešitve g Steinove enačbe (2.0.2) v enorazsežnem primeru ocenimo s pomočjo prvega odvoda funkcije f (glej izrek 1.4.2); konstrukcija, ki jo uporabimo v večrazsežnem primeru, pa nam tretje odvode funkcije g oceni s pomočjo drugih ali tretjih odvodov funkcije f. V enorazsežnem primeru nam obe konstrukciji dasta (do konstante) isto funkcijo g in tako lahko njen tretji odvod ocenimo s pomočjo prvega, drugega ali tretjega odvoda funkcije f. Nastane vprašanje, ali se dajo tretji odvodi funkcije g tudi v večrazseznem primeru oceniti s pomočjo prvih odvodov funkcije f. Videli bomo, da je odgovor na to negativen (glej trditev 2.8.3). To je pomembna kvalitativna razlika med obnašanjem rešitve Steinove enačbe v eno- in v večrazsežnem primeru.

2.1 Lindeberg–Bergströmova metoda

Kot smo že omenili, bomo začeli z metodo, ki sta jo razvila J. W. Lindeberg [74] in H. Bergström [25]. Temelji na ideji ocenjevanja napake po korakih, ki jo v zelo splošni obliki lahko formuliramo na naslednji način: naj bosta f in $\bar{f}$ elementa vektorskega prostora, na katerem je podana seminorma p. Želeli bi oceniti $p(f - \bar{f})$. To storimo "po korakih": poiščemo take elemente $f_0, \dots f_n$, da je $f_0 = f$ in $f_n = \bar{f}$, in ocenimo:

$$p(f - \bar{f}) \le \sum_{i=1}^{n} p(f_i - f_{i-1}) \tag{2.1.1}$$

Naj bodo zdaj $X_1, \dots X_n$ neodvisni slučajni vektorji z vrednostmi v $\mathbb{R}^d$ in $W = X_1 + \cdots + X_n$. Privzemimo še, da je $\mathbb{E}\,X_i = 0$ in $\mathrm{Var}(W) = \mathbf{I}$, kjer je $\mathbf{I}$ identična matrika na $\mathbb{R}^d$, Var pa pomeni kovariančno matriko, t. j.:

$$\mathrm{Var}(W) = \mathbb{E}\,WW^T \tag{2.1.2}$$

Zadevo lahko zastavimo še malo bolj abstraktno in privzamemo, da imajo slučajni vektorji vrednosti v evklidskem prostoru, ki je kovarianten v dualnem paru evklidskih prostorov (glej razdelek D.7). V tem primeru je $\mathrm{Var}(W)$ mešani tenzor tipa $(1, 1)$.

V razdelku 1.4 smo videli, da je v enorazsežnem primeru v situaciji, ko se tretji momenti "lepo" obnašajo, primerna normalna aproksimacija. Tako domnevamo, da bo tukaj primerna večrazsežna normalna aproksimacija. Za primerne testne funkcije f bi torej želeli oceniti:

$$\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathbb{E}\, f(Z)\Big| \tag{2.1.3}$$

kjer je $Z \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{I})$ slučajni vektor, porazdeljen standardizirano normalno.

Vmesne "korake" bomo izbirali tako, da bomo sumande postopoma zamenjevali z ustreznimi normalnimi slučajnimi vektorji. Naj bodo torej $Z_1, \ldots Z_n$ slučajni vektorji, neodvisni tako med seboj kot tudi od $X_1, \ldots X_n$, porazdeljeni pa normalno $\mathrm{N}\big(0, \mathrm{Var}(X_i)\big)$. Za $i = 0, 1, \ldots n$ definirajmo:

$$W_i := Z_1 + \cdots + Z_i + X_{i+1} + \cdots + X_n \tag{2.1.4}$$

(definicijo razumemo tako, da je $W_0 = W$ in $W_n = \sum_{i=1}^n Z_i \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{I})$). Privzamemo lahko, da je kar $Z = \sum_{i=1}^n Z_i$. V skladu z Lindeberg–Bergströmovo metodo bomo ocenili:

$$\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathbb{E}\, f(Z)\Big| \le \sum_{i=1}^{n} \Big|\mathbb{E}\, f(W_i) - \mathbb{E}\, f(W_{i-1})\Big| \tag{2.1.5}$$

Privzemimo, da je f dvakrat zvezno odvedljiva funkcija in $M_3(f) < \infty$, kjer tako kot v (E.5.9) definiramo:

$$M_r(f) := \sup_{x \ne y} \frac{|f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(y)|_\vee}{|x - y|} \tag{2.1.6}$$

kjer zapis $f^{(r)}$ predstavlja r-ti odvod tako kot v razdelku E.1, $|\cdot|_\vee$ pa je injektivna norma, definirana tako kot v razdelku D.8. Označimo še:

$$W_i' := Z_1 + \cdots + Z_{i-1} + X_{i+1} + \cdots + X_n \tag{2.1.7}$$

Taylorjev razvoj z oceno ostanka (glej trditev E.5.11) nam da:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, f(W_i) &= \mathbb{E}\, f(W_i' + Z_i) = \\ &= \mathbb{E}\Big[f(W_i') + f'(W_i')Z_i + \tfrac{1}{2} f''(W_i')Z_i^2\Big] + R_{1i} \\ &= \mathbb{E}\Big[f(W_i') + \tfrac{1}{2} f''(W_i')Z_i^2\Big] + R_{1i} \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

kjer je $|R_{1i}| \le \frac{1}{6} M_3(f)\, \mathbb{E}\, |Z_i|^3$. Podobno dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, f(W_{i-1}) &= \mathbb{E}\, f(W_i' + X_i) = \\ &= \mathbb{E}\Big[f(W_i') + f'(W_i')X_i + \tfrac{1}{2} f''(W_i')X_i^2\Big] + R_{2i} \\ &= \mathbb{E}\Big[f(W_i') + f'(W_i')X_i + \tfrac{1}{2} f''(W_i')X_i^2\Big] + R_{2i} \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

kjer je $|R_{2i}| \le \frac{1}{6} M_3(f)\, \mathbb{E}\, |X_i|^3$. Upoštevali smo, da so slučajne spremenljivke W_i', Z_i in X_i neodvisne. A zaradi neodvisnosti je tudi $\mathbb{E}\, f''(W_i')X_i^2 = \mathbb{E}\, f''(W_i')\, \mathbb{E}\, X_i^2$. Po (D.4.6) lahko tenzor X_i^2 oz. $X_i \otimes X_i$ identificiramo z $X_i X_i^T$ (ali upoštevamo, da po (D.7.17) velja

$X_i^2 = X_i X_i^T \mathcal{I}$, kjer je $\mathcal{I}$ fundamentalni kovariantni tenzor). Ker je $\mathbb{E}\, X_i X_i^T = \mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Var}(Z_i) = \mathbb{E}\, Z_i Z_i^T$, tako velja $\mathbb{E}\, f''(W_i')Z_i^2 = \mathbb{E}\, f''(W_i')X_i^2$. Sledi:

$$\Big|\mathbb{E}\, f(W_i) - \mathbb{E}\, f(W_{i-1})\Big| \le \tfrac{1}{6} M_3(f)\Big(\mathbb{E}\,|X_i|^3 + \mathbb{E}\,|Z_i|^3\Big) \tag{2.1.10}$$

Na tem mestu bomo potrebovali naslednjo lemo, ki jo bomo dokazali malo kasneje.

Lema 2.1.1. *Naj bo Z normalno porazdeljen slučajni vektor z $\mathbb{E}\, Z = 0$. Tedaj velja:*

$$\mathbb{E}\,|Z|^3 \le \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\Big(\mathbb{E}\,|Z|^2\Big)^{3/2} \tag{2.1.11}$$

Opomba. Če je Z običajna slučajna spremenljivka, v zgornji oceni velja enakost.

Ker za vsak slučajni vektor Y z $\mathbb{E}\, Y = 0$ velja:

$$\mathbb{E}\,|Y|^2 = \mathbb{E}\, Y^T Y = \mathbb{E}\,\mathrm{sl}(YY^T) = \mathrm{sl}\,\mathrm{Var}(Y) \tag{2.1.12}$$

mora potem veljati $\mathbb{E}\,|Z_i|^2 = \mathbb{E}\,|X_i|^2$. Iz leme in Jensenove neenakosti zdaj dobimo:

$$\mathbb{E}\,|Z_i|^3 \le \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\Big(\mathbb{E}\,|X_i|^2\Big)^{3/2} \le \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\,\mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{2.1.13}$$

in iz (2.1.5), (2.1.10) in (2.1.13) končno sledi naslednji izrek.

Izrek 2.1.2. *Če je W kot zgoraj, velja:*

$$\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f\}\Big| \le \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\right) M_3(f) \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{2.1.14}$$

Dobili smo torej podobno oceno kot v 1.4.2, le da se ocena izraža z $M_3(f)$ in ne z $M_1(f)$. Z drugimi besedami, napako pri normalni aproksimaciji smo ocenili v metriki d_3, definirani v razdelku A.8, ocena pa je istega velikostnega reda kot ocena (1.4.20), ki je bila dobljena za enorazsežni primer in se izraža v Wassersteinovi metriki $d_1 = d_{\mathrm{W}}$.

Nastane vprašanje, ali se tudi v večrazsežnem primeru dobiti oceno v Wassersteinovi metriki. To se vsekakor da, saj po točki (2) trditve A.9.1 velja ocena $d_{\mathrm{W}} \le C\, d_3^{1/3}$, kjer je C univerzalna konstanta. Toda ta ocena nam da dosti slabšo oceno hitrosti konvergence v Wassersteinovi metriki kot pa ocena (1.4.20).

V resnici se da tudi v večrazsežnem primeru izpeljati oceno v metrikah d_{W} in d_2, ki je enakega velikostnega reda kot oceni (1.4.20) in (2.1.14) (za oceno v metriki d_2 glej izrek 2.5.3, za oceno v Wassersteinovi metriki pa izrek 3.11.1). Še več, isto hitrost konvergence se da izpeljati celo za primer, ko so testne funkcije f indikatorji merljivih konveksnih množic. Vse to se tudi da doseči z Lindeberg–Bergströmovo metodo: za indikatorje merljivih konveksnih množic in enako porazdeljene slučajne vektorje glej Bentkus [22]. Vendar pa je dokazovanje slednjih ocen po Lindeberg–Bergströmovi metodi tehnično precej zahtevno, posebej če slučajni vektorji niso enako porazdeljeni. V nadaljevanju bomo razvili Steinovo metodo za večrazsežno normalno aproksimacijo, ki sicer na začetku zahteva precej vložka, vendar pa neenakost porazdelitev prav nič ne vpliva na zapletenost postopka. Prav tako obstaja tudi možnost posplošitve na vsote odvisnih slučajnih vektorjev.

Dokaz leme 2.1.1. Naj bodo $\sigma_1^2, \dots \sigma_d^2$ lastne vrednosti in $u_1, \dots u_d$ pripadajoči ortonormirani lastni vektorji kovariančne matrike slučajnega vektorja Z. Ker je Z porazdeljen večrazsežno normalno, lahko zapišemo:

$$Z = \sum_{i=1}^{d} \sigma_i \zeta_i u_i \tag{2.1.15}$$

kjer so $\zeta_1, \dots \zeta_d$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene standardizirano normalno. Pišimo:

$$\mathbb{E}\,|Z|^3 = \mathbb{E}\Big[|Z|\,|Z|^2\Big] = \sum_{i=1}^{d} \sigma_i^2\, \mathbb{E}\Big[|Z|\zeta_i^2\Big] \tag{2.1.16}$$

Po Hölderjevi neenakosti lahko ocenimo:

$$\mathbb{E}\,|Z|^3 \le \sum_{i=1}^{d} \sigma_i^2 \Big(\mathbb{E}\,|Z|^3\Big)^{1/3} \Big(\mathbb{E}\,|\zeta_i|^3\Big)^{2/3} \tag{2.1.17}$$

Ker so ζ_i porazdeljene standardizirano normalno, je $\mathbb{E}\,|\zeta_i|^3 = 4/\sqrt{2\pi}$. Sledi:

$$\mathbb{E}\,|Z|^3 \le \left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\right)^{2/3} \Big(\mathbb{E}\,|Z|^3\Big)^{1/3} \sum_{i=1}^{d} \sigma_i^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\right)^{2/3} \Big(\mathbb{E}\,|Z|^3\Big)^{1/3} \mathbb{E}\,|Z|^2 \tag{2.1.18}$$

Ko enačbo delimo z $\Big(\mathbb{E}\,|Z|^3\Big)^{1/3}$ in potenciramo na $3/2$, dobimo želeni rezultat. ■

2.2 Steinova metoda in markovske verige

Postavimo se spet na začetek prejšnjega razdelka, kjer sta dana elementa f in $\bar{f}$ nekega prostora $\mathcal{F}$, ki naj bo linearni topološki prostor, na katerem je podana še zvezna seminorma p. Pri ocenjevanju količine $p(f - \bar{f})$ za vmesne korake postavimo:

$$f_k := \mathcal{B}^k f \tag{2.2.1}$$

kjer je $\mathcal{B}$ zvezen linearen operator na $\mathcal{F}$. Obstaja naj še operator:

$$\mathcal{P} = \lim_{k\to\infty} \mathcal{B}^k \tag{2.2.2}$$

(limita je mišljena po točkah glede na topologijo prostora) in naj velja $\mathcal{P}f = \bar{f}$. Ker zaradi zveznosti velja:

$$\mathcal{B}\mathcal{P} = \mathcal{P} \tag{2.2.3}$$

in zato:

$$\mathcal{P}^2 = \lim_{k\to\infty} \mathcal{B}^k \mathcal{P} = \mathcal{P} \tag{2.2.4}$$

je $\mathcal{P}$ projektor. Pišimo:

$$f - \mathcal{P}f = -\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\mathcal{B}^{k+1} f - \mathcal{B}^k f\Big) \tag{2.2.5}$$

Zaradi (2.2.3) velja tudi:

$$f - \mathcal{P}f = -\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{B} - \mathcal{I})(\mathcal{B}^k f - \mathcal{P}f) \tag{2.2.6}$$

Če gre $\mathcal{B}^k f$ tako hitro proti $\mathcal{P}f$, da vrsta $\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{B}^k f - \mathcal{P}f)$ konvergira, velja:

$$f - \mathcal{P}f = \mathcal{A}g \tag{2.2.7}$$

kjer je:

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} - \mathcal{I}, \qquad g = -\sum_{k=0}^{\infty}(\mathcal{B}^k f - \mathcal{P}f) \tag{2.2.8}$$

kar je natanko (1.1.7). Če je torej $\mathcal{B}$ operator, čigar potence $\mathcal{B}^k$ dovolj hitro konvergirajo proti razumnemu operatorju $\mathcal{P}$, lahko na vso stvar gledamo kot na Steinovo metodo, konstrukcija pa se odlikuje tudi po tem, da je rešitev Steinove enačbe eksplicitno podana.

V razdelku 1.2 smo Steinov operator v najpreprostejšem primeru konstruirali kot operator, za katerega velja približna enakost (1.2.2). Le-ta zdaj ustreza približni enakosti:

$$\mathcal{B}f(W) \approx \mathbb{E}[f(W') \mid W] \tag{2.2.9}$$

kjer je W' slučajna spremenljivka, ki je porazdeljena enako kot W.

Potence operatorja $\mathcal{B}$ imajo naslednjo verjetnostno interpretacijo: par (W, W') podaljšajmo v markovsko verigo $W_0, W_1, \ldots$, kjer je $W_0 = W$ in $W_1 = W'$. Iz enačb Chapmana in Kolmogorova sledi, da mora potem veljati:

$$\mathcal{B}^k f(W_0) \approx \mathbb{E}[f(W_k) \mid W_0] \tag{2.2.10}$$

Če je markovska veriga ergodična v smislu, da velja $\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[f(W_k) \mid W_0] = \mathbb{E}\, f(W)$, bo veljalo $\mathcal{P}f(W) \approx \mathbb{E}\, f(W)$, kar pomeni, da bo v tem primeru operator $\mathcal{P}$ smiselno izbirati med operatorji, ki slikajo v prostor konstantnih funkcij.

Za primer, ko je $W = X_1 + \cdots + X_n$ vsota neodvisnih slučajnih spremenljivk, smo v razdelkih 1.3 in 1.4 slučajno spremenljivko W' konstruirali tako, da smo enega od sumandov zamenjali z neodvisno kopijo, in na podlagi tega dobili Steinov operator. Če želimo iz tega konstruirati markovsko verigo, pa naletimo na dve težavi. Prva težava je, da smo Steinov operator dobili kot *vsoto* po več slučajnih spremenljivkah W_i', pri katerih smo i-ti sumand zamenjali z neodvisno kopijo. To lahko obidemo tako, da si predstavljamo, da z neodvisno kopijo zamenjamo *slučajni* sumand. Drugi, hujši problem pa je v tem, da je pri markovski verigi, ki jo dobimo, zelo težko eksplicitno opisati pogojne porazdelitve (jedra), zato si z njo ne moremo prav dosti pomagati. Zaradi tega bomo predpostavko, da je $W_0, W_1, \ldots$ markovska veriga, opustili. Potem moramo namesto operatorja $\mathcal{B}$ gledati celo družino operatorjev $\mathcal{B}_k$, ki ustrezajo približnim zvezam:

$$\mathcal{B}_k f(W_0) \approx \mathbb{E}[f(W_k) \mid W_0] \tag{2.2.11}$$

Zahtevamo še, da je $\mathcal{B}_0 = \mathcal{I}$, za zaporedje $W_0, W_1, \ldots$ pa ne zahtevamo ničesar, niti tega ne, da je par (W_0, W_1) enako porazdeljen kot (W, W'). Smiselno pa je, da to velja vsaj približno. Tudi zaporedje $W_0, W_1, \ldots$ bo često dobljeno s pomočjo kakšne markovske verige, četudi samo po sebi ne bo več nujno markovska veriga.

Tu zdaj sicer ne moremo več formulirati Steinove enačbe, lahko pa še vedno zapišemo:

$$f - \mathcal{P}f = -\sum_{k=1}^{n} (\mathcal{B}_k - \mathcal{B}_{k-1})f \tag{2.2.12}$$

pri čemer je lahko n končen ali neskončen: v prvem primeru vzamemo $\mathcal{P} = \mathcal{B}_n$, v drugem pa tako kot prej $\mathcal{P} = \lim_{k\to\infty} \mathcal{B}_k$). Nato upamo, da se dajo količine:

$$\mathbb{E}(\mathcal{B}_k - \mathcal{B}_{k-1})f(W) \tag{2.2.13}$$

dobro oceniti. Tako so $\mathcal{B}_k f$ dejansko koraki pri ocenjevanju, opisanem na začetku razdelka 2.1.

Opomba. Operator $\mathcal{B}_k - \mathcal{B}_{k-1}$ igra vlogo operatorja $\mathcal{A}$ v zvezi (1.2.6), če postavimo $Z := W_0$, $X := W_{i-1}$, $X' := W_i$ in $\mathcal{L}g := g$.

Opomba. Če je W_0 enako porazdeljena kot W in v (2.2.11) velja enakost, se (2.2.13) prevede na $\mathbb{E}\, f(W_k) - \mathbb{E}\, f(W_{k-1})$.

Vrnimo se zdaj k vsoti neodvisnih slučajnih vektorjev $W = X_1 + \cdots + X_n$. Kako konstruirati slučajne spremenljivke W_k, ki bodo lažje izračunljive kot pa markovska veriga, ki jo dobimo tako z nadaljevanjem para (W, W'), pri čemer je W' dobljen z zamenjavo enega od sumandov z neodvisno kopijo? Ena od možnosti je, da konstruiramo markovsko verigo dolgih slučajnih vektorjev:

$$\mathbf{X}_k = \left(Y_1^{(k)}, \ldots Y_n^{(k)}\right) \tag{2.2.14}$$

in postavimo:

$$W_k := Y_1^{(k)} + \cdots + Y_n^{(k)} \tag{2.2.15}$$

Markovsko verigo $\mathbf{X}_k$ pa konstruiramo tako, da najprej za vsako njegovo komponento $i = 1, \ldots n$ izberemo dve porazdelitvi μ_i in ν_i na $\mathbb{R}^d$. Slučajni vektor $\mathbf{X}_0$ postavimo tako, da ima i-ta komponenta porazdelitev μ_i in so vse komponente neodvisne. Dinamika markovske verige pa poteka tako, da vsakič slučajno in neodvisno izberemo komponento I, ki jo zamenjamo z neodvisnim slučajnim vektorjem, čigar pogojna porazdelitev na I je enaka ν_I. Natančneje, naj bodo $X_i^{(k)}$, $i = 1, \ldots n$, $k = 0, 1, \ldots$, neodvisni slučajni vektorji na $\mathbb{R}^d$, pri čemer ima $X_i^{(0)}$ porazdelitev μ_i, $X_i^{(k)}$ pa za $k \geq 1$ porazdelitev ν_i. Tedaj za vsak i slučajni vektorji $X_i^{(0)}, X_i^{(1)}, \ldots$ tvorijo markovsko verigo. Postavimo:

$$Y_i^{(k)} := X_i^{(K_i(k))} \tag{2.2.16}$$

kjer je:

$$K^{(k)} = \left(K_1^{(k)}, \ldots K_n^{(k)}\right) = \sum_{l=1}^{k} L^{(l)} \tag{2.2.17}$$

in kjer so $L^{(l)}$ neodvisni slučajni vektorji z vrednostmi v $\mathbb{R}^n$, porazdeljeni enakomerno po množici standardnih baznih vektorjev. Tako je slučajni vektor $\left(K_1^{(k)}, \ldots K_n^{(k)}\right)$ porazdeljen simetrično polinomsko s k prostostnimi stopnjami. Če označimo:

$$Z_i := X_i^{(0)}, \qquad Z_i' := X_i^{(1)} \tag{2.2.18}$$

je zdaj zahteva (2.2.11) ekvivalentna zahtevi:

$$\mathcal{B}_k f(W_0) \approx \mathbb{E}\left[f\left(\sum_{i=1}^{n}\left(Z_i\,\mathbf{1}\left(K_i(k)=0\right) + Z_i'\,\mathbf{1}\left(K_i(k)=1\right)\right)\right) \,\middle|\, W_0\right] \tag{2.2.19}$$

in posledično:

$$\mathcal{P}f \approx \mathbb{E}\, f(Z_1' + \cdots + Z_n') \tag{2.2.20}$$

Velja tudi:

$$(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_0)f(W_0) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[f\left(W_0 - X_i^{(0)} + X_i^{(1)}\right) - f(W_0) \,\middle|\, W_0\right] \tag{2.2.21}$$

kar spominja na zveze (1.3.5), (1.4.5) in (1.4.9), kjer spet operator $\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_0$ igra vlogo operatorja $\mathcal{A}$.

Če so vse porazdelitve μ_i enake, prav tako tudi porazdelitve ν_i, je ocenjevanje vsote:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(\mathcal{B}_k - \mathcal{B}_{k-1})f(w)\right| \tag{2.2.22}$$

ekvivalentno ocenjevanju vsote:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\mathbb{E}\left[f(W_i^*) - f(W_{i-1}^*) \,\middle|\, W_0 = w\right]\right| \tag{2.2.23}$$

kjer je:

$$W_i^* := Z_1' + \cdots + Z_i' + Z_{i+1} + \cdots + Z_n \tag{2.2.24}$$

kar je znatno enostavneje kot (2.2.22). V posebnem primeru, ko so slučajne spremenljivke X_i enako porazdeljene in $Z_i = X_i$, Z_i' pa je porazdeljen normalno z enakim matematičnim upanjem in varianco kot X_i, dobimo natanko Lindeberg–Bergströmovo metodo. Če pa slučajni vektorji X_i niso enako porazdeljeni, nam ocenjevanje s pomočjo (2.2.15) da nekakšno simetrizacijo Lindeberg–Bergströmove metode, ki je bolj zapletena. Vendar pa tudi enako obravnavanje vseh sumandov prinaša prednosti, zato bomo v nadaljevanju ocenjevanje poenostavili na drug način. Izkaže se namreč, da je dosti lažje ocenjevati v zveznem času.

2.3 Prehod v zvezni čas

V razdelku 2.1 smo opisali Lindeberg–Bergströmovo metodo, ki temelji na ideji, da razliko med danima vektorjema f in $\bar{f}$ ocenimo tako, da med f in $\bar{f}$ "vrinemo" še nekaj funkcij. Zvezna različica tega pa je, da konstruiramo celo pot med f in $\bar{f}$. Naj bo torej $\mathcal{F}$ vektorski prostor, na katerem sta podani seminorma p in še preslikava $u\colon\ [a,b] \to \mathcal{F}$, za katero je $u(a) = f$ in $u(b) = \bar{f}$. Privzemimo še, da obstaja taka preslikava $u'\colon\ [a,b] \to \mathbb{F}$, da enakomerno po $t \in [a,b]$ velja:

$$\lim_{h\to 0} p\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - u'(t)\right) = 0 \tag{2.3.1}$$

Tedaj velja ocena:

$$p(f-\bar{f}) \le \int_a^b p\big(u'(t)\big)\,\mathrm{d}t \tag{2.3.2}$$

Zadevo se da posplošiti tudi na neskončne intervale. V tem primeru privzamemo, da (2.3.1) velja enakomerno na vsakem končnem intervalu, vrednosti funkcije u v neskončnosti pa razumemo kot limito glede na seminormo p: če je npr. $b = \infty$, zahtevamo, da je $\lim_{t\to\infty} p(u(t) - \bar{f}) = 0$.

Opomba. Na zgoraj opisani ideji temelji tudi *metoda zveznega nadaljevanja* v numerični matematiki (glej Allgower in Georg [2]).

Ocenjevanje po (diskretnih) korakih smo prek markovskih verig povezali s Steinovo metodo. Povezava je delovala v primeru, ko smo vmesne korake dobili s pomočjo potenc danega operatorja. Potencam v diskretnem primeru pa odgovarja operatorska polgrupa. Naj bo $\mathcal{F}$ Banachov prostor in $\mathcal{P}_t$ krepko zvezna operatorska polgrupa z generatorjem $\mathcal{A}$. Privzemimo še, da v dani normi obstaja $\mathcal{P} = \lim_{t\to\infty} \mathcal{P}_t$. Zaradi zveznosti velja $\mathcal{P}\mathcal{P}_t = \mathcal{P}$, torej je $\mathcal{P}$ projektor, velja pa tudi:

$$\mathcal{A}\mathcal{P} = 0 \tag{2.3.3}$$

Nadalje iz Dynkinove formule (trditev B.3.1) sledi:

$$\begin{aligned} f - \mathcal{P}_t f &= -\int_0^s \mathcal{A}\mathcal{P}_s f\,\mathrm{d}s = \\ &= -\int_0^s \mathcal{A}(\mathcal{P}_s f - \mathcal{P} f)\,\mathrm{d}s = \\ &= -\mathcal{A}\int_0^s (\mathcal{P}_s f - \mathcal{P} f)\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Če gre $\mathcal{P}_s f$ dovolj hitro proti $\mathcal{P} f$, da velja:

$$\int_0^\infty \|\mathcal{P}_s f - \mathcal{P} f\|\,\mathrm{d}s = 0 \tag{2.3.5}$$

lahko naredimo limito, ko gre t proti neskončno. Ker je operator $\mathcal{A}$ zaprt, velja:

$$f - \mathcal{P}f = \mathcal{A}g \tag{2.3.6}$$

kjer je:

$$g = -\int_0^\infty (\mathcal{P}_s f - \mathcal{P}f)\,\mathrm{d}s \tag{2.3.7}$$

kar pomeni, da lahko na $\mathcal{A}$ gledamo tudi kot na Steinov operator, podobno kot v razdelku 2.2.

Če je operator $\mathcal{A}$ omejen, se operatorji $\mathcal{P}_t$ izražajo po formuli:

$$\mathcal{P}_t = e^{t\mathcal{A}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}\mathcal{A}^k \tag{2.3.8}$$

Privzemimo zdaj, da je operator $\mathcal{A}$ dobljen tako kot v (1.2.2), t. j.:

$$\mathcal{A}g(W) \approx \mathbb{E}\Big[g(W') - g(W) \;\Big|\; W\Big] \tag{2.3.9}$$

Tedaj za operator $\mathcal{B} := \mathcal{I} + \mathcal{A}$ velja:

$$\mathcal{B}g(W) \approx \mathbb{E}[g(W') \mid W\Big] \tag{2.3.10}$$

Operatorje $\mathcal{P}_t$ lahko izrazimo tudi s potencami operatorja $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{P}_t = e^{t(\mathcal{B}-\mathcal{I})} = \sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!}e^{-t}\mathcal{B}^k \tag{2.3.11}$$

Zgornjo formulo lahko zapišemo tudi verjetnostno: če je $N(t)$ slučajna spremenljivka, porazdeljena po Poissonu $\mathrm{Po}(t)$, velja:

$$\mathcal{P}_t = \mathbb{E}\,\mathcal{B}^{N(t)} \tag{2.3.12}$$

Če zdaj par (W, W') podaljšamo v markovsko verigo $W_0, W_1, \ldots$, ki je neodvisna od $N(t)$, iz (2.2.10) dobimo:

$$\mathcal{P}_t f(W_0) \approx \mathbb{E}[f(W_{N(t)}) \mid W_0] \tag{2.3.13}$$

Podobno kot v prejšnjem razdelku lahko tudi tu konstrukcijo posplošimo na nemarkovski primer: vzamemo poljubno zaporedje slučajnih spremenljivk $W_0, W_1, \ldots$ in zahtevamo (2.3.13). Pri tem zdaj ne zahtevamo več, da je $\mathcal{P}_t$ operatorska polgrupa, zato nimamo več Steinove enačbe. Lahko pa vseeno zapišemo:

$$f - \mathcal{P}f = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{P}_t f\,\mathrm{d}t \tag{2.3.14}$$

in upamo, da se bodo dala matematična upanja $\mathbb{E}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{P}_t f(W)$ preprosto oceniti. V naslednjih dveh razdelkih bomo to konstrukcijo uporabili pri večrazsežni normalni aproksimaciji vsot neodvisnih slučajnih vektorjev.

2.4 Ornstein–Uhlenbeckov proces

Vrnimo se k aproksimaciji porazdelitve vsote $W = X_1 + \cdots + X_n$ neodvisnih slučajnih vektorjev, kot smo jo zastavili v razdelku 2.2. Tam smo konstruirali pomožne slučajne vektorje:

$$W_k := X_1^{(K_1(k))} + \cdots + X_n^{(K_n(k))} \tag{2.4.1}$$

kjer za vsak i slučajni vektorji $X_i^{(0)}, X_i^{(1)}, \ldots$ tvorijo markovsko verigo in kjer je slučajni vektor $\big(K_1(k), \ldots K_n(k)\big)$ porazdeljen simetrično polinomsko s k prostostnimi stopnjami (t. j. vsota komponent slučajnega vektorja je enaka k).

Omenili smo, da se ocenjevanje napake pri aproksimaciji poenostavi, če stvar gledamo v zveznem namesto v diskretnem času. V skladu z (2.3.13) bomo iskali operatorje $\mathcal{P}_t$, za katere bo približno veljalo:

$$\mathcal{P}_t f(W_0) \approx \mathbb{E}[f(W_{N(nt)}) \mid W_0] \tag{2.4.2}$$

kjer je slučajna spremenljivka $N(nt)$ porazdeljena po Poissonu $\mathrm{Po}(nt)$ in neodvisna od vsega ostalega. Čas smo n-krat pospešili, ker potem pri primernih pogojih velja:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \mathcal{P}_t f(W_{N(nt)}) &\approx n\,\mathbb{E}\Big[f(W_1) - f(W_0) \;\Big|\; W_0\Big] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[f\Big(W_0 - X_i^{(0)} + X_i^{(1)}\Big) - f(W_0) \;\Big|\; W_0\Big]\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

kar je istega velikostnega reda kot leve strani v (1.3.5), (1.4.5) in (1.4.9).

Prva prednost zveznega časa je v tem, da so slučajni vektorji $W_{N(nt)}$ na določen način enostavnejši kot W_k: krajši račun namreč pokaže, da so slučajne spremenljivke $N_i(t) := K_i(N(nt))$ neodvisne in porazdeljene po Poissonu $\mathrm{Po}(t)$.

Privzemimo zdaj, da je $\mathbb{E}\, X_i = 0$ in $\mathrm{Var}(W) = \mathbf{I}$, za vse slučajne vektorje $X_i^{(k)}$ pa privzemimo, da so porazdeljeni centrirano normalno z enako varianco kot X_i – to naj velja tudi za $X_i^{(0)}$. Če bi formula (2.4.2) veljala natančno, bi veljalo:

$$\mathcal{P}_t f(w) = \mathbb{E}\, f\Big(\sum_{i=1}^{n} \Sigma(t) w + \Big(1 - \Sigma^2(t)\Big)^{1/2} Z\Big) \tag{2.4.4}$$

kjer je $Z \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{I})$ neodvisna od vsega ostalega in:

$$\Sigma(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(N_i(t) = 0)\, \mathrm{Var}(X_i) \tag{2.4.5}$$

Toda če je n velik in se kovariančne matrike slučajnih vektorjev X_i ne razlikujejo preveč, je slučajna matrika $\Sigma(t)$ približno enaka:

$$\mathbb{E}\, \Sigma(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\Big(N_i(t) = 0\Big)\, \mathrm{Var}(X_i) = e^{-t}\, \mathbf{I} \tag{2.4.6}$$

V duhu tega bomo postavili:

$$\mathcal{P}_t f(w) := \mathbb{E}\, f\Big(e^{-t}\, w + \sqrt{1-e^{-2t}}\, Z\Big) \tag{2.4.7}$$

in v skladu z (2.3.14) ocenjevali:

$$\mathbb{E}\, f(W) - \mathbb{E}\, \mathcal{P} f(W) = -\,\mathbb{E} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{P}_t f(W)\,\mathrm{d}t \tag{2.4.8}$$

kjer je $\mathcal{P} f(w) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{P}_t f(w)$.

Oglejmo si operatorje $\mathcal{P}_t$ malo pobliže. Definiramo jih lahko za kar precej širok razred funkcij, omejili pa se bomo na funkcije f, za katere je $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$.

Trditev 2.4.1. *Naj bo $f\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ merljiva funkcija in $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$.*

(1) *Za vsak $w \in \mathbb{R}^d$ velja:*

$$\mathbb{E}\Big|f\Big(e^{-t}\, w + \sqrt{1-e^{-2t}}\, Z\Big)\Big| < \infty \tag{2.4.9}$$

Z drugimi besedami, $\mathcal{P}_t f$ obstajajo po točkah.

(2) *Velja:*

$$\mathbb{E}\,|\mathcal{P}_t f(Z)| \le \mathbb{E}\,|f(Z)| \tag{2.4.10}$$

Posledično $\mathcal{P}_t$ obstajajo kot omejeni operatorji na prostoru $L^1\big(\mathrm{N}(0,\mathbf{I})\big)$. Za poljubno funkcijo f, ki mu pripada, velja še:

$$\mathbb{E}\, \mathcal{P}_t f(Z) = \mathbb{E}\, f(Z) \tag{2.4.11}$$

(3) *Funkcija $(t,w) \mapsto \mathcal{P}_t f(w)$ je poljubnokrat zvezno odvedljiva na $(0,\infty)\times\mathbb{R}^d$. Če definiramo še $\mathcal{P}_\infty f(w) := \mathbb{E}\, f(Z)$, je funkcija $(t,w) \mapsto \mathcal{P}_t f(w)$ zvezna na $(0,\infty]\times\mathbb{R}^d$. Med drugim torej velja $\lim_{t\to\infty} \mathcal{P}_t f(w) = \mathbb{E}\, f(Z)$.*

(4) *Naj bo $w_0 \in \mathbb{R}^d$. Če je f zvezna v w_0, je funkcija $(t,w) \mapsto (\mathcal{P}_t f)(w)$ zvezna v $(0,w_0)$. Med drugim torej velja, da je $\lim_{t\downarrow 0} \mathcal{P}_t f(w_0) = f(w_0)$.*

(5) *Operatorji $\mathcal{P}_t$ tvorijo polgrupo: za poljubna $t,s \ge 0$ velja:*

$$\mathcal{P}_{t+s} f(w) = \mathcal{P}_t \mathcal{P}_s (w) \tag{2.4.12}$$

(6) *Če je $f \in C^{(2)}(\mathbb{R}^d)$, lahko na f po točkah definiramo infinitezimalni generator te polgrupe, za katerega velja:*

$$\mathcal{A} f(w) := \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathcal{P}_t f(w) - f(w)}{t} = \Delta f(w) - f'(w) w \tag{2.4.13}$$

kjer je Δ Laplaceov operator.

(7) *Za vsak $t > 0$ velja:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{P}_t f(w) = \mathcal{A}\mathcal{P}_t f(w) \tag{2.4.14}$$

Posledica 2.4.2. *Brž ko je f zvezna v w in $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$, velja:*

$$f(w) - \mathbb{E}\,f(Z) = -\int_0^\infty \Big[\Delta\mathcal{P}_t f(w) - (\mathcal{P}_t f)'(w)w\Big]\mathrm{d}t \tag{2.4.15}$$

■

Med lastnostmi operatorjev $\mathcal{P}_t$ iz trditve 2.4.1 je daleč najpomembneje, da tvorijo operatorsko polgrupo. Imenuje se *Ornstein–Uhlenbeckova polgrupa* in pripada *Ornstein–Uhlenbeckovemu procesu*, ki predstavlja gibanje delca, ki se giblje v skladu z drsečim Brownovim gibanjem, pri čemer se smer in hitrost drsenja spreminjata z lego delca: drsenje je usmerjeno proti koordinatnemu izhodišču, hitrost drsenja pa je premo sorazmerna z oddaljenostjo od izhodišča.

Za dokazovanje večine točk izreka 2.4.1 bi lahko uporabili teorijo operatorskih polgrup (glej dodatek B). Vendar pa jih ne bi mogli dokazati v vsej splošnosti. Ključno je vprašanje, na katerem (Banachovem) prostoru bi definirali elemente $\mathcal{P}_t$. Če želimo dokazati neenakosti v klasični obliki, t. j. po točkah, je smiselno vzeti prostor funkcij s kako uteženo supremum normo. Vendar pa bi na ta način rezultate težko izpeljali npr. za vse funkcije f, za katere je $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$. Po drugi strani pa nam integralska norma ne bi dala rezultatov po točkah. Zares bi nam pomagala šele teorija operatorskih polgrup na *Fréchetovih* prostorih.

S pomočjo zveze (2.4.8) lahko torej ocenjujemo količine $\mathbb{E}\,f(W) - \mathbb{E}\,f(Z)$, torej napako pri večrazsežni normalni aproksimaciji slučajnega vektorja f. Slednja ima smisel za vse funkcije f, za katere je $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$; za vse take funkcije so operatorji $\mathcal{P}_t$ tudi definirani. Ker pa $\mathcal{P}_t$ tvorijo operatorsko polgrupo, lahko na vso stvar gledamo tudi v duhu Steinove metode: če želimo oceniti $\mathbb{E}\,f(W) - \mathbb{E}\,f(Z)$, raje ocenimo $\mathbb{E}\,\mathcal{A}g(W)$, kjer je $\mathcal{A}$ kot v (2.4.13), g pa je rešitev Steinove enačbe $\mathcal{A}g = f - \mathbb{E}\,f(Z)$. Plavzibilno je, da lahko funkcijo g vzamemo tako kot v (2.3.7). Podrobnosti bomo izpeljali v naslednjih dveh razdelkih.

Če je $d = 1$, se po (2.4.13) operator $\mathcal{A}$ ujema s Steinovim operatorjem, ki smo ga dobili pri enorazsežni normalni aproksimaciji (glej (1.4.10)), torej gre za posplošitev enorazsežnega primera. Z drugimi besedami, Steinov operator za večrazsežno normalno aproksimacijo se bo izražal s formulo:

$$\mathcal{A}f(w) = \Delta f(w) - f'(w)w \tag{2.4.16}$$

Preden gremo dokazat trditev 2.4.1, si zaradi krajšega zapisa oglejmo še naslednjo reparametrizacijo družine $\mathcal{P}_t$:

$$\mathcal{U}_\alpha f(w) = \mathbb{E}\,f(\cos\alpha\, w + \sin\alpha\, Z)\,; \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \tag{2.4.17}$$

To je res reparametrizacija, saj za $0 \le \alpha < \pi/2$ velja $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{P}_{-\ln\cos\alpha}$. Velja še:

$$\mathcal{U}_\alpha f(w) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\cos\alpha\, w + \sin\alpha\, z)\,\phi_d(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\sin^d\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\phi_d\left(\frac{x - \cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right)\mathrm{d}x \tag{2.4.18}$$

kjer je ϕ_d tako kot v (E.8.1) gostota standardizirane d-razsežne normalne porazdelitve:

$$\phi_d(x) = (2\pi)^{-d/2}\, e^{-\frac{1}{2}|x|^2} \tag{2.4.19}$$

Potrebovali bomo še nekaj pomožnih rezultatov.

Lema 2.4.3. *Naj bo $r \in \mathbb{N}_0$.*

(1) *Obstaja taka konstanta $C_r \geq 0$, da za poljubna $0 \leq a < |b|$ in poljubna $x, y \in \mathbb{R}^d$ velja ocena:*

$$\left|\phi_d^{(r)}(bx+y)\right|_\vee \leq C_r \left(\frac{b^2}{b^2-a^2}\right)^{r/2} \exp\left(\frac{a^2|y|^2}{b^2-a^2}\right)\phi_d(ax) \tag{2.4.20}$$

(2) *Obstaja taka konstanta $C'_r \geq 0$, da za poljubne $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \leq 1$ in $0 \leq \eta < 1-\varepsilon$, za katere velja $a^2 < (1-\varepsilon-\eta)b^2$, ter za poljubna $x, y \in \mathbb{R}^d$ velja ocena:*

$$\left|\phi_d^{(r)}(bx+y)\right|_\vee \leq \frac{C'_r}{\varepsilon^{r/2}} \exp\left(\frac{1}{2}\,\frac{(1-\varepsilon-\eta)a^2|y|^2}{(1-\varepsilon-\eta)b^2-a^2} - \frac{1}{2}\,\eta|bx+y|^2\right)\phi_d(ax) \tag{2.4.21}$$

Dokaz. Dokažimo najprej oceno (2.4.21). Po posledici E.8.2 obstaja taka konstanta D_r, da velja:

$$\left|\phi_d^{(r)}(z)\right|_\vee \leq D_r\big(1+|z|^r\big)\phi_d(z) \tag{2.4.22}$$

Ker je $t \mapsto t^{r/2}e^{-t^2/2}$ omejena funkcija in ker je $\varepsilon \leq 1$, nadalje obstaja taka konstanta D'_r, da je:

$$\left|\phi_d^{(r)}(z)\right|_\vee \leq D'_r\big(1+\varepsilon^{-r/2}\big)e^{\varepsilon|z|^2/2}\phi_d(z) \leq \frac{2D'_r}{\varepsilon^{r/2}}\, e^{\varepsilon|z|^2/2}\phi_d(z) \tag{2.4.23}$$

Sledi:

$$\begin{aligned}\left|\phi_d^{(r)}(bx+y)\right|_\vee &\leq (2\pi)^{-d/2}\,\frac{2D'_r}{\varepsilon^{r/2}}\,\exp\left(-\frac{1-\varepsilon}{2}\,|bx+y|^2\right) = \\ &= \frac{2D'_r}{\varepsilon^{r/2}}\,\exp\left(-\frac{\eta}{2}\,|bx+y|^2\right)\times \\ &\qquad \times\exp\left(-\frac{1-\varepsilon-\eta}{2}\,|bx+y|^2 + \frac{a^2}{2}\,|x|^2\right)\phi_d(ax)\end{aligned} \tag{2.4.24}$$

Označimo $k := 1-\varepsilon-\eta$. Krajši račun pokaže:

$$\begin{aligned}-k\,|bx+y|^2 + a^2\,|x|^2 &= -\left|\sqrt{kb^2-a^2}\,|x| + \frac{kb}{\sqrt{kb^2-a^2}}\,|y|\right|^2 + \frac{ka^2}{kb^2-a^2}\,|y|^2 \leq \\ &\leq \frac{ka^2}{kb^2-a^2}\,|y|^2\end{aligned} \tag{2.4.25}$$

Ocena (2.4.21) je s tem je dokazana. Za dokaz ocene (2.4.20) pa v (2.4.21) vstavimo $\varepsilon = (b^2-a^2)/(2b^2)$ in $\eta = 0$. ■

Trditev 2.4.4. *Naj bo $k > 0$, $f \in \mathcal{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ in $\mathbb{E}\,|f'(kZ)| < \infty$. Tedaj je tudi $\mathbb{E}\,|f(kZ)| < \infty$.*

Opomba. Z $\mathcal{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ smo označili *prostor Soboljeva* vseh funkcij, ki imajo lokalno integrabilen šibki odvod (glej razdelek E.3). Šibki odvod je posplošitev odvoda v klasičnem smislu, tako da trditev in nadaljnji rezultati veljajo tudi za zvezno diferenciabilne funkcije. Vendar pa so za nas zelo pomembne (lokalno) Lipschitzeve funkcije, ki niso nujno povsod diferenciabilne v klasičnem smislu, zato pa imajo definiran šibki odvod. Čeravno morda v formulaciji glavnih rezultatov pojem šibkega odvoda ne nastopa, pa so dokazi z uporabo le-tega dosti elegantnejši (ni potrebno limitiranje).

Dokaz trditve 2.4.4. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $k = 1$. Naj bo U slučajni vektor, enakomerno porazdeljen po enotski krogli v $\mathbb{R}^d$ in neodvisen od Z. Ker je f lokalno integrabilna, je $\mathbb{E}\,|f(U)| < \infty$. Ker je $|f(Z)| \le |f(U)| + |f(Z) - f(U)|$, je dovolj dokazati, da je $\mathbb{E}\,|f(Z) - f(U)| < \infty$.

Naj bo v_d volumen enotske krogle v $\mathbb{R}^d$. Po trditvi E.3.5 velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|f(Z) - f(U)| &= \frac{1}{v_d}\int_{|u|\le 1}\int_{\mathbb{R}^d} |f(z) - f(u)|\,\phi_d(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u \ \le \\ &\le \frac{1}{v_d}\int_{|u|\le 1}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\Big|f'\big((1-t)u + tz\big)\Big|\,|z-u|\,\phi_d(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{2.4.26}$$

S substitucijo $x = (1-t)u + tz$ v notranji integral in zamenjavo vrstnega reda integracije dobimo:

$$\mathbb{E}\,|f(Z) - f(U)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |f'(x)|\,J(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.4.27}$$

kjer je:

$$J(x) = \frac{1}{v_d}\int_0^1 \frac{1}{t^{d+1}}\int_{|u|\le 1} |x-u|\,\phi_d\left(\frac{x-(1-t)u}{t}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \tag{2.4.28}$$

Naša trditev bo dokazana, če bomo uspeli $J(x)$ omejiti s $\phi_d(x)$. Pišimo:

$$|x-u| = \Big|x-(1-t)u + tu\Big| \le \Big|x-(1-t)u\Big| + t|u| \le \Big|x-(1-t)u\Big| + t \tag{2.4.29}$$

Tako velja $J(x) \le J_1(x) + J_2(x)$, kjer je:

$$J_1(x) = \frac{1}{v_d}\int_0^{1/2}\frac{1}{t^d}\int_{|u|\le 1}\left(1 + \frac{\big|x-(1-t)u\big|}{t}\right)\phi_d\left(\frac{x-(1-t)u}{t}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \tag{2.4.30}$$

$$J_2(x) = \frac{1}{v_d}\int_{1/2}^{1}\frac{1}{t^d}\int_{|u|\le 1}\left(1 + \frac{\big|x-(1-t)u\big|}{t}\right)\phi_d\left(\frac{x-(1-t)u}{t}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \tag{2.4.31}$$

Ločimo dva primera.

Prvi primer: $|x| \le 2$. V tem primeru z uvedbo nove spremenljivke $y = \big(x-(1-t)u\big)/t$ v notranji integral dobimo:

$$\begin{aligned}J_1(x) &\le \frac{1}{v_d}\int_0^{1/2}\frac{1}{t^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(1 + \frac{\big|x-(1-t)u\big|}{t}\right)\phi_d\left(\frac{x-(1-t)u}{t}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{v_d}\int_0^{1/2}\frac{1}{(1-t)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\big(1+|y|\big)\phi_d(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{2.4.32}$$

Naj bo $I_d = \int_{1/2}^1 t^{-d}\,\mathrm{d}t$. Tedaj velja:

$$J_1(x) \le \frac{I_d(1+\mathbb{E}\,|Z|)}{v_d} \le \frac{e^2 I_d(1+\mathbb{E}\,|Z|)}{v_d}\, e^{-\frac{1}{2}|x|^2} = \frac{(2\pi)^{d/2} e^2 I_d(1+\mathbb{E}\,|Z|)}{v_d}\,\phi_d(x) \tag{2.4.33}$$

Pri integralu $J_2(x)$ pa upoštevamo, da je $M := \sup_{s\ge0}(1+s)e^{-\frac{1}{2}s^2} < \infty$. Sledi:

$$J_2(x) \le \frac{(2\pi)^{-d/2}M}{v_d}\int_{1/2}^1 \frac{1}{t^d}\int_{|u|\le1} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}t = (2\pi)^{-d/2} M\, I_d \le e^2 M\, I_d\,\phi_d(x) \tag{2.4.34}$$

Drugi primer: $|x| \ge 2$. V tem primeru najprej z upoštevanjem dejstva, da je $s \mapsto (1+s)e^{-\frac{1}{2}s^2}$ za $s \ge 1$ padajoča funkcija, in ocene:

$$\big|x - (1-t)u\big| \ge |x| - (1-t)|u| \le |x| - 1 + t \ge 1 \tag{2.4.35}$$

ocenimo:

$$\left(1 + \frac{\big|x-(1-t)u\big|}{t}\right)\phi_d\left(\frac{x-(1-t)u}{t}\right) \le \left(2 + \frac{|x|-1}{t}\right)\phi_d\left(1 + \frac{|x|-1}{t}\right) \tag{2.4.36}$$

Naj bo najprej $0 < t \le 1/2$. V tem primeru je:

$$1 + \frac{|x|-1}{t} \ge 1 + \frac{|x| - \frac{1}{2}|x|}{t} = 1 + \frac{|x|}{2t} \tag{2.4.37}$$

Ker je spet $s \mapsto (1+s)e^{-\frac{1}{2}s^2}$ padajoča za $s \ge 1$, je potem tudi:

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^d}\left(2 + \frac{|x|-1}{t}\right)\phi_d\left(1 + \frac{|x|-1}{t}\right) &\le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}t^d}\left(2 + \frac{|x|}{2t}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{|x|}{2t}\right)^2\right\} \le \\ &\le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}t^d\sqrt{e}}\left(|x| + \frac{|x|}{2t}\right)\exp\left\{-\frac{|x|^2}{8t^2} - \frac{|x|}{2t}\right\} \le \\ &\le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}t^d\sqrt{e}}\,\frac{|x|}{t}\,\exp\left\{-\frac{|x|^2}{2} - \frac{|x|}{4t} - \frac{1}{2t}\right\}\end{aligned} \tag{2.4.38}$$

Sledi:

$$J_1(x) \le \frac{1}{2\sqrt{e}}\left[\sup_{t\ge0} t^{-d}\exp\left(-\frac{1}{2t}\right)\right]\sup_{t\ge0}\left[\frac{|x|}{t}\exp\left(-\frac{|x|}{4t}\right)\right]\phi_d(x) \tag{2.4.39}$$

Naj bo zdaj še $1/2 \le t < 1$. Ocenimo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^d}\left(2 + \frac{|x|-1}{t}\right) &\le \frac{2}{t^d}\left(1 + \frac{|x|-1}{t}\right) \le \frac{2}{t^{d-1}}\left(1 + \frac{|x|-1}{t}\right)\frac{|x|-1}{t^2} \le \\ &\le 2^d\left(1 + \frac{|x|-1}{t}\right)\frac{|x|-1}{t^2}\end{aligned} \tag{2.4.40}$$

S substitucijo $s = (1 + (|x| - 1)/t)^2/2$ dobimo:

$$\begin{aligned} J_2(x) &\le \frac{2^d}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^1 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{|x|-1}{t}\right)^2\right\} \left(1 + \frac{|x|-1}{t}\right) \frac{|x|-1}{t^2}\, \mathrm{d}t = \\ &= \frac{2^d}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|x|^2/2}^{\infty} e^{-s}\, \mathrm{d}s = \\ &= 2^d \phi_d(x) \end{aligned} \tag{2.4.41}$$

Če povzamemo, torej obstaja taka univerzalna konstanta C, da je $J(x) \le C\,\phi_d(x)$. S tem je trditev dokazana. ∎

Lema 2.4.5. *Naj bo $r, s \in \mathbb{N}_0$, $f \in \mathcal{W}^{s,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $k > 0$ in $\mathbb{E}\left|f^{(s)}(kZ)\right|_\vee < \infty$. Tedaj za poljubne $0 < \lambda < k$ in $y \in \mathbb{R}^d$ in $p = 0, 1, \ldots s$ velja:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|f^{(p)}(y + \lambda z)\right|_\vee \left|\phi_d^{(r)}(z)\right|_\vee \mathrm{d}z = \frac{1}{\lambda^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left|f^{(p)}(x)\right|_\vee \left|\phi_d^{(r)}\left(\frac{x-y}{\lambda}\right)\right|_\vee \mathrm{d}x < \infty \tag{2.4.42}$$

Še več, za poljubne $\rho > 0$ in $0 < k_1 \le k_2 < k$ velja:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|f^{(p)}(x)\right|_\vee \sup_{\substack{|y|\le\rho \\ k_1 \le \lambda \le k_2}} \left|\phi_d^{(r)}\left(\frac{x-y}{\lambda}\right)\right|_\vee \mathrm{d}x < \infty \tag{2.4.43}$$

Dokaz. Dovolj je dokazati oceno (2.4.43). Iz ocene (2.4.20) sledi, da je dovolj dokazati, da je:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left|f^{(p)}(x)\right|_\vee \phi_d\left(\frac{x}{k}\right) \mathrm{d}x = k^d\, \mathbb{E}\left|f^{(p)}(kZ)\right|_\vee < \infty \tag{2.4.44}$$

To pa sledi iz trditve 2.4.4. ∎

Lema 2.4.6. *Naj bo $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $k > 0$ in $\mathbb{E}\,|f(kZ)| < \infty$. Tedaj za poljuben $r \in \mathbb{N}_0$ funkcija:*

$$F(\lambda, y) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y + \lambda z)\, \phi_d^{(r)}(z)\, \mathrm{d}z \tag{2.4.45}$$

neskončnokrat zvezno odvedljiva za $0 < \lambda < k$ in $y \in \mathbb{R}^d$.

Dokaz. Pišimo:

$$F(\lambda, y) = \frac{1}{\lambda^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \phi_d^{(r)}\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) \mathrm{d}x \tag{2.4.46}$$

Z indukcijo bomo pokazali, da je $F \in C^{(s)}\big((0,k) \times \mathbb{R}^d\big)$ za vsak $s \in \mathbb{N}_0$. Naj bo najprej $s = 0$ (treba je torej pokazati, da je funkcija F zvezna). To sledi iz ocene (2.4.43) in trditve E.6.1.

Naredimo sedaj indukcijski korak z s na $s+1$. Iz trditve E.6.3 in ocene (2.4.43) sledi:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(y,\lambda) = -\frac{d}{\lambda^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \phi_d^{(r)}\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) \mathrm{d}x - \\ - \frac{1}{\lambda^{d+2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \phi_d^{(r+1)}\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) \mathrm{d}x \tag{2.4.47}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(y,\lambda) = -\frac{1}{\lambda^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \phi_d^{(r+1)}\left(\frac{x-y}{\lambda}\right) \mathrm{d}x \tag{2.4.48}$$

in po indukcijski predpostavki ti dve funkciji pripadata $C^{(s)}\big((0,k)\times\mathbb{R}^d\big)$. Od tod pa že sledi, da je $F \in C^{(s+1)}\big((0,k)\times\mathbb{R}^d\big)$. ■

Trditev 2.4.7. *Naj bo* $0 < \alpha \le \pi/2$, $f \in \mathcal{W}^{s,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ *in naj bo* $\mathbb{E}\,|f^{(s)}(Z)| < \infty$. *Tedaj je* $\mathcal{U}_\alpha f$ *$(r+s)$-krat zvezno odvedljiva in velja:*

$$\left(\mathcal{U}_\alpha f\right)^{(r+s)}(w) = (-1)^r \frac{\cos^{r+s}\alpha}{\sin^r \alpha} \int_{\mathbb{R}^d} f^{(s)}(\cos\alpha\, w + \sin\alpha\, z)\, \phi_d^{(r)}(z)\, \mathrm{d}z \tag{2.4.49}$$

Opomba. Vsi izrazi, ki nastopajo v (2.4.49), obstajajo po lemi 2.4.5.

Dokaz trditve 2.4.7. Najprej enakost:

$$\mathcal{U}_\alpha f(w) = \int_{\mathbb{R}^d} f\big(\cos\alpha\, w + \sin\alpha\, z\big)\, \phi_d(z)\, \mathrm{d}z \tag{2.4.50}$$

s-krat odvajamo. Trditev E.6.2 bomo lahko uporabili, če bomo dokazali, da za vsak $M \ge 0$ in vsak $p = 0, 1, \ldots s$ velja:

$$\int_{|w|\le M} \int_{\mathbb{R}^d} \Big| f^{(p)}\big(\cos\alpha\, w + \sin\alpha\, z\big)\Big|_\vee\, \phi_d(z)\, \mathrm{d}z = \\ = \frac{1}{\sin^d \alpha} \int_{|w|\le M} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f^{(p)}(x)\big|_\vee\, \phi_d\left(\frac{x - \cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right) \mathrm{d}x < \infty \tag{2.4.51}$$

To pa sledi iz ocene (2.4.43). Po trditvi E.6.2 potem dobimo, da v *šibkem* smislu velja:

$$\left(\mathcal{U}_\alpha f\right)^{(s)}(w) = \cos^s\alpha \int_{\mathbb{R}^d} f^{(s)}\big(\cos\alpha\, w + \sin\alpha\, z\big)\, \phi_d(z)\, \mathrm{d}z = \\ = \frac{\cos^s\alpha}{\sin^d\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} f^{(s)}(x)\, \phi_d\left(\frac{x-\cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right) \mathrm{d}x \tag{2.4.52}$$

Toda po lemi 2.4.6 je to zvezna funkcija, zato zgornja enakost velja v klasičnem smislu. Dobljeno enakost na desni odvajamo še r-krat. Iz ocene (2.4.43) in trditve E.6.3 dobimo:

$$\left(\mathcal{U}_\alpha f\right)^{(r+s)}(w) = (-1)^r \frac{\cos^{r+s}\alpha}{\sin^{r+d}\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} f^{(s)}(x)\, \phi_d^{(r)}\left(\frac{x-\cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right) \mathrm{d}x = \\ = (-1)^r \frac{\cos^{r+s}\alpha}{\sin^r\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} f^{(s)}\big(\cos\alpha\, w + \sin\alpha\, z\big)\, \phi_d^{(r)}(z)\, \mathrm{d}z \tag{2.4.53}$$

To pa je bilo potrebno dokazati. ■

Lema 2.4.8. *Za vsak $r \in \mathbb{N}_0$ obstaja taka konstanta $C_r \geq 0$, da za poljubna $x, w \in \mathbb{R}^d$ in poljuben $0 < \alpha \leq \pi/2$ velja ocena:*

$$\left|\phi_d^{(r)}\left(\frac{x - \cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right)\right|_\vee \leq \frac{C_r}{\cos^r\alpha} \exp\left(-\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha\, |x - w|^2}{16} + |w|^2\right)\phi_d(x) \tag{2.4.54}$$

Dokaz. Če v oceno (2.4.21) vstavimo $a = 1$, $b = 1/\sin\alpha$, $y = -\operatorname{ctg}\alpha\, w$ in $\varepsilon = \eta = (\cos^2\alpha)/4$, po nekaj računanja dobimo oceno:

$$\left|\phi_d^{(r)}\left(\frac{x - \cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right)\right|_\vee \leq \frac{C_r}{\cos^r\alpha} \exp\Big[\Big(1 - \tfrac{1}{2}\cos^2\alpha\Big)|w|^2 - \tfrac{1}{8}\operatorname{ctg}^2\alpha\, |x - \cos\alpha\, w|^2\Big]\phi_d(x) \tag{2.4.55}$$

Brez težav preverimo, da je:

$$-|x - \cos\alpha\, w|^2 = -\tfrac{1}{2}|x - w|^2 - \tfrac{1}{2}\Big|x - (2\cos\alpha - 1)w\Big|^2 + (1 - \cos\alpha)^2|w|^2 \tag{2.4.56}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} -\operatorname{ctg}^2\alpha\, |x - \cos\alpha\, w|^2 &\leq -\tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha|x - w|^2 + \frac{\cos^2\alpha(1 - \cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}|w|^2 = \\ &= -\tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha|x - w|^2 + \frac{\cos^2\alpha(1 - \cos\alpha)}{1 + \cos\alpha}|w|^2 \leq \\ &\leq -\tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha|x - w|^2 + \cos^2\alpha|w|^2 \end{aligned} \tag{2.4.57}$$

Naš rezultat zdaj sledi iz (2.4.55) in (2.4.57). ■

Posledica 2.4.9. *Naj bo $r \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{R}$ in $K \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^d$, pri čemer je K kompaktna, U pa odprta množica. Tedaj obstaja tak $C_{p,r,K,U} \geq 0$, da za vsak $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ter vsako merljivo funkcijo $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, za katero je $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$ in $f\big|_U = 0$ velja ocena:*

$$\sup_{w\in K}\Big|(\mathcal{U}_\alpha f)^{(r)}(w)\Big|_\vee \leq C_{p,r,K,U} \sin^p\alpha\, \mathbb{E}\,|f(Z)| \tag{2.4.58}$$

Dokaz. Obstaja tak $M \geq 0$, da za vsak $w \in K$ velja $|w| \leq M$. Poleg tega obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubna $w \in K$ in $x \notin U$ velja $|x - w| \geq \delta$. Iz formule (2.4.53), leme 2.4.8 in predpostavk sledi:

$$\begin{aligned} \sup_{w\in K}\Big|(\mathcal{U}_\alpha f)^{(r)}(w)\Big|_\vee &\leq \frac{\cos^r\alpha}{\sin^{r+d}\alpha}\sup_{w\in K}\int_{|x-w|\geq\delta} f(x)\left|\phi_d^{(r)}\left(\frac{x - \cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right)\right|_\vee dx \leq \\ &\leq \frac{C_r\, e^{M^2}}{\sin^{r+d}\alpha}\exp\left(-\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha\,\delta^2}{16}\right)\mathbb{E}\,|f(Z)| \end{aligned} \tag{2.4.59}$$

To pa se že da omejiti v skladu z (2.4.58). ■

Posledica 2.4.10. *Naj bo $r \in \mathbb{N}_0$ in $K \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^d$, pri čemer je K kompaktna, U pa odprta množica. Tedaj za vsako merljivo funkcijo $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, za katero je $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$ in $f\big|_U = 0$, ter za vsak $\gamma \in \mathbb{R}$ velja:*

$$\lim_{t\downarrow 0} t^{-\gamma}\sup_{w\in K}\Big|(\mathcal{P}_t f)^{(r)}(w)\Big|_\vee = 0 \tag{2.4.60}$$

Dokaz. Naredimo substitucijo $t = -\ln\cos\alpha$ in upoštevamo, da je:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\ln\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{2} \tag{2.4.61}$$

■

Dokaz trditve 2.4.1.

(1): Uporabimo zapis (2.4.18). Preprost račun pokaže:

$$\phi_d\left(\frac{x-\cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left|\frac{w-\cos\alpha\, x}{\sin\alpha}\right|^2 + \frac{1}{2}|w|^2\right)\phi_d(x) \tag{2.4.62}$$

Tako lahko ocenimo:

$$\phi_d\left(\frac{x-\cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right) \le e^{\frac{1}{2}|w|^2}\phi_d(x) \tag{2.4.63}$$

(podobno oceno lahko dobimo tudi iz (2.4.20)). Sledi:

$$\left|\mathcal{U}_\alpha f(w)\right| \le \frac{e^{\frac{1}{2}|w|^2}}{\sin^d\alpha}\,\mathbb{E}\,|f(Z)| \tag{2.4.64}$$

(2): Naj bosta Z in Z' neodvisna slučajna vektorja, porazdeljena normalno $\mathrm{N}(0,\mathbf{I}_d)$. Tedaj velja:

$$\mathbb{E}\,|\mathcal{P}_t f(Z)| = \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}\Big[f(\cos\alpha\, Z + \sin\alpha\, Z')\;\Big|\; Z\Big]\Big| \le \mathbb{E}\,|f(\cos\alpha\, Z + \sin\alpha\, Z')| = \mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty \tag{2.4.65}$$

in:

$$\mathbb{E}\,\mathcal{P}_t f(Z) = \mathbb{E}\, f(\cos\alpha\, Z + \sin\alpha\, Z') = \mathbb{E}\, f(Z) \tag{2.4.66}$$

(3): Sledi iz leme 2.4.6 ter iz ocene (2.4.64) in izreka o dominirani konvergenci.

(4): Dovolj je dokazati, da za poljubni zaporedji α_n in w_n, za katero velja $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ in $\lim_{n\to\infty} w_n = w_0$, velja $\lim_{n\to\infty}\mathcal{U}_{\alpha_n} f(w_n) = f(w_0)$. Obstaja zvezna funkcija $h\colon \mathbb{R}^d \to [0,1]$ s kompaktnim nosilcem, za katero je $h(x) = 1$, brž ko je $|x - w_0| \le 1$. Definirajmo $f_1 := fh$ in $f_2 := f(1-h)$. Tedaj je f_1 zvezna v w_0 in omejena ter $f_2(x) = 0$, brž ko je $|x - w_0| \le 1$, velja pa še $f = f_1 + f_2$. Zaradi linearnosti je konvergenco dovolj dokazati za f_1 in f_2. Da je $\lim_{n\to\infty}\mathcal{U}_{\alpha_n} f_1(w_n) = f_1(w_0)$, sledi iz prvega dela zapisa (2.4.18), zveznosti in omejenosti funkcije f_1 ter izreka o dominirani konvergenci. Da je tudi $\lim_{n\to\infty}\mathcal{U}_{\alpha_n} f_2(w_n) = f_2(w_0) = 0$, pa sledi iz posledice 2.4.10.

(5): Spet naj bosta Z in Z' neodvisna slučajna vektorja. Velja:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_t\mathcal{P}_s f(w) &= \mathbb{E}\,\mathcal{P}_s\Big(e^{-t}\, w + \sqrt{1-e^{-2t}}\, Z\Big) = \\
&= \mathbb{E}\, f\Big(e^{-s}e^{-t}\, w + e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}\, Z + \sqrt{1-e^{-2s}}\, Z'\Big) = \\
&= \mathbb{E}\, f\Big(e^{-t-s}\, w + \sqrt{e^{-2s}(1-e^{-2t}) + 1 - e^{-2s}}\, Z\Big) = \\
&= \mathcal{P}_{t+s} f(w)
\end{aligned} \tag{2.4.67}$$

(6): Naj bo $w \in \mathbb{R}^d$. Obstaja dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $h\colon \mathbb{R}^d \to [0,1]$ s kompaktnim nosilcem, za katero je $h(x) = 1$, brž ko je $|x-w| \le 1$. Definirajmo $g_1 := gh$ in $g_2 := g(1-h)$. Tedaj je g_1 dvakrat zvezno odvedljiva in g_1, g_1' in g_2'' so omejene funkcije. Za funkcijo g_2 velja $g_2(x) = 0$, brž ko je $|x-w| \le 1$, velja pa še $g = g_1 + g_2$. Zaradi linearnosti je dovolj pokazati:

$$\mathcal{A}g_1(w) = \Delta g_1(w) - g_1'(w)w = \Delta g(w) - g'(w)w \tag{2.4.68}$$

$$\mathcal{A}g_2(w) = 0 \tag{2.4.69}$$

Enakost (2.4.69) sledi iz leme 2.4.10. Za izpeljavo enakosti (2.4.68) pa generator (2.4.13) najprej zapišimo z reparametrizirano polgrupo, pri čemer upoštevamo (2.4.61):

$$\mathcal{A}g(w) = 2\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{\mathcal{U}_\alpha g(w) - g(w)}{\sin^2\alpha} \tag{2.4.70}$$

Taylorjeva formula z ostankom v integralski obliki nam da:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_\alpha g_1(w) &= \mathbb{E}\, g_1(\cos\alpha\, w + \sin\alpha\, Z) = \\ &= g_1(\cos\alpha\, w) + \sin\alpha\, \mathbb{E}\, g_1'(\cos\alpha\, w)Z + \sin^2\alpha\, \mathbb{E}(1-\theta)g_1''(\cos\alpha\, w + \theta\sin\alpha\, Z)Z^2\end{aligned} \tag{2.4.71}$$

kjer je θ porazdeljena enakomerno po $[0,1]$ in neodvisna od vsega ostalega. Ker je $\mathbb{E}\, Z = 0$, od tod sledi:

$$\frac{\mathcal{U}_\alpha g_1(w) - g_1(\cos\alpha\, w)}{\sin^2\alpha} = \mathbb{E}(1-\theta)g_1''(\cos\alpha\, w + \theta\sin\alpha\, Z)Z^2 \tag{2.4.72}$$

Za poljubna t in z velja $\lim_{\alpha\downarrow 0}(1-t)g_1''(\cos\alpha\, w + t\sin\alpha\, z) = (1-t)g_1''(w)$. Ker je g_1'' omejena funkcija, po izreku o dominirani konvergenci velja:

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{\mathcal{U}_\alpha g_1(w) - g_1(\cos\alpha\, w)}{\sin^2\alpha} = \mathbb{E}(1-\theta)g_1''(w)Z^2 = \tfrac{1}{2}g_1''(w)\,\mathbb{E}\, Z^2 \tag{2.4.73}$$

Ker lahko po (D.4.6) tenzor Z^2 oz. $Z \otimes Z$ identificiramo z ZZ^T in je $\mathbb{E}\, ZZ^T = \mathbf{I}$, je tudi $\mathbb{E}\, Z^2 = \mathcal{I}$, kjer je $\mathcal{I}$ fundamentalni kovariantni tenzor (ali še drugače, po (D.7.17) in (D.5.19) velja $\mathbb{E}\, Z^2 = \mathbb{E}\, ZZ^T\mathcal{I} = \mathbf{I}\mathcal{I} = \mathcal{I}$). Zato končno velja:

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{\mathcal{U}_\alpha g_1(w) - g_1(\cos\alpha\, w)}{\sin^2\alpha} = \tfrac{1}{2}g_1''(w)\mathcal{I} = \tfrac{1}{2}\Delta g_1''(w) \tag{2.4.74}$$

kjer je Δ Laplaceov operator, definiran tako kot v (E.1.9). Nadalje velja:

$$g_1(\cos\alpha\, w) = g_1(w_0) - (1-\cos\alpha)\,\mathbb{E}\, g_1'\Big((1-\theta(1-\cos\alpha))w\Big) \tag{2.4.75}$$

Ker je g_1' zvezna, za vsak t velja $\lim_{\alpha\downarrow 0} g_1'\Big((1-t(1-\cos\alpha))w\Big) = g_1'(w)$. Ker je g_1' omejena, spet po izreku o dominirani konvergenci velja:

$$\lim_{\alpha\downarrow 0} \frac{g_1(\cos\alpha\, w) - g_1(w)}{\sin^2\alpha} = -\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\lim_{\alpha\downarrow 0}\mathbb{E}\, g_1'\Big((1-\theta(1-\cos\alpha))w\Big) = -\tfrac{1}{2}g_1'(w)w \tag{2.4.76}$$

Če zdaj seštejemo (2.4.74) in (2.4.75) ter vstavimo v (2.4.70), dobimo (2.4.68).

(7): Sledi iz točk (3), (5) in (6). ∎

2.5 Aproksimacija s pomočjo Steinovega operatorja

Spet naj bo $W = X_1 + \cdots + X_n$ vsota neodvisnih slučajnih vektorjev z $\mathbb{E}\, X_i = 0$ in $\mathrm{Var}(W) = \mathbf{I}$. V prejšnjem razdelku smo dognali, da lahko razliko $\mathbb{E}\, f(W) - \mathbb{E}\, f(Z)$, kjer je $Z \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{I})$, ocenimo s pomočjo Steinovega matematičnega upanja:

$$\mathbb{E}\Big[\Delta g(W) - g'(W)W\Big] \tag{2.5.1}$$

Preden gremo ocenit Steinovo matematično upanje, uvedimo še nekaj oznak. Najprej tako kot v (E.5.3)–(E.5.5) z $\flat^{(0)}(\mathbb{R}^d)$ označimo prostor vseh omejenih funkcij, z $\flat^{(r)}(\mathbb{R}^d)$ pa prostor vseh funkcij iz $C^{(r-1)}(\mathbb{R}^d)$, katerih odvod reda $r-1$ je Lipschitzev. Nadalje tako kot v (E.5.7) in (E.5.9) označimo:

$$M_0(f) := \sup_{w \in \mathbb{R}^d} |f(w)| \tag{2.5.2}$$

$$M_r(f) := \sup_{\substack{w,z \in \mathbb{R}^d \\ w \neq z}} \frac{\left|f^{(r-1)}(w) - f^{(r-1)}(z)\right|_\vee}{|w - z|} \tag{2.5.3}$$

kjer je $|\cdot|_\vee$ injektivna tenzorska norma, definirana tako kot v (D.8.4).

Naj bo $g \in \flat^{(3)}(\mathbb{R}^d)$. Podobno kot v razdelku 2.1 tudi tukaj z identifikacijo tenzorjev W^2 in WW^T dobimo, da je:

$$\Delta g(w) = g''(w)\mathcal{I} = g''(w)\, \mathbb{E}\, W^2 \tag{2.5.4}$$

Taylorjev razvoj okoli $W_i := W - X_i$ nam da:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Delta g(W) - g'(W)W\Big] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\Big[g''(W)\, \mathbb{E}\, X_i^2 - g'(W)X_i\Big] = \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\, g''(W_i)\, \mathbb{E}\, X_i^2 + R_1 - \\
&\qquad - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\Big[g'(W_i)X_i + g''(W_i)X_i^2\Big] - R_2
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

kjer sta R_1 in R_2 ostanka. Preden ju ocenimo, opazimo še, da zaradi neodvisnosti velja $\mathbb{E}\, g'(W_i)X_i = 0$ in $\mathbb{E}\, g''(W_i)X_i^2 = \mathbb{E}\, g''(W_i)\, \mathbb{E}\, X_i^2$. Torej velja kar:

$$\mathbb{E}\Big[\Delta g(W) - g'(W)W\Big] = R_1 - R_2 \tag{2.5.6}$$

Ocenimo zdaj zgornji izraz! Iz trditve E.5.11 sledi:

$$|R_1| \leq M_3(g) \sum_{i=1}^n \left|\mathbb{E}\, X_i^2\right|_\wedge \mathbb{E}\, |X_i| \tag{2.5.7}$$

$$|R_2| \leq \frac{1}{2} M_3(g) \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\, |X_i|^3 \tag{2.5.8}$$

in kjer je $|\cdot|_\wedge$ *projektivna norma* (glej razdelek D.8). Ker je projektivna norma križna, velja:

$$\left|\mathbb{E}\, X_i^2\right|_\wedge \le \mathbb{E}\left|X_i^2\right|_\wedge = \mathbb{E}\,|X_i|^2 \tag{2.5.9}$$

Nadalje po Jensenovi neenakosti velja:

$$\mathbb{E}\,|X_i|\,\mathbb{E}\,|X_i|^2 \le \left(\mathbb{E}\,|X_i|^3\right)^{1/3}\left(\mathbb{E}\,|X_i|^3\right)^{2/3} = \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{2.5.10}$$

torej velja:

$$|R_1| \le M_3(g)\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{2.5.11}$$

Tako dobimo:

$$\left|\mathbb{E}\Big[\Delta g(W) - g'(W)W\Big]\right| \le |R_1| + |R_2| \le \frac{3}{2} M_3(g)\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{2.5.12}$$

kar je analogno oceni (1.4.12).

V skladu s Steinovo metodo bi morali zdaj za g vzeti rešitev Steinove enačbe:

$$\Delta g(w) - g'(w)w = f(w) - \mathbb{E}\, f(Z) \tag{2.5.13}$$

Po (2.3.7) je plavzibilno, da se rešitev Steinove enačbe izraža s formulo:

$$g(w) = -\int_0^\infty \Big(\mathcal{P}_t f(w) - \mathbb{E}\, f(Z)\Big)\,\mathrm{d}t \tag{2.5.14}$$

kjer so $\mathcal{P}_t$ kot v (2.4.7). Vendar pa se pri eksaktnem dokazovanju le-tega pojavi kar nekaj tehničnih težav. Zato bomo formulo (2.5.14) zares izpeljali šele v naslednjem razdelku, tu pa bomo ubrali nekoliko drugačno pot, pri kateri se bomo reševanju Steinove enačbe izognili. Namesto tega se bomo oprli kar na posledico 2.4.2. Natančneje, potrebovali bomo naslednji rezultat, ki sledi iz posledice 2.4.2 in Fubinijevega izreka.

Trditev 2.5.1. *Naj bo $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, za katero velja $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$, dan pa naj bo še slučajni vektor W. Privzemimo, da je:*

$$\int_0^{\pi/2} \mathbb{E}\left|\mathcal{A}\mathcal{U}_\alpha f(W)\right| \operatorname{tg}\alpha\,\mathrm{d}\alpha < \infty \tag{2.5.15}$$

kjer je $\mathcal{A}g(w) = \Delta g(w) - g'(w)w$, operatorji $\mathcal{U}_\alpha$ pa so definirani tako kot v (2.4.17). *Tedaj velja:*

$$\mathbb{E}\, f(W) - \mathbb{E}\, f(Z) = -\int_0^{\pi/2} \mathbb{E}\,\mathcal{A}\mathcal{U}_\alpha f(W)\operatorname{tg}\alpha\,\mathrm{d}\alpha \tag{2.5.16}$$

■

Torej bomo v oceno (2.5.12) namesto funkcije g iz (2.5.14) raje vstavljali funkcije $g = \mathcal{U}_\alpha f$. Privzemimo, da je izpolnjen pogoj (2.5.15). Tedaj iz (2.5.12) in trditve 2.5.1 dobimo:

$$\begin{aligned} \Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathbb{E}\, f(Z)\Big| &\le \int_0^{\pi/2} \Big|\mathbb{E}\, \mathcal{A}\mathcal{U}_\alpha f(W)\Big| \operatorname{tg}\alpha \,\mathrm{d}\alpha \le \\ &\le \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \int_0^{\pi/2} M_3\big(\mathcal{U}_\alpha f\big) \operatorname{tg}\alpha\,\mathrm{d}\alpha \end{aligned} \tag{2.5.17}$$

kjer so $\mathcal{U}_\alpha$ kot v (2.4.17). Na tem mestu bomo potrebovali lemo, ki bo prišla prav tudi še kasneje, zato jo bomo zastavili precej splošno. Preden jo formuliramo, označimo še:

$$M_0^*(f) := \frac{1}{2}\left[\sup_{w\in\mathbb{R}^d} f(w) - \inf_{w\in\mathbb{R}^d} f(w)\right] \tag{2.5.18}$$

in opazimo še, da velja $M_0^*(f) \le M_0(f)$. Nadalje označimo še:

$$c_r := \int_{-\infty}^{\infty} \Big|\phi_1^{(r)}(z)\Big|\, dz \tag{2.5.19}$$

kjer je ϕ_d tako kot v (2.4.19) gostota standardizirane normalne porazdelitve; posebej velja:

$$\phi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \tag{2.5.20}$$

Za $r \ge 1$ je c_r totalna variacija funkcije $\phi_1^{(r-1)}$. Tako za prvih nekaj vrednosti dobimo:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}, \quad c_2 = \frac{4}{\sqrt{2\pi e}}, \quad c_3 = \frac{2 + 8\,e^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}} \tag{2.5.21}$$

Lema 2.5.2. *Naj bo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ merljiva funkcija in naj bo $0 < \alpha \le \pi/2$.*

(1) *Če je f omejena, je tudi $\mathcal{U}_\alpha f$ omejena in velja ocena:*

$$M_0\big(\mathcal{U}_\alpha f\big) \le M_0(f) \tag{2.5.22}$$

(2) *Če je f omejena in $r \ge 1$, je $\mathcal{U}_\alpha f \in \flat^{(r)}(\mathbb{R}^d)$ in velja:*

$$M_r\big(\mathcal{U}_\alpha f\big) \le c_r \operatorname{ctg}^r \alpha\, M_0^*(f) \tag{2.5.23}$$

(3) *Naj bo $r \ge 0$, $s \ge 1$ in $f \in \flat^{(s)}(\mathbb{R}^d)$. Tedaj je $\mathcal{U}_\alpha f \in \flat^{(r+s)}(\mathbb{R}^d)$ in velja:*

$$M_{r+s}\big(\mathcal{U}_\alpha f\big) \le c_r \frac{\cos^{r+s}\alpha}{\sin^r \alpha} M_s(f) \tag{2.5.24}$$

Opomba. Za vsako funkcijo f, ki izpolnjuje katerega koli izmed pogojev leme, velja $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$. Po trditvi E.5.11 namreč velja:

$$|f(z)| \le |f(0)| + \frac{|f'(0)|_\vee}{1!}\,|z| + \frac{|f''(0)|_\vee}{2!}\,|z|^2 + \cdots + \frac{|f^{(r-1)}(0)|_\vee}{(s-1)!}\,|z|^{s-1} + \frac{M_s(f)}{s!}\,|z|^s \qquad (2.5.25)$$

Preden dokažemo lemo 2.5.2, si oglejmo še, kako z njeno pomočjo iz (2.5.17) izpeljemo dokončno oceno napake pri normalni aproksimaciji. Po lemi 2.5.2 velja:

$$M_3\big(\mathcal{U}_\alpha f\big) \le c_1\,\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}\,M_2(f) \qquad (2.5.26)$$

$$M_3\big(\mathcal{U}_\alpha f\big) \le c_0\,\cos^3\alpha\,M_3(f) \qquad (2.5.27)$$

Po integraciji dobimo:

$$c_1\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{4}\,c_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \qquad (2.5.28)$$

$$c_0\int_0^{\pi/2}\cos^3\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{3} \qquad (2.5.29)$$

Preveriti pa moramo še pogoj (2.5.15). Spet po trditvi E.5.11 ocenimo:

$$\Big|(\mathcal{U}_\alpha f)''(w)\Big|_\vee \le \Big|(\mathcal{U}_\alpha f)''(0)\Big|_\vee + M_3\big(\mathcal{U}_\alpha f\big)|w| \qquad (2.5.30)$$

$$\Big|(\mathcal{U}_\alpha f)'(w)\Big| \le \Big|(\mathcal{U}_\alpha f)'(0)\Big| + \Big|(\mathcal{U}_\alpha f)''(0)\Big|_\vee\,|w| + M_3\big(\mathcal{U}_\alpha f\big)|w|^2 \qquad (2.5.31)$$

Po nekaj računanja dobimo, da je pogoj (2.5.15) izpolnjen, brž ko velja $M_2(f) < \infty$ ali $M_3(f) < \infty$ in še $\mathbb{E}\,|W|^3 < \infty$ (slednje pa velja, brž ko je $\mathbb{E}\,|X_i|^3 < \infty$ za vse i). Tako smo dokazali:

Izrek 2.5.3. *Naj bo $W = X_1 + \cdots + X_n$ vsota neodvisnih slučajnih vektorjev z vrednostmi v $\mathbb{R}^d$, za katere velja $\mathbb{E}\,X_i = 0$ in $\mathrm{Var}(W) = \mathbf{I}$, ter naj bo $Z \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{I})$. Tedaj za primerno gladko funkcijo $f\colon\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ veljata oceni:*

$$\Big|\mathbb{E}\,f(W) - \mathbb{E}\,f(Z)\Big| \le \frac{3\sqrt{2\pi}}{8}\,M_2(f)\,\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,|X_i|^3 \qquad (2.5.32)$$

$$\Big|\mathbb{E}\,f(W) - \mathbb{E}\,f(Z)\Big| \le \frac{1}{2}\,M_3(f)\,\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\,|X_i|^3 \qquad (2.5.33)$$

■

Opomba. Ocena (2.5.33) je občutna izboljšava ocene (2.1.14), ki je bila dobljena po Lindeberg–Bergströmovi metodi.

Zgornji izrek je analogen izreku 1.4.2, le da se je tam napaka pri normalni aproksimaciji izražala z $M_1(f)$. Z zgornjimi sredstvi take ocene za večrazsežni primer žal ne moremo izpeljati, ker nam lema 2.5.2 da oceno $M_3\big(\mathcal{U}_\alpha f\big) \le c_2\, M_1(f) \cos^3\alpha / \sin^2\alpha$. Po (2.5.17) bi se potem napaka izražala z $\int_0^{\pi/2} \cos^2\alpha / \sin\alpha \, \mathrm{d}\alpha$, ki pa divergira.

V naslednjem razdelku bomo pokazali, da se da zgornji postopek zapisati tudi tako, da se napaka pri normalni aproksimaciji oceni z $M_3(g)$, kjer je g rešitev Steinove enačbe (2.5.13). V enorazsežnem primeru po lemi 1.4.1 velja $M_3(g) \le 2M_1(f)$. V večrazsežnem primeru ne velja nič podobnega: konstruirali bomo primer, ko bo f Lipschitzeva, g'' pa ne bo Lipschitzeva za nobeno rešitev g Steinove enačbe 2.5.13 (glej trditev 2.8.3).

Dokazati je treba še lemo 2.5.2. Potrebovali bomo naslednji pomožni rezultat.

Lema 2.5.4. *Za poljubno merljivo omejeno funkcijo f in vsak $r \in \mathbb{N}$ velja ocena:*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\, \phi_d^{(r)}(z) \, \mathrm{d}z \right|_\vee \le c_r\, M_0^*(f) \tag{2.5.34}$$

Dokaz. Naj bo u poljuben enotski vektor. Obstaja transformacija T, ki $\mathbb{R}^{d-1}$ izometrično preslika na ortogonalni komplement vektorja u. Tedaj velja:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\, \phi_d^{(r)}(z) u^r \, \mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} f(tu + Ty)\, \phi_d^{(r)}(tu + Ty) u^r \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}y \tag{2.5.35}$$

Velja $\phi_d(tu + Ty) = \phi_1(t)\, \phi_{d-1}(y)$. Iz trditve E.2.2 sledi, da potem velja $\phi_d^{(r)}(tu + Ty) = \phi_1^{(r)}(t)\, \phi_{d-1}(y)$. Sledi:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\, \phi_d^{(r)}(z) u^r \, \mathrm{d}z \right| &\le c_r \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \operatorname*{ess\,sup}_t |f(tu + Ty)| \phi_{d-1}(y) \, \mathrm{d}y \le \\ &\le c_r \operatorname*{ess\,sup}_y \operatorname*{ess\,sup}_t |f(tu + Ty)| = \\ &= c_r\, M_0(f) \end{aligned} \tag{2.5.36}$$

Toda ker velja:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi_d^{(r)}(z) u^r \, \mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_d^{(r)}(tu + Ty) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^{(r)}(t) \, \mathrm{d}t \, \phi_{d-1}(y) \, \mathrm{d}y = 0 \tag{2.5.37}$$

lahko za vsak $a \in \mathbb{R}^d$ ocenimo tudi:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\, \phi_d^{(r)}(z) u^r \, \mathrm{d}z \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \big(f(z) - a\big) \phi_d^{(r)}(z) u^r \, \mathrm{d}z \right| \le c_r\, M_0(f - a) \tag{2.5.38}$$

Če zdaj vstavimo $a := \frac{1}{2}(\operatorname{ess\,inf} f + \operatorname{ess\,sup} f)$, dobimo:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\, \phi_d^{(r)}(z) u^r \, \mathrm{d}z \right| \le c_r M_0^*(f) \tag{2.5.39}$$

Naš rezultat zdaj sledi iz posledice D.10.4. ■

Dokaz leme 2.5.2. Rezultat sledi iz trditev 2.4.7 in E.5.4 ter leme 2.5.4. ■

2.6 Rešitev Steinove enačbe

V prejšnjem razdelku smo že ocenili napako pri večrazsežni normalni aproksimaciji vsote neodvisnih slučajnih vektorjev, a smo se pri tem od Steinove metode nekoliko oddaljili, saj nismo zares rešili Steinove enačbe:

$$\Delta g(w) - g'(w)w = f(w) - \mathbb{E}\, f(Z) \tag{2.6.1}$$

Čeprav se torej da shajati tudi brez rešitve Steinove enačbe, pa je dostikrat ugodneje, če jo imamo. Enačba (2.6.1) sodi med eliptične parcialne diferencialne enačbe, natančneje med *Poissonove enačbe*, t. j. enačbe tipa:

$$\mathcal{L}g = f \tag{2.6.2}$$

kjer je $\mathcal{L}$ eliptični diferencialni operator drugega reda. Take enačbe so tesno povezane s posebno vrsto markovskih procesov, ki jim rečemo *difuzije*. Natančneje, $\mathcal{L}$ je generator operatorske polgrupe $\mathcal{P}_t$, ki pripada difuziji $(X_t)_{t\ge 0}$, se pravi $\mathcal{P}_t f(x) = \mathbb{E}^x f(X_t)$, kjer je $\mathbb{E}^x$ matematično upanje glede na verjetnostno mero, glede na katero je X_t ustrezna difuzija z $X_0 = x$ (za podrobnosti glej npr. Rogers in Williams [109]).

Pod določenimi pogoji ima difuzija, ki jo generira $\mathcal{L}$, invariantno porazdelitev, se pravi, da obstaja verjetnostna mera ν, za katero velja $\mathcal{P}f := \lim_{t\to\infty} \mathcal{P}_t f = \int f \, d\nu$. Če privzamemo, da je $\mathcal{P}f = 0$, ima še pod določenimi dodatnimi pogoji enačba (2.6.2) rešitev v obliki (2.3.7). Pardoux in Veretennikov v člankih [88]–[90] razdelata splošno teorijo z najnovejšimi rezultati, ki pove, da je v primeru, ko je f dovolj "lepa", tudi rešitev g iz (2.3.7) dovolj "lepa" in da je to do konstante natančno edina "lepa" rešitev.

Teorija, ki jo razdelata Pardoux in Veretennikov [88]–[90], obravnava funkcije f, ki so polinomske rasti. Mi bomo šli še dlje in dokazali obstoj klasičnih rešitev Steinove enačbe (2.6.1) za praktično vse funkcije $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, za katere je to sploh smiselno, v dokajšnji splošnosti pa bomo dokazali tudi enoličnost. Naj bo $Z \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{I})$.

Izrek 2.6.1. *Naj bo $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ merljiva funkcija, za katero velja $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$.*

(1) *Naj bo $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, kjer je $p \ge 1$ in $d/2 < p \le \infty$. Tedaj za poljubna $w, z \in \mathbb{R}^d$ velja:*

$$\int_0^\infty \left|\mathcal{P}_t f(z) - \mathcal{P}_t f(w)\right| dt < \infty \tag{2.6.3}$$

in funkcija:

$$g_z(w) := \int_0^\infty \left[\mathcal{P}_t f(z) - \mathcal{P}_t f(w)\right] dt \tag{2.6.4}$$

je zvezna za vsak $z \in \mathbb{R}^d$.

(2) *Naj bo f tako kot v prejšnji točki. Tedaj se funkcije g_z med seboj razlikujejo le za konstanto.*

(3) *Naj bo $r \in \mathbb{N}$ in $f \in \mathcal{W}^{r-1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, kjer je $d < p \le \infty$. Tedaj so funkcije g_z, definirane tako kot v* (2.6.4), *r-krat zvezno odvedljive in velja:*

$$g_z^{(r)}(w) = -\int_0^\infty (\mathcal{P}_t f)^{(r)}(w)\, dt \tag{2.6.5}$$

(4) *Če je f zvezna in $f \in \mathcal{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, kjer je spet $d < p \le \infty$, so funkcije g_z klasične rešitve enačbe* (2.6.1).

Opomba. Z $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ smo označili prostor vseh funkcij, ki so lokalno v L^p, z $\mathcal{W}^{r,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ pa smo označili *prostor Soboljeva* vseh funkcij, za katere obstaja šibki odvod reda r in pripada $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ (glej razdelek E.3). Šibki odvod je posplošitev odvoda v klasičnem smislu, tako da rezultat velja tudi, če namesto $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ vzamemo prostor vseh zveznih funkcij, namesto $\mathcal{W}^{r,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ pa kar $C^{(r)}(\mathbb{R}^d)$.

Sedaj lahko izrek 2.5.3 dokažemo v duhu Steinove metode. Sledi namreč iz ocene (2.5.12) in naslednjega rezultata, ki nam da ocene supremum norm odvodov rešitve Steinove enačbe, podobno kot lema 1.4.1. Skupaj s slednjo dobimo posplošitev Steinove leme 3 iz drugega poglavja [125], stran 25.

Lema 2.6.2. *Naj bo $r \in \mathbb{N}_0$, $f \in \mathfrak{b}^{(r)}(\mathbb{R}^d)$ in naj bo g ena izmed funkcij g_z, definiranih v* (2.6.4).

(1) *Če je $r \ge 1$, velja $M_r(g) \le \dfrac{M_r(f)}{r}$.*

(2) *Za $r = 0$ velja $M_1(g) \le \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2} M_0^*(f)$.*

(3) *Velja ocena $M_{r+1}(g) \le \dfrac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}+1\right)} M_r(f)$.*

Opomba. Ocene iz leme 1.4.1 v večrazsežnem primeru vsaj za nekatere r ne veljajo. Več o tem v razdelku 2.8.

Opomba. Če je funkcija f omejena, še ni rečeno, da je tudi funkcija g omejena, kar pokaže naslednji zgled.

ZGLED 2.6.1. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitzeva funkcija, ki je na intervalu $[0,\infty)$ konstantna (recimo $f(x) = a$ za $x \ge 0$) in za katero je $\mathbb{E} f(Z) \ne a$. Naj bo g tako kot v lemi 2.6.2. Po točki (4) izreka 2.6.1 je g klasična rešitev enačbe (2.6.1), torej je $h := g'$ klasična rešitev enačbe (1.4.19). Po točki (1) leme 2.6.2 je funkcija h omejena, torej se mora po točki (1) trditve 1.4.1 ujemati s funkcijo h, definirano v (1.4.18) (več o tem spet v razdelku 2.8). Torej mora za $x \ge 0$ veljati $h(x) = \big(\mathbb{E} f(Z) - a\big)\psi(-x)$, kjer je ψ Millsovo razmerje, definirano v dodatku C. Ker po trditvi C.2.3 velja $\psi(-x) \ge \left(\sqrt{2/\pi} + x\right)^{-1}$, funkcija g ne more biti omejena. □

DOKAZ LEME 2.6.2. Najprej iz točke 2.6.5 izreka 2.6.1 sledi, da za poljuben $k = 1, 2, \dots r + 1$ velja:

$$g_z^{(k)}(w) = -\int_0^{\pi/2} (\mathcal{U}_\alpha f)^{(k)}(w) \operatorname{tg}\alpha \, \mathrm{d}\alpha \tag{2.6.6}$$

kjer tako kot v (2.4.17) definiramo $\mathcal{U}_\alpha := \mathcal{P}_{-\ln\cos\alpha}$. Preostanek zdaj po nekaj računanja sledi iz leme 2.5.2. ■

Lotimo se sedaj dokazovanja izreka 2.6.1. Potrebovali bomo še naslednja dva tehnična rezultata, ki ju bomo dokazali na koncu razdelka.

Lema 2.6.3. *Naj bo $p \geq 1$ in $p > d/2$ ter $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ in $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$. Naj bo še $\rho \geq 0$.*

(1) *Za vsak $s \geq 0$ velja:*

$$\int_0^s \sup_{|w| \leq \rho} \left| \mathcal{P}_t f(w) \right| \mathrm{d}t < \infty \tag{2.6.7}$$

(2) *Velja tudi:*

$$\int_0^\infty \sup_{|w|,|z| \leq \rho} \left| \mathcal{P}_t f(w) - \mathcal{P}_t f(z) \right| \mathrm{d}t < \infty \tag{2.6.8}$$

Lema 2.6.4. *Naj bo $r \in \mathbb{N}$, $\rho \geq 0$ in $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ merljiva funkcija, za katero velja* $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$.

(1) *Za vsak $s > 0$ velja:*

$$\int_s^\infty \sup_{|w| \leq \rho} \left| (\mathcal{P}_t f)^{(r)}(w) \right|_\vee \mathrm{d}t < \infty \tag{2.6.9}$$

(2) *Naj bo še $f \in \mathcal{W}^{r-1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, kjer je $d < p \leq \infty$. Tedaj velja:*

$$\int_0^\infty \sup_{|w| \leq \rho} \left| (\mathcal{P}_t f)^{(r)}(w) \right|_\vee \mathrm{d}t < \infty \tag{2.6.10}$$

Dokaz izreka 2.6.1.

(1): Ocena (2.6.3) sledi iz (2.6.8). Iz slednje ocene in trditve E.6.1 sledi tudi zveznost funkcij g_z.

(2): Očitno.

(3): Sledi iz (2.6.8), (2.6.10) in trditve E.6.3.

(4): Iz točke (3) sledi:

$$\mathcal{A} g_z = -\int_0^\infty \mathcal{A}\mathcal{P}_t f \, \mathrm{d}t \tag{2.6.11}$$

kjer je $\mathcal{A} g(w) = \Delta g(w) - g'(w) w$. Nadalje po točkah (3), (4) in (7) trditve 2.4.1 velja:

$$\mathcal{A} g_z = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{P}_t f \, \mathrm{d}t = \mathcal{P}_t f - \mathbb{E}\, f(Z) \tag{2.6.12}$$

To pa je bilo potrebno dokazati. ∎

Dokazati moramo še lemi 2.6.3 in 2.6.4. Potrebovali bomo še nekaj pomožnih rezultatov. Naslednji rezultat je različica leme 2.5.2, pri čemer supremum normo zamenjamo z normo tipa L^p.

Lema 2.6.5. *Naj bo $r, s \in \mathbb{N}_0$, $1 \le p < \infty$ in $\rho \ge 0$. Tedaj obstaja taka konstanta $C_{r,s,p,\rho}$, da za poljubno funkcijo $f \in \mathcal{W}^{s,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, za katero je $\mathbb{E}\left|f^{(s)}(Z)\right|_\vee^p < \infty$, in poljuben $0 < \alpha < \pi/2$ velja:*

$$\sup_{|w|\le\rho}\left|(\mathcal{U}_\alpha f)^{(r+s)}(w)\right|_\vee \le C_{r,s,p,\rho}\,\frac{\cos^{r(1-1/p)+s}\alpha}{\sin^{r+d/p}\alpha}\left[\mathbb{E}\left|f^{(s)}(Z)\right|_\vee^p\right]^{1/p} \tag{2.6.13}$$

Posledica 2.6.6. *Naj bo $r \in \mathbb{N}$, $d < p < \infty$, $f \in \mathcal{W}^{r-1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $\mathbb{E}\left|f^{(r-1)}(Z)\right|_\vee^p < \infty$ in naj bo še $\rho \ge 0$. Tedaj velja tudi:*

$$\int_0^\infty \sup_{|w|\le\rho}\left|(\mathcal{P}_t f)^{(r)}(w)\right|_\vee \mathrm{d}t < \infty \tag{2.6.14}$$

Dokaz. Iz leme 2.6.5 sledi:

$$\int_0^{\pi/2}\sup_{|w|\le\rho}\left|(\mathcal{U}_\alpha f)^{(r)}(w)\right|_\vee \operatorname{tg}\alpha\,\mathrm{d}\alpha \le C_{1,r-1,p,\rho}\left[\mathbb{E}\left|f^{(r-1)}(Z)\right|_\vee^p\right]^{1/p}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{r-1-1/p}\alpha}{\sin^{d/p}\alpha}\,\mathrm{d}\alpha < \infty \tag{2.6.15}$$

od koder že sledi (2.6.14). ∎

Dokaz leme 2.6.5. Najprej z uporabo leme 2.4.7 ocenimo:

$$\left|(\mathcal{U}_\alpha f)^{(r+s)}(w)\right|_\vee \le \frac{\cos^{r+s}\alpha}{\sin^r\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}\left|f^{(s)}(\cos\alpha\,w + \sin\alpha\,z)\right|_\vee\left|\phi_d^{(r)}(z)\right|_\vee \mathrm{d}z \tag{2.6.16}$$

Iz Jensenove neenakosti in dejstva, da je $\int_{\mathbb{R}^d}\left|\phi_d^{(r)}(z)\right|_\vee \mathrm{d}z < \infty$, sledi, da obstaja taka konstanta $A_{p,r}$, da je:

$$\begin{aligned}\left|(\mathcal{U}_\alpha f)^{(r+s)}(w)\right|_\vee &\le A_{p,r}\,\frac{\cos^{r+s}\alpha}{\sin^r\alpha}\left[\int_{\mathbb{R}^d}\left|f^{(s)}(\cos\alpha\,w + \sin\alpha\,z)\right|_\vee^p\left|\phi_d^{(r)}(z)\right|_\vee \mathrm{d}z\right]^{1/p} = \\ &= A_{p,r}\,\frac{\cos^{r+s}\alpha}{\sin^r\alpha}\left[\frac{1}{\sin^d\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}\left|f^{(s)}(x)\right|_\vee^p\left|\phi_d^{(r)}\left(\frac{x-\cos\alpha\,w}{\sin\alpha}\right)\right|_\vee \mathrm{d}x\right]^{1/p}\end{aligned} \tag{2.6.17}$$

Po lemi 2.4.8 lahko ocenimo:

$$\left|\phi_d^{(r)}\left(\frac{x-\cos\alpha\,w}{\sin\alpha}\right)\right|_\vee \le \frac{B_r}{\cos^r\alpha}\,e^{|w|^2}\,\phi_d(x) \tag{2.6.18}$$

Če to vstavimo v (2.6.17), že dobimo (2.6.13). ∎

Lema 2.6.7. *Za vsak $r \in \mathbb{N}_0$ obstaja tak $C_r \ge 0$, da velja:*

$$\left|\phi_d^{(r)}\left(\frac{x-\cos\alpha\,w}{\sin\alpha}\right)\right|_\vee \le C_r\left(1 + \frac{|x|^r}{\sin^r\alpha}\,e^{-\operatorname{ctg}^2\alpha|x|^2/4}\right)e^{|w|^2/\sin^2\alpha}\phi_d(x) \tag{2.6.19}$$

Dokaz. Po posledici E.8.2 obstaja taka konstanta D_r, da velja:

$$\left|\phi_d^{(r)}\left(\frac{x-\cos\alpha\,w}{\sin\alpha}\right)\right|_\vee \le D_r\left(1 + \left|\frac{x-\cos\alpha\,w}{\sin\alpha}\right|^r\right)\phi_d\left(\frac{x-\cos\alpha\,w}{\sin\alpha}\right) \tag{2.6.20}$$

Z uporabo Jensenove neenakosti dobimo:

$$\left|\phi_d^{(r)}\left(\frac{x-\cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right)\right|_\vee \le D_r\left(1+2^{r-1}\frac{|x|^r}{\sin^r\alpha}+2^{r-1}\operatorname{ctg}^r\alpha|w|^r\right)\phi_d\left(\frac{x-\cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right) \tag{2.6.21}$$

Pišimo:

$$\phi_d\left(\frac{x-\cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right)=\exp\left(-\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha\,|w|^2}{2}+\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\langle x\,,\,w\rangle-\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha\,|x|^2}{2}\right)\phi_d(x) \tag{2.6.22}$$

Ker je funkcija $t\mapsto(1+t^r)\,e^{-t^2/2}$ omejena, lahko ocenimo:

$$\left|\phi_d^{(r)}\left(\frac{x-\cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right)\right|_\vee \le C_r\left(1+\frac{|x|^r}{\sin^r\alpha}\right)\exp\left(\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\langle x\,,\,w\rangle-\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha\,|x|^2}{2}\right)\phi_d(x) \tag{2.6.23}$$

Prvi člen v eksponentni funkciji ocenimo s pomočjo Cauchy–Schwarzeve neenačbe ter neenakosti med aritmetično in geometrično sredino:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\langle x\,,\,w\rangle \le \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg}\alpha\,|x|\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sin\alpha}|w|\right)\le\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha\,|x|^2}{4}+\frac{|w|^2}{\sin^2\alpha} \tag{2.6.24}$$

Torej velja:

$$\left|\phi_d^{(r)}\left(\frac{x-\cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right)\right|_\vee \le C_r\left(1+\frac{|x|^r}{\sin^r\alpha}\right)\exp\left(-\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha\,|x|^2}{4}+\frac{|w|^2}{\sin^2\alpha}\right)\phi_d(x) \tag{2.6.25}$$

Od tod pa že sledi ocena (2.6.19). ∎

Dokaz leme 2.6.4.

(1): Ekvivalentno je dokazati, da za vsak $0<\beta<\pi/2$ velja:

$$\int_\beta^{\pi/2}\sup_{|w|\le\rho}\left|(\mathcal{U}_\alpha f)^{(r)}(w)\right|_\vee \operatorname{tg}\alpha\,\mathrm{d}\alpha<\infty \tag{2.6.26}$$

Najprej z uporabo (2.4.53) ocenimo:

$$\left|(\mathcal{U}_\alpha f)^{(r)}(w)\right|_\vee \le \frac{\cos^r\alpha}{\sin^{r+d}\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\left|\phi_d^{(r)}\left(\frac{x-\cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right)\right|_\vee \mathrm{d}x \tag{2.6.27}$$

Iz leme 2.6.7 zdaj sledi:

$$\sup_{|w|\le\rho}\left|(\mathcal{U}_\alpha f)^{(r)}(w)\right|_\vee \le T_1(\alpha)+T_2(\alpha) \tag{2.6.28}$$

kjer je:

$$T_1(\alpha):=C_r\frac{\cos^r\alpha}{\sin^{r+d}\alpha}e^{\rho^2/\sin^2\alpha}\,\mathbb{E}\,|f(Z)|\le\frac{C_r}{\sin^{r+d-1}\beta}e^{\rho^2/\sin^2\beta}\,\mathbb{E}\,|f(Z)|\operatorname{ctg}\alpha \tag{2.6.29}$$

in:

$$
\begin{aligned}
T_2(\alpha) := \frac{\cos^r \alpha}{\sin^{2r+d} \alpha} C_r \, \mathbb{E} \, |Z|^r \exp\left(-\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha \, |Z|^2}{4} + \frac{\rho^2}{\sin^2 \alpha}\right) |f(Z)| \leq \\
\leq \frac{C_r}{\sin^{r+d-2} \beta} \exp\left(\frac{\rho^2}{\sin^2 \beta}\right) \mathbb{E} \operatorname{ctg}^r \alpha \, |Z|^r e^{-\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \alpha \, |Z|^2} |f(Z)| \, \frac{1}{\sin^2 \alpha}
\end{aligned}
\tag{2.6.30}
$$

Očitno je:

$$
\int_\beta^{\pi/2} T_1(\alpha) \operatorname{tg} \alpha \, d\alpha < \infty \tag{2.6.31}
$$

Nadalje po zamenjavi vrstnega reda integriranja in uvedbi nove spremenljivke $t = |Z| \operatorname{ctg} \alpha$ dobimo:

$$
\begin{aligned}
\int_\beta^{\pi/2} T_2(\alpha) \operatorname{tg} \alpha \, d\alpha &\leq \frac{C_r}{\sin^{r+d-2} \beta} e^{\rho^2 / \sin^2 \beta} \, \mathbb{E} \int_\beta^{\pi/2} \operatorname{ctg}^{r-1} \alpha \, |Z|^r e^{-\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \alpha |Z|^2} |f(Z)| \, \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha} = \\
&= \frac{C_r}{\sin^{r+d-2} \beta} e^{\rho^2 / \sin^2 \beta} \, \mathbb{E} \int_0^{|Z| \operatorname{ctg} \beta} t^{r-1} e^{-\frac{1}{4} t^2} \, dt \, |f(Z)| \leq \\
&\leq \frac{C_r}{\sin^{r+d-2} \beta} e^{\rho^2 / \sin^2 \beta} \int_0^\infty t^{r-1} e^{-\frac{1}{4} t^2} \, dt \; \mathbb{E} \, |f(Z)| < \\
&< \infty
\end{aligned}
\tag{2.6.32}
$$

Ocena (2.6.26) je s tem dokazana.

(2): Iz prejšnje točke sledi, da je ekvivalentno dokazati, da za vsak $s > 0$ velja:

$$
\int_0^s \sup_{|w| \leq \rho} \left| (\mathcal{P}_t f)^{(r)}(w) \right|_\vee dt = \int_0^{\arccos \exp(-s)} \sup_{|w| \leq \rho} \left| (\mathcal{U}_\alpha f)^{(r)}(w) \right|_\vee \operatorname{tg} \alpha \, d\alpha < \infty \tag{2.6.33}
$$

Brez škode za splošnost lahko tudi privzamemo, da je $p < \infty$. Obstaja r-krat zvezno odvedljiva funkcija $h \colon \mathbb{R}^d \to [0, 1]$ s kompaktnim nosilcem, za katero velja, da je $h(w) = 1$, brž ko je $|w| \leq \rho + 1$. Definirajmo $f_1 := fh$ in $f_2 := f(1 - h)$. Iz trditve E.7.2 sledi, da funkcija f_1 pripada $\mathcal{W}^{r-1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ in ker ima kompakten nosilec, je tudi $\mathbb{E} \left| f_1^{(r-1)}(Z) \right|_\vee < \infty$. Tako po posledici 2.6.6 ocena (2.6.33) že velja, če f zamenjamo z f_1.

Za funkcijo f_2 pa velja, da je $f_2(w) = 0$, brž ko je $|w| \leq \rho + 1$, velja pa tudi $\mathbb{E} \, |f_2(Z)| < \infty$. Po lemi 2.4.9 potem velja, da (2.6.33) velja, tudi če f zamenjamo z f_2. Zaradi linearnosti pa potem (2.6.33) velja tudi za našo funkcijo f. ■

Dokaz leme 2.6.3.

(1): Ekvivalentno je pokazati, da za vsak $0 < \beta < \pi/2$ velja:

$$
\int_0^\beta \sup_{|w| \leq \rho} \left| \mathcal{U}_\alpha f(w) \right| \operatorname{tg} \alpha \, d\alpha < \infty \tag{2.6.34}
$$

To pa sledi iz leme 2.6.5.

(2): Iz prejšnje točke sledi, da je dovolj pokazati, da za vsak $s > 0$ velja:

$$\int_s^\infty \sup_{|w|,|z|\le\rho} \Big|\mathcal{P}_t f(w) - \mathcal{P}_t f(z)\Big| \,\mathrm{d}t < \infty \tag{2.6.35}$$

Ocenimo:

$$\sup_{|w|,|z|\le\rho} \Big|\mathcal{P}_t f(w) - \mathcal{P}_t f(z)\Big| \le 2\rho \sup_{|w|\le\rho}\Big|(\mathcal{P}_t f)'(w)\Big| \tag{2.6.36}$$

Ocena 2.6.35 zdaj sledi iz ocene (2.6.9). ■

2.7 Enoličnost rešitve

V izreku 2.6.1 smo rešili Steinovo enačbo (2.6.1): konstruirali smo družino rešitev, ki se med seboj razlikujejo le za konstanto. Nastane seveda vprašanje, ali obstajajo še kakšne druge rešitve. V enorazsežnem primeru je odgovor na to preprost: po (1.4.15) se vse ostale rešitve enačbe (2.6.1) od funkcij g_z razlikujejo za mnogokratnik nedoločenega integrala funkcije $w \mapsto e^{\frac{1}{2}w^2}$. Temu integralu pravimo *Dawsonov integral* in njegova absolutna vrednost zelo hitro narašča, ko gre w proti plus ali minus neskončno. Skratka, funkcije g_z so edine morebitne "krotke" rešitve Steinove enačbe (2.6.1). V večrazsežnem primeru je vprašanje enoličnosti v splošnem mnogo težje, a videli bomo, da so funkcije g_z iz izreka 2.6.1 pod le nekoliko ostrejšimi pogoji, kot so tisti, ki zagotavljajo obstoj rešitev, tudi to pot edine "krotke" rešitve Steinove enačbe.

V razdelku se bomo ukvarjali še z enim bolj obrobnim vprašanjem. Preden smo Steinovo enačbo dejansko rešili, smo v (2.3.7) in (2.5.14) napisali plavzibilno rešitev, ki jo je nakazala teorija operatorskih polgrup. Kot bomo videli, je spet pod le nekoliko ostrejšimi pogoji možno zapisati rešitev Steinove enačbe tudi na slednji način. Preden formuliramo rezultate razdelka, definirajmo še:

$$x_+ := \max\{x, 0\} \tag{2.7.1}$$

Trditev 2.7.1. *Naj bo $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ merljiva funkcija, za katero velja:*

$$\mathbb{E}\,|f(Z)|\Big(1 + (\ln|Z|)_+\Big) < \infty \tag{2.7.2}$$

(1) *Naj bo $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, kjer je $p \ge 1$ in $d/2 < p \le \infty$. Tedaj za vsak $w \in \mathbb{R}^d$ velja:*

$$\int_0^\infty \Big|\mathbb{E}\, f(Z) - \mathcal{P}_t f(w)\Big| \,\mathrm{d}t \le \int_0^\infty \mathbb{E}\Big|\mathcal{P}_t f(Z) - \mathcal{P}_t f(w)\Big| \,\mathrm{d}t < \infty \tag{2.7.3}$$

torej obstaja tudi funkcija:

$$g(w) = \mathbb{E}\, g_Z(w) = \int_0^\infty \Big[\mathbb{E}\, f(Z) - \mathcal{P}_t f(w)\Big] \,\mathrm{d}t \tag{2.7.4}$$

kjer je g_z kot v (2.6.4).

(2) *Če je f tako kot v prejšnji točki, velja:*

$$\mathbb{E}\,|g(Z)| < \infty \tag{2.7.5}$$

(3) *Naj bo f tako kot v prejšnjih dveh točkah. Tedaj se funkcija g od funkcij g_z razlikuje le za konstanto. Za $f \in \mathcal{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, kjer je $d < p \le \infty$, je torej g klasična rešitev Steinove enačbe* (2.6.1).

Opomba. Pogoj $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$ ni zadosten za (2.7.3) in tudi ne za to, da za funkcije g_z velja $\mathbb{E}\,|g_z(Z)| < \infty$. V zgledu 2.7.1 bomo namreč konstruirali funkcijo f z $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$, za katero bo $\mathbb{E}\,|g_z(Z)| = \infty$ za vse z. Za tako funkcijo tudi pogoj (2.7.3) ne bo izpolnjen, saj se iz dokaza trditve 2.7.1 vidi, da (2.7.3) implicira $\mathbb{E}\,|g_z(Z)| < \infty$.

Glavni rezultat razdelka pa je naslednji izrek.

Izrek 2.7.2. *Naj bo $f \in \mathcal{W}^{2,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ funkcija, za katero skoraj povsod velja:*

$$\Delta f(w) - f'(w)w = 0 \tag{2.7.6}$$

in naj bo še $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$. Tedaj je f skoraj povsod konstantna.

Posledica 2.7.3. *Naj bo f zvezna funkcija, ki za neki $d < p \le \infty$ pripada $\mathcal{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, in naj velja še* (2.7.2)*. Nadalje naj bo g kot v trditvi 2.7.1, $\tilde{g} \in \mathcal{W}^{2,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ pa naj bo poljubna šibka rešitev Steinove enačbe* (2.6.1)*, za katero naj velja še $\mathbb{E}\,|\tilde{g}(Z)| < \infty$. (šibko rešitev razumemo tako, da enačba skoraj povsod velja za šibke odvode). Tedaj je $\tilde{g} - g$ skoraj povsod konstantna.* ■

Zgled 2.7.1. Vzemimo $d = 1$ in:

$$f(x) := \frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{1 + |x|(\ln|x|)^2} \tag{2.7.7}$$

Ni težko preveriti, da je $\mathbb{E}\,|f(Z)| = \mathbb{E}\,f(Z) < \infty$.

Naj bo h kot v (1.4.18), t. j.:

$$\begin{aligned} h(w) &= -e^{\frac{1}{2}w^2} \int_w^\infty \Big(f(x) - \mathbb{E}\,f(Z)\Big) e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= -e^{\frac{1}{2}w^2} \int_w^\infty \left(\frac{1}{1 + |x|(\ln|x|)^2} - e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathbb{E}\,f(Z)\right) \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.7.8}$$

Ker po trditvi 2.8.1 velja $g_z' = h$, je dovolj pokazati, da za neki nedoločeni integral g funkcije h velja $\mathbb{E}\,|g(Z)| = \infty$.

Ni težko videti, da za velike w velja $h(w) < 0$ in:

$$|h(w)| \asymp \frac{e^{\frac{1}{2}w^2}}{\ln w} \tag{2.7.9}$$

(oznaka $a(w) \asymp b(w)$ pomeni $0 < \liminf_{w\to\infty} a(w)/b(w) \le \limsup_{w\to\infty} a(w)/b(w) < \infty$). Definirajmo:

$$g(z) = \int_2^z h(w)\,\mathrm{d}w \tag{2.7.10}$$

Da dokažemo, da je $\mathbb{E}\,|g(Z)| = \infty$, bo dovolj pokazati že, da velja $\int_2^\infty |g(z)|\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z = \infty$, zaradi (2.7.9) pa že, da divergira integral:

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \int_2^z \frac{e^{\frac{1}{2}w^2}}{\ln w}\,\mathrm{d}w\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z &= \int_2^\infty \frac{e^{\frac{1}{2}w^2}}{\ln w}\int_w^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w = \\ &= \int_2^\infty \frac{\psi(-w)}{\ln w}\,\mathrm{d}w\end{aligned} \tag{2.7.11}$$

kjer je ψ *Millsovo razmerje*, definirano tako kot v (C.1.3). Iz ocene (C.2.5) sledi, da je konvergenca integrala (2.7.11) ekvivalentna konvergenci integrala:

$$\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}w}{w\ln w} \tag{2.7.12}$$

ki divergira.

Tako pogoj (2.7.2) postane intuitivno jasnejši, saj smo pri prehodu z f na g "pridelali" natančno faktor $\ln w$. □

Lotimo se sedaj dokazovanja trditve 2.7.1. Potrebovali bomo še nekaj tehničnih rezultatov.

Lema 2.7.4. *Naj bosta Z in Z' neodvisna slučajna vektorja z vrednostmi v $\mathbb{R}^d$, porazdeljena standardizirano normalno $\mathrm{N}(0, \mathbf{I})$. Nadalje naj bosta k in l realni števili, ki nista hkrati enaki 0. Tedaj za poljubno merljivo funkcijo $f\colon\ \mathbb{R}^{3d} \to \mathbb{R}$, za katero je $\mathbb{E}\,|f(kZ + lZ', Z, Z')| < \infty$, velja:*

$$\mathbb{E}\, f(kZ + lZ', Z, Z') = \mathbb{E}\, f\left(\sqrt{k^2+l^2}\, Z\,,\ \frac{kZ + lZ'}{\sqrt{k^2+l^2}}\,,\ \frac{lZ - kZ'}{\sqrt{k^2+l^2}}\right) \tag{2.7.13}$$

Dokaz. Definirajmo slučajna vektorja:

$$\tilde{Z} := \frac{kZ + lZ'}{\sqrt{k^2+l^2}}\,, \quad \tilde{Z}' := \frac{lZ - kZ'}{\sqrt{k^2+l^2}} \tag{2.7.14}$$

Tedaj velja:

$$\mathbb{E}\, f(kZ + lZ', Z, Z') = \mathbb{E}\, f\left(\sqrt{k^2+l^2}\, \tilde{Z}\,,\ \frac{k\tilde{Z} + l\tilde{Z}'}{\sqrt{k^2+l^2}}\,,\ \frac{l\tilde{Z} - k\tilde{Z}'}{\sqrt{k^2+l^2}}\right) \tag{2.7.15}$$

Kot pokaže krajši račun, pa sta tudi $\tilde{Z}$ in $\tilde{Z}'$ porazdeljeni standardizirano normalno in nekorelirani, torej neodvisni, zato lahko $\tilde{Z}$ in $\tilde{Z}'$ zamenjamo z Z in Z'. ■

Lema 2.7.5. *Naj bo $Z \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{I})$ slučajni vektor z vrednostmi v $\mathbb{R}^d$, porazdeljen standardizirano normalno, $0 < k < 1$, $0 < \beta \le \pi/2$ in $f\colon\ \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ merljiva funkcija. Označimo:*

$$h_k(\alpha) := \sqrt{k^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} \tag{2.7.16}$$

Tedaj velja:

$$\int_\beta^{\pi/2} \mathbb{E}\, f\big(h_k(\alpha) Z\big)|Z|\,\mathrm{d}\alpha \le \frac{1}{2\sqrt{2\pi(1-k)}\,\sin^{d+2}\beta}\ \mathbb{E}\, f(Z) \tag{2.7.17}$$

$$\int_\beta^{\pi/2} \mathbb{E}\, f\big(h_k(\alpha) Z\big)|Z|^2 \sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha \le \frac{1}{\sin^{d+2}\beta}\ \mathbb{E}\, f(Z)\min\left\{\frac{|Z|^2}{2}, \frac{1}{1-k}\right\} \tag{2.7.18}$$

Dokaz. Najprej za vsak $0 < l < 1$ izračunamo:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\, f(lZ) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(lz)\, \phi_d(z)\, \mathrm{d}z = \\
&= l^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \phi_d\left(\frac{x}{l}\right) \mathrm{d}x = \\
&= l^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \phi_d(x) \exp\left\{-\frac{|x|^2}{2}\left(\frac{1}{l^2} - 1\right)\right\} \mathrm{d}x = \\
&= l^{-d}\, \mathbb{E}\, f(Z) \exp\left\{-\frac{|Z|^2}{2}\left(\frac{1}{l^2} - 1\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{2.7.19}
$$

Ocenimo:

$$
\frac{1}{h_k(\alpha)^2} = \frac{1}{1 - (1 - k^2)\cos^2\alpha} \geq 1 + (1 - k^2)\cos^2\alpha \geq 1 + (1 - k)\cos^2\alpha \tag{2.7.20}
$$

Iz vsega tega zdaj sledi:

$$
\int_\beta^{\pi/2} \mathbb{E}\, f\Big(h_k(\alpha) Z\Big)\, |Z|\, \mathrm{d}\alpha \leq \int_\beta^{\pi/2} \frac{1}{h_k(\alpha)^{d+1}}\, \mathbb{E}\, f(Z)\, |Z|\, e^{-\frac{1}{2}(1-k)\cos^2\alpha |Z|^2}\, \mathrm{d}\alpha \tag{2.7.21}
$$

Ker je $h_k(\alpha) \geq \sin\alpha \geq \sin\beta$, nadalje velja:

$$
\begin{aligned}
\int_\beta^{\pi/2} \mathbb{E}\, f\Big(h_k(\alpha) Z\Big)\, |Z|\, \mathrm{d}\alpha &\leq \frac{1}{\sin^{d+2}\beta} \int_0^{\pi/2} \mathbb{E}\, f(Z)\, |Z|\, e^{-\frac{1}{2}(1-k)\cos^2\alpha |Z|^2} \sin\alpha\, \mathrm{d}\alpha = \\
&= \frac{1}{\sin^{d+2}\beta}\, \mathbb{E}\, f(Z) \int_0^1 |Z| e^{-\frac{1}{2}(1-k)s^2|Z|^2}\, \mathrm{d}s \leq \\
&\leq \frac{1}{\sin^{d+2}\beta}\, \mathbb{E}\, f(Z) \int_0^\infty |Z| e^{-\frac{1}{2}(1-k)s^2|Z|^2}\, \mathrm{d}s = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi(1-k)}\sin^{d+2}\beta}\, \mathbb{E}\, f(Z)
\end{aligned}
\tag{2.7.22}
$$

Ocena (2.7.17) je s tem dokazana. Podobno izpeljemo še:

$$
\begin{aligned}
&\int_\beta^{\pi/2} \mathbb{E}\, f\Big(h_k(\alpha) Z\Big)\, |Z|^2 \sin\alpha\cos\alpha\, \mathrm{d}\alpha \leq \\
&\quad\leq \int_\beta^{\pi/2} \frac{1}{h_k(\alpha)^{d+2}}\, \mathbb{E}\, f(Z)\, |Z|^2\, e^{-\frac{1}{2}(1-k)\cos^2\alpha |Z|^2} \sin\alpha\cos\alpha\, \mathrm{d}\alpha \leq \\
&\quad\leq \frac{1}{\sin^{d+2}\beta} \int_0^{\pi/2} \mathbb{E}\, f(Z)\, |Z|\, e^{-\frac{1}{2}(1-k)\cos^2\alpha |Z|^2} \sin\alpha\cos\alpha\, \mathrm{d}\alpha = \\
&\quad= \frac{1}{\sin^{d+2}\beta}\, \mathbb{E}\, f(Z) \int_0^1 s|Z|^2 e^{-\frac{1}{2}(1-k)s^2|Z|^2}\, \mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{2.7.23}
$$

Po eni strani velja:

$$\int_0^1 s|Z|^2 e^{-\frac{1}{2}(1-k)s^2|Z|^2}\,\mathrm{d}s \le \frac{|Z|^2}{2} \tag{2.7.24}$$

po drugi strani pa velja tudi:

$$\int_0^1 s|Z|^2 e^{-\frac{1}{2}(1-k)s^2|Z|^2}\,\mathrm{d}s \le \int_0^\infty s|Z|^2 e^{-\frac{1}{2}(1-k)s^2|Z|^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{1-k} \tag{2.7.25}$$

od koder sledi tudi ocena (2.7.18). ■

Dokaz trditve 2.7.1.

(1): Iz (2.6.3) sledi, da je (2.7.3) dovolj dokazati za $w = 0$. Nadalje iz ocene (2.6.7) sledi, da je dovolj dokazati, da za vsak $0 < \beta < \pi/2$ velja:

$$J := \int_\beta^{\pi/2} \mathbb{E}\Big|\mathcal{U}_\alpha f(Z) - \mathcal{U}_\alpha f(0)\Big|\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{d}\alpha < \infty \tag{2.7.26}$$

Iz zapisa (2.4.18) dobimo:

$$\begin{aligned}
J &= \int_\beta^{\pi/2} \mathbb{E}\left|\int_{\mathbb{R}^d}\Big(f(\cos\alpha\, Z + \sin\alpha\, z) - f(\sin\alpha\, z)\Big)\phi_d(z)\,\mathrm{d}z\right|\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \\
&= \int_\beta^{\pi/2} \mathbb{E}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(\sin\alpha\, y)\Big(\phi_d(y - \mathrm{ctg}\,\alpha\, Z) - \phi_d(y)\Big)\,\mathrm{d}y\right|\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{d}\alpha \le \\
&\le \int_\beta^{\pi/2} \mathbb{E}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|f(\sin\alpha\, y)\,\phi_d'(y - \theta\,\mathrm{ctg}\,\alpha\, Z)Z\Big|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\alpha = \\
&\le \int_\beta^{\pi/2} \mathbb{E}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|f(\theta\cos\alpha\, Z + \sin\alpha\, z)\,\phi_d'(z)Z\Big|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\alpha = \\
&\le \int_\beta^{\pi/2} \mathbb{E}\Big|f(\theta\cos\alpha\, Z + \sin\alpha\, Z')\langle Z\,,\, Z'\rangle\Big|\,\mathrm{d}\alpha
\end{aligned} \tag{2.7.27}$$

kjer je Z' neodvisna kopija slučajne spremenljivke Z ter θ porazdeljena enakomerno po $[0,1]$ in prav tako neodvisna od vsega ostalega. Iz pogojne različice leme 2.7.4 glede na θ nadalje dobimo:

$$J \le \int_\beta^{\pi/2} \mathbb{E}\left|f\Big(\sqrt{\theta^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}\, Z\Big)\,\frac{\langle \theta\cos\alpha\, Z + \sin\alpha\, Z'\,,\, \sin\alpha\, Z - \theta\cos\alpha\, Z'\rangle}{\theta^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}\right|\mathrm{d}\alpha \tag{2.7.28}$$

Ocenimo:

$$J \le \frac{1}{\sin^2\beta}\,(J_1 + J_2 + J_3) \tag{2.7.29}$$

kjer je:

$$J_1 := \int_\beta^{\pi/2} \mathbb{E}\left|f\Big(\sqrt{\theta^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}\, Z\Big)\right| \sin\alpha\cos\alpha\, |Z|^2 \,\mathrm{d}\alpha \tag{2.7.30}$$

$$J_2 := \int_\beta^{\pi/2} \mathbb{E}\left|f\Big(\sqrt{\theta^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}\, Z\Big)\right| \, |Z| \,\mathrm{d}\alpha \;\mathbb{E}\,|Z'| \tag{2.7.31}$$

$$J_3 := \int_\beta^{\pi/2} \mathbb{E}\left|f\Big(\sqrt{\theta^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}\, Z\Big)\right| \sin\alpha\cos\alpha \,\mathrm{d}\alpha \;\mathbb{E}\,|Z'|^2 \tag{2.7.32}$$

Da je $J_3 < \infty$, je očitno, integrala J_1 in J_2 pa ocenimo po lemi 2.7.5. Za integral J_2 dobimo:

$$J_2 \le \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\,\sin^{d+2}\beta}\,\mathbb{E}\,|f(Z)|\,\mathbb{E}\,\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}\,\mathbb{E}\,|Z'| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sin^{d+2}\beta}\,\mathbb{E}\,|f(Z)|\,\mathbb{E}\,|Z'| \tag{2.7.33}$$

Za integral J_1 pa dobimo:

$$\begin{aligned} J_1 &\le \frac{1}{\sin^{d+2}\beta}\,\mathbb{E}\,|f(Z)|\min\left\{\frac{|Z|^2}{2}, \frac{1}{1-\theta}\right\} = \\ &= \frac{1}{\sin^{d+2}\beta}\,\mathbb{E}\,|f(Z)|\int_0^1 \min\left\{\frac{|Z|^2}{2}, \frac{1}{u}\right\}\mathrm{d}u \le \\ &\le \frac{1}{\sin^{d+2}\beta}\,\mathbb{E}\,|f(Z)|\left[1 + \left(\ln\frac{|Z|^2}{2}\right)_+\right] \end{aligned} \tag{2.7.34}$$

Ocena (2.7.26) je s tem dokazana.

(2) in (3): Da se g razlikuje od g_z le za konstanto, je očitno. Poleg tega po prejšnji točki velja $\mathbb{E}\,|g_0(Z)| = \mathbb{E}\,|g_Z(0)| < \infty$. Ker se g od g_0 razlikuje le za konstanto, od tod sledi (2.7.5). ∎

Lotimo se sedaj dokazovanja izreka 2.7.2. Spet bomo potrebovali nekaj pomožnih rezultatov. Naslednji je modifikacija dejstva, da je Ornstein–Uhlenbeckov proces simetričen v prostoru $L^2(\gamma_d)$, kjer je γ_d standardna Gaussova mera na $\mathbb{R}^d$. Simetrija je mišljena glede na skalarni produkt v $L^2(\gamma_d)$. Natančneje, operatorji $\mathcal{P}_t$ so glede na ta skalarni produkt sebi adjungirani, z njimi pa tudi generator polgrupe.

Trditev 2.7.6. *Naj bosta $1 \le p, q \le \infty$ konjugirana eksponenta (t. j. $1/p + 1/q = 1$) ter $f \in \mathcal{W}^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ in $g \in \mathcal{W}^{2,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Vsaj ena od funkcij naj ima kompakten nosilec. Tedaj velja:*

$$\mathbb{E}\Big[\Delta f(Z) - f'(Z)Z\Big]g(Z) = \mathbb{E}\, f(Z)\Big[\Delta g(Z) - g'(Z)Z\Big] \tag{2.7.35}$$

Dokaz. Iz integracije per partes (trditev E.7.1) sledi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,\Delta f(Z)\, g(Z) &= \int_{\mathbb{R}^d} f''(z)\, g(z)\,\phi_d(z)\,\mathcal{I}\,\mathrm{d}z = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} f'(z)\Big[g'(z)\,\phi_d(z) + g(z)\,\phi_d'(z)\Big]\mathcal{I}\,\mathrm{d}z = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} f'(z)\Big[g'(z)\mathcal{I} - g(z)z\Big]\phi_d(z)\,\mathrm{d}z = \\ &= -\,\mathbb{E}\Big\langle f'(Z)\,,\, g'(Z)\Big\rangle + \mathbb{E}\, f'(Z)\, g(Z)\, Z \end{aligned} \tag{2.7.36}$$

Zgoraj smo s črko $\mathcal{I}$ označili fundamentalni kovariantni tenzor ter uporabili zveze (D.7.13), (D.7.17), (E.1.9) in (E.8.4) (lahko pa preverimo tudi po komponentah). Dobimo:

$$\mathbb{E}\Big[\Delta f(Z) - f'(Z)Z\Big] = -\,\mathbb{E}\left\langle f'(Z)\,,\, g'(Z)\right\rangle \tag{2.7.37}$$

kar je simetrično v f in g. Dokaz je s tem zaključen. ∎

Lema 2.7.7. *Za vsak $x \geq 0$ velja ocena:*

$$-\ln\cos\operatorname{arctg} x \leq \tfrac{1}{2}\ln 2 + (\ln x)_+ \tag{2.7.38}$$

Dokaz. Za $x \leq 1$ preprosto ocenimo:

$$-\ln\cos\operatorname{arctg} x \leq -\ln\cos\operatorname{arctg} 1 = \tfrac{1}{2}\ln 2 \tag{2.7.39}$$

Za $x \geq 1$ pa pišemo:

$$-\ln\cos\operatorname{arctg} x = -\ln\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = -\ln\sin\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \tag{2.7.40}$$

Ker je $t \mapsto \sin\operatorname{arctg} t$ konkavna funkcija, lahko za vsak $0 \leq t \leq 1$ ocenimo:

$$\sin\operatorname{arctg} t \geq t\sin\operatorname{arctg} 1 = \frac{t\sqrt{2}}{2} \tag{2.7.41}$$

Sledi:

$$-\ln\sin\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \leq -\ln\frac{\sqrt{2}}{2x} = \tfrac{1}{2}\ln 2 + \ln x \tag{2.7.42}$$

Ocena (2.7.38) je s tem dokazana. ∎

Lema 2.7.8. *Za vsako funkcijo $h \in C_c^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ obstaja rešitev g Steinove enačbe:*

$$\Delta g(z) - g'(z)z = h(z) - \mathbb{E}\,h(Z) \tag{2.7.43}$$

z naslednjimi lastnostmi:

(1) *Obstaja taka konstanta $C_{h,0}$, da velja:*

$$|g(z)| \leq C_{h,0}\Big(1 + (\ln|z|)_+\Big) \tag{2.7.44}$$

(2) *Za vsak $r \in \mathbb{N}$ obstaja taka konstanta $C_{h,r}$, da velja:*

$$\Big|g^{(r)}(z)\Big|_\vee \leq \frac{C_{h,r}}{1 + |z|^r} \tag{2.7.45}$$

Dokaz. Po izreku 2.6.1 funkcija:

$$g(w) := \int_0^{\pi/2} \Big[\mathcal{U}_\alpha h(0) - \mathcal{U}_\alpha h(w)\Big] \operatorname{tg}\alpha \, d\alpha \tag{2.7.46}$$

reši Steinovo enačbo (2.7.43). Pokazali bomo, da ta rešitev zadošča (2.7.44) in (2.7.45).

(1): Po (2.5.22) in (2.5.23) lahko ocenimo:

$$\Big|\mathcal{U}_\alpha h(0) - \mathcal{U}_\alpha h(w)\Big| \le \min\Big\{2M_0\big(\mathcal{U}_\alpha\big), M_1\big(\mathcal{U}_\alpha\big)|w|\Big\} \le M_0(f)\,\min\Big\{2, c_1|w| \operatorname{ctg}\alpha\Big\} \tag{2.7.47}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} |g(w)| &\le M_0(f) \int_0^{\pi/2} \min\Big\{2\operatorname{tg}\alpha, c_1|w|\Big\}\, d\alpha = \\ &= M_0(f)\left[-2\ln\cos\operatorname{arctg}\frac{c_1|w|}{2} + c_1|w|\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{c_1|w|}{2}\right)\right] = \\ &= M_0(f)\left(-2\ln\cos\operatorname{arctg}\frac{c_1|w|}{2} + c_1|w|\operatorname{arctg}\frac{2}{c_1|w|}\right) \end{aligned} \tag{2.7.48}$$

Prvi člen lahko ocenimo po lemi 2.7.7, za oceno drugega člena pa uporabimo enakost $\operatorname{arctg} x \le x$. Od tod že sledi (2.7.44).

(2): Spomnimo se, da po (2.4.49) velja:

$$(\mathcal{U}_\alpha h)^{(r)}(w) = \cos^r\alpha \int_{\mathbb{R}^d} f^{(r)}(\cos\alpha\, w + \sin\alpha\, z)\phi_d(z)\, dz \tag{2.7.49}$$

Ker ima funkcija h kompakten nosilec, obstaja tak $\rho \ge 0$, da je $h(x) = 0$, brž ko je $|x| \ge \rho$. Sledi:

$$\Big|(\mathcal{U}_\alpha h)^{(r)}(w)\Big|_\vee \le M_r(f)\cos^r\alpha \int_{|\cos\alpha\, w + \sin\alpha\, z| \le \rho} \phi_d(z)\, dz \tag{2.7.50}$$

Na območju, po katerem integriramo, velja:

$$\begin{aligned} \langle z\,,\, w\rangle &\ge \langle \operatorname{ctg}\alpha\, w\,,\, w\rangle - \langle z + \operatorname{ctg}\alpha\, w\,,\, w\rangle \\ &\ge \operatorname{ctg}\alpha\, |w|^2 - |z + \operatorname{ctg}\alpha\, w|\,|w| \\ &\ge \operatorname{ctg}\alpha\, |w|^2 - \frac{\rho|w|}{\sin\alpha} \end{aligned} \tag{2.7.51}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} \Big|(\mathcal{U}_\alpha h)^{(r)}(w)\Big|_\vee &\le M_r(f)\cos^r\alpha \int_{\langle z\,,\, w\rangle \ge \operatorname{ctg}\alpha\,|w|^2 - \rho|w|/\sin\alpha} \phi_d(z)\, dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} M_r(f)\cos^r\alpha \int_{(\cos\alpha\,|w| - \rho)/\sin\alpha}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt \end{aligned} \tag{2.7.52}$$

Ker je $-\frac{1}{2}t^2 \le -t + \frac{1}{2}$, je nadalje:

$$\Big|(\mathcal{U}_\alpha h)^{(r)}(w)\Big|_\vee \le \sqrt{\frac{e}{2\pi}}\, M_r(f)\cos^r\alpha \exp\left(-\frac{\cos\alpha\,|w| - \rho}{\sin\alpha}\right) \tag{2.7.53}$$

Naj bo najprej $\cos\alpha\,|w| > 2\rho$. V tem primeru velja:

$$\left|(\mathcal{U}_\alpha h)^{(r)}(w)\right|_\vee \le \sqrt{\frac{e}{2\pi}}\, M_r(f)\cos^r\alpha\, e^{-\operatorname{ctg}\alpha\,|w|/2} \tag{2.7.54}$$

Sledi:

$$\begin{aligned}\int_{\substack{0<\alpha<\pi/2\\ \cos\alpha\,|w|>2\rho}} \left|(\mathcal{U}_\alpha h)^{(r)}(w)\right|_\vee \operatorname{tg}\alpha\,\mathrm{d}\alpha &\le \sqrt{\frac{e}{2\pi}}\, M_r(f)\int_0^{\pi/2} e^{-\operatorname{ctg}\alpha\,|w|/2}\cos^{r-1}\alpha\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha \le \\ &\le \sqrt{\frac{e}{2\pi}}\, M_r(f)\int_0^{\pi/2} e^{-\operatorname{ctg}\alpha\,|w|/2}\operatorname{ctg}^{r-1}\alpha\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sin^2\alpha} = \\ &= \sqrt{\frac{e}{2\pi}}\,\frac{2^r(r-1)!}{|w|^r}\, M_r(f)\end{aligned} \tag{2.7.55}$$

V primeru, ko je $\cos\alpha\,|w| \le 2\rho$, pa po (2.5.24) preprosto ocenimo:

$$\left|(\mathcal{U}_\alpha h)^{(r)}(w)\right|_\vee \le \cos^r\alpha\, M_r(f) \tag{2.7.56}$$

Sledi:

$$\begin{aligned}\int_{\substack{0<\alpha<\pi/2\\ \cos\alpha\,|w|\le 2\rho}} \left|(\mathcal{U}_\alpha h)^{(r)}(w)\right|_\vee \operatorname{tg}\alpha\,\mathrm{d}\alpha &\le \sqrt{\frac{e}{2\pi}}\, M_r(f)\int_{\substack{0<\alpha<\pi/2\\ \cos\alpha\,|w|\le 2\rho}} \cos^{r-1}\alpha\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \\ &= \sqrt{\frac{e}{2\pi}}\, M_r(f)\,\frac{2\rho}{r\max\{|w|, 2\rho\}^r}\end{aligned} \tag{2.7.57}$$

Iz (2.7.55) in (2.7.55) zdaj dobimo, da za $w \ne 0$ torej velja:

$$\int_0^{\pi/2}\left|(\mathcal{U}_\alpha h)^{(r)}(w)\right|_\vee \operatorname{tg}\alpha\,\mathrm{d}\alpha \le \frac{A}{|w|^r} \tag{2.7.58}$$

kjer je A neka konstanta. Ker iz (2.7.56) sledi tudi:

$$\int_0^{\pi/2}\left|(\mathcal{U}_\alpha h)^{(r)}(w)\right|_\vee \operatorname{tg}\alpha\,\mathrm{d}\alpha \le \int_0^{\pi/2}\cos^{r-1}\alpha\,\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{r} \tag{2.7.59}$$

je tudi ocena (2.7.45) dokazana. ∎

Lema 2.7.9. *Za vsak $R \ge 0$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja funkcija $u_{R,\varepsilon} \in C_c^{(\infty)}(\mathbb{R}^d)$, za katero velja:*

$$0 \le u_{R,\varepsilon} \le 1 \tag{2.7.60}$$

$$u_{R,\varepsilon}(z) = 1, \qquad \text{če je } |z| \le R \tag{2.7.61}$$

$$\left|u'_{R,\varepsilon}(z)\right| \le \frac{\varepsilon}{1+|z|(\ln|z|)_+} \tag{2.7.62}$$

$$\left|u''_{R,\varepsilon}(z)\right| \le \frac{\varepsilon}{1+|z|^2(\ln|z|)_+} \tag{2.7.63}$$

Opomba. Zahteva (2.7.62) je uresničljiva, ker integral $\int_a^\infty 1/(z \ln z)\,dz$ divergira.

Dokaz leme 2.7.9. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $R > r$. Obstaja funkcija $h \in C_c^{(\infty)}(\mathbb{R})$, za katero velja, da je $0 \le h(t) \le 1$ in $h(t) = 1$, brž ko je $|t| \le 1$. Označimo:

$$\eta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{16M_1(h)}, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4\sqrt{M_2(h)}}, \frac{1}{\ln\ln R}\right\} \tag{2.7.64}$$

in definirajmo:

$$u_{R,\varepsilon}(z) := \begin{cases} h\Big(\eta \ln\ln|z|\Big) & ;\ |z| > e \\ \quad 1 & ;\ \text{sicer} \end{cases} \tag{2.7.65}$$

Očitno je $h \in C_c^{(\infty)}(\mathbb{R}^d)$, izpolnjeni pa sta tudi zahtevi (2.7.60) in (2.7.61). Preverimo še preostali dve zahtevi! Brez škode za splošnost smemo privzeti, da je $|z| > e$. Po odvajanju dobimo:

$$u'_{R,\varepsilon}(z) = h'\Big(\eta \ln\ln|z|\Big)\,\frac{\eta}{|z|\ln|z|}\,\frac{z^T}{|z|} \tag{2.7.66}$$

Iz ocene $|z|\ln|z| \ge (1 + |z|\ln|z|)/2$, ki velja, brž ko je $|z| \ge e$, zdaj dobimo (2.7.62). Ko še enkrat odvajamo, dobimo:

$$\begin{aligned} u''_{R,\varepsilon}(z) = {} & h''\Big(\eta \ln\ln|z|\Big)\left(\frac{\eta}{|z|\ln|z|}\,\frac{z^T}{|z|}\right)^2 - h'\Big(\eta \ln\ln|z|\Big)\,\frac{\eta(1 + \ln|z|)}{(|z|\ln|z|)^2}\left(\frac{z^T}{|z|}\right)^2 + \\ & + h'\Big(\eta \ln\ln|z|\Big)\,\frac{\eta}{|z|\ln|z|}\left(\frac{\mathcal{I}^T}{|z|} - \frac{\left(z^T\right)^2}{|z|^3}\right) \end{aligned} \tag{2.7.67}$$

kjer $\left(z^T\right)^2$ pomeni tenzorski (skrčitveni) produkt vektorja z^T samega s seboj, $\mathcal{I}$ pa je fundamentalni kontravariantni tenzor (glej razdelka D.5 in D.7). Podobno kot prej, a z nekaj več računanja, dobimo še (2.7.63). ■

Dokaz izreka 2.7.2. Glavna ideja dokaza je, da izpeljemo, da za vsako funkcijo $h \in C_c^{(\infty)}(\mathbb{R}^d)$ velja:

$$\mathbb{E}\Big(f(Z) - \mathbb{E}\,f(Z)\Big)h(Z) = 0 \tag{2.7.68}$$

Tedaj namreč po trditvi E.3.1 res velja, da je $f = \mathbb{E}\,f(Z)$ skoraj povsod.

Iz trditve 2.7.6 dobimo, da za poljubno funkcijo $g \in \mathcal{W}^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ s kompaktnim nosilcem velja:

$$\mathbb{E}\,f(Z)\Big[\Delta g(Z) - g'(Z)Z\Big] = 0 \tag{2.7.69}$$

Če bi bila g rešitev Steinove enačbe $\Delta g(w) - g'(w)w = h(w) - \mathbb{E}\,h(Z)$, bi od tod že sledilo:

$$\mathbb{E}\,f(Z)\Big(h(Z) - \mathbb{E}\,h(Z)\Big) = \mathbb{E}\Big(f(Z) - \mathbb{E}\,f(Z)\Big)h(Z) = 0 \tag{2.7.70}$$

Težava pa je v tem, da tudi če ima h kompakten nosilec, to še zdaleč ne velja nujno za funkcijo g. Vendar pa se da funkcija $h - \mathbb{E}\,h(Z)$ v primerni šibki topologiji aproksimirati s funkcijami oblike $w \mapsto \Delta g(w) - g'(w)w$, kjer je $g \in \mathcal{W}^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ in ima kompakten nosilec.

Naj bo torej $h \in C_c^{(\infty)}(\mathbb{R}^d)$ in naj bo g kot v lemi 2.7.8. Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Obstaja tak $R \geq 0$, da je $\mathbb{E}\,|f(Z)|\,\mathbf{1}(|Z| \geq R) < \varepsilon$. Naj bo $u := u_{R,\varepsilon}$ tako kot v lemi 2.7.9. Postavimo:

$$g_\varepsilon := h\,u_{R,\varepsilon} \tag{2.7.71}$$

Velja:

$$\begin{aligned}\Delta g_\varepsilon(z) - g'_\varepsilon(z)z &= \Delta g(z)\,u(z) + 2\langle g'(z)\,,\,u'(z)\rangle + g(z)\,\Delta u(z) - \\ &\quad - g'(z)\,z\,u(z) - g(z)\,u'(z)\,z = \\ &= h(z) - \mathbb{E}\,h(z) + \Delta g(z)\big(1 - u(z)\big) + \\ &\quad + 2\langle g'(z)\,,\,u'(z)\rangle + g(z)\,\Delta u(z) - g'(z)\,z\,u(z) - g(z)\,u'(z)\,z\end{aligned} \tag{2.7.72}$$

Iz (2.7.44)–(2.7.63) zdaj po nekaj računanja dobimo:

$$\Big|h(z) - \mathbb{E}\,h(Z) - \big(\Delta g_\varepsilon(z) - g'_\varepsilon(z)z\big)\Big| \leq M_h\big[\varepsilon + \mathbf{1}(|z| \geq R)\big] \tag{2.7.73}$$

kjer je M_h konstanta, odvisna le od funkcije h (izraža se s $C_{h,0}$, $C_{h,1}$ in $C_{h,2}$ iz leme 2.7.8). Ker ima g_ε kompakten nosilec, je $\mathbb{E}\,f(Z)\big[\Delta g_\varepsilon(Z) - g_\varepsilon(Z)Z\big] = 0$, zato velja:

$$\Big|\mathbb{E}\,f(Z)\big[h(Z) - \mathbb{E}\,h(Z)\big]\Big| \leq M_h\big[\varepsilon + \mathbb{E}\,|f(Z)|\,\mathbf{1}(|Z| \geq R)\big] \leq 2M_h\varepsilon \tag{2.7.74}$$

Ker to velja za vsak $\varepsilon > 0$, od tod sledi (2.7.70). S tem je dokaz končan. ∎

2.8 Primerjava z enorazsežnim primerom

V razdelku 1.4 smo konstruirali rešitev Steinove enačbe v enorazsežnem, v razdelku 2.6 pa rešitev v večrazsežnem primeru. Natančneje, za rešitev h Steinove enačbe:

$$h'(w) - h(w)w = f(w) - \mathbb{E}\,f(Z) \tag{2.8.1}$$

smo v formuli (1.4.25) dobili:

$$\begin{aligned}h(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\psi(-w)\int_{-\infty}^{w} f(x)\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\psi(w)\int_{w}^{\infty} f(x)\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,H_1(x,w)\,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{2.8.2}$$

kjer je:

$$H_1(x,w) = \begin{cases}\phi(x)\,\psi(-w) & ;\ x < w \\ \phi(x)\,\psi(w) & ;\ x > w\end{cases} \tag{2.8.3}$$

in:

$$\phi(x) = \phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{2.8.4}$$

Po drugi strani pa iz izreka 2.6.1 in zveze (2.4.53) dobimo naslednjo rešitev enačbe (2.8.1):

$$\begin{aligned} h(w) &= \int_0^{\pi/2} \mathcal{U}_\alpha f(w)\,\mathrm{d}\alpha = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\phi'\left(\frac{x-\cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, H_2(x,w)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.8.5}$$

kjer je:

$$H_2(x,w) = \int_0^{\pi/2} \phi'\left(\frac{x-\cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sin\alpha} \tag{2.8.6}$$

Opomba. Pri zadnjem enačaju v (2.8.5) smo uporabili Fubinijev izrek. Da ga res smemo uporabiti, se vidi iz dokaza točke (2) leme 2.6.4, brž ko je $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ in $\mathbb{E}\,|f(Z)| < \infty$. Za tako funkcijo f se namreč da dokazati, da je $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,|H_2(x,w)|\,\mathrm{d}x < \infty$ za vsak $w \in \mathbb{R}$. Med drugim torej funkcija $x \mapsto H_2(x,w)$ pripada $L^1(\mathbb{R})$ za vsak $w \in \mathbb{R}$.

Konstrukciji (2.8.2) in (2.8.5) sta čisto različni, dasta pa isti rezultat. Glavni argument za to izhaja iz splošne enoličnosti rešitev navadnih diferencialnih enačb. Toda konstrukciji sta ekvivalentni tudi takrat, ko ne dasta klasične in "krotke" rešitve enačbe (2.8.1).

Trditev 2.8.1. *Brž ko je $x \neq w$, je $H_1(x,w) = H_2(x,w)$.*

Preden dokažemo to trditev, dokažimo še naslednjo.

Trditev 2.8.2. *Funkcija $H_2(x,w)$ je definirana in zvezna povsod, kjer je $x \neq w$.*

Dokaz. Razdelimo funkcijo H_2 na dva dela:

$$H_{21}(x,w) = \int_0^{\pi/4} \phi'\left(\frac{x-\cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sin\alpha}, \quad H_{22}(x,w) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \phi'\left(\frac{x-\cos\alpha\, w}{\sin\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sin\alpha} \tag{2.8.7}$$

Obstoj in zveznost funkcije H_{21} sledi iz leme 2.4.8, funkcije H_{22} pa iz leme 2.6.7 (in seveda še izreka o dominirani konvergenci). ∎

Dokaz trditve 2.8.1. Naj bo najprej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna in omejena. V tem primeru sta funkciji $h_1(w) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,H_1(x,w)\,\mathrm{d}x$ in $h_2(w) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,H_2(x,w)\,\mathrm{d}x$ obe klasični rešitvi enačbe (2.8.1). Poleg tega sta obe funkciji omejeni: funkcija h_2 je omejena po točki (2) leme 2.6.2, za funkcijo h_1 pa neposredno iz (1.4.18) dobimo oceno:

$$|h_1(w)| \le 2\min\Big\{\psi(w), \psi(-w)\Big\} M_0^*(f) \tag{2.8.8}$$

kjer je $\psi(w) = e^{\frac{1}{2}w^2}\int_{-\infty}^{w} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z$ Millsovo razmerje (glej tudi (1.4.24)) in $M_0^*(f) = \frac{1}{2}(\sup f - \inf f)$ (glej tudi (2.5.18)). Iz ocene (C.2.5) nadalje sledi:

$$|h_1(w)| \le \sqrt{2\pi}\, M_0^*(f) \tag{2.8.9}$$

Ker pa ima po točki (1) leme 1.4.1 Steinova enačba (2.8.1) največ eno omejeno rešitev, mora biti $h_1 = h_2$.

Naj bo $w \in \mathbb{R}$. Dokazali smo, da za poljubno zvezno in omejeno funkcijo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ velja zveza:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, H_1(x,w)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, H_2(x,w)\, \mathrm{d}x \tag{2.8.10}$$

Ker sta $x \mapsto H_1(x,w)$ in $x \mapsto H_2(x,w)$ lokalno integrabilni funkciji, se morata po trditvi E.3.1 ujemati skoraj povsod. Toda funkciji $H_1(x,w)$ in $H_2(x,w)$ sta povsod, kjer je $x \neq w$, zvezni (za H_1 je to očitno, za H_2 pa to velja po trditvi 2.8.2). To pa pomeni, da se $H_1(x,w)$ in $H_2(x,w)$ res ujemata za vse $x \neq w$. ∎

Različnost konstrukcij je botrovala tudi različnemu ocenjevanju rešitev Steinove enačbe. Naj bo g rešitev enorazsežne:

$$g''(w) - g'(w)w = f(w) - \mathbb{E}\, f(Z) \tag{2.8.11}$$

oziroma večrazsežne Steinove enačbe:

$$\Delta g(w) - g'(w)w = f(w) - \mathbb{E}\, f(Z) \tag{2.8.12}$$

Denimo, da je $f \in \flat^{(r)}(\mathbb{R}^d)$, t. j. $M_r(f) < \infty$. S pomočjo $M_r(f)$ lahko po lemi 2.6.2 ocenimo $M_r(g)$ in $M_{r+1}(g)$, po lemi 1.4.1 pa tudi $M_{r+2}(g)$, a le za $d = 1$. Nastane vprašanje, ali se da $M_{r+2}(g)$ oceniti s pomočjo $M_r(f)$ tudi v večrazsežnem primeru. Kot bomo videli, je odgovor na to v splošnem žal negativen. Protiprimer bomo konstruirali za $r = 1$, kar je aktualno pri primeru, ki nas zanima, t. j. ocenjevanju napake pri normalni aproksimaciji vsot neodvisnih slučajnih spremenljivk.

Trditev 2.8.3. *Za vsak $d > 1$ obstaja Lipschitzeva funkcija $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, za katero velja, da za nobeno rešitev g Steinove enačbe* (2.8.12) *funkcija g'' ni Lipschitzeva.*

Obstaja pa še ena možnost, da bi napako za Lipschitzeve testne funkcije morda vendarle ocenili na podoben način kot v eni dimenziji. Tam smo s substitucijo $h = g'$ reševanje izvirne Steinove enačbe prevedli na reševanje enačbe:

$$h'(w) - h(w)w = f(w) - \mathbb{E}\, f(Z) \tag{2.8.13}$$

in v resnici pri vsem postopku nismo prav nič potrebovali funkcije g, temveč le h.

V večrazsežnem primeru odvod ni več funkcija, temveč vektorsko polje. Če v Steinovo enačbo (2.8.12) uvedemo $h = \operatorname{grad} g$ (glej razdelek E.1), dobimo:

$$\operatorname{div} h(w) - h^T(w)w = f(w) - \mathbb{E}\, f(Z) \tag{2.8.14}$$

Matematično upanje $\mathbb{E}\Big[\operatorname{div} h(W) - h^T(W)W\Big]$ lahko ocenimo na enak način kot upanje $\mathbb{E}\Big[\Delta g(W) - g'(W)W\Big]$, enačba (2.8.14) pa nam vendarle dopušča več svobode kot enačba (2.8.12).

Odprt problem. *Ali obstaja taka konstanta C, da za poljubno Lipschitzevo funkcijo $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ obstaja rešitev h enačbe* (2.8.14)*, za katero velja:*

$$\Big|\big(h'(x) - h'(y)\big)u\Big| \le C\,M_1(f)\,|u|\,|x-y| \tag{2.8.15}$$

za poljubne $u, x, y \in \mathbb{R}^d$? Če je odgovor pritrdilen, kakšna je odvisnost konstante od dimenzije prostora?

Svoboda, ki jo daje enačba (2.8.14), se res zdi precejšnja, a včasih tudi to ni dovolj. Predstavili bomo namreč soroden problem, ki ima negativen rezultat. Denimo, da rešujemo enačbo:

$$\operatorname{div} u = f \tag{2.8.16}$$

V enorazsežnem primeru je odgovor nedvoumen: odvodi reda r funkcije u ustrezajo odvodom reda $r-1$ funkcije f. V večrazsežnem primeru to ne velja: McMullen [79] dokaže naslednji rezultat.

Izrek 2.8.4 (McMullen). *Za vsak $d > 1$ obstaja omejena funkcija $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, za katero velja, da nobena rešitev enačbe* (2.8.16) *ni Lipschitzeva.*

Iskanje dovolj gladkih rešitev Steinove enačbe za Lipschitzeve testne funkcije je tako precej negotovo. Vendar pa bomo v razdelku 3.11 pokazali, da se da težava obiti na malo drugačen način – tako, da drugače ocenimo Steinovo matematično upanje. Videli bomo, da je dobljena ocena napake v tipičnem primeru še vedno primerljiva s tisto, ki smo jo dobili za enorazsežni primer.

Dokazati moramo še trditev 2.8.3.

Dokaz trditve 2.8.3. Po izreku 2.7.2, ki nam zagotavlja enoličnost "krotkih" rešitev Steinove enačbe, je dovolj konstruirati Lipschitzevo funkcijo f in rešitev g enačbe (2.8.12), ki ni Lipschitzeva in za katero velja $\mathbb{E}\,|g(Z)| < \infty$. To je dovolj storiti za $d = 2$: brž ko enkrat konstruiramo funkciji f_2 in g_2 za ta primer, namreč lahko definiramo kar:

$$f_d(x_1, \ldots x_n) := f_2(x_1, x_2)\,, \qquad g_d(x_1, \ldots x_n) := g_2(x_1, x_2) \tag{2.8.17}$$

V dvorazsežnem primeru pa postavimo:

$$f(x) := f_2(x) = f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & ; -x_2 \le x_1 \le x_2 \\ x_2 & ; 0 \le x_2 \le x_1 \\ -x_2 & ; 0 \le x_2 \le -x_1 \\ 0 & ; x_2 \le 0 \end{cases} \tag{2.8.18}$$

Očitno je f Lipschitzeva in skoraj povsod velja:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \begin{cases} 1 & ; -x_2 < x_1 < x_2 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} \tag{2.8.19}$$

Naj bo g katera od rešitev Steinove enačbe, kot jo narekuje izrek 2.6.1. Najprej po trditvi 2.4.7 velja:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}_\alpha f}{\partial w_1^2}(w) = -\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\cos\alpha\, w + \sin\alpha\, z)\,\frac{\partial \phi_2}{\partial z_1}(z)\,\mathrm{d}z \tag{2.8.20}$$

kjer je $\phi_2(x_1, x_2) = \phi(x_1)\,\phi(x_2)$ standardna dvorazsežna normalna gostota. Iz (2.8.19) dobimo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathcal{U}_\alpha f}{\partial w_1^2}(w_1, 0) &= -\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\iint_{-\sin\alpha\, z_2 \le -\cos\alpha\, w_1 + \sin\alpha\, z_1 \le \sin\alpha\, z_2}\phi'(z_1)\,\phi(z_2)\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2 = \\
&= -\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\int_0^\infty\int_{\operatorname{ctg}\alpha\, w_1 - z_2}^{\operatorname{ctg}\alpha\, w_1 + z_2}\phi'(z_1)\,\mathrm{d}z_1\,\phi(z_2)\,\mathrm{d}z_2 = \\
&= -\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\int_0^\infty\Big[\phi(\operatorname{ctg}\alpha\, w_1 + z_2) - \phi(\operatorname{ctg}\alpha\, w_1 - z_2)\Big]\phi(z_2)\,\mathrm{d}z_2 = \\
&= -\frac{\cos^2\alpha}{2\pi\sin\alpha}\int_0^\infty\Big[\exp\Big(-z_2^2 - \operatorname{ctg}\alpha\, z_2\, w_1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha\, w_1^2\Big) - \\
&\qquad - \exp\Big(-z_2^2 + \operatorname{ctg}\alpha\, z_2\, w_1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha\, w_1^2\Big)\Big]\mathrm{d}z_2
\end{aligned} \tag{2.8.21}$$

S substitucijama $t = z_2 \pm \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha\, w_1$ dobimo:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}_\alpha f}{\partial w_1^2}(w_1, 0) = \frac{\cos^2\alpha}{2\pi\sin\alpha}\,e^{-\operatorname{ctg}^2\alpha\, w_1^2/4}\int_{-\operatorname{ctg}\alpha\, w_1/2}^{\operatorname{ctg}\alpha\, w_1/2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{2.8.22}$$

Za $w \ge 0$ lahko ocenimo:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}_\alpha f}{\partial w_1^2}(w_1, 0) \ge \frac{\cos^2\alpha}{2\pi\sin\alpha}\,e^{-\operatorname{ctg}^2\alpha\, w_1^2/2}\int_{-\operatorname{ctg}\alpha\, w_1/2}^{\operatorname{ctg}\alpha\, w_1/2}\mathrm{d}t = \frac{w_1\cos^3\alpha}{2\pi\sin^2\alpha}\,e^{-\operatorname{ctg}^2\alpha\, w_1^2/2} \tag{2.8.23}$$

Naj bo zdaj $0 \le w_1 \le 1$. Ker je $(\partial^2 \mathcal{U}_\alpha f)/(\partial w_1^2)(0,0) = 0$ in $(\partial^2 \mathcal{U}_\alpha f)/(\partial w_1^2)(w_1, 0) \ge 0$, velja:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial w_1^2}(w_1, 0) - \frac{\partial^2 g}{\partial w_1^2}(0, 0) &= \int_0^{\pi/2}\frac{\partial^2 \mathcal{U}_\alpha f}{\partial w_1^2}(w_1, 0)\operatorname{tg}\alpha\,\mathrm{d}\alpha \ge \\
&\ge \frac{w_1}{2\pi}\int_{\operatorname{arctg} w_1}^{\pi/4}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,e^{-\operatorname{ctg}^2\alpha\, w_1^2/2}\,\mathrm{d}\alpha \ge \\
&\ge \frac{w_1}{4\pi\sqrt{2e}}\int_{\operatorname{arctg} w_1}^{\pi/4}\operatorname{ctg}\alpha\,\frac{\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha} = \\
&= \frac{w_1\ln w_1}{4\pi\sqrt{2e}}
\end{aligned} \tag{2.8.24}$$

To pa pomeni, da g'' ni Lipschitzeva, se pravi, da je par (f, g) res ustrezen protiprimer. ■

3.

Steinova metoda in odvisnost

V prejšnjih dveh poglavjih smo že ocenili napako pri normalni aproksimaciji vsot neodvisnih slučajnih spremenljivk. Pri tem smo imeli morda nekoliko več dela kot pri drugih, bolj klasičnih metodah (npr. Lindeberg–Bergströmova metoda, glej razdelek 2.1, ali pa metoda karakterističnih funkcij). Vendar pa se Steinova metoda odlikuje po tem, da so v nasprotju z večino drugih metod posplošitve na določene vsote *odvisnih* slučajnih spremenljivk razmeroma preproste in nimamo prav dosti več dela kot pri neodvisnih slučajnih spremenljivkah. Eden izmed razlogov je tudi to, da lahko v nespremenjeni obliki uporabimo dobršen del izpeljav za neodvisne slučajne spremenljivke. To je namreč tisti del, ki zadeva obnašanje rešitev Steinove enačbe.

Vse, kar moramo narediti, je oceniti Steinovo matematično upanje. Kot smo izpeljali v razdelku 1.4, je pri enorazsežni normalni aproksimaciji to izraz:

$$\mathbb{E}\Big[h'(W) - h(W)W\Big] \tag{3.0.1}$$

V prvih dveh poglavjih smo ta izraz ocenili s pomočjo konstrukcije, prek katere smo prišli do njega (t. j. slučajnih spremenljivk W', ki so bile izmenljive z W in blizu W). V nadaljevanju bomo Steinovo matematično upanje (3.0.1) ocenjevali bolj neposredno, saj je zdaj Steinov operator že znan. Še vedno pa si bomo pomagali s konstrukcijami pomožnih slučajnih spremenljivk W', ki bodo definirane na istem verjetnostnem prostoru kot W (z drugimi besedami, konstruirali bomo *sklapljanja*), bodo blizu W in bodo izpolnjevale še dodatne zahteve, ki jih bomo precizirali v posameznih razdelkih.

Pri večini konstrukcij bomo navedli ista dva zgleda: neodvisne slučajne spremenljivke in slučajne permutacije kot zgled vsot odvisnih slučajnih spremenljivk. Tako bo primerjava med posameznimi konstrukcijami lažja, več zgledov pa bomo navedli v kasnejših poglavjih.

3.1 Sklapljanje z izmenljivim parom

Najprej bomo obravnavali konstrukcijo, ki je zelo tesno povezana s tisto, s pomočjo katere smo v razdelku 1.2 prišli do Steinovega operatorja. To je tudi ena prvih konstrukcij, za katere je bila Steinova metoda tudi uporabljena. Prav tako kot pri izpeljavi Steinove metode gre tudi tu za sklapljanja z izmenljivim parom. Denimo, da želimo oceniti napako pri normalni aproksimaciji realne slučajne spremenljivke W z $\mathbb{E}\, W = 0$ in $\mathrm{var}(W) = 1$. Ideja je, da podobno kot v razdelku 1.2 konstruiramo slučajno spremenljivko W', izmenljivo z W, ki pa zadošča zvezi:

$$\mathbb{E}(W' \mid W) = (1 - \lambda)W + R \tag{3.1.1}$$

kjer je $\lambda > 0$ konstanta, slučajna spremenljivka R pa je zelo majhna. Zahteva (3.1.1) je smiselna, ker je v primeru, ko je slučajni vektor (W, W') porazdeljen dvorazsežno normalno, pogojno matematično upanje $\mathbb{E}(W' \mid W)$ linearna funkcija slučajne spremenljivke W. V veliko primerih obstaja naravna konstrukcija, pri kateri velja $R = 0$.

Konstrukcija (3.1.1) je prvič omenjena v Steinovi monografiji [125], kjer je prikazana uporaba pri slučajnih permutacijah (na katere naletimo npr. pri enostavnem slučajnem vzorčenju). Ta zgled bomo predstavili tudi v tem razdelku. Rinott in Rotar [105] uporabita omenjeno konstrukcijo pri t. i. *antivoter* modelu in uteženih (predvsem izrojenih) U-statistikah. Za zelo zanimiv primer uporabe pri analizi simulacij pa glej Stein, Diaconis, Holmes in Reinert [126].

Naj bo torej W slučajna spremenljivka, za katero želimo oceniti $\big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\big|$. Tedaj moramo oceniti Steinovo matematično upanje (3.0.1), kjer je h rešitev Steinove enačbe:

$$h'(w) - h(w)w = f(w) - \mathrm{N}(0,1)\{f\} \tag{3.1.2}$$

Naj bosta torej W' in R tako kot v (3.1.1). Slednjo zvezo lahko zapišemo tudi v obliki:

$$W = \frac{1}{\lambda}\Big[\mathbb{E}(W - W' \mid W) + R\Big] \tag{3.1.3}$$

torej velja:

$$\mathbb{E}\, h(W)W = \frac{1}{\lambda}\, \mathbb{E}\, h(W)(W - W' + R) \tag{3.1.4}$$

Ker sta W in W' izmenljivi, velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, h(W)(W - W') &= \frac{1}{2}\Big[\mathbb{E}\, h(W)(W - W') + \mathbb{E}\, h(W')(W' - W)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\, \mathbb{E}\Big[\big(h(W') - h(W)\big)(W' - W)\Big] \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Sledi:

$$\mathbb{E}\, h(W)W = \frac{1}{2\lambda}\, \mathbb{E}\big(h(W') - h(W)\big)(W' - W) + \frac{1}{\lambda}\, \mathbb{E}\, h(W)R \tag{3.1.6}$$

Označimo $V := W' - W$. Tedaj iz Taylorjevega razvoja dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\big(h(W') - h(W)\big)(W' - W)\Big] &= \mathbb{E}\Big[\big(h(W + V) - h(W)\big)V\Big] = \\ &= \mathbb{E}\, h'(W)V^2 + \mathbb{E}(1 - \theta)h''(W + \theta V)V^3 \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

kjer je θ porazdeljena enakomerno po $[0, 1]$ in neodvisna od vsega ostalega. Izračunajmo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, V^2 &= \mathbb{E}\Big[W'^2 - 2W\, \mathbb{E}(W' \mid W) + W^2\Big] = \\ &= \mathbb{E}\Big[W^2 - 2(1 - \lambda)W^2 + WR + W^2\Big] = \\ &= 2\lambda + \mathbb{E}\, WR \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Torej velja:

$$\mathbb{E}\Big[\big(h(W') - h(W)\big)(W' - W)\Big] = \mathbb{E}\Big[h'(W)\big(V^2 - \mathbb{E}\,V^2 + 2\lambda + \mathbb{E}\,WR\big) + (1-\theta)h''(W + \theta V)V^3\Big] \tag{3.1.9}$$

Skupaj z zvezo (3.1.6) zdaj dobimo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[h'(W) - h(W)W\Big] = -\frac{1}{2\lambda}\,\mathbb{E}\Big[h'(W)\big(V^2 - \mathbb{E}\,V^2 + \mathbb{E}\,WR\big) - \frac{1}{2\lambda}\,(1-\theta)h''(W + \theta V)V^3 - \\ -\frac{1}{\lambda}\,h(W)R\Big]\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Naj bo $\mathcal{H}$ poljubna σ-algebra, glede na katero je slučajna spremenljivka W merljiva. Po Jensenovi neenakosti ocenimo:

$$\begin{aligned}\Big|\mathbb{E}\,h'(W)(V^2 - \mathbb{E}\,V^2)\Big| &= \Big|\mathbb{E}\,h'(W)\big(\mathbb{E}(V^2 \mid \mathcal{H}) - \mathbb{E}\,V^2\big)\Big| \le \\ &\le M_1(h)\,\mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(V^2 \mid \mathcal{H}) - \mathbb{E}\,V^2\Big| \le \\ &\le M_1(h)\Big[\operatorname{var}\big(\mathbb{E}(V^2 \mid \mathcal{H})\big)\Big]^{1/2}\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Nadalje po Cauchy–Schwarzevi neenakosti ocenimo:

$$|\,\mathbb{E}\,WR| \le \big(\mathbb{E}\,W^2\,\mathbb{E}\,R^2\big)^{1/2} = (\mathbb{E}\,R^2)^{1/2} \tag{3.1.12}$$

Torej velja:

$$\begin{aligned}\Big|\mathbb{E}\Big[h'(W) - h(W)W\Big]\Big| \le \frac{M_0(h)}{\lambda}\,\mathbb{E}\,|R| + \frac{M_1(h)}{2\lambda}\Big\{\Big[\operatorname{var}\big(\mathbb{E}(V^2 \mid \mathcal{H})\big)\Big]^{1/2} + (\mathbb{E}\,R^2)^{1/2}\Big\} + \\ + \frac{M_2(h)}{4\lambda}\,\mathbb{E}\,|V|^3\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Iz lem 1.4.1 in 2.6.2 sledi, da obstaja rešitev Steinove enačbe (3.1.2), za katero velja:

$$M_0(h) \le M_1(f)\,, \quad M_1(h) \le \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\,M_1(f)\,, \quad M_2(h) \le 2\,M_1(f) \tag{3.1.14}$$

Napako pri normalni aproksimaciji bomo lahko torej spet ocenili v Wassersteinovi metriki. Ko ocenimo še $\mathbb{E}\,|R| \le (\mathbb{E}\,R^2)^{1/2}$, dobimo naslednji rezultat, ki je različica izreka 1 na strani 34 v tretjem pogavju Steinove monografije [125].

Izrek 3.1.1 (Stein). *Naj bodo W slučajna spremenljivka z $\mathbb{E}\,W = 0$ in* $\operatorname{var}(W) = 1$, *$W'$ slučajna spremenljivka, izmenljiva z W, velja pa naj še zveza* (3.1.1). *Tedaj za vsako Lipschitzevo funkcijo f in vsako σ-algebro $\mathcal{H}$, glede na katero je W merljiva, velja ocena:*

$$\Big|\mathbb{E}\,f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| \le \frac{M_1(f)}{\lambda}\Big\{\frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,|V|^3 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big[\operatorname{var}\big(\mathbb{E}(V^2 \mid \mathcal{H})\big)\Big]^{1/2} + \Big(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big)(\mathbb{E}\,R^2)^{1/2}\Big\} \tag{3.1.15}$$

kjer je $V := W' - W$. ∎

V nadaljevanju bomo navedli dva zgleda. Prvi zgled bodo kar neodvisne slučajne spremenljivke. Ta zgled bo namenjen predvsem temu, da dobimo občutek, kaj posamezne količine pomenijo in kolikšen je njihov tipičen red velikosti. Drugi zgled, slučajne permutacije, pa bo naš prvi primer vsot odvisnih slučajnih spremenljivk.

Zgled 3.1.1. *Neodvisne slučajne spremenljivke.* Naj bodo $X_1, \dots X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke z vsoto W. Kot ponavadi naj bo še $\mathbb{E}\, X_i = 0$ za vsak i in še $\operatorname{var}(W) = 1$. Naj bodo še X_i' njihove neodvisne kopije in naj bo I slučajna spremenljivka, porazdeljena enakomerno po $\{1, \dots n\}$ in neodvisna od vsega ostalega. Postavimo:

$$W' := W - X_I + X_I' \tag{3.1.16}$$

Tedaj velja:

$$\mathbb{E}(W' \mid W) = W - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i' - X_i \mid W) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) W \tag{3.1.17}$$

Zveza (3.1.1) je torej izpolnjena za $\lambda = 1/n$ in $R = 0$. Po izreku 3.1.1 velja ocena:

$$\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| \le n\, M_1(f) \left\{ \frac{1}{2}\, \mathbb{E}\, |V|^3 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[\operatorname{var}\Big(\mathbb{E}(V^2 \mid \mathcal{H})\Big)\Big]^{1/2} \right\} \tag{3.1.18}$$

kjer je $V := X_I' - X_I$. Ocenimo:

$$\mathbb{E}\, |V|^3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\, |X_i' - X_i|^3 \le \frac{8}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\, |X_i|^3 \tag{3.1.19}$$

(upoštevali smo, da po Jensenovi neenakosti velja $|x-y|^3 \le (|x|+|y|)^3 \le 4(|x|^3+|y|^3)$). Za oceno drugega člena v (3.1.18) pa za $\mathcal{H}$ postavimo σ-algebro, ki jo generirajo slučajne spremenljivke $X_1, \dots X_n$. Dobimo:

$$\mathbb{E}(V^2 \mid \mathcal{H}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\Big((X_i' - X_i)^2 \mid \mathcal{H}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i^2 + \mathbb{E}\, X_i^2) \tag{3.1.20}$$

Zaradi neodvisnosti potem velja:

$$\operatorname{var}\Big(\mathbb{E}(V^2 \mid \mathcal{H})\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{var}(X_i^2) \tag{3.1.21}$$

Iz (3.1.18), (3.1.19) in (3.1.21) končno dobimo:

$$\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| \le M_1(f) \left\{ 4\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\, |X_i|^3 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{var}(X_i^2)\right)^{1/2} \right\} \tag{3.1.22}$$

Če to primerjamo z oceno (1.4.20), vidimo, da je zgornja ocena slabša, saj je že prvi člen v (3.1.22) večji od celotne ocene (1.4.20). Poleg tega pa dobimo še člene, ki vključujejo četrte momente slučajnih spremenljivk X_i. Njihovi četrti koreni so lahko poljubnokrat večji od tretjih korenov tretjih absolutnih momentov. Je pa res, da v tipičnem primeru velja $\operatorname{var}(X_i^2) = O(n^{-2})$, torej je drugi člen reda velikosti $n^{-1/2}$, to pa je tudi tipični velikostni red prvega člena. Skratka, v tipičnem primeru je ocena (3.1.22) še vedno istega velikostnega reda kot ocena (1.4.20). □

Zgled 3.1.2. *Slučajne permutacije*. Dana naj bo matrika realnih števil $a(i, j)$, $1 \le i, j \le N$. Oglejmo si slučajno spremenljivko:

$$W := \sum_{i=1}^{N} a(i, \pi(i)) \tag{3.1.23}$$

kjer je π enakomerno porazdeljena slučajna permutacija števil $1, 2, \ldots N$. Pokazali bomo, da je slučajna spremenljivka W pod primernimi pogoji porazdeljena približno normalno.

Slučajna spremenljivka W je prav tako kot prej vsota slučajnih spremenljivk $X_i := a(i, \pi(i))$, le da so tokrat slučajne spremenljivke X_i odvisne (je pa res, da večji kot je N, manj sta posamezni dve slučajni spremenljivki odvisni; po drugi strani pa se za vsak N za tabelo, ki je "v splošni legi", posamezna slučajna spremenljivka X_i deterministično izraža z ostalimi).

Tovrstne slučajne spremenljivke nastopajo pri statistikah končnih populacij in jih bomo preučevali tudi v naslednjih razdelkih, še podrobneje pa si jih bomo ogledali v razdelku 5.2. Omenimo še, da v limitnem primeru, ko za neki fiksen n velja $a(i, j) = 0$ za vsak $i > n$ in vsak j, N pa gre proti neskončno, dobimo vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk.

Za začetek si oglejmo matematično upanje in varianco slučajne spremenljivke W. Očitno je:

$$\mathbb{E}\, W = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a(i, j) \tag{3.1.24}$$

Izračunajmo še varianco! Očitno je:

$$\mathbb{E}\, X_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a(i, j)^2 \tag{3.1.25}$$

Nadalje za $i \neq k$ velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\, X_i X_k &= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j \neq l} a(i, j)\, a(k, l) = \\ &= \frac{1}{N(N-1)} \left(\sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} a(i, j)\, a(k, l) - \sum_{j=1}^{N} a(i, j)\, a(k, j) \right)\end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Sledi:

$$\begin{aligned}\sum_{i \neq k} \mathbb{E}\, X_i X_k = \frac{1}{N(N-1)} \Bigg(& \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} a(i, j)\, a(k, l) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} a(i, j)\, a(k, j) - \\ & - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} a(i, j)\, a(i, l) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a(i, j)^2 \Bigg)\end{aligned} \tag{3.1.27}$$

Z upoštevanjem (3.1.24), (3.1.25) in (3.1.27) končno dobimo:

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(W) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a(i,j)^2 - \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N} a(i,j)\right)^2 - \\ - \frac{1}{N(N-1)}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N} a(i,j)\right)^2 + \frac{1}{N^2(N-1)}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a(i,j)\right)^2 \end{aligned} \tag{3.1.28}$$

V nadaljevanju bomo brez škode za splošnost privzeli, da je $\mathbb{E}\,W = 0$ in $\operatorname{var}(W) = 1$. Konstruirajmo zdaj slučajno spremenljivko W'! Povzeli bomo kar Steinovo konstrukcijo iz [125], tretje poglavje, stran 39. Novo slučajno spremenljivko bomo konstruirali tako, da bomo permutacijo π zamenjali z izmenljivo permutacijo, ki se bo le malo razlikovala od nje. Perturbacija, ki jo bomo naredili, bo desni kompozitum s slučajno transpozicijo. Naj bo torej $\tau_{i,k}$ transpozicija, ki zamenja indeksa i in k. Nadalje naj bo (I, K) par slučajnih indeksov, neodvisen od π in porazdeljen enakomerno po množici vseh parov (i, k), za katere je $i \neq k$. Definirajmo:

$$\pi' := \pi \circ \tau_{I,K}\,, \qquad W' := \sum_{i=1}^{N} a(i, \pi'(i)) \tag{3.1.29}$$

Kompozitum s fiksno transpozicijo predstavlja bijektivno preslikavo iz množice vseh permutacij samo vase. Zato je pogojno na (I, K) tudi permutacija π' porazdeljena enakomerno, torej par (I, K) ni neodvisen le od π, temveč tudi od π' (seveda pa ni neodvisen od (π, π')). Ker je $\pi = \pi' \circ \tau_{I,K}$, se pogojna porazdelitev permutacije π glede na π' ujema s pogojno porazdelitvijo permutacije π' glede na π. Poleg tega sta permutaciji π in π' enako porazdeljeni (obe enakomerno). To pa pomeni, da sta π in π' izmenljivi, z njima pa tudi W in W'.

Opomba. Prav tako bi lahko za π' vzeli tudi levi kompozitum s slučajno transpozicijo.

Označimo $V := W' - W$. Ni težko preveriti, da velja:

$$V = -a(I, \pi(I)) - a(K, \pi(K)) + a(I, \pi(K)) + a(K, \pi(I)) \tag{3.1.30}$$

Velja:

$$\mathbb{E}\Big[a(I, \pi(I)) \;\Big|\; \pi\Big] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a(i, \pi(i)) = \frac{W}{N} \tag{3.1.31}$$

Podobno je tudi $\mathbb{E}\Big[a(K, \pi(K)) \;\Big|\; \pi\Big] = W/N$. Nadalje je:

$$\mathbb{E}\Big[a(I, \pi(K)) \;\Big|\; \pi\Big] = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i \neq k} a(i, \pi(k)) \tag{3.1.32}$$

Toda ker je $\mathbb{E}\,W = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} a(i, j) = 0$, velja:

$$\mathbb{E}\Big[a(I, \pi(K)) \;\Big|\; \pi\Big] = -\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1} a(i, \pi(i)) = -\frac{W}{N(N-1)} \tag{3.1.33}$$

Podobno je tudi $\mathbb{E}\left[a(K,\pi(I)) \mid \pi\right] = -W/(N(N-1))$. Sledi:

$$\mathbb{E}(W' \mid W) = \left(1 - \frac{2}{N-1}\right) W \tag{3.1.34}$$

torej zveza (3.1.1) velja za $\lambda = 2/(N-1)$ in $R = 0$. Po izreku 3.1.1 torej velja (če za $\mathcal{H}$ postavimo σ-algebro, ki jo generira π):

$$\left|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\right| \le (N-1)\, M_1(f) \left\{ \frac{1}{4}\, \mathbb{E}\, |V|^3 + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\mathrm{var}\left(\mathbb{E}(V^2 \mid \pi)\right)\right]^{1/2} \right\} \tag{3.1.35}$$

Po Jensenovi neenakosti lahko ocenimo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|V|^3 &\le 16\, \mathbb{E}\left[\left|a(I,\pi(I))\right|^3 + \left|a(K,\pi(K))\right|^3 + \left|a(I,\pi(K))\right|^3 + \left|a(K,\pi(I))\right|^3 \right] = \\ &= \frac{64}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a(i,j)|^3 \end{aligned} \tag{3.1.36}$$

Ocena drugega člena pa bo tokrat precej zahtevnejša. Oceniti je treba varianco slučajne spremenljivke:

$$\mathbb{E}(V^2 \mid \pi) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \ne k} \left[-a(i,\pi(i)) - a(k,\pi(k)) + a(i,\pi(k)) + a(k,\pi(i)) \right]^2 \tag{3.1.37}$$

ki je posplošitev slučajnih spremenljivk takega tipa, kot je W: medtem ko je W vsota slučajnih spremenljivk, ki so odvisne le od ene vrednosti $\pi(i)$, so posamezni sumandi pri $\mathbb{E}(V^2 \mid \pi)$ odvisni od vrednosti π v dveh indeksih. Gre torej za *dvojno indeksirano permutacijsko statistiko (DIPS)*, s katerimi se bomo ukvarjali v razdelku 5.2. Tovrstne statistike lahko zapišemo tudi v obliki:

$$\sum_{\substack{\alpha \subseteq \{1,\ldots N\} \\ |\alpha| = 2}} g_\alpha(\pi) \tag{3.1.38}$$

kjer je posamezna funkcija g_α odvisna le od vrednosti permutacije π na množici α, z $|\alpha|$ pa smo označili moč množice. V našem primeru bi tako postavili:

$$g_{\{i,k\}}(\pi) := \frac{2}{N(N-1)} \left[-a(i,\pi(i)) - a(k,\pi(k)) + a(i,\pi(k)) + a(k,\pi(i)) \right]^2 \tag{3.1.39}$$

Naslednji rezultat, ki ga bomo dokazali na koncu razdelka, nam da oceno variance takih statistik.

Lema 3.1.2. *Naj bo π enakomerno porazdeljena slučajna permutacija na $\{1,\ldots N\}$, $1 \le r \le n$ in W statistika tipa:*

$$W := \sum_{\substack{\alpha \subseteq \{1,\ldots N\} \\ |\alpha| = r}} g_\alpha(\pi) \tag{3.1.40}$$

kjer je posamezna funkcija g_α odvisna le od vrednosti permutacije π na množici α. Tedaj velja ocena:

$$\operatorname{var}(W) \leq 3r^3 \binom{N-1}{r-1} \sum_{|\alpha|=r} \mathbb{E}\, g_\alpha(\pi)^2 \tag{3.1.41}$$

Za funkcije $g_{\{i,k\}}$ iz (3.1.39) zdaj dobimo:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\Big(\mathbb{E}(V^2 \mid \pi)\Big) &\leq 24(N-1) \sum_{i<k} \mathbb{E}\, g_{\{i,k\}}(\pi)^2 = \\ &= 12(N-1) \sum_{i\neq k} \mathbb{E}\, g_{\{i,k\}}(\pi)^2 = \\ &= \frac{48}{N^2(N-1)} \sum_{i\neq k} \mathbb{E}\Big[-a(i,\pi(i)) - a(k,\pi(k)) + a(i,\pi(k)) + a(k,\pi(i))\Big]^4\end{aligned} \tag{3.1.42}$$

Jensenova neenakost nam da:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\Big(\mathbb{E}(V^2 \mid \pi)\Big) &\leq \frac{3072}{N^2(N-1)} \sum_{i\neq k} \mathbb{E}\Big[a(i,\pi(i))^4 + a(k,\pi(k))^4 + a(i,\pi(k))^4 + a(k,\pi(i))^4\Big] = \\ &= \frac{12288}{N^3} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a(i,j)^4\end{aligned} \tag{3.1.43}$$

Iz (3.1.35), (3.1.36), in (3.1.43) tako končno dobimo:

$$\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| \leq M_1(f) \left\{ \frac{16}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a(i,j)|^3 + \frac{32}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{3}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a(i,j)^4 \right]^{1/2} \right\} \tag{3.1.44}$$

Zgornja ocena je podobna oceni (3.1.22) za vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk (še zlasti, če v slednji še dodatno ocenimo $\operatorname{var}(X^2) \leq \mathbb{E}\, X^4$) in je v tipičnem primeru, ko je $a(i,j) = O(N^{-1/2})$, tudi istega velikostnega reda, t. j. $N^{-1/2}$. Pomemben je primer, ko je $a(i,j) = 0$, brž ko je $i > n$, kjer je $n < N$ fiksno izbrano število. V tem primeru je W statistika enostavnega slučajnega vzorčenja (iz populacije velikosti N vzamemo vzorec velikosti n). V tem primeru pa je tipično $a(i,j) = O(n^{-1/2})$. Če vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk gledamo kot limitni primer statistik enostavnih slučajnih vzorčenj (ko gre $N \to \infty$, n pa ostane fiksen), z ustreznim limitiranjem ocene (3.1.44) dejansko dobimo oceno (3.1.22), v kateri dodatno ocenimo $\operatorname{var}(X^2) \leq \mathbb{E}\, X^4$, le da so konstante precej slabše. S pazljivejšim ocenjevanjem bi se jih dalo izboljšati. Še več, izkaže se, da se da v določenih členih N zamenjati z n. Tako bi dobili oceno, ki bi v limiti dala natančno oceno (3.1.22).

Steinova metoda nam je torej dala oceno, ki je analogna oceni, ki smo jo dobili za vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk. Resda je bilo za izpeljavo ocene (3.1.44) potrebnega dosti več truda kot za izpeljavo ocene (3.1.22), a razen konstrukcije slučajne spremenljivke W' so bile vse izpeljave bolj ali manj premočrtne, računi za slučajne permutacije so se od računov za neodvisne slučajne spremenljivke v glavnem razlikovali le po tehnični zahtevnosti. Po drugi strani pa je med neodvisnostjo in odvisnostjo velik kvalitativni preskok, tehnično zahtevne izračune pa bomo v naslednjih razdelkih olajšali. □

Dolžni smo dokazati še lemo 3.1.2. Dokaz bo temeljil na naslednjem rezultatu.

Lema 3.1.3. *Naj bo π enakomerno porazdeljena slučajna permutacija na $\{1, \ldots N\}$. Nadalje naj bosta α in β disjunktni podmnožici množice $\{1, \ldots N\}$, dani pa naj bosta še funkciji g_α in g_β, za kateri velja, da je $g_\alpha(\pi)$ odvisna le od vrednosti π na α, g_β pa le od vrednosti π na β. Tedaj velja ocena:*

$$\left|\operatorname{cov}\Big(g_\alpha(\pi), g_\beta(\pi)\Big)\right| \le \frac{|\alpha|\,|\beta|}{N}\Big[\mathbb{E}\, g_\alpha(\pi)^2 + \mathbb{E}\, g_\beta(\pi)^2\Big] \tag{3.1.45}$$

Dokaz. Naj bo ρ neodvisna kopija slučajne permutacije π. Tedaj velja:

$$\mathbb{E}\, g_\alpha(\pi)\, \mathbb{E}\, g_\beta(\pi) = \mathbb{E}\, g_\alpha(\pi) g_\beta(\rho) \tag{3.1.46}$$

$$\mathbb{E}\, g_\alpha(\pi) g_\beta(\pi) = \frac{1}{1-p}\, \mathbb{E}\, g_\alpha(\pi) g_\beta(\rho)\, \mathbf{1}\Big[\pi(\alpha) \cap \rho(\beta) = \emptyset\Big] \tag{3.1.47}$$

kjer je $p := \mathbb{P}(\pi(\alpha) \cap \rho(\beta) \neq \emptyset)$. Ko odštejemo obe enakosti, po nekaj računanja dobimo:

$$\operatorname{cov}\Big(g_\alpha(\pi), g_\beta(\pi)\Big) = \frac{p}{1-p}\, \mathbb{E}\, g_\alpha(\pi) g_\beta(\rho)\, \mathbf{1}\Big[\pi(\alpha) \cap \rho(\beta) = \emptyset\Big] - \mathbb{E}\, g_\alpha(\pi) g_\beta(\rho)\, \mathbf{1}\Big[\pi(\alpha) \cap \rho(\beta) \neq \emptyset\Big] \tag{3.1.48}$$

Po Jensenovi neenakosti lahko ocenimo $|g_\alpha(\pi)\, g_\beta(\rho)| \le \frac{1}{2}\Big[g_\alpha(\pi)^2 + g_\beta(\rho)^2\Big]$. Toda slučajni spremenljivki $g_\alpha(\pi)$ in $g_\beta(\rho)$ sta *vsaka zase* neodvisni od dogodka $\pi(\alpha) \cap \rho(\beta) = \emptyset$. Od tod spet po nekaj računanja dobimo:

$$\left|\operatorname{cov}\Big(g_\alpha(\pi), g_\beta(\pi)\Big)\right| \le p\Big[\mathbb{E}\, g_\alpha(\pi)^2 + \mathbb{E}\, g_\beta(\pi)^2\Big] \tag{3.1.49}$$

Dokaz zaključimo s preprosto oceno $p \le \sum_{i\in\alpha} \mathbb{P}[\pi(i) \in \rho(\beta)] = |\alpha|\,|\beta|/N$. ■

Dokaz leme 3.1.2. Pišimo:

$$\operatorname{var}(W) = \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|=r \\ \alpha\cap\beta\neq\emptyset}} \operatorname{cov}\Big(g_\alpha(\pi), g_\beta(\pi)\Big) + \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|=r \\ \alpha\cap\beta=\emptyset}} \operatorname{cov}\Big(g_\alpha(\pi), g_\beta(\pi)\Big) \tag{3.1.50}$$

Za $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ kar neposredno uporabimo Jensenovo neenakost:

$$|\operatorname{cov}(X, Y)| = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}\, X)(Y - \mathbb{E}\, Y) \le \frac{1}{2}\Big[\mathbb{E}(X - \mathbb{E}\, X)^2 + \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}\, Y)^2 \le \frac{1}{2}\Big[\mathbb{E}\, X^2 + \mathbb{E}\, Y^2\Big] \tag{3.1.51}$$

Ker je število množic β moči r, ki imajo z dano množico α prav tako moči r neprazen presek, manjše ali enako $r^2\binom{N}{r}/N$, velja ocena:

$$\sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|=r \\ \alpha\cap\beta\neq\emptyset}} \operatorname{cov}\Big(g_\alpha(\pi), g_\beta(\pi)\Big) \le \frac{r^2}{N}\binom{N}{r} \sum_{|\alpha|=r} \mathbb{E}\, g_\alpha(\pi)^2 \tag{3.1.52}$$

Za $\alpha \cap \beta = \emptyset$ pa uporabimo lemo 3.1.3. Dobimo:

$$\sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|=r \\ \alpha\cap\beta=\emptyset}} \operatorname{cov}\Big(g_\alpha(\pi), g_\beta(\pi)\Big) \le \frac{2r^2}{N}\binom{N}{r}\sum_{|\alpha|=r} \mathbb{E}\, g_\alpha(\pi)^2 \tag{3.1.53}$$

Sledi:

$$\operatorname{var}(W) \le \frac{3r^2}{N}\binom{N}{r}\mathbb{E}\, g_\alpha(\pi)^2 = 3r^3\binom{N-1}{r-1}\sum_{|\alpha|=r} \mathbb{E}\, g_\alpha(\pi)^2 \tag{3.1.54}$$

■

3.2 Prema utežitev

Omenili smo že, da je ocena Steinovega matematičnega upanja vsot odvisnih slučajnih spremenljivk (in s tem ocena napake pri normalni aproksimaciji) tesno povezana s konstrukcijo pomožnih slučajnih spremenljivk (sklapljanjem). Pri konstrukciji iz prejšnjega razdelka je pomožna slučajna spremenljivka W' zadoščala zvezi (3.1.1). V tem in naslednjem razdelku pa bomo za pomožno slučajno spremenljivko zahtevali, da ima določeno porazdelitev, ki bo odvisna od porazdelitve prvotne slučajne spremenljivke W.

Definicija. Naj bo W slučajna spremenljivka, ki naj bo povsod istega predznaka (t. j. bodisi povsod pozitivna bodisi povsod negativna). Nadalje naj W ne bo skoraj povsod identično enaka nič in naj bo $\mathbb{E}\,|W| < \infty$. Slučajna spremenljivka W^* ima *premo uteženo* (angl. *size biassed*) porazdelitev slučajne spremenljivke W, če za vsako merljivo in omejeno funkcijo f velja zveza:

$$\mathbb{E}\, f(W^*) = \frac{\mathbb{E}\, f(W)W}{\mathbb{E}\, W} \tag{3.2.1}$$

Rekli bomo tudi, da je W^* *prema uteženka* slučajne spremenljivke W.

Uporaba preme utežitve pri Steinovi metodi se prvič pojavi v Baldijevem, Rinottovem in Steinovem članku [4], in sicer pri enorazsežni normalni aproksimaciji. Goldstein in Rinott [63] izpeljeta še večrazsežno različico.

Opomba. Premo utežena porazdelitev obstaja, brž ko je $\mathbb{E}\,|W| < \infty$ in $\mathbb{E}\, W \neq 0$: to je porazdelitev, katere Radon–Nikodymov odvod glede na porazdelitev slučajne spremenljivke W je v točki w enak $w/\,\mathbb{E}\, W$. Zahteva, da je W povsod istega predznaka, je potrebna zato, da res dobimo verjetnostno mero; iz istega razloga tudi delimo z $\mathbb{E}\, W$.

Prema uteženka W^* slučajne spremenljivke W torej obstaja, za oceno Steinovega matematičnega upanja pa potrebujemo njeno *sklapljanje* z W, in sicer tako, da se W^* le malo razlikuje od W; merilo za oceno napake pri normalni aproksimaciji bo prav razlika $V := W^* - W$.

Doslej smo ocenjevali Steinovo matematično upanje $\mathbb{E}\Big[h'(W) - h(W)W\Big]$ za slučajne spremenljivke W z $\mathbb{E}\, W = 0$ in $\operatorname{var}(W) = 1$. V našem primeru pa matematično upanje ne bo enako nič, zato bomo morali Steinov operator nekoliko prilagoditi. Naj bo $\mathbb{E}\, W = \lambda$ in $\tilde{W} := W - \lambda$. Velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[h'(\tilde{W}) - h(\tilde{W})\tilde{W}\Big] &= \mathbb{E}\Big[h'(W-\lambda) - h(W-\lambda)(W-\lambda)\Big] = \\ &= \mathbb{E}\Big[\tilde{h}'(W) - \tilde{h}(W)(W-\lambda)\Big] \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

kjer je $\tilde{h}(w) := h(w-\lambda)$. Tako vidimo, da bomo namesto običajnega Steinovega matematičnega upanja morali ocenjevati $\mathbb{E}\Big[h'(W) - h(W)(W-\lambda)\Big]$. Na vso stvar pa lahko pogledamo še malo drugače. Zveza (3.2.2) še vedno velja, če W zamenjamo s poljubno spremenljivko w, matematično upanje odstranimo, parameter λ pa je poljuben. Zato ocene iz točk (2) in (3) leme 1.4.1 še vedno veljajo, če enačbo (1.4.19) zamenjamo z enačbo:

$$h'(w) - h(w)(w-\lambda) = f(w) - \mathrm{N}(\lambda, 1)\{f\} \tag{3.2.3}$$

Naj bo torej W slučajna spremenljivka, ki naj bo povsod istega predznaka, $\mathbb{E}\, W = \lambda$ in $\operatorname{var}(W) = 1$. Nadalje naj bo W^* prema uteženka slučajne spremenljivke W, defirana na istem verjetnostnem prostoru kot W. Velja:

$$\mathbb{E}\Big[h'(W) - h(W)(W-\lambda)\Big] = \mathbb{E}\Big[h'(W) - \lambda\Big(h(W^*) - h(W)\Big)\Big] \tag{3.2.4}$$

Označimo $V := W^* - W$. Iz Taylorjevega razvoja dobimo:

$$\mathbb{E}\Big[h'(W) - h(W)(W-\lambda)\Big] = \mathbb{E}\Big[h'(W)(1-\lambda V) - \lambda(1-\theta)h''(W+\theta V)V^2\Big] \tag{3.2.5}$$

kjer je θ porazdeljena enakomerno po $[0,1]$ in neodvisna od vsega ostalega. Ker je:

$$\lambda\, \mathbb{E}\, V = \lambda(\mathbb{E}\, W^* - \lambda) = \mathbb{E}\, W^2 - \lambda^2 = 1 \tag{3.2.6}$$

lahko to zapišemo v obliki:

$$\mathbb{E}\Big[h'(W) - h(W)(W-\lambda)\Big] = -\lambda\, \mathbb{E}\Big[h'(W)(V - \mathbb{E}\, V) + (1-\theta)h''(W+\theta V)V^2\Big] \tag{3.2.7}$$

Izraz na desni strani bomo ocenili podobno kot v prejšnjem razdelku. Naj bo spet $\mathcal{H}$ poljubna σ-algebra, glede na katero je slučajna spremenljivka W merljiva. Tedaj po (3.1.11) velja:

$$\Big|\mathbb{E}\, h'(W)(V - \mathbb{E}\, V)\Big| \le M_1(h)\Big[\operatorname{var}\Big(\mathbb{E}(V \mid \mathcal{H})\Big)\Big]^{1/2} \tag{3.2.8}$$

Videli smo, da ima tudi enačba (3.2.3) rešitev, za katero veljajo ocene (3.1.14). Tako smo dokazali naslednji rezultat, ki je modifikacija Baldijevega, Rinottovega in Steinovega rezultata iz [4].

Izrek 3.2.1. *Naj bo W^* prema uteženka slučajne spremenljivke W z $\mathbb{E}\, W = \lambda$ in* $\operatorname{var}(W) = 1$. *Tedaj za vsako Lipschitzevo funkcijo f in vsako σ-algebro $\mathcal{H}$, glede na katero je W merljiva, velja ocena:*

$$\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(\lambda, 1)\{f\}\Big| \le \lambda\, M_1(f)\left\{\mathbb{E}\, V^2 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\Big[\operatorname{var}\Big(\mathbb{E}(V \mid \mathcal{H})\Big)\Big]^{1/2}\right\} \tag{3.2.9}$$

kjer je $V := W^* - W$. ■

Baldi, Rinott in Stein [4] uporabijo različico zgornjega izreka pri lokalnih maksimumih slučajnih funkcij na grafih. Nadalje Goldstein in Rinott [63] uporabita večrazsežno različico tega izreka pri statistikah na stopnjah točk v slučajnih grafih in še pri vsotah funkcij slučajnih spremenljivk, katerih navzkrižna porazdelitev je večrazsežna normalna ali polinomska. Še več zgledov je predstavljenih v Goldsteinovem članku [61].

V naslednjem razdelku bomo obravnavali konstrukcijo sklapljanj s premimi utežitvami, na kateri temeljijo vsi zgoraj navedeni primeri. Končne ocene napake pa vendarle ne bomo izpeljali prav s premo utežitvijo, temveč na bolj neposreden način, ki je bolj ali manj ekvivalenten. Prav s premo utežitvijo pa bomo tu ocenili napako za vsote neodvisnih nenegativnih slučajnih spremenljivk. Konstrukcija sklapljanja s premo utežitvijo bo temeljila na naslednjem preprostem dejstvu.

Trditev 3.2.2. *Naj bodo $X_1, \ldots X_n$ neodvisne nenegativne slučajne spremenljivke z vsoto W. Označimo $\lambda_i := \mathbb{E}\, X_i$ in $\lambda := \mathbb{E}\, W$. Privzemimo, da je $\lambda_i > 0$ (t. j. da X_i niso skoraj povsod enake nič). Nadalje naj bodo X_i^* preme uteženke slučajnih spemenljivk X_i, neodvisne od $(X_1, \ldots X_n)$, I pa naj bo slučajni indeks, neodvisen od vsega skupaj in porazdeljen po $\{1, \ldots n\}$ sorazmerno z λ_i, t. j. $\mathbb{P}(I = i) = \lambda_i/\lambda$. Tedaj je slučajna spremenljivka:*

$$W^* := W - X_I + X_I^* \tag{3.2.10}$$

prema uteženka slučajne spremenljivke W.

Dokaz. Naj bo f omejena in merljiva funkcija. Označimo še $W_i := W - X_i$. Tedaj zaradi neodvisnosti velja:

$$\mathbb{E}\, f(W)W = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\, f(W_i + X_i)X_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \mathbb{E}\, f(W_i + X_i^*) = \lambda\, \mathbb{E}\, f(W_I + X_I^*) \tag{3.2.11}$$

torej je $W^* = W_I + X_I^*$ res prema uteženka. ∎

Opomba. V konstrukciji smo potrebovali le neodvisnost *posameznih* slučajnih spremenljivk X_i^* od $(X_1, \ldots X_n)$, nismo pa potrebovali neodvisnosti celotnega slučajnega vektorja $(X_1^*, \ldots X_n^*)$. Prav tako nismo potrebovali navzkrižnih porazdelitev med slučajnimi spremenljivkami X_i^*.

Naj bodo torej X_i, W, λ_i, λ, X_i^*, I in W^* tako kot v trditvi 3.2.2. Če je torej $V = W^* - W = X_I^* - X_I$, velja:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\, V^2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda}\, \mathbb{E}(X_i^* - X_i)^2 \le \\
&\le 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} \Big(\mathbb{E}(X_i^*)^2 + \mathbb{E}\, X_i^2 \Big) = \\
&= \frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \Big(\mathbb{E}\, X_i^3 + \lambda_i\, \mathbb{E}\, X_i^2 \Big) \le \\
&\le \frac{4}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\, X_i^3
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Pri zadnji oceni smo uporabili Jensenovo neenakost. Oceniti moramo še drugi člen v (3.2.9). Naj bo $\mathcal{H}$ σ-algebra, ki jo generirajo slučajne spremenljivke $X_1, \dots X_n$. Tedaj velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V \mid \mathcal{H}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} \mathbb{E}(X_i^* - X_i \mid \mathcal{H}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} \Big(\mathbb{E}\, X_i^* - X_i \Big) \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

Členi z $\mathbb{E}\, X_i^*$ so konstantni in prav nič ne vplivajo na varianco. Za preostanek pa z upoštevanjem neodvisnosti dobimo:

$$\operatorname{var}\Big(\mathbb{E}(V \mid \mathcal{H})\Big) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \operatorname{var}(X_i) \tag{3.2.14}$$

Če zdaj (3.2.12) in (3.2.14) vstavimo v (3.2.9) ter privzamemo še, da je $\operatorname{var}(W) = 1$, končno dobimo:

$$\Big| \mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(\lambda, 1)\{f\} \Big| \le M_1(f) \left\{ 4 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\, X_i^3 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \operatorname{var}(X_i) \right]^{1/2} \right\} \tag{3.2.15}$$

Dobljena ocena ne zahteva četrtih momentov in je torej po velikostnem redu enaka ali boljša od ocene (3.1.22). Je pa lahko še vedno slabša od ocene (1.4.20). To se zgodi v primeru, ko ena izmed slučajnih spremenljivk po velikosti zelo odstopa od ostalih. Če je $\operatorname{var}(W) = 1$, so X_i tipično velikostnega reda $n^{-1/2}$. Naj zdaj to velja za vse sumande razen za enega, ki naj bo velikostnega reda $n^{-1/6}$. Tedaj je desna stran ocene (1.4.20) še vedno velikostnega reda $n^{-1/2}$, medtem ko je desna stran ocene (3.1.22) velikostnega reda $n^{-1/3}$.

3.3 Konstrukcija premih uteženk

Vse konstrukcije premih uteženk, ki so znane avtorju in so bile uporabljene za ocenjevanje napake pri normalni aproksimaciji po Steinovi metodi (vključno s konstrukcijo iz trditve 3.2.2), so izhajale iz ene in iste ideje, to pa je, da premo uteženko sestavimo iz *relativnih* premih uteženk.

Definicija. Naj bosta W in X slučajni spremenljivki. Slučajna spremenljivka W naj ima vrednosti na poljubnem merljivem prostoru, slučajna spremenljivka X naj bo realna in povsod istega predznaka, naj ne bo skoraj povsod identično enaka nič in naj bo $\mathbb{E}\,|X| < \infty$. Tedaj pravimo, da ima slučajna spremenljivka W^* (relativno) premo uteženo porazdelitev slučajne spremenljivke W glede na X oz. da je (relativna) prema uteženka slučajne spremenljivke W glede na X, če za vsako merljivo in omejeno funkcijo f velja zveza:

$$\mathbb{E}\, f(W^*) = \frac{\mathbb{E}\, f(W) X}{\mathbb{E}\, X} \tag{3.3.1}$$

Če je zdaj denimo $X_i \geq 0$ za vsak i in $W = X_1 + \cdots + X_n$ ter je W_i^* prema uteženka slučajne spremenljivke W glede na X_i, premo uteženko W^* slučajne spremenljivke W glede samo nase konstruiramo podobno kot v trditvi 3.2.2: naj bo I slučajni indeks, neodvisen od vsega ostalega, za katerega velja $\mathbb{P}(I = i) = \mathbb{E}\, X_i / \mathbb{E}\, W$; tedaj ni težko preveriti, da slučajna spremenljivka $W^* := W_I^*$ ustreza zvezi (3.2.1).

Ni pa nujno, da iz relativnih premih uteženk sploh konstruiramo enotno premo uteženko. V resnici se izkaže za ugodneje, da napako pri normalni aproksimaciji izpeljemo kar neposredno iz sklapljanj z relativnimi premimi uteženkami. Razloga za to sta vsaj dva. Prvi je, da na ta način ni nujno, da je slučajna spremenljivka W povsod istega predznaka; to mora veljati le za sumande X_i, ki pa so lahko eni pozitivni, drugi pa negativni. Drugi pomemben razlog pa je, da lahko na ta način izpeljavo posplošimo tudi na več dimenzij (spomnimo naj, da ima v definiciji relativne preme utežitve slučajna spremenljivka W vrednosti na poljubnem merljivem prostoru). Tako Goldstein in Rinott [63] ocenita napako pri večrazsežni normalni aproksimaciji s pomočjo slučajnih vektorjev, ki imajo premo utežene porazdelitve glede na komponente slučajnega vektorja W.

Oglejmo si zdaj še konstrukcijo sklapljanj z relativnimi premimi uteženkami. Naj bosta torej W in X slučajni spremenljivki, od katerih je X realna in povsod istega predznaka. Za začetek privzemimo, da je slučajna spremenljivka X diskretna. Za vsak x, za katerega je $\mathbb{P}(X = x) > 0$, konstruirajmo slučajno spremenljivko W_x, definirano na istem verjetnostnem prostoru kot W in katere porazdelitev se ujema s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke W pri $X = x$. Definirajmo slučajno spremenljivko W^* tako, da bo enaka W_x z verjetnostjo $x\, \mathbb{P}(X = x) / \mathbb{E}\, X$, pri čemer ustrezne x izbiramo neodvisno od vsega ostalega (delamo torej *sklapljanja s pogojnimi porazdelitvami*). Tedaj ni težko preveriti, da ima tako definirana slučajna spremenljivka W^* res premo uteženo porazdelitev slučajne spremenljivke W glede na X.

Sklapljanja s pogojnimi porazdelitvami so s Steinovo metodo zelo tesno povezana. Uporabljena so že v Chenovem članku [38], v katerem je bila Steinova metoda prvič opisana za Poissonovo aproksimacijo. Na njih temeljijo vse izpeljave ocen napake pri Poissonovi aproksimaciji v Barbourjevi, Holstovi in Jansonovi monografiji [17]. V zvezi z normalno aproksimacijo pa se, kolikor je avtorju znano, prvič pojavijo v že omenjenem Baldijevem, Rinottovem in Steinovem članku [4], ki v Steinovo metodo uvede preme utežitve.

Slučajne spremenljivke W_x, ki so blizu W, lahko konstruiramo, če X nosi "malo" informacije. Slednjega ne bomo precizirali, v resnici bomo na vso stvar gledali obratno: merilo za to, koliko informacije nosi dogodek $X = x$, bo prav to, kako blizu W se da konstruirati slučajna spremenljivka W_x.

Opišimo konstrukcijo slučajnih spremenljivk W_x na primeru obeh zgledov, ki smo jih navedli v razdelku 3.1. Pri prvem je bila W vsota neodvisnih slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots X_n$. Recimo, da vsaka od njih nosi le majhen prispevek k celotni vsoti. Tedaj se za dani i porazdelitev slučajne spremenljivke $W_{i,x} := W - X_i + x$ ujema s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke W glede na $X_i = x$, obenem pa je $W_{i,x}$ razmeroma blizu slučajne spremenljivke W.

V drugem primeru pa je bila W statistika na slučajnih permutacijah:

$$W := w(\pi) := \sum_{i=1}^{N} a(i, \pi(i)) \tag{3.3.2}$$

Dogodki, da je $X_i = x$, so unije dogodkov, da je $\pi(i) = j$. Definirajmo slučajno permutacijo π_{ij} po predpisu:

$$\pi_{i\to j} := \tau_{\pi(i),j} \circ \pi \tag{3.3.3}$$

kjer smo s τ spet označili transpozicijo. Tedaj se porazdelitev slučajne spremenljivke $W_{ij} := w(\pi_{i\to j})$ ujema s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke W glede na $\pi(i) = j$, obenem pa je W_{ij} spet razmeroma blizu W.

Opomba. Namesto levega kompozituma v (3.3.3) bi lahko vzeli tudi desni kompozitum s primerno transpozicijo.

Konstrukcijo preme uteženke W^* slučajne spremenljivke W glede na X smo do zdaj opisali za primer, ko je slučajna spremenljivka X diskretno porazdeljena. V splošnem primeru pa vzamemo najprej premo uteženko X^* slučajne spremenljivke X, slučajno spremenljivko W^* pa konstruiramo tako, da se njena pogojna porazdelitev glede na $X^* = x$ ujema s prehodno porazdelitvijo slučajne spremenljivke W glede na $X = x$. To pomeni, da za poljubno omejeno in merljivo funkcijo f velja:

$$\mathbb{E} f(W^*, X^*) = \frac{\mathbb{E} f(W, X)X}{\mathbb{E} X} \tag{3.3.4}$$

od koder sledi, da je W^* res prema uteženka slučajne spremenljivke W glede na X.

Steinovo matematično upanje se s premimi uteženkami oceni podobno kot v prejšnjem razdelku. Naj bo torej $W = X_1 + \cdots + X_n$. Označimo $\lambda_i := \mathbb{E} X_i$ in $\lambda := \mathbb{E} W$ ter privzemimo še, da je $\mathrm{var}(W) = 1$. Nadalje naj bo za vsak i dana prema uteženka W_i^* slučajne spremenljivke W glede na X_i. Tedaj velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[h'(W) - h(W)(W - \lambda)\Big] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[h'(W)\,\mathrm{cov}(X_i, W) - h(W)(X_i - \lambda_i)\Big] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[h'(W)\,\mathrm{cov}(X_i, W) - \lambda_i\big(h(W_i^*) - h(W)\big)\Big] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[h'(W)\,\mathrm{cov}(X_i, W) - \lambda_i\big(h'(W)V_i + (1-\theta)h''(W + \theta V_i)V_i^2\big)\Big]\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

kjer je $V_i := W_i^* - W$, θ pa je porazdeljena enakomerno po $[0, 1]$ in neodvisna od vsega ostalega. Ker je:

$$\lambda_i\,\mathbb{E} V_i = \mathbb{E} X_i(\mathbb{E} W_i^* - \mathbb{E} W) = \mathbb{E} X_i W - \mathbb{E} X_i\,\mathbb{E} W = \mathrm{cov}(X_i, W) \tag{3.3.6}$$

lahko končno zapišemo:

$$\mathbb{E}\Big[h'(W) - h(W)(W - \lambda)\Big] = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\mathbb{E}\Big[h'(W)(V_i - \mathbb{E} V_i) + (1-\theta)h''(W + \theta V_i)V_i^2\Big] \tag{3.3.7}$$

kar lahko ocenimo podobno kot (3.2.7).

3.4 Ocene, dobljene neposredno iz sklapljanj

V prejšnjem razdelku smo spoznali, kako lahko s pomočjo sklapljanj s pogojnimi porazdelitvami konstruiramo preme uteženke. Iz slednjih smo potem dobili oceno napake pri normalni aproksimaciji. Napako pa lahko ocenimo tudi *neposredno* iz sklapljanj s pogojnimi porazdelitvami, brez uporabe premih uteženk. To prinaša določene prednosti. Ni npr. več potrebno, da so slučajne spremenljivke povsod istega predznaka.

Konstrukcijo iz prejšnjega razdelka spremenimo tako, da namesto premih uteženk X_i^* vzamemo kar neodvisne kopije X_i' slučajnih spremenljivk X_i, dane pa naj bodo še slučajne spremenljivke W_i, ki nosijo vlogo prejšnjih slučajnih spremenljivk W_i^*, t. j. katerih pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke W_i glede na $X_i' = x$ se ujema s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke W glede na $X_i = x$. Z drugimi besedami, slučajni vektor (W_i, X_i') naj bo preprosto enako porazdeljen kot (W, X_i).

Opomba. Konstrukcija, ki smo jo pravkar opisali, je različica konstrukcije, ki nastopa v XIV. poglavju Steinove monografije [125].

Ker zdaj ni več potrebno privzeti, da so X_i povsod istega predznaka, lahko brez škode za splošnost privzamemo tudi, da je $\mathbb{E}\, X_i = 0$. Zadevo lahko zapišemo tudi za večrazsežni primer in dobimo naslednji rezultat.

Izrek 3.4.1. *Naj bodo X_i, X_i', W in W_i tako kot zgoraj. Privzemimo še, da je* $\operatorname{var}(W) = 1$, *in naj bo $\mathcal{H}$ poljubna σ-algebra, glede na katero je slučajna spremenljivka W merljiva. Tedaj za vsako Lipschitzevo funkcijo f velja:*

$$\left|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\right| \le M_1(f) \left\{ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\, |X_i'| R_i^2 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i' R_i \mid \mathcal{H}) \right) \right]^{1/2} \right\} \tag{3.4.1}$$

kjer je $R_i := W_i - W$.

Če pa so X_i, X_i', W in W_i slučajni vektorji z vrednostmi v $\mathbb{R}^d$, ki ustrezajo istim predpostavkam kot ustrezne slučajne spremenljivke zgoraj (namesto $\operatorname{var}(W) = 1$ *privzamemo* $\operatorname{Var}(W) = \mathbf{I}$*), za vsako funkcijo $f \in \mathrm{b}^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ velja ocena:*

$$\left|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,\mathbf{I})\{f\}\right| \le M_2(f) \left\{ \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\, |X_i'|\, |R_i|^2 + \frac{1}{2} \left[d \operatorname{sl} \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i' R_i \mid \mathcal{H}) \right) \right]^{1/2} \right\} \tag{3.4.2}$$

Opomba. V oceni (3.4.2) izraz $X_i' R_i$ predstavlja slučajni kovariantni 2-tenzor. Tako je $\operatorname{Var}(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i' R_i \mid \mathcal{H}))$ mešani $(2,2)$-tenzor, njegova sled pa je skalar, dobljen z ustrezno skrčitvijo (glej razdelek D.5).

Opomba. V izreku ni potrebna nobena predpostavka o navzkrižnih porazdelitvah med slučajnimi spremenljivkami X_i'. Potrebno je le, da je posamezna slučajna spremenljivka X_i' neodvisna od (X_i, W), ni pa npr. potrebno, da bi bil cel slučajni vektor $(X_1', \ldots X_n')$ neodvisna kopija slučajnega vektorja $(X_1, \ldots X_n)$. O navzkrižnih porazdelitvah je smiselno govoriti, ker sta oceni na desnih straneh (3.4.1) in (3.4.2) odvisni od njih.

Dokaz izreka 3.4.1. Naj bo g katera od rešitev Steinove enačbe:

$$\Delta g(w) - g'(w)w = f(w) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f\} \tag{3.4.3}$$

iz izreka 2.6.1. Spomnimo se, da tako kot v (2.5.4) velja:

$$\Delta g(w) = g''(w)\mathcal{I} = g''(w)\,\mathbb{E}\,W^2 \tag{3.4.4}$$

Tedaj velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Delta g(W) - g'(W)W\Big] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[g''(W)\,\mathbb{E}\,X_i W - g'(W)X_i\Big] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[g''(W)\,\mathbb{E}\,X_i W - \big(g'(W_i) - g'(W)\big)X_i'\Big] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[g''(W)\,\mathbb{E}\,X_i W - \big(g''(W)X_i'R_i + (1-\theta)g'''(W + \theta R_i)X_i'R_i^2\big)\Big]\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

kjer je $R_i := W_i - W$, in θ tako kot ponavadi porazdeljena enakomerno po $[0, 1]$ in neodvisna od vsega ostalega. Ker je $\mathbb{E}\,X_i'R_i = \mathbb{E}\,X_i'W_i' = \mathbb{E}\,X_iW$, končno velja:

$$\mathbb{E}\Big[\Delta g(W) - g'(W)W\Big] = -\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[g''(W)(X_i'R_i - \mathbb{E}\,X_i'R_i) + (1-\theta)g'''(W+\theta R_i)X_i'R_i^2\Big] \tag{3.4.6}$$

Ocenimo:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,g''(W)(X_i'R_i - \mathbb{E}\,X_i'R_i)\right| &= \left|\mathbb{E}\,g''(W)\sum_{i=1}^{n}\Big(\mathbb{E}(X_i'R_i \mid \mathcal{H}) - \mathbb{E}\,X_i'R_i\Big)\right| \le \\ &\le M_2(g)\,\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n}\Big(\mathbb{E}(X_i'R_i \mid \mathcal{H}) - \mathbb{E}\,X_i'R_i\Big)\right|_\wedge \le \\ &\le M_2(g)\left[\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n}\Big(\mathbb{E}(X_i'R_i \mid \mathcal{H}) - \mathbb{E}\,X_i'R_i\Big)\right|_\wedge^2\right]^{1/2}\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

kjer je $|\cdot|_\wedge$ projektivna norma (glej razdelek D.8) Označimo:

$$\Xi := \sum_{i=1}^{n}\Big(\mathbb{E}(X_i'R_i \mid \mathcal{H}) - \mathbb{E}\,X_i'R_i\Big) \tag{3.4.8}$$

Po trditvi D.9.1 velja:

$$\mathbb{E}\,|\Xi|_\wedge^2 \le d\,\mathbb{E}\langle \Xi\,,\,\Xi\rangle = d\,\mathbb{E}\,\mathrm{sl}(\Xi\Xi^T) = d\,\mathrm{sl}\,\mathrm{Var}(\Xi) \tag{3.4.9}$$

Sledi:

$$\left|\mathbb{E} f(W) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f\} \le \frac{1}{2} M_3(g) \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_i|\,|R_i|^2 + \left[d \,\mathrm{sl}\,\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i R_i \mid \mathcal{H})\right)\right]^{1/2} \tag{3.4.10}$$

Za enorazsežni primer iz lem 1.4.1 in 2.6.2 ocenimo:

$$M_2(g) \le \frac{2}{\sqrt{2\pi}} M_1(f)\,, \quad M_3(g) \le 2\,M_1(f) \tag{3.4.11}$$

v večrazsežnem primeru pa iz leme 2.6.2 sledi ocena:

$$M_2(g) \le \frac{1}{2} M_2(f)\,, \quad M_3(g) \le \frac{\sqrt{2\pi}}{4} M_2(f) \tag{3.4.12}$$

Dokaz je s tem končan. ■

Opomba. V dokazu bi se lahko namesto na izrek 2.6.1 oprli tudi na trditev 2.5.1.

Zgled 3.4.1. *Neodvisne slučajne spremenljivke*. Vzemimo vsoto neodvisnih slučajnih spremenljivk $W := X_1 + \cdots + X_n$ z $\mathbb{E}\,X_i = 0$ in $\mathrm{Var}(W) = 1$. Za uporabo izreka 3.4.1 potrebujemo še njihove neodvisne kopije X_i'. Privzeli bomo, da je kar celotni slučajni vektor $(X_1', \ldots X_n')$ neodvisna kopija slučajnega vektorja $(X_1, \ldots X_n)$. Tedaj slučajne spremenljivke $W_i := W - X_i + X_i'$ zagotovo zadoščajo pogojem izreka, torej velja $R_i = X_i' - X_i$. Iz Jensenove neenakosti dobimo oceno:

$$\mathbb{E}\,|X_i'|R_i^2 \le 4\,\mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{3.4.13}$$

Naj bo še $\mathcal{H}$ kar σ-algebra, ki jo generira W. Tedaj je očitno $\mathbb{E}(X_i' R_i \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}\,X_i^2$, kar je konstanta, torej je celoten drugi člen v oceni (3.4.1) enak nič. Za poljubno Lipschitzevo funkcijo f torej dobimo:

$$\left|\mathbb{E} f(W) - \mathrm{N}(0, 1)\{f\}\right| \le 4\,M_1(f) \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{3.4.14}$$

kar je nekje vmes med (1.4.20) in (3.1.22). Podobno v večrazsežnem primeru (ob predpostavki, da je $\mathrm{Var}(W) = \mathbf{I}$) dobimo oceno:

$$\left|\mathbb{E} f(W) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f\}\right| \le \frac{\sqrt{2\pi}}{2} M_2(f) \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{3.4.15}$$

□

Videli smo, da se je pri neodvisnih slučajnih spremenljivkah člen z varianco pogojnih matematičnih upanj v ocenah (3.4.1) in (3.4.2) enostavno izničil. To je prej izjema kot pravilo, v splošnem ta člen nadalje ocenimo s četrtimi momenti, podobno kot v (3.1.22), (3.5.7) in (3.5.9) ter tudi v naslednjem zgledu, ki ponovno obravnava slučajne permutacije.

Zgled 3.4.2. *Slučajne permutacije*. Podobno kot v zgledu 3.1.2 naj bo spet dana kvadratna matrika realnih števil $a(i,j)$, $1 \le i,j \le N$ (zadeva bi se dala gledati tudi v večrazsežnem primeru, a tu bomo zaradi enostavnosti obravnali le enorazsežni primer; več v razdelku 5.2). Naj bo spet π enakomerno porazdeljena slučajna permutacija in:

$$W := \sum_{i=1}^{N} a(i, \pi(i)) \tag{3.4.16}$$

V zgledu 3.1.2 smo brez škode za splošnost privzeli, da je $\mathbb{E}\, W = 0$. Tu bomo šli še nekoliko dlje. Če posamezni vrstici ali stolpcu naše matrike prištejemo kako konstanto, se tudi statistika W spremeni le za konstanto. Zato smemo brez škode za splošnost privzeti, da za vsak i velja:

$$\sum_{j=1}^{N} a(i,j) = 0 \tag{3.4.17}$$

in da za vsak j velja:

$$\sum_{i=1}^{N} a(i,j) = 0 \tag{3.4.18}$$

Prav tako bomo brez škode za splošnost privzeli, da je:

$$\operatorname{var}(W) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a(i,j)^2 = 1 \tag{3.4.19}$$

Slučajna spremenljivka W je definirana kot vsota slučajnih spremenljivk: velja $W = \sum_{i=1}^{N} X_i$, kjer je:

$$X_i = a(i, \pi(i)) \tag{3.4.20}$$

Če želimo uporabiti izrek 3.4.1, moramo konstruirati slučajne spremenljivke X_i' in W_i, za katere bo veljalo, da je slučajni vektor (W_i, X_i') porazdeljen enako kot (W, X_i). V (3.3.3) smo že nakazali, kako to gre. Vzemimo najprej neodvisno kopijo π' slučajne permutacije π in definirajmo:

$$X_i' := a(i, \pi'(i)) \tag{3.4.21}$$

Nadalje postavimo:

$$W_i := \sum_{k=1}^{N} a(k, \pi_{i \to \pi'(i)}(k)) = \sum_{k=1}^{N} a\Big(k, \tau_{\pi(i),\pi'(i)}(\pi(k))\Big) \tag{3.4.22}$$

Tedaj ni težko preveriti, da X_i' in W_i ustrezata našim zahtevam.

Zdaj moramo le še oceniti desno stran ocene (3.4.1). Najprej opazimo, da velja:

$$R_i = W_i - W = -a\Big(i, \pi(i)\Big) - a\Big(\pi^{-1}(\pi'(i)), \pi'(i)\Big) + a\Big(i, \pi'(i)\Big) + a\Big(\pi^{-1}(\pi'(i)), \pi(i)\Big) \tag{3.4.23}$$

Iz Jensenove neenakosti med aritmetično in geometrično sredino sledi:

$$R_i^2 \le 4\left[a\Big(i, \pi(i)\Big)^2 + a\Big(\pi^{-1}(\pi'(i)), \pi'(i)\Big)^2 + a\Big(i, \pi'(i)\Big)^2 + a\Big(\pi^{-1}(\pi'(i)), \pi(i)\Big)^2\right] \tag{3.4.24}$$

Ko upoštevamo še neenakost $xy^2 \leq \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}y^3$, ki velja za poljubna $x, y \geq 0$, nadalje dobimo:

$$\begin{aligned} |X_i'|R_i^2 \leq \frac{16}{3}\left|a\big(i,\pi'(i)\big)\right|^3 + \frac{8}{3}\left|a\big(i,\pi(i)\big)\right|^3 + \frac{8}{3}\left|a\big(\pi^{-1}(\pi'(i)),\pi'(i)\big)\right|^3 + \\ + \frac{8}{3}\left|a\big(i,\pi'(i)\big)\right|^3 + \frac{8}{3}\left|a\big(\pi^{-1}(\pi'(i)),\pi(i)\big)\right|^3 \end{aligned} \tag{3.4.25}$$

Ob upoštevanju simetrije iz tega dobimo naslednjo oceno prvega člena v (3.4.1):

$$\sum_{i=1}^N \mathbb{E}\,|X_i'|R_i^2 \leq \frac{16}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \left|a(i,j)\right|^3 \tag{3.4.26}$$

Oceniti moramo še drugi člen v (3.4.1). Pri neodvisnih slučajnih spremenljivkah je le-ta prišel enak nič, tukaj pa bo njegova ocena podobno zahtevna kot v zgledu 3.1.2. Naj bo $\mathcal{H}$ σ-algebra, ki jo generira π. Ob upoštevanju (3.4.17) in (3.4.18) izračunamo:

$$\sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i'R_i \mid \pi) = -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N a(i,j)^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N a(i,j)\,a(\pi^{-1}(j),\pi(i)) \tag{3.4.27}$$

Prvi člen je konstanten in zato nič ne vpliva na varianco. Sledi:

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i'R_i \mid \pi)\right) = \frac{1}{N^2}\operatorname{var}(t(\pi)) \tag{3.4.28}$$

kjer je:

$$t(\pi) = \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N a(i,j)\,a(\pi^{-1}(j),\pi(i)) = \sum_{i=1}^N\sum_{k=1}^N a(i,\pi(k))\,a(k,\pi(i)) \tag{3.4.29}$$

Tako kot v zgledu 3.1.2 smo tudi tu dobili dvojno indeksirano permutacijsko statistiko. Njeno varianco bomo ocenili precej na grobo. Pišimo $t(\pi) = t_1(\pi) + t_2(\pi)$, kjer je:

$$t_1(\pi) = \sum_{i=1}^N a(i,\pi(i))^2\,, \quad t_2(\pi) = 2\sum_{i<k} a(i,\pi(k))\,a(k,\pi(i)) \tag{3.4.30}$$

in preprosto ocenimo:

$$\operatorname{var}(t(\pi)) \leq 2\Big[\operatorname{var}(t_1(\pi)) + \operatorname{var}(t_2(\pi))\Big] \tag{3.4.31}$$

Obe varianci ocenimo po lemi 3.1.2. Dobimo:

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(t_1(\pi)) &\leq 3\sum_{i=1}^N \mathbb{E}\,a(i,\pi(i))^4 \\ \operatorname{var}(t_2(\pi)) &\leq 96(N-1)\sum_{i<k}\mathbb{E}\,a(i,\pi(k))^2 a(k,\pi(i))^2 = \\ &= 48(N-1)\sum_{i\neq k}\mathbb{E}\,a(i,\pi(k))^2\,a(k,\pi(i))^2 \end{aligned}$$

Iz Jensenove neenakosti sledi:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(t(\pi)) &\le 96N \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}\, a(i,\pi(k))^2\, a(k,\pi(i))^2 \le \\
&\le 48N \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}\Big[a(i,\pi(k))^4 + a(k,\pi(i))^4\Big] = \\
&= 96N \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a(i,j)^4
\end{aligned}
\tag{3.4.32}
$$

Iz (3.4.1), (3.4.26), (3.4.28) in (3.4.32) končno dobimo:

$$
\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| \le M_1(f)\left\{\frac{16}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\big|a(i,j)\big|^3 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{6}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a(i,j)^4\right]^{1/2}\right\}
\tag{3.4.33}
$$

kar je tako kot v (3.1.44), le da je drugi člen ocenjen bolje. □

Sklapljanje s pogojnimi porazdelitvami je torej dalo podobne rezultate kot sklapljanje z izmenljivim parom. Pomembnejša od rezultatov samih pa je njegova ideja, saj vodi do novih, bolj rafiniranih načinov ocenjevanja, ki jih bomo obravnavali v naslednjih razdelkih. Z njihovo pomočjo bomo lahko napako ocenili brez četrtih momentov, kar je pomembna kakovostna izboljšava.

3.5 Razčlenitve prvega reda

Kot ponavadi se bomo tudi tu ukvarjali z vsotami oblike $W := X_1 + \cdots + X_n$. V prejšnjem razdelku smo konstruirali slučajne spremenljivke W_i, za katere je veljalo, da je slučajni vektor (X_i', W_i) porazdeljen enako kot (X_i, W), X_i' pa je bila neodvisna od $(X_1, \ldots X_n)$. Vse konstrukcije, ki smo jih navedli za zgled, pa so izpolnjevale še dodaten pogoj: ne le, da se je pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke W_i pri $X_i' = x$ ujemala s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke W pri $X = x$, to je veljalo tudi za pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke W_i pri $X_i' = x$ *in* $X_i = y$. Z drugimi besedami, W_i je bila pogojno na X_i' neodvisna od X_i. Zaradi neodvisnosti slučajne spremenljivke X_i' od X_i pa to pomeni, da je bila tudi W_i neodvisna od X_i.

Izkaže se, da je ta preprosta zahteva dovolj, da lahko izpeljemo še eno oceno Steinovega matematičnega upanja. Slučajno spremenljivko W smo torej *razčlenili* na slučajno spremenljivko W_i, neodvisno od X_i, in ostanek, s pomočjo katerega se bo izražala ocena napake pri normalni aproksimaciji.

Izrek 3.5.1. *Naj bodo $X_1, \ldots X_n$ slučajne spremenljivke z vsoto W ter naj velja $\mathbb{E}\, X_i = 0$ in* $\operatorname{var}(W) = 1$. *Za vsak i naj bo dana še slučajna spremenljivka W_i, neodvisna od X_i. Naj bo še $\mathcal{H}$ poljubna σ-algebra, glede na katero je slučajna spremenljivka W merljiva. Tedaj za vsako Lipschitzevo funkcijo f velja:*

$$
\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| \le M_1(f)\left\{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\,|X_i| R_i^2 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i R_i \mid \mathcal{H})\right)\right]^{1/2}\right\}
\tag{3.5.1}
$$

kjer je $R_i := W_i - W$.

Če pa so X_i, W in W_i slučajni vektorji z vrednostmi v $\mathbb{R}^d$, ki ustrezajo istim predpostavkam kot ustrezne slučajne spremenljivke zgoraj (namesto $\operatorname{var}(W) = 1$ *privzamemo* $\operatorname{Var}(W) = \mathbf{I}$*), za vsako funkcijo $f \in \flat^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ velja ocena:*

$$\left|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f\}\right| \le M_2(f) \left\{ \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\, |X_i|\, |R_i|^2 + \frac{1}{2} \left[d \operatorname{sl} \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i R_i \mid \mathcal{H}) \right) \right]^{1/2} \right\} \tag{3.5.2}$$

Opomba. Razčlenitve prvega reda so poseben primer konstrukcije, ki nastopa v X. poglavju Steinove monografije [125] in enorazsežni del izreka 3.5.1 je poseben primer izreka 1 v omenjenem poglavju na strani 147.

Dokaz izreka 3.5.1. Začnemo tako kot pri dokazu izreka 3.4.1. Spet naj bo g katera od rešitev Steinove enačbe:

$$\Delta g(w) - g'(w) w = f(w) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f\} \tag{3.5.3}$$

iz izreka 2.6.1. Velja:

$$\mathbb{E}\Big[\Delta g(W) - g'(W) W\Big] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[g''(W)\, \mathbb{E}\, X_i W - g'(W) X_i\Big] \tag{3.5.4}$$

Ker je W_i neodvisna od X_i in še $\mathbb{E}\, X_i = 0$, nadalje velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\Delta g(W) - g'(W) W\Big] &= -\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[g''(W)\, \mathbb{E}\, X_i R_i + \big(g'(W) - g'(W_i)\big) X_i\Big] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[g''(W)(X_i' R_i - \mathbb{E}\, X_i' R_i) + (1-\theta) g'''(W + \theta R_i) X_i' R_i^2\Big] \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

kjer je spet θ porazdeljena enakomerno po $[0, 1]$ in neodvisna od vsega ostalega. Preostanek dokaza je enak kot pri izreku 3.4.1. ■

Zgled 3.5.1. *Neodvisne slučajne spremenljivke.* Vzemimo spet vsoto neodvisnih slučajnih spremenljivk $W := X_1 + \cdots + X_n$ z $\mathbb{E}\, X_i = 0$ in $\operatorname{Var}(W) = 1$. Tokrat preprosto postavimo $W_i := W - X_i$, torej je kar $R_i = -X_i$. Toda drugi člen v oceni (3.5.1) zdaj ni enak nič. Če za $\mathcal{H}$ postavimo σ-algebro, ki jo generirajo slučajne spremenljivke $X_1, \ldots X_n$, dobimo $\mathbb{E}(X_i R_i \mid \mathcal{H}) = -X_i^2$, torej velja:

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i R_i \mid \mathcal{H}) \right) = \operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i^2) \le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\, X_i^4 \tag{3.5.6}$$

Iz izreka 3.5.1 torej sledi:

$$\left|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0, 1)\{f\}\right| \le M_1(f) \left\{ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\, |X_i|^3 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\, X_i^4 \right]^{1/2} \right\} \tag{3.5.7}$$

kar je podobno kot (3.1.22), le z boljšo konstanto pri členu s tretjimi momenti, a slabšo pri členu s četrtimi.

Podobno lahko tudi v večrazsežnem primeru ocenimo:

$$\operatorname{sl}\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i R_i \mid \mathcal{H})\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sl}\operatorname{Var}(X_i^2) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_i^2 - \mathbb{E}\,X_i^2|^2 \le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_i|^4 \tag{3.5.8}$$

(z $|\cdot|$ smo označili evklidsko normo, tako na vektorjih kot tudi na kovariantnih 2-tenzorjih). Sledi:

$$\left|\mathbb{E}\,f(W) - \mathrm{N}(0,\mathbf{I})\{f\}\right| \le M_2(f)\left\{\frac{\sqrt{2\pi}}{8}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\,|X_i|^3 + \frac{1}{2}\left[d\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\,|X_i|^4\right]^{1/2}\right\} \tag{3.5.9}$$

□

Zgled 3.5.2. *Slučajne permutacije*. Naj bo spet $W = \sum_{i=1}^{N} a(i,\pi(i))$, kjer je π enakomerno porazdeljena slučajna permutacija. Slučajno spremenljivko W_i, neodvisno od $X_i = a(i,\pi(i))$, konstruiramo tako, da π nadomestimo s $\pi_{i\to J}$, kjer je J enakomerno porazdeljen slučajni indeks, neodvisen od vsega ostalega. Z drugimi besedami, definirajmo:

$$W_i := \sum_{k=1}^{N} a\Big(k, \tau_{\pi(i),J}(\pi(k))\Big) \tag{3.5.10}$$

Druga možnost pa je, da namesto levega vzamemo desni kompozitum, tako da postavimo:

$$W_i := \sum_{k=1}^{N} a\Big(k, \pi(\tau_{i,I}(k))\Big) \tag{3.5.11}$$

kjer je spet I enakomerno porazdeljen in neodvisen od vsega ostalega. V obeh primerih ni težko preveriti, da je W_i neodvisna od X_i. Napako pri normalni aproksimaciji ocenimo na podoben način kot v prejšnjem razdelku. Podrobnosti so prepuščene bralcu. □

Zgled 3.5.3. *Lokalna odvisnost*. Naj bo $W = \sum_{i\in\mathcal{I}} X_i$, kjer je $\mathcal{I}$ končna indeksna množica (obravnavati bi se sicer dalo tudi neskončne indeksne množice, a se bomo zaradi enostavnosti omejili zgolj na končne). Za vsak $i \in \mathcal{I}$ naj obstaja taka množica $\mathcal{J}_i \subseteq \mathcal{I}$, da je družina $\{X_j \,;\, j \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}_i\}$ neodvisna od i. Pravimo, da je $\mathcal{J}_i$ *okolica odvisnosti* za indeks i, za slučajne spremenljivke X_i pa, da so *lokalno odvisne*.

Lokalna odvisnost se naravno pojavlja v veliko primerih. Največ primerov je pri statistikah na grafih (glej 6. poglavje), pomemben primer lokalne odvisnosti pa so tudi U-statistike na vzorcih, pri katerih so elementi med seboj neodvisni (glej razdelek 5.1).

Povezava med Steinovo metodo in lokalno odvisnostjo je zelo tesna. Obravnava jo že Stein [125] (glej opombo na koncu), pomembne rezultate pa so dosegli tudi Barbour, Karoński in Ruciński [7] (več o njihovem prispevku v razdelku 3.9) ter še Rinott [103], Rinott in Rotar [104] ter Chen in Shao [41].

Lokalno odvisnost lahko predstavimo tudi z usmerjenim grafom. Množica njegovih oglišč naj bo kar i, povezava od i do j pa naj obstaja, če je $j \in \mathcal{J}_i$. V tem delu pa se bomo omejili na nekoliko enostavnejši koncept lokalne odvisnosti, ki ga je vpeljal Rinott [103] in v večini primerov zadošča, temelji pa na *neusmerjenih grafih*.

Definicija. Neusmerjen graf Γ na množici oglišč $\mathcal{I}$ je *graf odvisnosti* za družino slučajnih spremenljivk $\{X_i\,;\,i\in\mathcal{I}\}$, če za poljubni podmnožici $\mathcal{K},\mathcal{L}\subseteq\mathcal{I}$, med katerima ne obstaja nobena povezava, velja, da sta družini slučajnih spremenljivk $\{X_k\,;\,i\in\mathcal{K}\}$ in $\{X_l\,;\,l\in\mathcal{L}\}$ neodvisni.

Razčlenitve so pri lokalni odvisnosti očitne: če je Γ graf odvisnosti za družino $\{X_i\,;\,i\in\mathcal{I}\}$, preprosto postavimo:

$$R_i := \sum_{j;j\sim i} X_j \tag{3.5.12}$$

kjer smo z $\sim$ označili relacijo sosednosti (pri čemer vzamemo, da je $i\sim i$). Kot ponavadi privzemimo še, da je $\mathbb{E}\,X_i=0$ za vse i in še, da je $\mathrm{var}(W)=1$ (zaradi enostavnosti se bomo omejili le za enorazsežni primer; na več dimenzij posplošimo brez težav). Ocenimo sedaj desno stran neenačbe (3.5.1). Najprej po Jensenovi neenakosti ocenimo:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}}\mathbb{E}\,|X_i|R_i^2\le\sum_{i\sim j,i\sim k}\mathbb{E}\,|X_i|\,|X_j|\,|X_k|\le\frac{1}{3}\sum_{i\sim j,i\sim k}\Big(\mathbb{E}\,|X_i|^3+\mathbb{E}\,|X_j|^3+\mathbb{E}\,|X_k|^3\Big) \tag{3.5.13}$$

Naj bo D maksimalna stopnja posameznega oglišča v grafu Γ, povečana za ena (t. j. maksimalno število sosedov posameznega oglišča vključno s samim sabo). Tedaj je za vsak $i\in\mathcal{I}$ število parov (j,k), za katere velja $i\sim j\sim k$, manjše ali enako D^2. Podobno velja tudi za indeksa j in k. Torej velja:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}}\mathbb{E}\,|X_i|R_i^2\le D^2\sum_{i\in\mathcal{I}}\mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{3.5.14}$$

Ocenimo še drugi člen na desni strani ocene (3.5.1). Za $\mathcal{H}$ postavimo kar σ-algebro, ki jo generirajo vse slučajne spremenljivke X_i. Tedaj velja:

$$\mathrm{var}\left(\sum_{i\in\mathcal{I}}\mathbb{E}(X_iR_i\mid\mathcal{H})\right)=\mathrm{var}\sum_{i\sim j}X_iX_j=\sum_{\substack{i\sim j\\k\sim l}}\mathrm{cov}(X_iX_j,X_kX_l) \tag{3.5.15}$$

Za dani podmnožici $A,B\subseteq\mathcal{I}$ označimo $A\sim B$, če med A in B obstaja vsaj ena povezava ali pa je njun presek neprazen. Brž ko je $\{i,j\}\nsim\{k,l\}$, je očitno $\mathrm{cov}(X_iX_j,X_kX_l)=0$. Torej velja:

$$\mathrm{var}\left(\sum_{i\in\mathcal{I}}\mathbb{E}(X_iR_i\mid\mathcal{H})\right)=\sum_{\substack{i\sim j\\k\sim l\\\{i,k\}\sim\{k,l\}}}\mathrm{cov}(X_iX_j,X_kX_l) \tag{3.5.16}$$

Zdaj pa kovariance ocenimo po (3.1.51), potem pa uporabimo še oceno $\mathbb{E}\,UV\le\frac{1}{2}(\mathbb{E}\,U^2+\mathbb{E}\,V^2)$. Dobimo:

$$\mathrm{var}\left(\sum_{i\in\mathcal{I}}\mathbb{E}(X_iR_i\mid\mathcal{H})\right)\le\frac{1}{4}\sum_{\substack{i\sim j\\k\sim l\\\{i,k\}\sim\{k,l\}}}\Big(\mathbb{E}\,X_i^4+\mathbb{E}\,X_j^4+\mathbb{E}\,X_k^4+\mathbb{E}\,X_l^4\Big) \tag{3.5.17}$$

Podobno kot prej je za vsak indeks i število trojic (j, k, l), za katere je $i \sim j$, $k \sim l$ in še $\{i, j\} \sim \{k, l\}$, manjše ali enako $4D^3$. Podobne ocene veljajo tudi za indekse j, k in l. Tako dobimo:

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}(X_i R_i \mid \mathcal{H})\right) \leq 4D^3 \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}\, X_i^4 \tag{3.5.18}$$

Iz (3.5.1), (3.5.14) in (3.5.18) zdaj končno dobimo:

$$\left|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\right| \leq M_1(f)\left\{D^2 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_i|^3 + \frac{4D^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\, X_i^4\right]^{1/2}\right\} \tag{3.5.19}$$

□

Opomba. Ocena (3.5.19) je poseben primer posledice 2 na strani 110 v X. poglavju Steinove monografije [125].

Opomba. Pri $D = 1$ se lokalna odvisnost zreducira na primer, ko so slučajne spremenljivke X_i neodvisne. Tudi ocena (3.5.19) se prevede na oceno (3.5.7), le da je konstanta pri členu s četrtimi momenti dvakrat prevelika. Slabšo konstanto smo dobili zato, ker smo za dani i pregrobo ocenili število trojic (j, k, l), za katere je $i \sim j$, $k \sim l$ in $\{i, j\} \sim \{k, l\}$. Res pa je, da se z naraščajočim D to vse manj pozna.

3.6 Kumulativna prema utežitev

Kumulativna prema utežitev (angl. *zero biassed transformation*) izhaja iz preme utežitve in odpravlja nekatere njene hibe. Prva in najhujša je, da je prema utežitev omejena na nenegativne slučajne spremenljivke. Z uporabo relativnih premih uteženk se da ta hiba precej omiliti, a je treba slučajne spremenljivke še vedno razdeliti na pozitivni in negativni del. Tudi to se da odpraviti, tako da se napaka pri normalni aproksimaciji oceni neposredno z uporabo sklapljanj s pogojnimi porazdelitvami. Še vedno pa je, kot smo videli, nadaljnje ocenjevanje splošnih meja za napako pri normalni aproksimaciji lahko precej zahtevno in zahteva četrte momente. Kumulativna prema utežitev to hibo odpravi, v splošnem so potrebni le tretji momenti. Je pa res, da je njena konstrukcija malo zahtevnejša.

Pri premi utežitvi od slučajne spremenljivke W^* zahtevamo, da za vsako omejeno in merljivo funkcijo f velja zveza $\mathbb{E}\, f(W)W = \mathbb{E}\, W\, \mathbb{E}\, f(W^*)$; pri kumulativni premi utežitvi pa bomo zahtevali, da za neko konstanto c velja $\mathbb{E}\, f(W)W = c\, \mathbb{E}\, f'(W^*)$, brž ko je f zvezno odvedljiva, in ima omejen odvod. Seveda moramo tedaj za slučajno spremenljivko W zahtevati, da je $\mathbb{E}\, W^2 < \infty$. Poleg tega, če vstavimo $f(x) := 1$, dobimo, da mora veljati $\mathbb{E}\, W = 0$. Če pa vstavimo $f(x) := x$, dobimo, da mora veljati $c = \mathbb{E}\, W^2$.

Definicija. Naj bo W realna slučajna spremenljivka z $0 < \mathbb{E}\, W^2 < \infty$ in $\mathbb{E}\, W = 0$. Slučajna spremenljivka W^* ima *kumulativno premo uteženo* porazdelitev slučajne spremenljivke W, če za vsako zvezno odvedljivo funkcijo f, ki ima omejen odvod, velja zveza:

$$\mathbb{E}\, f(W)W = \mathbb{E}\, W^2\, \mathbb{E}\, f'(W^*) \tag{3.6.1}$$

Opomba. Pogoj, da je $\mathbb{E}\, W = 0$, je potreben; prav tako faktorja $\mathbb{E}\, W^2$ na desni ne moremo zamenjati z nobenim drugim. V to se zlahka prepričamo, če v enačbo vstavimo $f(w) = 1$ in $f(w) = w$.

Uporaba kumulativne preme utežitve pri Steinovi metodi se prvič pojavi v članku, katerega avtorja sta Goldstein in Reinert [62] in ki kot zgled obravnava enostavno slučajno vzorčenje. Še več zgledov pa obravnavata nadaljnja Goldsteinova članka [61] in [60].

Opomba. Kumulativno premo utežitev smo definirali le za enorazsežni primer. V članku [62] so nakazane tudi posplošitve na večrazsežni primer, ki pa je mi ne bomo obravnavali, zato pa bomo v naslednjem razdelku napako pri večrazsežni normalni aproksimaciji ocenili na bolj neposreden način, ki izhaja iz konstrukcije sklapljanj s kumulativnimi premimi utežitvami.

V definiciji smo že navedli dva potrebna pogoja za obstoj kumulativnih premih utežitev. Nastane vprašanje, ali sta tudi zadostna. Odgovor je pritrdilen. Označimo z μ porazdelitev slučajne spremenljivke W, za katero naj velja $\mathbb{E}\, W^2 < \infty$ in $\mathbb{E}\, W = 0$. Tedaj za vsako zvezno odvedljivo funkcijo f z omejenim odvodom velja:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\, f(W)W &= \int_{-\infty}^{\infty} f(w)w\, \mu(\mathrm{d}w) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \big(f(w) - f(0)\big) w\, \mu(\mathrm{d}w) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{w} f'(z)\, \mathrm{d}z\, w\, \mu(\mathrm{d}w) = \\
&= \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{w} f'(z)\, \mathrm{d}z\, w\, \mu(\mathrm{d}w) - \int_{-\infty}^{0} \int_{w}^{0} f'(z)\, \mathrm{d}z\, w\, \mu(\mathrm{d}w) = \\
&= \int_{0}^{\infty} \int_{z}^{\infty} f'(z)\, w\, \mu(\mathrm{d}w)\, \mathrm{d}z - \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{z} f'(z)\, w\, \mu(\mathrm{d}w)\, \mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{3.6.2}$$

Toda ker je $\mathbb{E}\, W = 0$, je tudi $\int_{-\infty}^{z} w\, \mu(\mathrm{d}w) = -\int_{z}^{\infty} w\, \mu(\mathrm{d}w)$. Sledi:

$$\mathbb{E}\, f(W)W = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(z) \int_{-\infty}^{z} w\, \mu(\mathrm{d}w)\, \mathrm{d}z \tag{3.6.3}$$

To pomeni, da je W^* kumulativna prema uteženka slučajne spremenljivke W natanko tedaj, ko za vsako zvezno omejeno funkcijo g velja:

$$\mathbb{E}\, W^2\, \mathbb{E}\, g(W^*) = -\int_{-\infty}^{\infty} g(z) \int_{-\infty}^{z} w\, \mu(\mathrm{d}w)\, \mathrm{d}z \tag{3.6.4}$$

Iz zapisa v zadnji vrstici verige enakosti (3.6.2) se vidi, da desna stran v (3.6.4) predstavlja pozitiven linearni funkcional na zveznih funkcijah s kompaktnim nosilcem. Po Rieszovem izreku obstaja natanko ena pozitivna mera μ^*, za katero je $\mu^*(g)$ enak desni strani v (3.6.4) za vsako zvezno funkcijo s kompaktnim nosilcem. To pa zagotovo velja za mero, določeno s predpisom:

$$\mu^*(A) := -\int_A \int_{-\infty}^{z} w\,\mu(\mathrm{d}w)\,\mathrm{d}z \tag{3.6.5}$$

Mera μ^* je absolutno zvezna glede na Lebesguovo mero, njena gostota pa je enaka kumulativi preme utežitve porazdelitve slučajne spremenljivke W. To tudi upravičuje izraz *kumulativna prema utežitev*.

Ni se težko prepričati, da je $\mu^*(\mathbb{R}) = \mathbb{E}\,W^2 < \infty$ (to spet sledi iz zapisa v zadnji vrstici verige enakosti (3.6.2)). Po izreku o dominirani konvergenci pa mora biti potem $\mu^*(g)$ enak desni strani (3.6.4) za *vsako omejeno merljivo funkcijo* g. Z drugimi besedami, slučajna spremenljivka W^* je prema uteženka slučajne spremenljivke W natanko tedaj, ko zveza (3.6.4) velja za vsako omejeno merljivo funkcijo g.

Naj bo zdaj f poljubna Lipschitzeva funkcija. Zaradi absolutne zveznosti je f skoraj povsod odvedljiva in integral svojega odvoda, njen odvod pa je po absolutni vrednosti omejen z neko konstanto povsod na množici, kjer obstaja. Ker zveza (3.6.3) velja, če je f' poljubna verzija odvoda funkcije f, dobimo, da mora, če je W^* kumulativna prema uteženka slučajne spremenljivke W, zveza (3.6.1) veljati za poljubno Lipschitzevo funkcijo f in poljubno verzijo njenega odvoda. Dokazali smo naslednji rezultat.

Trditev 3.6.1. *Brž ko je* $0 < \mathbb{E}\,W^2 < \infty$ *in* $\mathbb{E}\,W = 0$, *kumulativno premo utežena porazdelitev obstaja in je natančno določena. Še več, zveza* (3.6.1) *velja za poljubno Lipschitzevo funkcijo* f *in poljubno verzijo njenega odvoda.* ∎

Povezava med kumulativno premo utežitvijo in normalno aproksimacijo je razvidna že iz naslednjega opažanja.

Trditev 3.6.2. *Naj bo* $W \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$. *Tedaj je* W^* *enako porazdeljena kot* W.

Dokaz. Označimo s ϕ standardizirano Gaussovo gostoto, t. j. $\phi(z) = (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2}$. Tedaj z integacijo per partes dobimo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,f(W)W &= \frac{1}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} f(w) w\,\phi\left(\frac{w}{\sigma}\right)\mathrm{d}w = \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f(w)\,\phi'\left(\frac{w}{\sigma}\right)\mathrm{d}w = \\
&= \sigma\int_{-\infty}^{\infty} f'(w)\,\phi\left(\frac{w}{\sigma}\right)\mathrm{d}w = \\
&= \sigma^2\,\mathbb{E}\,f(W)
\end{aligned} \tag{3.6.6}$$

∎

Sklapljanje s kumulativno premo utežitvijo je kot naročeno za ocenjevanje Steinovega matematičnega upanja in s tem napake pri normalni aproksimaciji. Merilo za razdaljo med porazdelitvijo slučajne spremenljivke W in normalno porazdelitvijo je preprosto razlika med W in W^*. V posebnem primeru dobimo tudi obrat zgornje trditve: brž ko je W^* enako porazdeljena kot W, mora biti W porazdeljena normalno.

Izrek 3.6.3 (Goldstein, Reinert). *Naj bo W slučajna spremenljivka, za katero velja* $\mathbb{E}\,W = 0$ *in* $\operatorname{var}(W) = 1$, *$W^*$ pa naj bo njena kumulativna prema uteženka. Tedaj za vsako Lipschitzevo funkcijo f velja:*

$$\left|\mathbb{E}\,f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\right| \le 2\,M_1(f)\,\mathbb{E}\,|W^* - W| \tag{3.6.7}$$

Dokaz. Naj bo h rešitev Steinove enačbe:

$$h'(w) - h(w)w = f(w) - \mathrm{N}(0,1)\{f\} \tag{3.6.8}$$

iz leme 1.4.1. Tedaj velja:

$$\left|\mathbb{E}\Big[h'(W) - h(W)W\Big]\right| = \left|\mathbb{E}\Big[h'(W) - h'(W^*)\Big]\right| \le M_2(h)\,\mathbb{E}\,|W^* - W| \tag{3.6.9}$$

Dokaz zaključimo z opažanjem, da iz točke (3) leme 1.4.1 sledi $M_2(h) \le 2\,M_1(f)$. ■

Glede konstrukcij sklapljanj s kumulativnimi premimi utežitvami pa bomo naredili podobno kot pri premih utežitvah. V naslednjem razdelku bomo konstrukcijo sicer prikazali, napako pri normalni aproksimaciji pa ocenili bolj neposredno, brez dejanske konstrukcije kumulativnih premih uteženk. Še eno konstrukcijo kumulativne preme utežitve bomo opisali tudi v (3.9.14). Spet pa bomo na tem mestu s kumulativno premo utežitvijo izpeljali ceno napake za vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk. Uporabili bomo različico trditve 3.2.2.

Trditev 3.6.4. *Naj bodo $X_1, \dots X_n$ neodvisne nenegativne slučajne spremenljivke z vsoto W ter naj bo $\mathbb{E}\,X_i^2 < \infty$ in $\mathbb{E}\,X_i = 0$ za vsak i. Označimo $\sigma_i^2 := \operatorname{var}(X_i)$ in $\sigma^2 := \operatorname{var}(W)$. Privzemimo, da je $\sigma_i > 0$ (t. j. da X_i niso skoraj povsod enake nič). Nadalje naj bodo X_i^* kumulativne preme uteženke slučajnih spemenljivk X_i, neodvisne od $(X_1, \dots X_n)$, I pa naj bo slučajni indeks, neodvisen od vsega skupaj in porazdeljen po $\{1, \dots n\}$ sorazmerno s σ_i^2, t. j. $\mathbb{P}(I = i) = \sigma_i^2/\sigma^2$. Tedaj je slučajna spremenljivka:*

$$W^* := W - X_I + X_I^* \tag{3.6.10}$$

kumulativna prema uteženka slučajne spremenljivke W.

Dokaz. Naj bo f Lipschitzeva funkcija. Označimo še $W_i := W - X_i$. Tedaj zaradi neodvisnosti velja:

$$\mathbb{E}\,f(W)W = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,f(W_i + X_i)X_i = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\,\mathbb{E}\,f'(W_i + X_i^*) = \sigma^2\,\mathbb{E}\,f'(W_I + X_I^*) \tag{3.6.11}$$

torej je $W^* = W_I + X_I^*$ res prema uteženka. ■

Opomba. Podobno kot pri trditvi 3.2.2 smo tudi tu potrebovali le neodvisnost *posameznih* slučajnih spremenljivk X_i^* od $(X_1, \dots X_n)$.

Naj bodo torej X_i, W, σ_i, σ, X_i^*, I in W^* tako kot v trditvi 3.2.2. Privzemimo še, da je $\sigma = 1$. Tedaj velja:

$$\mathbb{E}\,|W^* - W| = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\,\mathbb{E}\,|X_i^* - X_i| \le \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\Big(\mathbb{E}\,|X_i^*| + \mathbb{E}\,|X_i|\Big) \tag{3.6.12}$$

Če v formulo (3.6.1) vstavimo $f(x) := x|x|$, dobimo, da je $\sigma_i^2\,\mathbb{E}\,|X_i^*| = \mathbb{E}\,|X_i|^3/2$. Poleg tega iz Jensenove neenakosti sledi, da je $\sigma^2\,\mathbb{E}\,|X_i| \le \mathbb{E}\,|X_i|^3$. Dobili smo torej:

$$\mathbb{E}\,|W^* - W| \le \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{3.6.13}$$

torej nam izrek 3.6.3 da:

$$\Big|\mathbb{E}\,f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| \le 3\,M_1(f)\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{3.6.14}$$

kar je isto kot v (1.4.20). Kumulativna prema utežitev je torej prva konstrukcija, ki nam je za vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk dala isto oceno kot neposredna izpeljava.

3.7 Konstrukcija kumulativnih premih uteženk

Sklapljanje s kumulativno premo utežitvijo se da konstruirati s pomočjo sklapljanja z izmenljivim parom iz razdelka 3.1. Ta konstrukcija je opisana v Goldsteinovem članku [61] in je različica konstrukcije iz starejšega članka [62], katerega avtorja sta Goldstein in Reinert. Ideja pravzaprav izhaja iz začetka izpeljave (3.6.2), s pomočjo katere smo pokazali obstoj kumulativnih premih utežitev. Začnemo tako kot pri izpeljavi (3.6.2), le da vse skupaj pišemo bolj v duhu slučajnih spremenljivk. Naj bo f Lipschitzeva funkcija, W slučajna spremenljivka z $\mathbb{E}\,W = 0$ in $\mathrm{var}(W) = 1$, θ pa naj bo kot ponavadi porazdeljena enakomerno po $[0,1]$ in neodvisna od vsega ostalega. Tedaj velja:

$$\mathbb{E}\,f(W)W = \mathbb{E}\Big(f(W) - f(0)\Big)W = \mathbb{E}\,f'(\theta W)W^2 \tag{3.7.1}$$

Naj bo zdaj $W^\dagger$ prema uteženka slučajne spremenljivke W glede na W^2. Tedaj velja:

$$\mathbb{E}\,f(W)W = \mathbb{E}\,f'(\theta W^\dagger)\,\mathbb{E}\,W^2 = \mathbb{E}\,f'(\theta W^\dagger) \tag{3.7.2}$$

torej je $\theta W^\dagger$ kumulativna prema uteženka slučajne spremenljivke W.

Tipično je težko konstruirati slučajno spremenljivko $W^\dagger$, ki bi bila blizu W, saj W^2 nosi peveč informacije. Zato je smiselno iskati posplošitve, ki bi zahtevale sklapljanja s premimi utežitvami glede na slučajne spremenljivke, ki nosijo malo informacije. Tu bomo pokazali, da se to da narediti z utežitvijo glede na slučajno spremenljivko $(W' - W)^2$, kjer je W' v grobem tako kot v razdelku (3.1.1).

Trditev 3.7.1. *Naj bosta W in W' izmenljivi slučajni spremenljivki, za kateri za neki $\lambda > 0$ velja zveza:*

$$\mathbb{E}(W' \mid W) = (1 - \lambda)W \tag{3.7.3}$$

Če je $\mathbb{E}\, W = 0$ in $(W^\dagger, W^\ddagger)$ prema uteženka slučajnega vektorja (W, W') glede na $(W' - W)^2$, θ pa enakomerno porazdeljena po $[0, 1]$ in neodvisna od vsega ostalega, je slučajna spremenljivka:

$$(1 - \theta)W^\dagger + \theta W^\ddagger \tag{3.7.4}$$

kumulativna prema uteženka slučajne spremenljivke W.

Opomba. Zahteva (3.7.3) je strožja od zahteve (3.1.1), ki dopušča še dodaten člen R. Če bi namesto (3.7.3) vzeli (3.1.1), bi konstruirali le "približno" kumulativno premo uteženko, tako da bi za oceno napake pri normalni aproksimaciji morali ustrezno prilagoditi tudi izrek 3.6.3. Pač pa bomo v nadaljevanju pokazali, da se da napaka pri normalni aproksimaciji oceniti tudi neposredno, brez konstrukcije uteženk; taka neposredna pa bi se dala lažje prilagoditi, tako da bi upoštevala še dodatni člen R.

Dokaz trditve 3.7.1. Iz zveze (3.1.6) in Taylorjevega razvoja okoli W sledi, da za poljubno Lipschitzevo funkcijo f velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\, f(W)W &= \frac{1}{2\lambda}\,\mathbb{E}\Big(f(W') - f(W)\Big)(W' - W) = \\ &= \frac{1}{2\lambda}\,\mathbb{E}\, f'\Big((1-\theta)W + \theta W'\Big)(W' - W)^2 = \\ &= \frac{1}{2\lambda}\,\mathbb{E}\, f'\Big((1-\theta)W^\dagger + \theta W^\ddagger\Big)\,\mathbb{E}(W' - W)^2\end{aligned} \tag{3.7.5}$$

Če vstavimo $f(w) = w$, dobimo, da je $\mathbb{E}(W' - W)^2/(2\lambda) = \mathbb{E}\, W^2$ in trditev je dokazana. ■

Ocenjevanje napake pri normalni aproksimaciji bi torej lahko potekalo takole: najprej konstruiramo ustrezno izmenljivo slučajno spremenljivko W', nato pa ustrezno relativno premo uteženko, ki bi jo tako kot v razdelku 3.3 konstruirali s pomočjo sklapljanj s pogojnimi porazdelitvami. Nato bi vse skupaj vstavili v izrek 3.6.3. Vendar pa bomo v naslednjem razdelku pokazali, da se da napaka pri normalni aproksimaciji oceniti tudi neposredno, brez konstrukcije uteženk, podobno kot smo to storili tudi v razdelku 3.4.

3.8 Ocene, dobljene neposredno iz dvojnih sklapljanj

V razdelku 3.4 smo konstrukcijo premih uteženk modificirali tako, da smo namesto premih uteženk sumandov vzeli kar njihove neodvisne kopije. Tudi konstrukcija kumulativnih premih uteženk iz prejšnjega razdelka je vključevala preme utežitve. Če namesto ustreznih premih uteženk spet vzamemo neodvisne kopije, dobimo naslednji rezultat.

Izrek 3.8.1. *Naj bosta W in W' izmenljivi slučajni spremenljivki z* $\mathbb{E}\, W = 0$ *in* $\operatorname{var}(W) = 1$, *za kateri za neki $\lambda > 0$ velja $\mathbb{E}(W' \mid W) = (1-\lambda)W$. Označimo $V := W' - W$ in naj bo $\hat{V}$ slučajna spremenljivka, porazdeljena enako kot V in neodvisna od (W, W'). Nadalje naj bo še $\hat{W}$ taka slučajna spremenljivka, da se porazdelitev slučajnega vektorja $(\hat{V}, \hat{W})$ ujema s porazdelitvijo slučajnega vektorja (V, W). Tedaj za poljubno Lipschitzevo funkcijo f velja ocena:*

$$\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| \le \frac{M_1(f)}{2\lambda}\, \mathbb{E}\, \hat{V}^2\Big(|\hat{W} - W| + |\hat{W} + \hat{V} - W|\Big) \tag{3.8.1}$$

Če pa so W, W', V, $\hat{V}$ in $\hat{W}$ slučajni vektorji z vrednostmi v $\mathbb{R}^d$ in z istimi lastnostmi, le da namesto $\operatorname{var}(W) = 1$ *privzamemo* $\operatorname{Var}(W) = \mathbf{I}$, *za poljubno funkcijo $f \in \flat^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ velja:*

$$\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,\mathbf{I})\{f\}\Big| \le \frac{\sqrt{2\pi}}{16}\, \frac{M_2(f)}{\lambda}\, \mathbb{E}\, |\hat{V}|^2\Big(|\hat{W} - W| + |\hat{W} + \hat{V} - W|\Big) \tag{3.8.2}$$

Dokaz. Naj bo g katera od rešitev Steinove enačbe:

$$\Delta g(w) = g'(w)w = f(w) - \mathrm{N}(0,\mathbf{I})\{f\} \tag{3.8.3}$$

iz izreka 2.6.1. Podobno kot v (3.7.5) izpeljemo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, g'(W)W &= \frac{1}{2\lambda}\, \mathbb{E}\Big(g'(W') - g'(W)\Big)V = \\ &= \frac{1}{2\lambda}\, \mathbb{E}\, g''\Big((1-\theta)W + \theta W'\Big)V^2 = \\ &= \frac{1}{2\lambda}\, \mathbb{E}\, g''\Big((1-\theta)\hat{W} + \theta \hat{W}'\Big)\hat{V}^2 \end{aligned} \tag{3.8.4}$$

kjer je $\hat{W}' := \hat{W} + \hat{V}$, θ pa porazdeljena enakomerno po $[0,1]$ in neodvisna od vsega ostalega. Nadalje je:

$$\mathbb{E}\, V^2 = \mathbb{E}(W^2 - 2WW' + W'^2) = \mathbb{E}\, W^2 - 2(1-\lambda)\,\mathbb{E}\, W^2 + \mathbb{E}\, W^2 = 2\lambda\mathcal{I} \tag{3.8.5}$$

torej je:

$$\mathbb{E}\, \Delta g(W) = \mathbb{E}\, g''(W)\mathcal{I} = \frac{1}{2\lambda}\, \mathbb{E}\, g''(W)\, \mathbb{E}\, V^2 = \frac{1}{2\lambda}\, \mathbb{E}\, g''(W)\hat{V}^2 \tag{3.8.6}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} \Big|\mathbb{E}\Big[\Delta g(W) - g'(W)W\Big]\Big| &= \frac{1}{2\lambda}\, \Big|\mathbb{E}\Big[g''(W) - g''\Big((1-\theta)\hat{W} + \theta\hat{W}'\Big)\Big]V^2\Big| \le \\ &\le \frac{M_3(g)}{2\lambda}\, \mathbb{E}\Big[(1-\theta)|\hat{W} - W| + \theta|\hat{W}' - W|\Big]|V|^2 \le \\ &\le \frac{M_3(g)}{4\lambda}\, \mathbb{E}\Big[|\hat{W} - W| + |\hat{W}' - W|\Big]|V|^2 \end{aligned} \tag{3.8.7}$$

Ker v enorazsežnem primeru po točki (3) leme 1.4.1 velja $M_3(g) \le 2\, M_1(f)$, v večrazsežnem primeru pa po točki (3) leme 2.6.2 velja $M_3(g) \le (\sqrt{2\pi}/4)\, M_2(f)$, od tod že sledita oceni (3.8.1) in (3.8.2). ∎

Zgled 3.8.1. *Neodvisne slučajne spremenljivke.* Spet naj bo $W = X_1 + \cdots + X_n$ vsota neodvisnih slučajnih spremenljivk z $\mathbb{E}\, X_i = 0$ in $\mathrm{var}(W) = 1$ (zaradi enostavnosti se omejimo na enorazsežni primer). Tako kot v zgledu 3.1.1 postavimo $W' := W - X_I + X'_I$, kjer je I slučajni indeks, enakomerno porazdeljen po $\{1, \ldots n\}$, X'_i pa neodvisna kopija slučajne spremenljivke X_i. Očitno sta W in W' izmenljivi, v zgledu 3.1.1 pa smo še izračunali, da velja $\mathbb{E}(W' \mid W) = (1 - 1/n)W$.

Naj bosta zdaj še $\hat{X}_i$ in $\hat{X}'_i$ nadaljnji neodvisni kopiji slučajnih spremenljivke X_i, ki naj bosta neodvisni tudi druga od druge in od celega vektorja $(X_1, \ldots X_n, X'_1, \ldots X'_n)$. Tedaj je $\hat{V} := \hat{X}'_I - \hat{X}_I$ neodvisna kopija slučajne spremenljivke $V = X'_I - X_I$. Ni težko preveriti, da slučajna spremenljivka $\hat{W} := W - X_I + \hat{X}_i$ zadošča pogojem izreka. Z uporabo neodvisnosti in Jensenove neenakosti ocenimo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\, \hat{V}^2 |\hat{W} - W| &= \mathbb{E}(\hat{X}'_I - \hat{X}_I)^2 |\hat{X}_I - X_I| \le \\
&\le \mathbb{E}\Big((\hat{X}'_I)^2 - 2\,\mathbb{E}\,\hat{X}'_I \hat{X}_I + \hat{X}_I^2\Big)\Big(|\hat{X}_I| + |X_I|\Big) = \\
&= \mathbb{E}\Big((\hat{X}'_I)^2 - 2\,\mathbb{E}\,\hat{X}'_I \hat{X}_I + \hat{X}_I^2\Big)|\hat{X}_I| + \mathbb{E}\Big((\hat{X}'_I)^2 + \hat{X}_I^2\Big)|X_I| \le \\
&\le 6\,\mathbb{E}\,|X_I|^3 = \\
&= \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_i|^3
\end{aligned} \tag{3.8.8}$$

Podobno tudi za slučajno spremenljivko $\hat{W} + \hat{V} = W - X_I + \hat{X}'_I$ velja ocena:

$$\mathbb{E}\, \hat{V}^2 |\hat{W} + \hat{V} - W| \le \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{3.8.9}$$

Iz izreka 3.8.1 zdaj dobimo:

$$\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| \le 3 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{3.8.10}$$

kar je isto kot v oceni (3.6.14), ki smo jo dobili z uporabo kumulativnih premih utežitev. □

Zgled 3.8.2. *Slučajne permutacije.* Naj bo spet $a(i,j)$, $1 \le i, j \le N$, kvadratna matrika realnih števil, π pa naj bo enakomerno porazdeljena slučajna permutacija. Obravnavamo normalno aproksimacijo slučajne spremenljivke:

$$W := w(\pi)\,, \quad w(\rho) := \sum_{i=1}^{N} a(i, \rho(i)) \tag{3.8.11}$$

V zgledu 3.1.2 smo že izračunali matematično upanje in varianco slučajne spremenljivke W. Seveda bomo privzeli, da je $\mathbb{E}\, W = 0$ in $\mathrm{var}(W) = 1$, drugih stvari pa ne bomo privzemali.

Tako kot v zgledu 3.1.2 definirajmo:

$$W' := w(\pi \circ \tau_{I,K}) \tag{3.8.12}$$

kjer je τ transpozicija, (I, K) pa je par slučajnih indeksov, neodvisen od π in enakomerno porazdeljen po vseh parih (i, k), za katere je $i \neq k$. V zgledu 3.1.2 smo že izračunali, da je:

$$\mathbb{E}(W' \mid W) = \left(1 - \frac{2}{N-1}\right) W \tag{3.8.13}$$

Konstruirajmo neodvisno kopijo slučajne spremenljivke:

$$V := W' - W = -a(I, \pi(I)) - a(K, \pi(K)) + a(I, \pi(K)) + a(K, \pi(I)) \tag{3.8.14}$$

na naslednji način: naj bosta $(\hat{I}, \hat{K})$ in $(\hat{J}, \hat{L})$ neodvisni kopiji slučajnega vektorja (I, K), neodvisni tako med seboj kot tudi od π. Tedaj je:

$$\hat{V} := -a(\hat{I}, \hat{J}) - a(\hat{K}, \hat{L}) + a(\hat{I}, \hat{L}) + a(\hat{K}, \hat{J}) \tag{3.8.15}$$

zagotovo neodvisna kopija slučajne spremenljivke V.

Potrebujemo še slučajno spremenljivko $\hat{W}$, za katero velja, da je par $(\hat{V}, \hat{W})$ enako porazdeljen kot (V, W). To bo zagotovo veljalo, če se bo pogojna porazdelitev slučajnega vektorja $\hat{W}$ pri $\hat{I} = i$, $\hat{J} = j$, $\hat{K} = k$ in $\hat{L} = l$ ujemala s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke W pri $I = i$, $\pi(i) = j$, $K = k$ in $\pi(k) = l$. Podobno kot permutacije $\pi_{i \to j}$ v (3.3.3) bomo tu konstruirali slučajne permutacije $\pi_{i \to j, k \to l}$, ki se bodo le malo razlikovale od π, njihova porazdelitev pa se bo ujemala s pogojno porazdelitvijo slučajne permutacije π glede na dogodek $\pi(i) = j$, $\pi(k) = l$. Tedaj bo slučajna spremenljivka:

$$\hat{W} := \sum_{i=1}^{N} a(i, \pi_{\hat{I} \to \hat{J}, \hat{K} \to \hat{L}}(i)) \tag{3.8.16}$$

zagotovo izpolnjevala zahtevani pogoj.

Naj bo torej $i \neq k$, $j \neq l$. Konstruirajmo slučajno permutacijo $\rho := \pi_{i \to j, k \to l}$. Ločimo več možnosti:

1. $\{j, l\} = \{\pi(i), \pi(k)\}$. V tem primeru naj bo $\rho(i) = j$, $\rho(k) = l$, drugje pa naj se ρ ujema s π.
2. $\pi(i) = j$, $\pi(k) \neq l$. V tem primeru vzamemo $\rho := \pi_{k \to l} = \tau_{\pi(k), l} \circ \pi$.
3. $\pi(k) = l$, $\pi(i) \neq j$. V tem primeru vzamemo $\rho := \pi_{i \to j} = \tau_{\pi(i), j} \circ \pi$.
4. $\pi(i) = l$, $\pi(k) \neq j$. V tem primeru vzamemo $\rho(i) := j$, $\rho(k) := l$, $\rho(\pi^{-1}(j)) := \pi(k)$, drugje pa naj se ρ ujema s π.
5. $\pi(k) = j$, $\pi(i) \neq l$. V tem primeru vzamemo $\rho(i) := j$, $\rho(k) := l$, $\rho(\pi^{-1}(l)) := \pi(i)$, drugje pa naj se ρ ujema s π.
6. $i \neq k$, $j \neq l$, $\{j, l\} \cap \{\pi(i), \pi(k)\} = \emptyset$. V tem primeru pa vzamemo $\rho(i) := j$, $\rho(k) = l$, $\rho(\pi^{-1}(j)) := \pi(i)$, $\rho(\pi^{-1}(l)) := \pi(k)$, drugje pa naj se ρ ujema s π.

Recimo, da je $\pi(i) = q$ in $\pi(k) = s$. Tedaj se da preveriti, da je $(\pi_{i \to j, k \to l})_{i \to q, k \to s} = \pi$. Naša transformacija torej vse permutacije, za katere je $\pi(i) = q$ in $\pi(k) = s$, bijektivno preslika v permutacije, za katere je $\pi(i) = j$ in $\pi(k) = l$. To pa pomeni, da se, če je π porazdeljena enakomerno, porazdelitev slučajne permutacije $\pi_{i \to j, k \to l}$ res ujema s pogojno porazdelitvijo slučajne permutacije π glede na $\pi(i) = j$, $\pi(k) = l$.

Opomba. Na podobnih konstrukcijah temeljijo mnogi rezultati, ki obravnavajo slučajne permutacije v povezavi s Steinovo metodo (glej Bolthausen [34], Schneller [116], [117], Barbour [10] ter Bolthausen in Götze [35]).

Ne glede na to, katera od zgornjih možnosti pride v poštev, se $\pi_{\hat{I}\to\hat{J},\hat{K}\to\hat{L}}$ razlikuje od π kvečjemu v točkah $\hat{I}$, $\hat{K}$, $\pi^{-1}(\hat{J})$ in $\pi^{-1}(\hat{L})$. Sledi:

$$\begin{aligned}\hat{W} - W = -a(\hat{I}, \pi(\hat{I})) - a(\hat{K}, \pi(\hat{K})) - a(\pi^{-1}(\hat{J}), \hat{J}) - a(\pi^{-1}(\hat{L}), \hat{L}) + \\ + a(\hat{I}, \hat{J}) + a(\hat{K}, \hat{L}) + a(\pi^{-1}(\hat{J}), \pi_{\hat{I}\to\hat{J},\hat{K}\to\hat{L}}(\pi^{-1}(\hat{J}))) + \\ + a(\pi^{-1}(\hat{L}), \pi_{\hat{I}\to\hat{J},\hat{K}\to\hat{L}}(\pi^{-1}(\hat{L})))\end{aligned} \tag{3.8.17}$$

iz (3.8.14) pa še:

$$\begin{aligned}\hat{W} + \hat{V} - W = -a(\hat{I}, \pi(\hat{I})) - a(\hat{K}, \pi(\hat{K})) - a(\pi^{-1}(\hat{J}), \hat{J}) - a(\pi^{-1}(\hat{L}), \hat{L}) + \\ + a(\hat{I}, \hat{L}) + a(\hat{K}, \hat{J}) + a(\pi^{-1}(\hat{J}), \pi_{\hat{I}\to\hat{J},\hat{K}\to\hat{L}}(\pi^{-1}(\hat{J}))) + \\ + a(\pi^{-1}(\hat{L}), \pi_{\hat{I}\to\hat{J},\hat{K}\to\hat{L}}(\pi^{-1}(\hat{L})))\end{aligned} \tag{3.8.18}$$

Ocena (3.8.1) nam torej da:

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\right| \le \frac{(N-1)\, M_1(f)}{4}\, \mathbb{E}\Big(\big|a(\hat{I}, \hat{J})\big| + \big|a(\hat{K}, \hat{L})\big| + \big|a(\hat{I}, \hat{L})\big| + \big|a(\hat{K}, \hat{J})\big|\Big)^2 \times \\ \times \Big(\big|2a(\hat{I}, \pi(\hat{I}))\big| + 2\big|a(\hat{K}, \pi(\hat{K}))\big| + 2\big|a(\pi^{-1}(\hat{J}), \hat{J})\big| + 2\big|a(\pi^{-1}(\hat{L}), \hat{L})\big| + \\ + \big|a(\hat{I}, \hat{J})\big| + \big|a(\hat{K}, \hat{L})\big| + \big|a(\hat{I}, \hat{L})\big| + \big|a(\hat{K}, \hat{J})\big| + \\ + 2\big|a(\pi^{-1}(\hat{J}), \pi_{\hat{I}\to\hat{J},\hat{K}\to\hat{L}}(\pi^{-1}(\hat{J})))\big| + \\ + 2\big|a(\pi^{-1}(\hat{L}), \pi_{\hat{I}\to\hat{J},\hat{K}\to\hat{L}}(\pi^{-1}(\hat{L})))\big|\Big)\end{aligned} \tag{3.8.19}$$

Izraz na desni zmnožimo in dobimo vsoto samih produktov oblike $cXYZ$, kjer je c konstanta, X, Y in Z pa so slučajne spremenljivke oblike $|a(R,S)|$, kjer sta R in S primerna slučajna indeksa. Če ocenimo $XYZ \le \frac{1}{3}(X^3 + Y^3 + Y^3)$, dobimo:

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\right| \le \frac{(N-1)\, M_1(f)}{3}\, \mathbb{E}\Big[36\big|a(\hat{I}, \hat{J})\big|^3 + 36\big|a(\hat{K}, \hat{L})\big|^3 + \\ + 36\big|a(\hat{I}, \hat{L})\big|^3 + 36\big|a(\hat{K}, \hat{J})\big|^3 + \\ + 8\big|a(\hat{I}, \pi(\hat{I}))\big|^3 + 8\big|a(\hat{K}, \pi(\hat{K}))\big|^3 + \\ + 8\big|a(\pi^{-1}(\hat{J}), \hat{J})\big|^3 + 8\big|a(\pi^{-1}(\hat{L}), \hat{L})\big|^3 + \\ + 8\big|a(\pi^{-1}(\hat{J}), \pi_{\hat{I}\to\hat{J},\hat{K}\to\hat{L}}(\pi^{-1}(\hat{J})))\big|^3 + \\ + 8\big|a(\pi^{-1}(\hat{L}), \pi_{\hat{I}\to\hat{J},\hat{K}\to\hat{L}}(\pi^{-1}(\hat{L})))\big|^3\Big]\end{aligned} \tag{3.8.20}$$

Desna stran se zdaj izraža s slučajnimi spremenljivkami oblike $|a(R,S)|^3$, kjer sta R in S spet primerna slučajna indeksa. Zaradi simetrije mora za vse pare (R,S), ki pridejo v poštev, veljati $\mathbb{E}\,|a(R,S)|^3 = N^{-2}\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a(i,j)|^3$. Tako končno dobimo:

$$\left|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\right| \le \frac{64}{N} M_1(f) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a(i,j)|^3 \tag{3.8.21}$$

To je prva ocena za slučajne permutacije, ki ne vsebuje četrtih momentov. Tudi ocenjevanje samo je bilo enostavnejše kot prej. Sklapljanje z izmenljivim parom v kombinaciji s sklapljanji s pogojnimi porazdelitvami se je torej izkazalo za obetaven način ocenjevanja napake pri normalni aproksimaciji vsot odvisnih slučajnih spremenljivk. V naslednjem razdelku pa bomo razvili še enostavnejši pristop, ki prav tako ne zahteva četrtih momentov. □

3.9 Razčlenitve drugega reda

V razdelku 3.2 smo predstavili premo utežitev. Sklapljanja s premimi uteženkami smo v razdelku 3.4 prevedli na sklapljanja s pogojnimi porazdelitvami, nato pa smo v razdelku 3.5 dognali, da se le-ta navadno dajo nadomestiti z enostavnejšimi razčlenitvami. Podobno smo v razdelku 3.6 predstavili kumulativno premo utežitev, v prejšnjem razdelku pa smo sklapljanja s kumulativnimi premimi uteženkami konstruirali s kombinacijo sklapljanj z izmenljivim parom in s pogojnimi porazdelitvami. A tudi ta koncept se da navadno nadomestiti z razčlenitvami, le da bo potrebno iti še korak dlje: potrebovali bomo *razčlenitve drugega reda*.

Naj bo $\mathcal{I}$ indeksna množica in $W = \sum_{i\in\mathcal{I}} X_i$. Tako kot pri razčlenitvah prvega reda naj bo za vsak $i \in \mathcal{I}$ dana razčlenitev $W = W_i + R_i$, kjer je W_i neodvisna od X_i. Nadalje naj bo še $R_i = \sum_{j\in\mathcal{J}_i}$ in za vsak $j \in \mathcal{J}_i$ naj bo dana še razčlenitev drugega reda $W_i = W_{ij} + R_{ij}$, kjer je W_{ij} neodvisna od para (X_i, X_{ij}).

Tovrstne razčlenitve so definirane v članku Barbourja, Karońskega in Rucińskega [7] in so po avtorjevem mnenju najobetavnejši koncept odvisnosti v povezavi z normalno aproksimacijo po Steinovi metodi. Njihova konstrukcija je običajno preprosta in kot bomo videli, ocena napake ne zahteva četrtih momentov, ki ne le da ne obstajajo vedno, temveč se običajno tudi ocena člena s četrtimi momenti izkaže za precej zahtevno.

Tu bomo obravnavali še nekoliko modificirane razčlenitve Barbourja, Karońskega in Rucińskega, in sicer bomo privzeli še, da obstaja dodatna razčlenitev $W = \tilde{W}_{ij} + \tilde{R}_{ij}$, kjer je $\tilde{W}_{ij}$ enako porazdeljena kot W_{ij}. Seveda lahko vedno postavimo kar $\tilde{W}_{ij} := W_{ij}$, toda včasih nam kakšna druga izbira da boljšo konstanto. Tako lahko npr. v primeru, ko je slučajna spremenljivka W_{ij} enako porazdeljena kot W, postavimo $\tilde{W}_{ij} := W$.

Naslednji izrek je ustrezna modifikacija rezultata Barbourja, Karońskega in Rucińskega [7] skupaj z večrazsežno različico.

Izrek 3.9.1. *Naj bodo W, X_i, R_i, X_{ij}, R_{ij} in $\tilde{R}_{ij}$ kot zgoraj. Privzemimo še, da* $\mathbb{E}\, X_i = 0$ *in* $\operatorname{var}(W) = 1$. *Nadalje naj velja:*

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i| < \infty\,, \quad \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|\,|R_i| < \infty\,, \quad \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|\,\mathbb{E}\,|R_i| < \infty \tag{3.9.1}$$

Tedaj za vsako Lipschitzevo funkcijo f velja:

$$\Big|\mathbb{E} f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| \le M_1(f) \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\, |X_i X_{ij}| \Big(|R_{ij}| + |R_i + R_{ij}| + 2\,\mathbb{E}\,|\tilde{R}_{ij}|\Big) \tag{3.9.2}$$

Če pa so W, X_i, R_i, X_{ij} in R_{ij} slučajni vektorji z vrednostmi v $\mathbb{R}^d$, ki ustrezajo istim predpostavkam kot ustrezne slučajne spremenljivke zgoraj (namesto $\mathrm{var}(W) = 1$ *privzamemo* $\mathrm{Var}(W) = \mathbf{I}$*), za vsako funkcijo $f \in \flat^{(2)}(\mathbb{R}^d)$ velja ocena:*

$$\Big|\mathbb{E} f(W) - \mathrm{N}(0,\mathbf{I})\{f\}\Big| \le \frac{\sqrt{2\pi}}{8} M_2(f) \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\, |X_i X_{ij}| \Big(|R_{ij}| + |R_i + R_{ij}| + 2\,\mathbb{E}\,|\tilde{R}_{ij}|\Big) \tag{3.9.3}$$

Zahteva (3.9.1) je potrebna, ker tokrat nismo privzeli, da je indeksna množica $\mathcal{I}$ končna. Za primer, ko je $\mathcal{I}$ neskončna, bomo namreč potrebovali naslednji tehnični rezultat, ki ga bomo dokazali na koncu razdelka.

Lema 3.9.2. *Naj bodo W, X_i in R_i tako kot zgoraj in naj velja še* (3.9.1). *Tedaj v L^1 velja:*

$$W^2 = \sum_{i\in I} X_i W \tag{3.9.4}$$

Opomba. Vrste na Banachovih prostorih, indeksirane po poljubni množici, interpretiramo tako, da konvergirajo, če konvergirajo absolutno. V primeru, ki je indeksna množica neštevna, sme biti torej kvečjemu števno mnogo členov različnih od nič.

Dokaz izreka 3.9.1. Dokaz bomo najprej napisali za primer, ko je indeksna množica končna, na koncu pa pogledali še, na kaj moramo biti pozorni, če je $\mathcal{I}$ neskončna.

Začnemo tako kot pri dokazu izrekov 3.4.1 in 3.5.1. Naj bo g katera od rešitev Steinove enačbe:

$$\Delta g(w) - g'(w)w = f(w) - \mathrm{N}(0,\mathbf{I})\{f\} \tag{3.9.5}$$

iz izreka 2.6.1. Pišimo:

$$\mathbb{E}\Big[\Delta g(W) - g'(W)W\Big] = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\Big[g''(W)\,\mathbb{E}\,X_i W - g'(W)X_i\Big] \tag{3.9.6}$$

Zaradi neodvisnosti je $\mathbb{E}\,X_i W_i = 0$, torej je $\mathbb{E}\,X_i W = \mathbb{E}\,X_i R_i$. Poleg tega je tudi $\mathbb{E}\,g'(W_i)X_i = 0$, zato velja:

$$\mathbb{E}\,g'(W)X_i = \mathbb{E}\Big(g'(W) - g'(W_i)\Big)X_i = \mathbb{E}\,g''(W_i + \theta R_i)X_i R_i \tag{3.9.7}$$

kjer je θ kot ponavadi porazdeljena enakomerno po $[0,1]$ in neodvisna od vsega ostalega. Sledi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Delta g(W) - g'(W)W\Big] &= \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\Big[g''(W)\,\mathbb{E}\,X_i R_i - g'(W)X_i\Big] = \\ &= \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\Big[g''(W)\,\mathbb{E}\,X_i X_{ij} - g''(W_i + \theta R_i)X_i X_{ij}\Big] = \\ &= \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\Big(g''(W) - g''(\tilde{W}_{ij})\Big)\,\mathbb{E}\,X_i X_{ij} - \\ &\qquad - \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\Big(g''(W_i + \theta R_i) - g''(W_{ij})\Big)X_i X_{ij} = \\ &= \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,g'''(\tilde{W}_{ij} + \eta\tilde{R}_{ij})(\mathbb{E}\,X_i X_{ij})\tilde{R}_{ij} - \\ &\qquad - \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,g'''(W_{ij} + \eta R_{ij} + \eta\theta R_i)X_i X_{ij}(R_{ij} + \theta R_i)\Big]\end{aligned} \tag{3.9.8}$$

kjer je η spet porazdeljena enakomerno po $[0, 1]$ in neodvisna od vsega ostalega (spet smo upoštevali neodvisnost). Iz zgornje verige enakosti in še ocene $|\,\mathbb{E}\,X_i X_{ij}|_\wedge \le \mathbb{E}\,|X_i X_{ij}|_\wedge = \mathbb{E}\,|X_i|\,|X_{ij}|$, kjer je $|\cdot|_\wedge$ projektivna norma (glej razdelek D.8), dobimo:

$$\Big|\mathbb{E}\Big[\Delta g(W) - g'(W)W\Big]\Big| \le M_3(g)\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,|X_i|\,|X_{ij}|(|R_{ij} + \theta R_i| + \mathbb{E}\,|\tilde{R}_{ij}|) \tag{3.9.9}$$

Naj bo $\mathcal{H}_{ij}$ σ-algebra, generirana z X_i, X_{ij}, R_i in R_{ij}. Ocenimo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(|R_{ij} + \theta R_i| \;\Big|\; \mathcal{H}_{ij}\Big) &= \mathbb{E}\Big(|(1-\theta)R_{ij} + \theta(R_i + R_{ij})| \;\Big|\; \mathcal{H}_{ij}\Big) \le \\ &\le \mathbb{E}\Big((1-\theta)|R_{ij}| + \theta|R_i + R_{ij}| \;\Big|\; \mathcal{H}_{ij}\Big) = \\ &= \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\Big(|R_{ij}| + |R_i + R_{ij}| \;\Big|\; \mathcal{H}_{ij}\Big)\end{aligned} \tag{3.9.10}$$

Preostanek izpeljave ocen (3.9.2) in (3.9.3) je enak kot pri dokazu izreka 3.4.1.

Izrek smo za zdaj dokazali za primer, ko je indeksna množica $\mathcal{I}$ končna. V primeru, ko je neskončna, ni izpeljava čisto nič drugačna, dodatno je treba preveriti le enakost (3.9.6). Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je desna stran v oceni (3.9.2) oz. (3.9.3) končna. Iz leme 3.9.2 sledi, da je $\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,X_i W = \mathbb{E}\,W^2 = \mathrm{var}(W) = \underline{\mathrm{I}}$ (fundamentalni kovariantni tenzor smo tokrat izjemoma označili z $\underline{\mathrm{I}}$, ker je oznaka $\mathcal{I}$ že zasedena z indeksno množico). Po lemi 2.6.2 je $M_2(g) < \infty$, brž ko je $M_1(f) < \infty$ ali $M_2(f) < \infty$. Zato v L^1 velja tudi $\sum_{i\in\mathcal{I}} g''(W)\,\mathbb{E}\,X_i W = \mathbb{E}\,g''(W)\mathcal{I} = \mathbb{E}\,\Delta g(W)$. To med drugim pomeni tudi, da vrsta $\sum_{i\in\mathcal{I}} g''(W)X_i W$ konvergira v L^1. Toda zaradi ocene (3.9.2) oz. (3.9.3) mora potem v L^1 konvergirati tudi vrsta $\sum_{i\in\mathcal{I}} g'(W)X_i$. Ker v L^1 velja $\sum_{i\in\mathcal{I}} X_i = W$, po posledici 3.9.5 v L^1 velja tudi $\sum_{i\in\mathcal{I}} g'(W)X_i = g'(W)W$. To pa pomeni, da enakost (3.9.6) res velja. ■

Opomba. Zgornji dokaz je povezan tudi s kumulativno premo utežitvijo. V enorazsežnem primeru namreč iz (3.9.7) sledi:

$$\mathbb{E}\,f(W)W = \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,f'(W_i + \theta R_i)X_i X_{ij} = \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,f'(W_{ij} + R_{ij} + \theta R_i)X_i X_{ij} \tag{3.9.11}$$

Recimo, da je $X_i X_{ij} \geq 0$. Naj bo Y^*_{ij} prema uteženka slučajne spremenljivke $X_i X_{ij}$, R^*_{ij} pa slučajna spremenljivka, katere pogojna porazdelitev glede na $Y^*_{ij} = y, W = w$ se ujema s pogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke $R_{ij} + \theta R_i$ glede na $X_i X_{ij} = y, W_{ij} = w$. Tedaj za vsako omejeno in merljivo funkcijo F velja zveza:

$$\mathbb{E}\, F(R^*_{ij}, W, Y^*_{ij})\ \mathbb{E}\, X_i X_{ij} = \mathbb{E}\, F(R_{ij} + \theta R_i, W_{ij}, X_i X_{ij}) X_i X_{ij} \tag{3.9.12}$$

torej velja tudi:

$$\mathbb{E}\, f'(W_{ij} + R_{ij} + \theta R_i) X_i X_{ij} = \mathbb{E}\, f'(W + R^*_{ij})\ \mathbb{E}\, X_i X_{ij} \tag{3.9.13}$$

Naj bo (I, J) par slučajnih indeksov, porazdeljen proporcionalno z $\mathbb{E}\, X_i X_{ij}$ in neodvisen od vsega ostalega (ker je $\sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\, X_i X_{ij} = \mathrm{var}(W) = 1$, to pomeni, da je v resnici kar $\mathbb{P}(I = i, J = j) = \mathbb{E}\, X_i X_{ij}$). Tedaj lahko zvezo (3.9.11) zapišemo tudi v obliki:

$$\mathbb{E}\, f(W) W = \mathbb{E}\, f'(W + R^*_{IJ}) \tag{3.9.14}$$

torej je slučajna spremenljivka $W^* := W + R^*_{IJ}$ kumulativna prema uteženka slučajne spremenljivke W, ki v primeru, ko so X_i, X_{ij} in R_{ij} majhne, ni daleč od W.

Oglejmo si sedaj, kako razčlenitve drugega reda delujejo na naših standardnih zgledih.

Zgled 3.9.1. *Neodvisne slučajne spremenljivke.* Vzemimo vsoto neodvisnih slučajnih spremenljivk $W = \sum_{i\in\mathcal{I}} X_i$, za katere velja $\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i| < \infty$, $\mathbb{E}\, X_i = 0$ za vsak $i \in \mathcal{I}$ ter še $\mathrm{var}(W) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\, X_i^2 = 1$. Tedaj so predpostavke izreka 3.9.1 očitno izpolnjene, če postavimo kar $R_i = X_i$, $\mathcal{J}_i = \{0\}$, $X_{i0} = \tilde{R}_{i0} = X_i$ in $R_{i0} = 0$ (velja torej $W_i = W_{ij} = \tilde{W}_{ij} = W - X_i$). Iz izreka 3.9.1 dobimo oceno:

$$\left|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\right| \leq M_1(f) \sum_{i\in\mathcal{I}} \left(\mathbb{E}\,|X_i|^3 + 2\,\mathbb{E}\,|X_i|\,\mathbb{E}\, X_i^2\right) \leq 3\, M_1(f) \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{3.9.15}$$

Dobili smo torej isto kot v oceni (1.4.20), ki smo jo izpeljali neposredno, ter v ocenah (3.6.14) in (3.8.10), ki smo ju dobili s pomočjo kumulativnih premih utežitev oziroma kombinacij sklapljanj z izmenljivim parom in pogojnimi porazdelitvami. □

Zgled 3.9.2. *Lokalna odvisnost.* Naj bodo X_i, $i \in \mathcal{I}$, lokalno odvisne slučajne spremenljivke oz. vektorji, in sicer naj bo Γ graf njihove odvisnosti v skladu z definicijo iz zgleda 3.5.3. Za vsak $i \in \mathcal{I}$ naj bo $\mathcal{J}_i$ množica točk, ki so sosedne ali enake i. Privzemimo, da je $\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i| < \infty$ in še $\sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,|X_i|\,|X_j| < \infty$ ter še, da je $\mathbb{E}\, X_i = 0$ in $\mathrm{var}(W) = 1$ oz. $\mathrm{Var}(W) = \mathbf{I}$.

Razčlenitve prvega reda dobimo tako, da postavimo $R_i := \sum_{j\in\mathcal{J}_i} X_j$. Postavili bomo torej $X_{ij} := X_j$. Za razčlenitve drugega reda pa bomo postavili $R_{ij} := \sum_{k\in\mathcal{J}_j\setminus\mathcal{J}_i} X_k$ in $\tilde{R}_{ij} := \sum_{k\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j} X_k$ (velja torej $\tilde{W}_{ij} = W_{ij}$). V enorazsežnem primeru nam ocena (3.9.2) da:

$$\left|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\right| \leq M_1(f) \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,|X_i|\,|X_j| \left[\sum_{k\in\mathcal{J}_j\setminus\mathcal{J}_i} |X_k| + \sum_{k\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j} |X_k| + 2 \sum_{k\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j} \mathbb{E}\,|X_k|\right] \tag{3.9.16}$$

Po Jensenovi neenakosti lahko spet ocenimo $\mathbb{E}\,|X_i|\,|X_j|\,|X_k| \le \frac{1}{3}(\mathbb{E}\,|X_i|^3 + \mathbb{E}\,|X_j|^3 + \mathbb{E}\,|X_k|^3)$. Če namesto slučajne spremenljivke X_k vzamemo njeno neodvisno kopijo, dobimo še $\mathbb{E}\,|X_i|\,|X_j|\,\mathbb{E}\,|X_k| \le \frac{1}{3}(\mathbb{E}\,|X_i|^3 + \mathbb{E}\,|X_j|^3 + \mathbb{E}\,|X_k|^3)$. Tako dobimo:

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbb{E}\,f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| \le \\
&\le \frac{M_1(f)}{3}\Big[\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|^3\Big(3\Big|\{(j,k)\,;\, j\sim i,\, k\sim\{i,j\}\}\Big| + \Big|\{(j,k)\,;\, j\sim i,\, k\sim j,\, k\nsim i\}\Big|\Big) + \\
&\qquad + \sum_{j\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_j|^3\Big(3\Big|\{(i,k)\,;\, j\sim i,\, k\sim\{i,j\}\}\Big| + \Big|\{(i,k)\,;\, j\sim i,\, k\sim j,\, k\nsim i\}\Big|\Big) + \\
&\qquad + \sum_{k\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_k|^3\Big(3\Big|\{(i,j)\,;\, j\sim i,\, k\sim\{i,j\}\}\Big| + \Big|\{(i,j)\,;\, j\sim i,\, k\sim j,\, k\nsim i\}\Big|\Big)\Big]
\end{aligned} \tag{3.9.17}$$

pri čemer smo z $|\cdot|$ označili moč množice, z $\sim$ pa enako kot pri zgledu 3.5.3 relacijo sosednosti ali enakosti (oz. da med množicama obstaja vsaj ena povezava ali pa imata neprazen presek).

Naj bo D spet maksimalno število indeksov, ki so sosedni ali enaki posameznemu indeksu. Tedaj lahko ocenimo:

$$\begin{aligned}
&\Big|\{(j,k)\,;\, j\sim i,\, k\sim\{i,j\}\}\Big| \le 2(D-1)^2 + D\,, && \Big|\{(j,k)\,;\, j\sim i,\, k\sim j,\, k\nsim i\}\Big| \le (D-1)(D-2) \\
&\Big|\{(i,k)\,;\, j\sim i,\, k\sim\{i,j\}\}\Big| \le 2(D-1)^2 + D\,, && \Big|\{(i,k)\,;\, j\sim i,\, k\sim j,\, k\nsim i\}\Big| \le (D-1)(D-2) \\
&\Big|\{(i,j)\,;\, j\sim i,\, k\sim\{i,j\}\}\Big| \le 2(D-1)^2 + D\,, && \Big|\{(i,j)\,;\, j\sim i,\, k\sim j,\, k\nsim i\}\Big| \le (D-1)(D-2)
\end{aligned} \tag{3.9.18}$$

Sledi:

$$\Big|\mathbb{E}\,f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| \le (7D^2 - 12D + 8)M_1(f)\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{3.9.19}$$

Podobno za večrazsežni primer dobimo:

$$\Big|\mathbb{E}\,f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| \le (7D^2 - 12D + 8)\,\frac{\sqrt{2\pi}}{8}\,M_2(f)\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{3.9.20}$$

□

Opomba. Če vzamemo neodvisne slučajne spremenljivke, torej $D = 1$, se ocena (3.9.19) prevede natančno na oceno (3.9.15).

ZGLED 3.9.3. *Slučajne permutacije*. Naj bo spet π enakomerno porazdeljena slučajna permutacija na $\{1,\dots N\}$ in $W := \sum_{i=1}^N X_i$, kjer je $X_i = a(i,\pi(i))$. V razdelku 3.5 smo že konstruirali slučajno permutacijo $\pi_{i\to J}$, ki je bila neodvisna od sumanda X_i. Tu bomo morali iti še korak dlje in konstruirati slučajne permutacije, neodvisne od zožitve permutacije π na neko *podmnožico*. Tu bomo v resnici potrebovali le dvoelementne podmnožice in za slednje bi si lahko pomagali s konstrukcijo iz zgleda 3.8.2. Vendar pa bomo konstrukcijo, ki jo bomo definirali tu, potrebovali tudi pri statistikah končnih populacij v razdelku 5.2, zato jo bomo podali kar v splošnem.

Definicija. Naj bosta $A \subseteq M$ končni množici. *Slepa premestitev* množice A v okviru množice M je slučajna permutacija ρ_A na množici M, ki deluje na naslednji način:

- Elementi množice A se naključno preslikajo v elemente množice M, pri čemer so vse možnosti enako verjetne.
- Pogojno na prejšnje označimo z B sliko množice A glede na ρ_A. Elementi množice $B \setminus A$ se preslikajo v elemente množice $A \setminus B$, pri čemer so spet vse možnosti enako verjetne.
- Vsi ostali elementi se preslikajo sami vase.

Trditev 3.9.3. *Naj bosta $A \subseteq M$ končni množici, ρ_A pa slepa premestitev množice A na množici M. Nadalje naj bo π slučajna permutacija na M, ki je enakomerno porazdeljena in neodvisna od ρ_A. Tedaj je $\pi \circ \rho_A^{-1}$ prav tako enakomerno porazdeljena in neodvisna od zožitve permutacije π na množico A.*

Dokaz. Naj bo $A = \{i_1, \dots i_r\}$. Dokazati moramo, da je pogojno na vsak dogodek oblike $\pi(i_1) = j_1, \dots \pi(i_r) = j_r$ permutacija $\pi \circ \rho_A^{-1}$ porazdeljena enakomerno. Pa recimo, da velja $\rho_A(i_1) = k_1, \dots \rho_A(i_r) = k_r$. Tedaj predpis $\sigma \mapsto \sigma \circ \rho_A^{-1}$ množico permutacij σ, za katere je $\sigma(i_1) = j_1, \dots \sigma(i_r) = j_r$, bijektivno preslika na množico permutacij σ, za katere je $\sigma(k_1) = j_1, \dots \sigma(k_r) = j_r$. To pa pomeni, da je pogojno na dogodek $\rho_A(i_1) = k_1, \dots \rho_A(i_r) = k_r, \pi(i_1) = j_1, \dots \pi(i_r) = j_r$ slučajna permutacija $\pi \circ \rho_A^{-1}$ porazdeljena enakomerno po množici vseh permutacij σ, za katere je $\sigma(k_1) = j_1, \dots \sigma(k_r) = j_r$. Ker je variacija $(\rho_A(i_1), \dots \rho_A(i_r))$ porazdeljena enakomerno po množici vseh variacij reda r na M, naša trditev res velja. ∎

Vrnimo se zdaj k naši slučajni spremenljivki W. Za razčlenitve prvega reda postavimo:

$$W_i := \sum_{j=1}^{N} a\Big(j, \pi(\rho_{\{i\}}^{-1}(j))\Big) = \sum_{j=1}^{N} a(\rho_{\{i\}}(j), \pi(j)) \tag{3.9.21}$$

kjer je $\rho_{\{i\}}$, $i = 1, \dots N$, družina slepih premestitev enoelementnih množic $\{i\}$, neodvisnih od π. Iz ttrditve 3.9.3 sledi, da je W_i res neodvisna od X_i.

Opomba. Zgornja konstrukcija ni nič novega. Ker slepa premestitev enoelementne množice $\{i\}$ ni nič drugega kot transpozicija, ki i zamenja z naključnim enakomerno porazdeljenim elementom I, je konstrukcija (3.9.21) enaka konstrukciji (3.5.11).

Pišimo $R_i = W - W_i = \sum_{j=1}^{N} X_{ij}$, kjer je:

$$X_{ij} := a(j, \pi(j)) - a(\rho_{\{i\}}(j), \pi(j)) \tag{3.9.22}$$

Par (X_i, X_{ij}) natančno določen z $\rho_{\{i\}}$ in zožitvijo permutacije π na $\{i, j\}$. Za razčlenitve drugega reda bomo torej potrebovali družino slepih premestitev ρ'_A, kjer je A eno- ali dvoelementna množica, za katero bomo zahtevali še, da je neodvisna od vsega ostalega. Nato postavimo:

$$W_{ij} := \sum_{k=1}^{N} a\Big(k, \pi((\rho'_{\{i,j\}})^{-1}(k))\Big) = \sum_{j=1}^{N} a(\rho'_{\{i,j\}}(k), \pi(k)) \tag{3.9.23}$$

Po trditvi 3.9.3 je W_{ij} neodvisna od para (X_i, X_{ij}) in enako porazdeljena kot W, zato lahko postavimo $\tilde{W}_{ij} := W$ in velja $\tilde{R}_{ij} = 0$.

Ocenimo zdaj desno stran v (3.9.2). Ker ρ_A premakne kvečjemu elemente iz $A \cup \rho_A(A)$ (in podobno ρ'_A), lahko ocenimo:

$$|X_{ij}| \le \mathbf{1}\Big[j \in \{i, \rho_{\{i\}}(i)\}\Big]\Big(|a(j,\pi(j))| + |a(\rho_{\{i\}}(j),\pi(j))|\Big) \tag{3.9.24}$$

$$|R_i + R_{ij}| \le \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}\Big[k \in \{i, j, \rho'_{\{i,j\}}(i), \rho'_{\{i,j\}}(j)\}\Big]\Big(|a(k,\pi(k))| + |a(\rho'_{\{i,j\}}(k),\pi(k))|\Big) \tag{3.9.25}$$

$$|R_{ij}| \le \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}\Big[k \in \{i, j, \rho_{\{i\}}(i), \rho'_{\{i,j\}}(i), \rho'_{\{i,j\}}(j)\}\Big]\Big(|a(\rho_{\{i\}}(k),\pi(k))| + |a(\rho'_{\{i,j\}}(k),\pi(k))|\Big) \tag{3.9.26}$$

Iz izreka 3.9.1 zdaj dobimo:

$$\begin{aligned}
\Big|\mathbb{E} f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| &\le M_1(f) \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}\,|X_i X_{ij}|\Big(|R_{ij}| + |R_i + R_{ij}|\Big) \le \\
&\le M_1(f) \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in \{i, \rho_{\{i\}}(i)\}} \sum_{k \in \{i, \rho_{\{i\}}(i), \rho'_{\{i,j\}}(i), \rho'_{\{i,j\}}(j)\}} \mathbb{E}\,|a(i,\pi(i))|\Big(|a(j,\pi(j))| + |a(\rho_{\{i\}}(j),\pi(j))|\Big) \times \\
&\qquad \times \Big(|a(\rho_{\{i\}}(k),\pi(k))| + |a(\rho'_{\{i,j\}}(k),\pi(k))|\Big) + \\
&\quad + M_1(f) \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in \{i, \rho_{\{i\}}(i)\}} \sum_{k \in \{i, j, \rho'_{\{i,j\}}(i), \rho'_{\{i,j\}}(j)\}} \mathbb{E}\,|a(i,\pi(i))|\Big(|a(j,\pi(j))| + |a(\rho_{\{i\}}(j),\pi(j))|\Big) \times \\
&\qquad \times \Big(|a(k,\pi(k))| + |a(\rho'_{\{i,j\}}(k),\pi(k))|\Big)
\end{aligned} \tag{3.9.27}$$

Ko smo v (3.9.2) vstavljali oceno za R_{ij}, smo lahko izpustili možnost, da je $k = j$, saj je bodisi $j = i$ bodisi $j = \rho_{\{i\}}(i)$. Sedaj pa uporabimo Jensenovo neenakost $xyz \le \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3)$ in dejstvo, da so slučajne spremenljivke $\pi(i)$, $\pi(j)$ in $\pi(k)$ vsaka zase neodvisne od slučajnih permutacij $\rho_{\{i\}}$ in $\rho'_{\{i,j\}}$. Poleg tega bomo namesto sumacijskega indeksa i uporabili slučajni indeks I, porazdeljen enakomerno po $\{1, \ldots N\}$ in neodvisen od vsega ostalega. Po krajšem računu dobimo:

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbb{E} f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| \le \\
&\le \frac{M_1(f)}{3} \sum_{j \in \{I, \rho_{\{I\}}(I)\}} \sum_{k \in \{I, \rho_{\{I\}}(I), \rho'_{\{I,j\}}(I), \rho'_{\{I,j\}}(j)\}} \sum_{l=1}^{N} \mathbb{E}\Big[4|a(I,l)|^3 + 2|a(j,l)|^3 + \\
&\qquad + 2|a(\rho_{\{I\}}(j),l)|^3 + 2|a(\rho_{\{I\}}(k),l)|^3 + 2|a(\rho'_{\{I,j\}}(k),l)|^3\Big] + \\
&\quad + \frac{M_1(f)}{3} \sum_{j \in \{I, \rho_{\{I\}}(I)\}} \sum_{k \in \{I, j, \rho'_{\{I,j\}}(I), \rho'_{\{I,j\}}(j)\}} \sum_{l=1}^{N} \mathbb{E}\Big[4|a(I,l)|^3 + 2|a(j,l)|^3 + \\
&\qquad + 2|a(\rho_{\{I\}}(j),l)|^3 + 2|a(k,l)|^3 + 2|a(\rho'_{\{I,j\}}(k),l)|^3\Big]
\end{aligned} \tag{3.9.28}$$

Zdaj pa za j in k vstavimo ustrezne vrednosti, ki nastopajo v vsotah. Tako dobimo neko vsoto, kjer namesto (slučajnih) indeksov I, j, k, $\rho_{\{I\}}(j)$, $\rho_{\{I\}}(k)$, $\rho'_{\{I,j\}}(k)$, $\rho_{\{I\}}(\rho_{\{I\}}(i)) = I$ in $\rho'_{\{I,j\}}(\rho_{\{I\}}(I))$ nastopajo slučajni indeksi I, $\rho_{\{I\}}(I)$, $\rho'_{\{I\}}(I)$, $\rho'_{\{I,\rho_{\{I\}}(I)\}}(I)$ itd. Zaradi simetrije morajo biti vsi ti slučajni indeksi porazdeljeni enakomerno po $\{1, \ldots N\}$. Ko vse skupaj seštejemo, končno dobimo:

$$\left|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\right| \le \frac{64}{N} M_1(f) \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a(i,j)|^3 \tag{3.9.29}$$

Dobili smo oceno, enako oceni (3.8.21). Izpeljava je bila tokrat res nekoliko zahtevnejša kot v razdelku 3.8, vendar pa so razčlenitve drugega reda v splošnem robustnejše od sklapljanj z izmenljivimi pari ali kumulativnimi premimi uteženkami. Pri slednjih se namreč zahteva linearnost pogojnega matematičnega upanja (glej (3.7.3)), medtem ko pri razčlenitvah to ni potrebno. Še drugače povedano, za razčlenitve drugega reda se zdi, da see dajo konstruirati v več primerih kot sklapljanj z izmenljivimi pari ali kumulativnimi premimi uteženkami, zato pa je včasih nekoliko zahtevneje oceniti desno stran v (3.9.2) oz. (3.9.3). □

Dolžni smo še dokazati lemo 3.9.2. Dokaz bo temeljil na naslednjem rezultatu.

Lema 3.9.4. *Naj bo f_n, $n \in \mathbb{N}$, zaporedje merljivih funkcij na merljivem prostoru z mero μ, ki v $L^1(\mu)$ konvergira proti funkciji f. Dana naj bo še funkcija g, za katero velja, da je zaporedje funkcij $f_n g$ konvergentno v $L^1(\mu)$. Tedaj zaporedje funkcij $f_n g$ v $L^1(\mu)$ konvergira proti fg.*

Dokaz. Merljivi prostor razdelimo na dva prostora: $A := [|g| \le 1]$ in $B := [|g| > 1]$. Dovolj je pokazati, da konvergenca $f_n g \to fg$ velja posebej na A in posebej na B.

Na prostoru A konvergenca funkcij f_n proti f očitno implicira konvergenco funkcij $f_n g$ proti fg. Na prostoru B pa funkcije $f_n g$ konvergirajo proti neki funkciji $f^* g$. Ocenimo:

$$\begin{aligned} \int_B |f^* - f| \, \mathrm{d}\mu &\le \int_B |f^* - f_n| \, \mathrm{d}\mu + \int_B |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \le \\ &\le \int_B |f^* g - fg| \, \mathrm{d}\mu + \int_B |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \end{aligned} \tag{3.9.30}$$

Ker oba sumanda konvergirata proti nič, se morata f in f^* skoraj povsod ujemati. Lema je tako dokazana. ■

Posledica 3.9.5. *Naj bo $\mathcal{I}$ indeksna množica in naj bodo dane funkcije f_i, $i \in \mathcal{I}$, definirane na merljivem prostoru z mero μ. V $L^1(\mu)$ naj velja $\sum_{i \in \mathcal{I}} f_n = f$, poleg tega pa naj bo še $\sum_{i \in \mathcal{I}} \int f_n g \, \mathrm{d}\mu < \infty$. Tedaj v $L^1(\mu)$ velja tudi $\sum_{i \in \mathcal{I}} f_n g = fg$.*

Dokaz. Za primer, ko je množica $\mathcal{I}$ števna, se konvergenca vrst prevede na konvergenco delnih vsot. V splošnem primeru pa tako ali tako velja, da je največ števno mnogo mnogo funkcij f_n bistveno različnih od nič. ■

Dokaz leme 3.9.2. Iz posledice 3.9.5 sledi, je dovolj dokazati, da je:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|\,|W| < \infty \tag{3.9.31}$$

Ob upoštevanju neodvisnosti ocenimo:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|X_i W| &\le \mathbb{E}\,|X_i R_i| + \mathbb{E}\,|X_i W_i| = \\ &= \mathbb{E}\,|X_i R_i| + \mathbb{E}\,|X_i|\,\mathbb{E}\,|W_i| \le \\ &\le \mathbb{E}\,|X_i R_i| + \mathbb{E}\,|X_i|\,\mathbb{E}\,|W| + \mathbb{E}\,|X_i|\,\mathbb{E}\,|R_i| \end{aligned} \tag{3.9.32}$$

Ker so vrste iz vseh treh členov na koncu konvergentne, je s tem dokaz končan. ■

3.10 Ocene Lindebergovega tipa

V prejšnjih razdelkih smo že precej dobro opisali ocenjevanje napake pri normalni aproksimaciji po Steinovi metodi za vsote neodvisnih in odvisnih slučajnih spremenljivk. Oceno smo vselej podali v metrikah, ki implicirajo tako šibko konvergenco (trditvi A.8.1 in A.9.1) kot tudi konvergenco v metriki Kolmogorova (trditev A.10.2). Ocena napake je vselej temeljila na vsaj tretjih absolutnih momentih. Dobro pa je znano, da le-ti nikakor niso pogoj za konvergenco proti normalni porazdelitvi, kar se vidi že iz Lindeberg–Fellerjevega izreka, ki karakterizira konvergenco vsot neodvisnih slučajnih spremenljivk proti normalni porazdelitvi.

Izrek 3.10.1 (Lindeberg, Feller). *Naj bo $X_i^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathcal{I}^{(n)}$, nabor slučajnih spremenljivk, za katere velja, da so za vsak $n \in \mathbb{N}$ slučajne spremenljivke $X_i^{(n)}$, $i \in \mathcal{I}^{(n)}$, neodvisne. Definirajmo še $W^{(n)} := \sum_{i \in \mathcal{I}^{(n)}} X_i^{(n)}$ ter privzemimo, da velja $\mathbb{E}\,X_i^{(n)} = 0$ in $\operatorname{var}(W^{(n)}) = 1$. Tedaj sta naslednja pogoja ekvivalentna.*

(1) *Za vsak $\varepsilon > 0$ velja $\lim_{n\to\infty} \sum_{i \in \mathcal{I}^{(n)}} \mathbb{E}(X_i^{(n)})^2\, \mathbf{1}(|X_i^{(n)}| > \varepsilon) = 0$.*

(2) *Velja $\lim_{n\to\infty} \sup_{i \in \mathcal{I}^{(n)}} \operatorname{var}(X_i^{(n)}) = 0$ in zaporedje porazdelitev slučajnih spremenljivk $W^{(n)}$ šibko konvergira proti standardizirani normalni porazdelitvi.*

Pogoju (1) pravimo *Lindebergov pogoj*. Zadostnost tega pogoja je dokazal Lindeberg [74], potrebnost pa Feller [58]. Za klasičen dokaz izreka glej tudi Širjajev [122], III. poglavje, 4. razdelek. V nadaljevanju pa bomo s Steinovo metodo dokazali posplošitev Lindebergovega dela izreka (t. j. zadostnosti) na lokalno odvisne slučajne spremenljivke.

Posledica 3.10.2 (klasični CLI). *Če so $Y_1, Y_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z $\mathbb{E}\,Y_i = 0$ in $\operatorname{var}(Y_i) = 1$, zaporedje porazdelitev slučajnih spremenljivk:*

$$W^{(n)} := \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{\sqrt{n}} \tag{3.10.1}$$

šibko konvergira proti standardizirani normalni porazdelitvi. ■

Lindebergov izrek nam nič ne pove o hitrosti konvergence. Nastane vprašanje, ali se da formulirati izrek, ki bi dal eskplicitno oceno napake pri normalni aproksimaciji, iz katere bi sledil Lindebergov izrek. Tudi taki rezultati obstajajo in kolikor je avtorju znano, je tovrsten izrek za vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk prvi formuliral Katz [68]. Različico tega izreka, ki je formulirana spodaj, sta s pomočjo Steinove metode dokazala Chen in Shao [40] (glej tudi Feller [59] in Petrov [92]).

Izrek 3.10.3. *Naj bodo $X_1, \ldots X_n$ neodvisne slučajne spremenljivke z vsoto W. Privzemimo, da velja $\mathbb{E}\, X_i = 0$ in $\operatorname{var}(W) = 1$. Tedaj za vse $x \in \mathbb{R}$ velja ocena:*

$$\Big|\mathbb{P}[W \le x] - \Phi(x)\Big| \le 4{,}1 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\, X_i^2 \min\{1, |X_i|\} \tag{3.10.2}$$

kjer s Φ kot ponavadi označimo standardno normalno porazdelitveno funkcijo. ■

Konvergenca proti nič izrazov tipa, kot je desna stran v (3.10.2), v splošnem implicira rezultate Lindebergovega tipa. Ključ do te implikacije je spodnja lema (za izpeljavo Lindebergovega izreka iz izreka 3.10.3 potrebujemo še trditev A.10.1).

Lema 3.10.4. *Naj bo $\mathcal{I}_n$, $n \in \mathbb{N}$, zaporedje indeksnih množic. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak $i \in \mathcal{I}_n$ naj bosta dani števili $a_{ni}, b_{ni} \ge 0$ in še slučajna spremenljivka ξ_{ni}. Če za vsak $\varepsilon > 0$ velja:*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i \in \mathcal{I}_n} a_{ni}\, \mathbb{E}\, \xi_{ni}^2\, \mathbf{1}\left[\xi_{ni} > \frac{\varepsilon}{v_n}\right] = 0 \tag{3.10.3}$$

kjer je:

$$v_n := \sum_{i \in \mathcal{I}_n} a_{ni} b_{ni}\, \mathbb{E}\, \xi_{ni}^2 \tag{3.10.4}$$

velja tudi:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i \in \mathcal{I}_n} a_{ni}\, \mathbb{E}\, \xi_{ni}^2 \min\{1, b_{ni}\xi_{ni}\} = 0 \tag{3.10.5}$$

Dokaz. Prav lahko preverimo, da velja ocena:

$$\min\{1, b_{ni}\xi_{ni}\} \le \mathbf{1}\left[\xi_{ni} > \frac{\varepsilon}{v_n}\right] + \frac{b_{ni}}{v_n}\,\varepsilon \tag{3.10.6}$$

Zdaj pa pošljemo najprej $n \to \infty$, nato pa še $\varepsilon \to 0$. ■

Tu bomo izpeljali ocene takega tipa, kot je desna stran v (3.10.2), le da za Lipschitzeve oz. gladke testne funkcije, a zato za vsote odvisnih slučajnih spremenljivk z danimi razčlenitvami drugega reda iz prejšnjega razdelka.

Naj bo torej spet $W = \sum_{i \in \mathcal{I}} X_i$ in za vsak i naj bo $W = W_i + R_i$, kjer je W_i neodvisna od X_i, in še $R_i = \sum_{j \in \mathcal{J}_i} X_{ij}$. Nadalje naj bosta za vsak $j \in \mathcal{J}_i$ dani še razčlenitvi drugega reda $W_i = W_{ij} + R_{ij}$ in $W = \tilde{W}_{ij} + \tilde{R}_{ij}$, kjer je W_{ij} neodvisna od (X_i, X_{ij}) in enako porazdeljena kot $\tilde{W}_{ij}$. Kot ponavadi privzemimo še, da je $\mathbb{E}\, X_i = 0$ in $\operatorname{var}(W) = 1$ (oz. v večrazsežnem primeru $\operatorname{Var}(W) = \mathbf{I}$). Naslednji izrek, katerega različica je objavljena tudi v avtorjevem članku [97], je izboljšava izreka 3.9.1.

Izrek 3.10.5. *Naj bo W kot zgoraj. Tedaj v enorazsežnem primeru velja ocena:*

$$\begin{aligned}\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\Big| &\le M_1(f) \sum_{i\in I} \sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,|X_i X_{ik}| \times \\ &\times \Big[\min\Big\{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}, |R_{ij}| + |R_i + R_{ij}|\Big\} + \mathbb{E}\min\Big\{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}, 2\,|\tilde{R}_{ij}|\Big\}\Big]\end{aligned} \tag{3.10.7}$$

V večrazsežnem primeru pa velja ocena:

$$\begin{aligned}\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,\mathbf{I})\{f\}\Big| &\le M_2(f) \sum_{i\in I} \sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,|X_i|\,|X_{ij}| \times \\ &\times \Big[\min\Big\{1, \frac{\sqrt{2\pi}}{8}\big(|R_{ij}| + |R_i + R_{ij}|\big)\Big\} + \mathbb{E}\min\Big\{1, \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\,|\tilde{R}_{ij}|\Big\}\Big]\end{aligned} \tag{3.10.8}$$

Dokaz. Naj bo g katera od rešitev Steinove enačbe:

$$\Delta g(w) - g'(w)w = f(w) - \mathrm{N}(0,\mathbf{I})\{f\} \tag{3.10.9}$$

iz izreka 2.6.1. Podobno kot v (3.9.8) izračunamo:

$$\mathbb{E}\Big[\Delta g(W) - g'(W)W] = \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}(\tilde{T}_{ij} - T_{ij}) X_i X_{ij} \tag{3.10.10}$$

kjer je:

$$\tilde{T}_{ij} := \mathbb{E}[g''(W) - g''(\tilde{W}_{ij})] \tag{3.10.11}$$

$$T_{ij} := \mathbb{E}[g''(W_i + \theta R_i) - g''(W_{ij}) \mid \mathcal{H}_{ij}] \tag{3.10.12}$$

S $\mathcal{H}_{ij}$ smo označili σ-algebro, ki jo generirajo X_i, X_{ij}, R_i in R_{ij}, θ pa je kot ponavadi porazdeljena enakomerno po $[0,1]$ in neodvisna od vsega ostalega. Ocenimo:

$$|\tilde{T}_{ij}|_\vee \le \mathbb{E}\min\Big\{2\,M_2(g),\, M_3(g)\,|\tilde{R}_{ij}|\Big\} \tag{3.10.13}$$

Z $|\cdot|_\vee$ smo označili injektivno tenzorsko normo (glej razdelek D.8). Podobno ocenimo:

$$\begin{aligned}|T_{ij}|_\vee &\le \mathbb{E}\Big[\min\Big\{2\,M_2(g),\, M_3(g)\,|\theta R_i + R_{ij}|\Big\} \,\Big|\, \mathcal{H}_{ij}\Big] \le \\ &\le \mathbb{E}\Big[\min\Big\{2\,M_2(g),\, M_3(g)\big((1-\theta)|R_{ij}| + \theta|R_i + R_{ij}|\big)\Big\} \,\Big|\, \mathcal{H}_{ij}\Big] \le \\ &\le \min\Big\{2\,M_2(g), M_3(g)\,\mathbb{E}\Big[(1-\theta)|R_{ij}| + \theta|R_i + R_{ij}| \,\Big|\, \mathcal{H}_{ij}\Big]\Big\} = \\ &= \min\Big\{2\,M_2(g),\, \frac{M_3(g)}{2}\big(|R_{ij}| + |R_i + R_{ij}|\big)\Big\}\end{aligned} \tag{3.10.14}$$

Dokaz zaključimo z ocenami:

$$M_2(g) \le \frac{1}{2} M_2(f)\,, \quad M_2(g) \le \frac{2}{\sqrt{2\pi}} M_1(f)\,, \quad M_3(g) \le \frac{\sqrt{2\pi}}{4} M_2(f) \tag{3.10.15}$$

ki sledijo iz leme 2.6.2, in ocene:

$$M_3(g) \le 2\,M_1(f) \tag{3.10.16}$$

ki v enorazsežnem primeru sledi iz točke (3) leme 1.4.1. ∎

Zgled 3.10.1. *Neodvisne slučajne spremenljivke.* Naj bodo $X_i, i \in \mathcal{I}$, neodvisne slučajne spremenljivke ali vektorji z vsoto W, velja pa naj $\mathbb{E}\,X_i = 0$ in $\mathrm{var}(W) = 1$ oz. v večrazsežnem primeru $\mathrm{Var}(W) = \mathbf{I}$. Razčlenitve konstruiramo tako kot v zgledu 3.9.1. t. j. $R_i = X_{i0} = \tilde{R}_{i0} = X_i$ in $R_{i0} = 0$. Po izreku 3.10.5 v enorazsežnem primeru velja ocena:

$$\left|\mathbb{E}\,f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\right| \le M_1(f) \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,X_i^2 \left[\min\left\{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}, |X_i|\right\} + \mathbb{E}\min\left\{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}, 2\,|X_i|\right\}\right] \quad (3.10.17)$$

Za nadaljnje ocenjevanje potrebujemo še naslednji preprost rezultat.

Lema 3.10.6. *Naj bo X slučajna spremenljivka z vrednostmi na neki linearno urejeni množici $\mathcal{A}$, dani pa naj bosta še naraščajoči funkciji $f, g\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Tedaj velja* $\mathrm{cov}[f(X), g(X)] \ge 0$.

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da obstaja neodvisna kopija Y slučajne spremenljivke X. Očitno je:

$$\begin{aligned} 0 &\le \mathbb{E}\Big[\big(f(X) - f(Y)\big)\big(g(X) - g(Y)\big)\Big] = \\ &= \mathbb{E}\Big[f(X)\,g(X) - f(X)\,g(Y) - f(Y)\,g(X) + f(Y)\,g(Y)\Big] = \\ &= 2\Big[\mathbb{E}\,f(X)\,g(X) - \mathbb{E}\,f(X)\,\mathbb{E}\,g(X)\Big] = \\ &= 2\,\mathrm{cov}[f(X), g(X)] \end{aligned} \quad (3.10.18)$$

Naš rezultat je s tem dokazan. ■

Iz ocene 3.10.17 in leme 3.10.6 zdaj dobimo:

$$\begin{aligned} \left|\mathbb{E}\,f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\right| &\le M_1(f) \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,X_i^2 \left[\min\left\{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}, |X_i|\right\} + \min\left\{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}, 2\,|X_i|\right\}\right] \le \\ &\le 3\,M_1(f) \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,X_i^2 \min\left\{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}, |X_i|\right\} \end{aligned} \quad (3.10.19)$$

Podobno tudi v večrazsežnem primeru dobimo:

$$\left|\mathbb{E}\,f(W) - \mathrm{N}(0,\mathbf{I})\{f\}\right| \le 3\,M_2(f) \sum_{i\in I} \mathbb{E}\,|X_i|^2 \min\left\{1, \frac{\sqrt{2\pi}}{8}|X_i|\right\} \quad (3.10.20)$$

□

Zgled 3.10.2. *Lokalna odvisnost.* Naj bodo X_i, $i \in \mathcal{I}$, lokalno odvisne slučajne spremenljivke oz. vektorji, in sicer naj bo Γ graf njihove odvisnosti v skladu z definicijo iz zgleda 3.5.3. Iz izreka 3.10.5 za enorazsežni primer dobimo:

$$\begin{aligned} &\left|\mathbb{E}\,f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\right| \le \\ &\quad\le M_1(f) \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,|X_i X_j| \left[\mathbb{E}\min\left\{\frac{2}{\sqrt{2\pi}},\ 2 \sum_{k\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j} |X_k|\right\} + \right. \\ &\qquad \left. + \min\left\{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}, \sum_{k\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j} |X_k| + \sum_{k\in\mathcal{J}_j\setminus\mathcal{J}_i} |X_k|\right)\right\}\right] \end{aligned} \quad (3.10.21)$$

kjer podobno kot v zgledu 3.9.2 z $\mathcal{J}_i$ označimo množico točk, ki so sosedne ali enake i. Za nadaljnje ocenjevanje bomo potrebovali naslednji tehnični rezultat, ki ga bomo dokazali na koncu razdelka.

Lema 3.10.7. *Naj bodo x, y, a ter b_j in z_j, $j \in \mathcal{J}$, nenegativna števila ter še $\sum_{j\in\mathcal{J}} b_j \le b < \infty$ in $b > 0$. Tedaj velja:*

$$\begin{aligned} xy \min\Big\{a, \sum_{j\in\mathcal{J}} b_j z_j\Big\} &\le L\big(x, y, (z_j)_{j\in\mathcal{J}}, a, (b_j)_{j\in\mathcal{J}}, b\big) := \\ &:= \frac{x^2}{3}\min\Big\{\frac{3a}{2}, bx\Big\} + \frac{y^2}{3}\min\Big\{\frac{3a}{2}, by\Big\} + \frac{1}{3b}\sum_{j=1}^{r} b_j z_j^2 \min\Big\{\frac{3a}{2}, bz_j\Big\} \end{aligned} \tag{3.10.22}$$

Opomba. Za velike a se desna stran (3.10.22) ujema z izrazom, ki ga dobimo, če na levi strani uporabimo Jensenove neenakosti $xyz_j \le \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z_j^3)$.

Posledica 3.10.8. *Naj bodo X, Y in Z_j, $j \in \mathcal{J}$, nenegativne slučajne spremenljivke, števila a, b in b_j pa tako kot v lemi 3.10.7. Tedaj velja:*

$$\mathbb{E}\, XY \min\Big\{a, \sum_{j=1}^{r} b_j Z_j\Big\} \le \mathbb{E}\, L\big(X, Y, (Z_j)_{j\in\mathcal{J}}, a, (b_j)_{j\in\mathcal{J}}, b\big) \tag{3.10.23}$$

$$\mathbb{E}\, XY \cdot \mathbb{E}\min\Big\{a, \sum_{j=1}^{r} b_j Z_j\Big\} \le \mathbb{E}\, L\big(X, Y, (Z_j)_{j\in\mathcal{J}}, a, (b_j)_{j\in\mathcal{J}}, b\big) \tag{3.10.24}$$

Dokaz. Ocena (3.10.23) sledi neposredno iz leme 3.10.7. Oceno (3.10.24) pa izpeljemo iz ocene (3.10.23), tako da vzamemo, da je par (X, Y) neodvisen od $(Z_j)_{j\in\mathcal{J}}$. ■

Vrnimo se sedaj k oceni (3.10.21). Uporabili bomo posledico 3.10.8. Če privzamemo, da ima vsako oglišče v grafu odvisnosti vključno s samim sabo kvečjemu D sosedov, lahko postavimo $b := 4D$. Sledi:

$$\begin{aligned} \big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\big| &\le \\ &\le M_1(f) \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{j\in\mathcal{J}_i} \bigg[\frac{2}{3}\,\mathbb{E}\, X_i^2 \min\Big\{\frac{3}{\sqrt{2\pi}}, 4D|X_i|\Big\} + \\ &\qquad + \frac{2}{3}\,\mathbb{E}\, X_j^2 \min\Big\{\frac{3}{\sqrt{2\pi}}, 4D|X_j|\Big\} + \\ &\qquad + \frac{1}{12D}\Big(3\sum_{k\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j} + \sum_{k\in\mathcal{J}_j\setminus\mathcal{J}_i}\Big)\mathbb{E}\, X_k^2 \min\Big\{\frac{3}{\sqrt{2\pi}}, 4D|X_k|\Big\}\bigg] \le \\ &\le 2D\, M_1(f) \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\, X_i^2 \min\Big\{\frac{3}{\sqrt{2\pi}}, 4D|X_i|\Big\} \end{aligned} \tag{3.10.25}$$

Dobili smo torej posplošitev ocen (3.9.19) in (3.10.19). Podobno tudi v večrazsežnem primeru dobimo:

$$\big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,\mathbf{I})\{f\}\big| \le D\, M_2(f) \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\, |X_i|^2 \min\big\{3, \sqrt{2\pi}\, D|X_i|\big\} \tag{3.10.26}$$

Iz leme 3.10.4, ocene (3.10.26) ter trditve A.8.1 in točke (4) trditve A.9.1 pa dobimo še naslednji rezultat.

Trditev 3.10.9. *Naj bo $X_i^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathcal{I}_n$, trikotna tabela slučajnih vektorjev z vrednostmi v $\mathbb{R}^d$. Za vsak n naj za družino $X_i^{(n)}$, $i \in \mathcal{I}_n$, obstaja graf odvisnosti, v katerem ima vsako oglišče s samim seboj vred največ D_n sosedov. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo še $W^{(n)} := \sum_{i \in \mathcal{I}_n} X_i^{(n)}$ in kot ponavadi privzemimo, da je $\mathbb{E}\, X_i^{(n)} = 0$ in $\mathrm{Var}(W^{(n)}) = \mathbf{I}$. Nadalje naj za vsak $\varepsilon > 0$ velja:*

$$\lim_{n\to\infty} D_n \sum_{i \in \mathcal{I}_n} \mathbb{E}\left|X_i^{(n)}\right|^2 \mathbf{1}\left[\left|X_i^{(n)}\right| > \frac{\varepsilon}{v_n}\right] = 0 \tag{3.10.27}$$

kjer je:

$$v_n := D_n^2 \sum_{i \in I_n} \mathbb{E}\left|X_i^{(n)}\right|^2 \tag{3.10.28}$$

Tedaj zaporedje $W^{(n)}$ šibko konvergira proti standardni normalni porazdelitvi $\mathrm{N}(0, \mathbf{I}_m)$. ■

Zgornja trditev je neposredna posplošitev Lindebergovega izreka na lokalno odvisnost. □

Dolžni smo dokazati še lemo 3.10.7. Potrebovali bomo še naslednji tehnični rezultat.

Lema 3.10.10. *Za poljubne $u, v \geq 0$ in $p \geq 1$ velja:*

$$\min\left\{1, (u+v)^p\right\} \leq u^p + pv \tag{3.10.29}$$

Dokaz. Pišimo $s := u + v$. Tedaj neenakost (3.10.29) takoj sledi iz zveze $\min_{0 \leq u \leq s}(u^p + p(s-u)) = \min\{1, s^p\}$, ki je ni težko preveriti. ■

Dokaz leme 3.10.7. Najprej iz ocene $xy \leq (x^2 + y^2)/2$ sledi, da je dovolj dokazati neenakost:

$$x^2 \min\left\{a, \sum_{j \in \mathcal{J}} b_j z_j\right\} \leq \frac{2x^2}{3} \min\left\{\frac{3a}{2}, bx\right\} + \frac{1}{3b} \sum_{j \in \mathcal{J}} b_j z_j^2 \min\left\{\frac{3a}{2}, b z_j\right\} \tag{3.10.30}$$

Ločimo dva primera. V primeru, ko je $x \geq (3a)/(2b)$, preprosto ocenimo:

$$x^2 \min\left\{a, \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j z_j\right\} \leq a x^2 = \frac{2x^2}{3} \min\left\{\frac{3a}{2}, bx\right\} \tag{3.10.31}$$

V primeru, ko je $x < (3a)/(2b)$, pa pišimo:

$$x^2 \min\left\{a, \sum_{j \in \mathcal{J}} b_j z_j\right\} = (b^{1/3} x)^2\, b^{-2/3} \min\left\{a, \sum_{j \in \mathcal{J}} b_j z_j\right\} \tag{3.10.32}$$

nakar uporabimo Jensenovo neenakost $u^2 v \le \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{3}v^3$. Dobimo:

$$\begin{aligned} x^2 \min\Big\{a, \sum_{j\in\mathcal{J}} b_j z_j\Big\} &\le \frac{2bx^3}{3} + \frac{1}{3b^2}\Big(\min\Big\{a, \sum_{j\in\mathcal{J}} b_j z_j\Big\}\Big)^3 = \\ &= \frac{2x^2}{3}\min\Big\{\frac{3a}{2}, bx\Big\} + \frac{1}{3b^2}\min\Big\{a^3, \Big(\sum_{j\in\mathcal{J}} b_j z_j\Big)^3\Big\} \end{aligned} \tag{3.10.33}$$

V drugem členu pišimo $b_j z_j = b_j^{1/2}(b_j z_j^2)^{1/2}$ in uporabimo Cauchy–Schwarzevo neenakost. Dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3b^2}\min\Big\{a^3, \Big(\sum_{j\in\mathcal{J}} b_j z_j\Big)^3\Big\} &\le \frac{1}{3b^2}\min\Big\{a^3, \Big(b\sum_{j\in\mathcal{J}} b_j z_j^2\Big)^{3/2}\Big\} = \\ &= \frac{a^3}{3b^2}\min\Big\{1, \Big(\frac{b}{a^2}\sum_{j;z_j<(3a)/(2b)} b_j z_j^2 + \frac{b}{a^2}\sum_{j;z_j\ge(3a)/(2b)} b_j z_j^2\Big)^{3/2}\Big\} \end{aligned} \tag{3.10.34}$$

Zdaj pa uporabimo lemo 3.10.10. Dobimo:

$$\frac{1}{3b^2}\min\Big\{a^3, \Big(\sum_{j\in\mathcal{J}} b_j z_j\Big)^3\Big\} \le \frac{a^3}{3b^2}\Big[\Big(\frac{b}{a^2}\sum_{j;z_j<(3a)/(2b)} b_j z_j^2\Big)^{3/2} + \frac{3b}{2a^2}\sum_{j;z_j\ge(3a)/(2b)} b_j z_j^2\Big] \tag{3.10.35}$$

V prvem členu pišimo $b_j z_j^2 = b_j^{1/3}(b_j z_j^3)^{2/3}$ in uporabimo Hölderjevo neenakost. Po nekaj računanja končno dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3b^2}\min\Big\{a^3, \Big(\sum_{j\in\mathcal{J}} b_j z_j\Big)^3\Big\} &\le \frac{1}{3b}\Big(b\sum_{j;z_j<(3a)/(2b)} b_j z_j^3 + \frac{3a}{2}\sum_{j;z_j\ge(3a)/(2b)} b_j z_j^2\Big) \\ &= \frac{1}{3b}\sum_{j\in\mathcal{J}} b_j z_j^2 \min\Big\{\frac{3a}{2}, bz_j\Big\} \end{aligned} \tag{3.10.36}$$

Naš rezultat zdaj sledi iz (3.10.31), (3.10.33) in (3.10.36). ■

3.11 Lipschitzeve testne funkcije v več dimenzijah

Oceno napake pri normalni aproksimaciji smo do sedaj med drugim izpeljali tudi za Lipschitzeve funkcije, a le v eni dimenziji. V razdelku 2.8 smo ugotovili, da se taki rezultati ne dajo preprosto posplošiti na več dimenzij. Tu pa bomo videli, da se za Lipschitzeve testne funkcije (t. j. v *Wassersteinovi metriki*) tudi v več dimenzijah dajo izpeljati ocene, ki so tipično istega velikostnega reda kot v eni dimenziji, le da je potrebno gledati razčlenitve enega reda več.

Začeli bomo tako kot pri razčlenitvah drugega reda. Naj bo:

$$W = \sum_{i \in \mathcal{I}} X_i, \qquad W = W_i + X_i \tag{3.11.1}$$

kjer je W_i neodvisen od X_i. Kot ponavadi privzemimo, da je $\mathbb{E}\, X_i = 0$ in $\mathrm{Var}(W) = \mathbf{I}$. Nadalje naj bo:

$$R_i = \sum_{i \in \mathcal{J}_i} X_{ij}, \quad W_i = W_{ij} + R_{ij}, \quad W = \tilde{W}_{ij} + \tilde{R}_{ij} \tag{3.11.2}$$

kjer je W_{ij} enako porazdeljen kot $\tilde{W}_{ij}$ in neodvisen od σ-algebre $\mathcal{H}_{ij}$, pri čemer sta X_i in X_{ij} merljiva glede na $\mathcal{H}_{ij}$. Razčlenitve tretjega reda pa naj bodo podane takole:

$$\tilde{R}_{ij} = \sum_{k \in \mathcal{K}_{ij}^{(0)}} X_{ijk}^{(0)}, \qquad \tilde{W}_{ij} = W_{ijk}^{(0)} + R_{ijk}^{(0)} \tag{3.11.3}$$

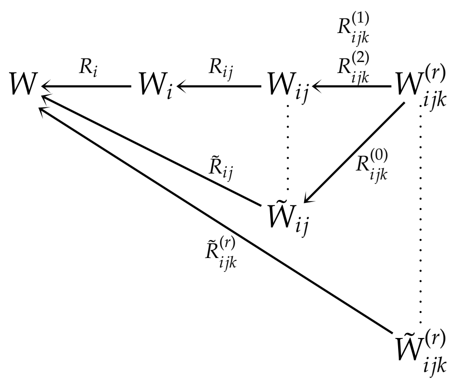
$$R_i + R_{ij} = \sum_{k \in \mathcal{K}_{ij}^{(1)}} X_{ijk}^{(1)}, \qquad W_{ij} = W_{ijk}^{(1)} + R_{ijk}^{(1)} \tag{3.11.4}$$

$$R_{ij} = \sum_{k \in \mathcal{K}_{ij}^{(2)}} X_{ijk}^{(2)}, \qquad W_{ij} = W_{ijk}^{(2)} + R_{ijk}^{(2)} \tag{3.11.5}$$

kjer je $W_{ijk}^{(0)}$ neodvisen od $X_{ijk}^{(0)}$, $W_{ijk}^{(1)}$ od σ-algebre, generirane s $\mathcal{H}_{ij}$ in $X_{ijk}^{(1)}$, $W_{ijk}^{(2)}$ pa od σ-algebre, generirane s $\mathcal{H}_{ij}$ in $X_{ijk}^{(2)}$. Končno naj bodo za $r = 0, 1, 2$ podane še razčlenitve:

$$W = \tilde{W}_{ijk}^{(r)} + \tilde{R}_{ijk}^{(r)} \tag{3.11.6}$$

kjer je $\tilde{W}_{ijk}$ porazdeljen enako kot W_{ijk}. Zgornje razčlenitve delno ponazarja naslednji diagram:



Slika 3.11.1

Izrek 3.11.1. *Če je W slučajni vektor z vrednostmi v $\mathbb{R}^d$ in ima podane razčlenitve tako kot zgoraj, za vsako Lipschitzevo funkcijo $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ velja ocena:*

$$\begin{aligned}\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,\mathbf{I})\{f\}\Big| &\le \\ &\le M_1(f)\Bigg[\Big(2{,}9 + 0{,}28 \ln d\Big)\sum_{i\in I}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,|X_i|\,|X_{ij}|\Big(2\,\mathbb{E}\big|\tilde{R}_{ij}\big| + \big|R_{ij}\big| + \big|R_i + R_{ij}\big|\Big) + \\ &\quad + 3{,}5\sum_{i\in I}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,|X_i|\,|X_{ij}|\Big(\sqrt{\tilde{\Xi}_{ij}} + \sqrt{\Xi_{ij}}\,\Big)\Bigg]\end{aligned} \tag{3.11.7}$$

kjer je:

$$\tilde{\Xi}_{ij} = \sum_{k\in\mathcal{K}_{ij}^{(0)}} \Big[\mathbb{E}\big|X_{ijk}^{(0)}\big|\,\mathbb{E}\big|\tilde{R}_{ijk}^{(0)}\big| + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\big|X_{ijk}^{(0)}\big|\,\big|R_{ijk}^{(0)}\big| + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\big|X_{ijk}^{(0)}\big|\,\big|\tilde{R}_{ij} + R_{ijk}^{(0)}\big|\Big] \tag{3.11.8}$$

in:

$$\begin{aligned}\Xi_{ij} = \sum_{r=1}^{2}\sum_{k\in\mathcal{K}_{ij}^{(r)}} &\mathbb{E}\bigg[\big|X_{ijk}^{(r)}\big|\Big(\mathbb{E}\big|\tilde{R}_{ijk}^{(r)}\big| + \frac{1}{4}\big|R_{ijk}^{(r)}\big|\Big)\ \bigg|\ \mathcal{H}_{ij}\bigg] + \\ &+ \sum_{k\in\mathcal{K}_{ij}^{(1)}} \mathbb{E}\bigg[\big|X_{ijk}^{(1)}\big|\Big(\frac{1}{12}\big|R_{ij} + R_{ijk}^{(1)}\big| + \frac{1}{6}\big|R_i + R_{ij} + R_{ijk}^{(1)}\big|\Big)\ \bigg|\ \mathcal{H}_{ij}\bigg] + \\ &+ \sum_{k\in\mathcal{K}_{ij}^{(2)}} \mathbb{E}\bigg[\big|X_{ijk}^{(2)}\big|\Big(\frac{1}{6}\big|R_{ij} + R_{ijk}^{(2)}\big| + \frac{1}{12}\big|R_i + R_{ij} + R_{ijk}^{(2)}\big|\Big)\ \bigg|\ \mathcal{H}_{ij}\bigg]\end{aligned} \tag{3.11.9}$$

Opomba. Konstanta na desni strani ocene (3.11.7) raste z logaritmom dimenzije. Kasneje bomo videli, da odvisnost konstante od dimenzije ni nič nenavadnega (glej razdelek 4.3).

Preden dokažemo izrek 3.11.1, podajmo še dva standardna zgleda: neodvisne slučajne spremenljivka in lokalno odvisnost.

Trditev 3.11.2. *Naj bo $W = \sum_{i\in I} X_i$, kjer so X_i neodvisni slučajni vektorji z $\mathbb{E}\,X_i = 0$ in* $\mathrm{Var}(W) = \mathbf{I}$. *Tedaj velja ocena:*

$$\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,\mathbf{I})\{f\}\Big| \le \Big(17 + 0{,}84 \ln d\Big) M_1(f) \sum_{i\in I} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{3.11.10}$$

Dokaz. Razčlenitve prvega in drugega reda konstruiramo tako kot pri zgledih 3.9.1 in 3.10.1: postavimo $R_i := X_i$, $\mathcal{J}_i = \{0\}$ in $X_{i0} = \tilde{R}_{i0} = X_i$ in $R_{i0} = 0$ (velja torej $W_i = W_{i0} = \tilde{W}_{i0} = W - X_i$). Pri razčlenitvah tretjega reda pa postavimo $\mathcal{H}_{i0} := \sigma(X_i)$, $\mathcal{K}_{i0}^{(0)} = \mathcal{K}_{i0}^{(1)} = \{0\}$ in $\mathcal{K}_{i0}^{(2)} = \emptyset$ ter $X_{i00}^{(r)} = \tilde{R}_{i00}^{(r)} = X_i$ in $R_{i00}^{(r)} = 0$ (podobno kot pri razčlenitvah drugega reda torej velja $W_{i00}^{(r)} = \tilde{W}_{i00}^{(r)} = W - X_i$).

Ocena (3.11.7) se sedaj prevede na:

$$\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f\}\Big| \le M_1(f)\Big[(2{,}9 + 0{,}28 \ln d) S_1 + 3{,}5\, S_2\Big] \tag{3.11.11}$$

kjer je:

$$S_1 := \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}\, |X_i|^2 \Big(2\, \mathbb{E}\, |X_i| + |X_i|\Big) \le 3 \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}\, |X_i|^3 \tag{3.11.12}$$

in:

$$S_2 := \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}\, |X_i|^2 \Big(\sqrt{\tilde{\Xi}_i} + \sqrt{\Xi_i}\,\Big) \le \sum_{i \in \mathcal{I}} \Big(\mathbb{E}\, |X_i|^3\Big)^{2/3} \Big[\Big(\mathbb{E}\, \tilde{\Xi}_i^{3/2}\Big)^{1/3} + \Big(\mathbb{E}\, \Xi_i^{3/2}\Big)^{1/3}\Big] \tag{3.11.13}$$

in še:

$$\tilde{\Xi}_i := \Big(\mathbb{E}\, |X_i|\Big)^2 + \frac{1}{2}\, \mathbb{E}\, |X_i|^2 \le \frac{3}{2}\, \mathbb{E}\, |X_i|^2 \tag{3.11.14}$$

$$\Xi_i := \mathbb{E}\Big[|X_i|\, \mathbb{E}\, |X_i| + \frac{1}{6}\, |X_i|^2 \;\Big|\; X_i\Big] = |X_i|\, \mathbb{E}\, |X_i| + \frac{1}{6}\, |X_i|^2 \tag{3.11.15}$$

Očitno je:

$$\mathbb{E}\, \tilde{\Xi}_i^{3/2} \le \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \mathbb{E}\, |X_i|^3 \tag{3.11.16}$$

Pri oceni matematičnega upanja $\mathbb{E}\, \Xi_i^{3/2}$ pa si pomagamo z oceno:

$$\left(\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i x_i\right)^p \le \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i\right)^{p-1} \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i x_i^p \tag{3.11.17}$$

ki velja za poljubne nenegativne a_i in x_i ter $p \ge 1$, izpeljemo pa jo lahko iz Hölderjeve ali Jensenove neenakosti (podrobnosti so prepuščene bralcu). Tako dobimo še:

$$\mathbb{E}\, \Xi_i^{3/2} \le \left(\frac{7}{6}\right)^{1/2} \left[\Big(|X_i|\, \mathbb{E}\, |X_i|\Big)^{3/2} + \frac{1}{6}\, |X_i|^3\right] \le \left(\frac{7}{6}\right)^{3/2} \mathbb{E}\, |X_i|^3 \tag{3.11.18}$$

Ocena (3.11.10) zdaj po nekaj numeričnega ocenjevanja sledi iz ocen (3.11.11), (3.11.12), (3.11.13), (3.11.16) in (3.11.18). ■

Naslednja trditev je, z izjemo konstante, posplošitev trditve 3.11.2 na lokalno odvisnost.

Trditev 3.11.3. *Naj bo $W = \sum_{i \in \mathcal{I}} X_i$, kjer so X_i lokalno odvisni slučajni vektorji, za katere obstaja graf odvisnosti, definiran tako kot v zgledu 3.5.3 in v katerem ima vsako oglišče s samim seboj vred največ D sosedov. Če privzamemo še, da je $\mathbb{E}\, X_i = 0$ in* $\mathrm{Var}(W) = \mathbf{I}$, *velja ocena:*

$$\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f\}\Big| \le \Big(42 + 2 \ln d\Big) D^2\, M_1(f) \sum_{i \in I} \mathbb{E}\, |X_i|^3 \tag{3.11.19}$$

Trditev 3.11.3 bomo dokazali na koncu razdelka, sedaj pa se bomo najprej lotili dokazovanja izreka 3.11.1. Ker se tretjih odvodov rešitve g Steinove enačbe:

$$\Delta g(w) - g'(w)w = f(w) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f\} \tag{3.11.20}$$

v večrazsežnem primeru ne da oceniti kar z Lipschitzevo konstanto funkcije f, ocene napake pri normalni aproksimaciji za dano Lipschitzevo testno funkcijo f ne bomo mogli preprosto prevesti na oceno Steinovega matematičnega upanja funkcije g, ki reši (3.11.20). Namesto tega bomo funkcijo f zamenjali z gladko funkcijo f_ε, ki se bo le malo razlikovala od f. Natančneje, definirajmo:

$$f_\varepsilon(x) := \mathbb{E} f(x + \varepsilon Z) \tag{3.11.21}$$

kjer je spet $Z \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{I})$. Funkcije f_ε imajo vse odvode omejene in to velja tudi za ustrezne rešitve pripadajočih Steinovih enačb. Potrebovali bomo naslednje eksplicitne ocene.

Lema 3.11.4. *Naj bo f_ε tako kot v* (3.11.21), *$\mathcal{U}_\alpha$ pa tako kot v* (2.4.17). *Tedaj za vsak $r \ge 2$ veljajo ocene:*

$$M_r(\mathcal{U}_\alpha f_\varepsilon) \le c_{r-1} \frac{\cos^r \alpha}{\sin^{r-1} \alpha} M_1(f) \tag{3.11.22}$$

$$M_r(\mathcal{U}_\alpha f_\varepsilon) \le \frac{c_1 c_{r-2}}{\varepsilon} \frac{\cos^r \alpha}{\sin^{r-2} \alpha} M_1(f) \tag{3.11.23}$$

$$\left|\mathbb{E}(\mathcal{U}_\alpha f_\varepsilon)^{(r)}(Z)\right|_\vee \le c_{r-1} \cos^r \alpha \, M_1(f) \tag{3.11.24}$$

kjer so konstante c_r definirane tako kot v (2.5.19), *$|\cdot|_\vee$ pa je injektivna tenzorska norma (glej razdelek D.8).*

Dokaz. Očitno je $M_1(f_\varepsilon) \le M_1(f)$. Poleg tega z odvajanjem enakosti:

$$f_\varepsilon'(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f'(x + \varepsilon z)\, \phi_d(z)\, \mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}^d} f'(\varepsilon y)\, \phi_d\left(y - \frac{x}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}y \tag{3.11.25}$$

kjer je ϕ_d standardna d-razsežna normalna gostota, dobimo:

$$f_\varepsilon''(x) = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} f'(\varepsilon y)\, \phi_d'\left(y - \frac{x}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}y = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} f'(x + \varepsilon z)\, \phi_d'(z)\, \mathrm{d}z \tag{3.11.26}$$

(vsa odvajanja pod integralskim znakom upravičimo s trditvijo E.6.2). Iz leme 2.5.4 zdaj dobimo oceno $M_2(f_\varepsilon) \le c_1 M_1(f)/\varepsilon$. Iz dobljenih ocen za $M_1(f_\varepsilon)$ in $M_2(f_\varepsilon)$ ter ocene (2.5.24) dobimo oceni (3.11.22) in (3.11.23).

Izpeljimo še oceno (3.11.24). Naj bosta Z in Z' neodvisna standardna d-razsežna normalna slučajna vektorja. Tedaj velja:

$$\mathbb{E}\, \mathcal{U}_\alpha f_\varepsilon(x + Z) = \mathbb{E} f\big(\cos\alpha\, (x + Z) + \sin\alpha\, Z'\big) = \mathbb{E} f(\cos\alpha\, x + Z) \tag{3.11.27}$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(\mathcal{U}_\alpha f_\varepsilon)'(x + Z) = \cos\alpha \int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon'(\cos\alpha\, x + z)\, \phi_d(z)\, \mathrm{d}z = \cos\alpha \int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon'(y)\, \phi_d(y - \cos\alpha\, x)\, \mathrm{d}y \tag{3.11.28}$$

Z nadaljnjim odvajanjem dobimo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathcal{U}_\alpha f_\varepsilon)^{(r)}(x+Z) &= (-1)^{r-1}\cos^r\alpha \int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon'(y)\,\phi_d^{(r-1)}(y-\cos\alpha\,x)\,\mathrm{d}y = \\ &= (-1)^{r-1}\cos^r\alpha \int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon'(\cos\alpha\,x+z)\,\phi_d^{(r-1)}(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{3.11.29}$$

S ponovno uporabo leme 2.5.4 dobimo še oceno (3.11.24). ∎

Lema 3.11.5. *Za poljubne A, B in $C \geq 0$ velja:*

$$\int_0^\infty \min\left\{A, \frac{C}{s^2}\right\}\mathrm{d}s = 2\sqrt{AC} \tag{3.11.30}$$

$$\int_0^\infty \min\left\{A, \frac{B}{s}, \frac{C}{s^2}\right\}\mathrm{d}s \leq B\left[2 + \left(\ln\frac{AC}{B^2}\right)_+\right] \tag{3.11.31}$$

Dokaz. Velja:

$$\int_0^\infty \min\left\{A, \frac{C}{s^2}\right\}\mathrm{d}s = \int_0^{\sqrt{C/A}} A\,\mathrm{d}s + \int_{\sqrt{C/A}}^\infty \frac{C}{s^2}\,\mathrm{d}s = 2\sqrt{AC} \tag{3.11.32}$$

in:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \min\left\{A, \frac{B}{s}, \frac{C}{s^2}\right\}\mathrm{d}s &\leq \int_0^{B/A} A\,\mathrm{d}s + \left(\int_{B/A}^{C/B} \frac{B}{s}\,\mathrm{d}s\right)_+ + \int_{C/B}^\infty \frac{C}{s^2}\,\mathrm{d}s = \\ &= B\left[2 + \left(\ln\frac{AC}{B^2}\right)_+\right]\end{aligned} \tag{3.11.33}$$

∎

Dokaz izreka 3.11.1. Naj bo $Z \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{I})$. Najprej trivialno ocenimo:

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E} f(W) - \mathbb{E} f(Z)\right| &= \left|(f(W) - f(0)) - (f(Z) - f(0))\right| \leq \\ &\leq M_1(f)(\mathbb{E}|W| + \mathbb{E}|Z|) \leq \\ &\leq M_1(f)\Big((\mathbb{E}|W|^2)^{1/2} + (\mathbb{E}|Z|^2)^{1/2}\Big) = \\ &= M_1(f)\Big((\operatorname{sl}\operatorname{Var}(W))^{1/2} + (\operatorname{sl}\operatorname{Var}(Z))^{1/2}\Big) = \\ &= 2\sqrt{d}\,M_1(f)\end{aligned} \tag{3.11.34}$$

To oceno smo izpeljali zato, ker bomo potrebovali, da je:

$$\delta := \sup_{\substack{f\in\flat^{(1)}(\mathbb{R}^d)\\ M_1(f)>0}} \frac{|\,\mathbb{E} f(W) - \mathbb{E} f(Z)|}{M_1(f)} < \infty \tag{3.11.35}$$

Lotimo se sedaj pravega ocenjevanja količine δ. Kot smo že omenili, testno funkcijo f najprej zgladimo. Naj bo f_ε tako kot v (3.11.21). Ker je:

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \varepsilon\, M_1(f)\,\mathbb{E}|Z| \leq \varepsilon\sqrt{d}\,M_1(f) \tag{3.11.36}$$

velja:

$$\left|\mathbb{E}\, f(W) - \mathbb{E}\, f(Z)\right| \le \left|\mathbb{E}\, f_\varepsilon(W) - \mathbb{E}\, f_\varepsilon(Z)\right| + 2\varepsilon\sqrt{d}\, M_1(f) \tag{3.11.37}$$

Po (2.4.8), (2.4.13) in (2.4.14) velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, f_\varepsilon(W) - \mathbb{E}\, f_\varepsilon(Z) &= -\int_0^\infty \mathbb{E}\Big[\Delta\mathcal{P}_t f(W) - (\mathcal{P}_t f)'(W)W\Big]\mathrm{d}t = \\ &= -\int_0^{\pi/2} \mathbb{E}\Big[\Delta\mathcal{U}_\alpha f(W) - (\mathcal{U}_\alpha f)'(W)W\Big]\operatorname{tg}\alpha\,\mathrm{d}\alpha \end{aligned} \tag{3.11.38}$$

kjer je $\mathcal{U}_\alpha$ spet tako kot v lemi 3.11.4 oz. (2.4.17), t. j. $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{P}_{-\ln\cos\alpha}$. Označimo $g := \mathcal{U}_\alpha f_\varepsilon \operatorname{tg}\alpha$. Podobno kot v (3.9.8) in (3.10.10) izračunamo:

$$\mathbb{E}\Big[\Delta g(W) - g'(W)W\Big] = \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\Big(\tilde{T}_{ij}(\alpha) - T_{ij}(\alpha)\Big)X_i X_{ij} \tag{3.11.39}$$

kjer je:

$$\tilde{T}_{ij}(\alpha) := \mathbb{E}\Big[g''(W) - g''(\tilde{W}_{ij})\Big] \tag{3.11.40}$$

$$T_{ij}(\alpha) := \mathbb{E}\Big[g''(W_i + \theta R_i) - g''(W_{ij}) \;\Big|\; \mathcal{H}_{ij}\Big] \tag{3.11.41}$$

slučajna spremenljivka θ pa je kot ponavadi porazdeljena enakomerno po $[0,1]$ in neodvisna od vsega ostalega. Torej velja:

$$\left|\mathbb{E}\, f_\varepsilon(W) - \mathbb{E}\, f_\varepsilon(Z)\right| \le \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,|X_i|\,|X_{ij}| \int_0^{\pi/2}\Big(\left|\tilde{T}_{ij}(\alpha)\right|_\vee + \left|T_{ij}(\alpha)\right|_\vee\Big)\mathrm{d}\alpha \tag{3.11.42}$$

Po eni strani z uporabo (3.11.22) preprosto ocenimo:

$$\left|\tilde{T}_{ij}(\alpha)\right|_\vee \le 2\, M_2(g) \le 2c_1 \cos\alpha\, M_1(f) \tag{3.11.43}$$

$$\left|T_{ij}(\alpha)\right|_\vee \le 2\, M_2(g) \le 2c_1 \cos\alpha\, M_1(f) \tag{3.11.44}$$

Po drugi strani pa zaradi neodvisnosti velja:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ij}(\alpha) &= \mathbb{E}\, g'''(\tilde{W}_{ij} + \eta\tilde{R}_{ij})\tilde{R}_{ij} = \\ &= \sum_{k\in\mathcal{K}_{ij}^{(0)}} \mathbb{E}\, g'''(\tilde{W}_{ij} + \eta\tilde{R}_{ij})X_{ijk}^{(0)} = \\ &= \mathbb{E}\, g'''(W)\,\mathbb{E}\,\tilde{R}_{ij} - \sum_{k\in\mathcal{K}_{ij}^{(0)}} \mathbb{E}\Big(g'''(W) - g'''(\tilde{W}_{ijk}^{(0)})\Big)\,\mathbb{E}\, X_{ijk}^{(0)} + \\ &\qquad + \sum_{k\in\mathcal{K}_{ij}^{(0)}} \mathbb{E}\Big(g'''(\tilde{W}_{ij} + \eta\tilde{R}_{ij}) - g'''(W_{ijk}^{(0)})\Big)X_{ijk}^{(0)} \end{aligned} \tag{3.11.45}$$

kjer je η še ena slučajna spremenljivka, ki je porazdeljena enakomerno po $[0,1]$ in neodvisna od vsega ostalega. Z uporabo (3.11.22) ocenimo:

$$\left|g'''(W) - g'''(\tilde{W}_{ijk}^{(0)})\right|_\vee \le M_4(g)\left|\tilde{R}_{ijk}^{(0)}\right| \le c_3\,\frac{\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}\, M_1(f)\left|\tilde{R}_{ijk}^{(0)}\right| \tag{3.11.46}$$

in podobno:

$$\Big|g'''(\tilde{W}_{ij} + \eta \tilde{R}_{ij}) - g'''(W^{(0)}_{ijk})\Big|_\vee \le c_3 \frac{\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha} M_1(f)\Big((1-\eta)\big|R^{(0)}_{ijk}\big| + \eta\big|\tilde{R}_{ij} + R^{(0)}_{ijk}\big|\Big) \tag{3.11.47}$$

Ocenimo še $|\mathbb{E}\, g'''(W)|_\vee$. Po eni strani z neposredno uporabo leme 3.11.4 dobimo:

$$|\mathbb{E}\, g'''(W)|_\vee \le M_3(g) \le \cos^2\alpha \min\left\{\frac{c_1^2}{\varepsilon}, \frac{c_2}{\sin\alpha}\right\} M_1(f) \tag{3.11.48}$$

Po drugi strani pa lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}\, g'''(W)|_\vee &\le |\mathbb{E}\, g'''(Z)|_\vee + |\mathbb{E}\, g'''(W) - \mathbb{E}\, g'''(Z)|_\vee \le \\ &\le \left(c_2 \cos^2\alpha \sin\alpha + c_3 \frac{\cos^3\alpha}{\sin^2\alpha}\,\delta\right) M_1(f) \end{aligned} \tag{3.11.49}$$

Opomba. Pri zgornji oceni smo uporabili *sklicevanje nase* (angl. *bootstrapping*): pri ocenjevanju količine δ si pomagamo prav s sklicevanjem na količino δ samo. To deluje, če δ uporabimo le v delu ocene, pomembno pa je tudi, da smo se poprej prepričali, da je količina δ končna. Na sklicevanju nase bodo temeljili tudi rezultati naslednjega poglavja.

Iz ocen (3.11.48) in (3.11.49) sledi:

$$|Eg'''(W)|_\vee \le \left(c_2\cos^2\alpha\sin\alpha + \cos\alpha \min\left\{\frac{c_1^2}{\varepsilon}, \frac{c_2}{\sin\alpha}, \frac{c_3\delta}{\sin^2\alpha}\right\}\right) M_1(f) \tag{3.11.50}$$

in iz (3.11.43), (3.11.45), (3.11.46), (3.11.47) in (3.11.50) zdaj dobimo:

$$\begin{aligned} \big|\tilde{T}_{ij}(\alpha)\big|_\vee \le{}& \left(c_2\cos^2\alpha\sin\alpha + \cos\alpha\min\left\{\frac{c_1^2}{\varepsilon}, \frac{c_2}{\sin\alpha}, \frac{c_3\delta}{\sin^2\alpha}\right\}\right) \mathbb{E}\big|\tilde{R}_{ij}\big| M_1(f) + \\ &+ \min\left\{2c_1, \frac{c_3}{\sin^2\alpha}\,\tilde{\Xi}_{ij}\right\} \cos\alpha\, M_1(f) \end{aligned} \tag{3.11.51}$$

kjer je:

$$\tilde{\Xi}_{ij} := \sum_{k\in\mathcal{K}^{(0)}_{ij}} \Big[\mathbb{E}\big|X^{(0)}_{ijk}\big|\,\mathbb{E}\big|\tilde{R}^{(0)}_{ijk}\big| + \mathbb{E}\big|X^{(0)}_{ijk}\big|\Big((1-\eta)\big|R^{(0)}_{ijk}\big| + \eta\big|\tilde{R}_{ij} + R^{(0)}_{ijk}\big|\Big)\Big] \tag{3.11.52}$$

(preprost izračun pokaže, da se količine $\tilde{\Xi}_{ij}$ ujemajo s tistimi iz (3.11.8)). S substitucijo $s = \sin\alpha$ v integral in uporabo leme 3.11.5 dobimo:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \big|\tilde{T}_{ij}(\alpha)\big|_\vee \mathrm{d}\alpha \le{}& M_1(f)\,\mathbb{E}\big|\tilde{R}_{ij}\big|\left[\frac{1}{3}c_2 + \int_0^\infty \min\left\{\frac{c_1^2}{\varepsilon}, \frac{c_2}{s}, \frac{c_3\delta}{s^2}\right\}\mathrm{d}s\right] + \\ &+ M_1(f)\int_0^\infty \min\left\{2c_1, \frac{c_3}{s^2}\,\tilde{\Xi}_{ij}\right\}\mathrm{d}s \le \\ \le{}& \left\{\left[\frac{7}{3} + \left(\ln\frac{c_1^2 c_3 \delta}{c_2^2\varepsilon}\right)_+\right] c_2\,\mathbb{E}\big|\tilde{R}_{ij}\big| + 2\sqrt{2c_1c_3\tilde{\Xi}_{ij}}\right\} M_1(f) \end{aligned} \tag{3.11.53}$$

Na podoben način lahko ocenimo tudi $|T_{ij}(\alpha)|_\vee$. Velja:

$$T_{ij}(\alpha) = \mathbb{E}\Big[g'''\Big(W_{ij} + \eta R_{ij} + \eta\theta R_i\Big)\Big((1-\theta)R_{ij} + \theta(R_i + R_{ij})\Big) \,\Big|\, \mathcal{H}_{ij}\Big] \tag{3.11.54}$$

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da sta indeksni množici $\mathcal{K}_{ij}^{(1)}$ in $\mathcal{K}_{ij}^{(2)}$ disjunktni. Označimo $\mathcal{K}_{ij}^* := \mathcal{K}_{ij}^{(1)} \cup \mathcal{K}_{ij}^{(2)}$. Za $k \in \mathcal{K}_{ij}^{(1)}$ definirajmo:

$$X_{ijk}^* := \theta X_{ijk}^{(1)}, \quad R_{ijk}^* := R_{ijk}^{(1)}, \quad \tilde{R}_{ijk}^* := \tilde{R}_{ijk}^{(1)}, \quad W_{ijk}^* := W_{ijk}^{(1)}, \quad \tilde{W}_{ijk}^* := \tilde{W}_{ijk}^{(1)} \tag{3.11.55}$$

Podobno za $k \in \mathcal{K}_{ij}^{(2)}$ postavimo:

$$X_{ijk}^* := (1-\theta) X_{ijk}^{(2)}, \quad R_{ijk}^* := R_{ijk}^{(2)}, \quad \tilde{R}_{ijk}^* := \tilde{R}_{ijk}^{(2)}, \quad W_{ijk}^* := W_{ijk}^{(2)}, \quad \tilde{W}_{ijk}^* := \tilde{W}_{ijk}^{(2)} \tag{3.11.56}$$

Tedaj lahko zapišemo:

$$T_{ij}(\alpha) = \mathbb{E}\Big[g'''\Big(W_{ij} + \eta R_{ij} + \eta\theta R_i\Big) X_{ijk}^* \,\Big|\, \mathcal{H}_{ij}\Big] \tag{3.11.57}$$

in spet zaradi neodvisnosti velja:

$$\begin{aligned} T_{ij}(\alpha) = \mathbb{E}\, g'''(W)\, \mathbb{E}\Big((1-\theta)R_{ij} + \theta(R_i + R_{ij}) \,\Big|\, \mathcal{H}_{ij}\Big) - \\ - \sum_{k \in \mathcal{K}_{ij}^*} \mathbb{E}\Big(g'''(W) - g'''(\tilde{W}_{ijk}^*)\Big)\, \mathbb{E}(X_{ijk}^* \mid \mathcal{H}_{ij}) + \\ + \sum_{k \in \mathcal{K}_{ij}^*} \mathbb{E}\Big(\Big(g'''(W_{ij} + \eta R_{ij} + \eta\theta R_i) X_{ijk}^* - g'''(W_{ijk}^*)\Big) X_{ijk}^* \,\Big|\, \mathcal{H}_{ij}\Big) \end{aligned} \tag{3.11.58}$$

Podobno kot pri oceni integrala $\int_0^{\pi/2} |\tilde{T}_{ij}(\alpha)|_\vee \, d\alpha$ tudi tu ocenimo:

$$\int_0^{\pi/2} \Big|T_{ij}(\alpha)\Big|_\vee d\alpha \le \left\{\left[\frac{7}{3} + \left(\ln \frac{c_1^2 c_3 \delta}{c_2^2 \varepsilon}\right)_+\right] c_2 Y_{ij} + 2\sqrt{2c_1 c_3 \Xi_{ij}}\right\} M_1(f) \tag{3.11.59}$$

kjer je:

$$Y_{ij} := \mathbb{E}\Big((1-\theta)|R_{ij}| + \theta|R_i + R_{ij}| \,\Big|\, \mathcal{H}_{ij}\Big) = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\Big(|R_{ij}| + |R_i + R_{ij}| \,\Big|\, \mathcal{H}_{ij}\Big) \tag{3.11.60}$$

in:

$$\Xi_{ij} = \sum_{k \in \mathcal{K}_{ij}^*} \mathbb{E}\Big[\Big|X_{ijk}^*\Big|\, \mathbb{E}\Big|R_{ijk}^*\Big| + \Big|X_{ijk}^*\Big|\Big((1-\eta)\Big|R_{ijk}^*\Big| + \eta(1-\theta)\Big|R_{ij} + R_{ijk}^*\Big| + \eta\theta\Big|R_i + R_{ij} + R_{ijk}^*\Big|\Big) \,\Big|\, \mathcal{H}_{ij}\Big] \tag{3.11.61}$$

Spet se lahko s krajšim računom prepričamo, da se slučajne spremenljivke $\div_{ij}$ ujemajo s tistimi iz (3.11.9).

Iz (3.11.42), (3.11.53) in (3.11.59) dobimo oceno:

$$\left|\mathbb{E} f_\varepsilon(W) - \mathbb{E} f_\varepsilon(Z)\right| \le \left\{\left[\frac{7}{3} + \left(\ln \frac{c_1^2 c_3 \delta}{c_2^2 \varepsilon}\right)_+\right] c_2 \beta_1 + 2\sqrt{2 c_1 c_3}\, \beta_2\right\} M_1(f) \tag{3.11.62}$$

kjer je:

$$\beta_1 := \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,|X_i|\,|X_{ij}| \left(\mathbb{E}\,|\tilde{R}_{ij}| + \frac{1}{2}\,|R_{ij}| + \frac{1}{2}\,|R_i + R_{ij}|\right) \tag{3.11.63}$$

$$\beta_2 := \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,|X_i|\,|X_{ij}| \left(\sqrt{\tilde{\Xi}_{ij}} + \sqrt{\Xi_{ij}}\right) \tag{3.11.64}$$

Če upoštevamo še (3.11.37) in naredimo supremum po vseh testnih funkcijah f, dobimo:

$$\delta \le 2\varepsilon\sqrt{d} + \left[\frac{7}{3} + \left(\ln \frac{c_1^2 c_3 \delta}{c_2^2 \varepsilon}\right)_+\right] c_2 \beta_1 + 2\sqrt{2 c_1 c_3}\, \beta_2 \tag{3.11.65}$$

Količino ε lahko zaenkrat še poljubno izbiramo. Če postavimo $\varepsilon := \delta/(18\sqrt{d})$ (lahko bi vzeli kar koli, kar je strogo manjše od $\delta/(2\sqrt{d})$), dobimo:

$$\delta \le \frac{\delta}{9} + \left[\frac{7}{3} + \ln \frac{18 c_1^2 c_3}{c_2^2} + \frac{1}{2} \ln d\right] c_2 \beta_1 + 2\sqrt{2 c_1 c_3} \beta_2 \tag{3.11.66}$$

Ker je $\delta < \infty$, od tod sledi:

$$\delta \le \left[\frac{21}{8} + \frac{9}{8} \ln \frac{18 c_1^2 c_3}{c_2^2} + \frac{9}{16} \ln d\right] c_2 \beta_1 + \frac{9}{4}\sqrt{2 c_1 c_3}\, \beta_2 \tag{3.11.67}$$

Ustrezna numerična ocena konstant nam da željeni rezultat. ∎

Dokaz trditve 3.11.2. Podobno kot pri zgledih 3.9.1 in 3.10.1 naj bo $\mathcal{J}_i$ množica indeksov, ki so v grafu odvisnosti sosedni ali enaki i. Postavimo $X_{ij} := X_j$, pri razčlenitvah drugega reda pa $\mathcal{K}_{ij}^{(0)} := \mathcal{K}_{ij}^{(1)} := \mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j$ in $\mathcal{K}_{ij}^{(2)} := \mathcal{J}_j \setminus \mathcal{J}_i$ ter $\tilde{R}_{ij} := \sum_{k \in \mathcal{K}_{ij}^{(0)}} X_k$ in $R_{ij} := \sum_{k \in \mathcal{K}_{ij}^{(2)}} X_k$ (velja torej $W_{ij} = \tilde{W}_{ij} = \sum_{k \in \mathcal{I} \setminus (\mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j)} X_k$).

Konstruirati moramo še razčlenitve tretjega reda. Za $\mathcal{H}_{ij}$ vzemimo kar σ-algebro, ki jo generirata X_i in X_j. Nato postavimo:

$$\tilde{R}_{ijk}^{(0)} := \sum_{l \in \mathcal{J}_k} X_l, \quad R_{ijk}^{(0)} := \sum_{l \in \mathcal{J}_k} X_l - \sum_{l \in \mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j} X_l \tag{3.11.68}$$

(torej velja $W_{ijk}^{(0)} = \tilde{W}_{ijk}^{(0)} = \sum_{l \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{J}_k} X_l$), za $r = 1, 2$ pa postavimo:

$$\tilde{R}_{ijk}^{(r)} := \sum_{l \in \mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j \cup \mathcal{J}_k} X_l, \quad R_{ijk}^{(r)} := \sum_{l \in \mathcal{J}_k} X_l \tag{3.11.69}$$

(torej velja $W_{ijk}^{(r)} = \tilde{W}_{ijk}^{(0)} = \sum_{l \in \mathcal{I} \setminus (\mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j \cup \mathcal{J}_k)} X_l$). Ocena (3.11.7) se tako prevede na:

$$\left| \mathbb{E} f(W) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f\} \right| \le M_1(f) \Big[(2{,}9 + 0{,}28 \ln d) S_1 + 3{,}5\, S_2 \Big] \tag{3.11.70}$$

kjer je:

$$S_1 := \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \mathbb{E}\, |X_i|\, |X_j| \left(2 \sum_{k \in \mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j} \mathbb{E}\, |X_k| + \sum_{k \in \mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j} |X_k| + \sum_{k \in \mathcal{J}_j \setminus \mathcal{J}_i} |X_k| \right) \tag{3.11.71}$$

in:

$$S_2 := \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \mathbb{E}\, |X_i|\, |X_j| \left(\sqrt{\tilde{\Xi}_{ij}} + \sqrt{\Xi_{ij}}\, \right) \tag{3.11.72}$$

(slučajne) spremenljivke $\tilde{\Xi}_{ij}$ in Ξ_{ij} pa so definirane po predpisih:

$$\tilde{\Xi}_i := \sum_{k \in \mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j} \mathbb{E}\, |X_k| \left(\sum_{l \in \mathcal{J}_k} \mathbb{E}\, |X_l| + \frac{1}{2} \sum_{l \in \mathcal{J}_k} |X_l| + \sum_{l \in \mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j \cup \mathcal{J}_k} |X_l| \right) \tag{3.11.73}$$

in:

$$\begin{aligned} \Xi_i := & \left(\sum_{k \in \mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j} + \sum_{k \in \mathcal{J}_j \setminus \mathcal{J}_i} \right) \sum_{l \in \mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j \cup \mathcal{J}_k} \mathbb{E}\, |X_k|\, \mathbb{E}\Big(|X_l| \;\Big|\; \mathcal{H}_{ij} \Big) + \\ & + \sum_{k \in \mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j} \left(\frac{1}{4} \sum_{l \in \mathcal{J}_k \setminus (\mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j)} + \frac{1}{12} \sum_{l \in (\mathcal{J}_j \cup \mathcal{J}_k) \setminus \mathcal{J}_i} + \frac{1}{6} \sum_{l \in \mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j \cup \mathcal{J}_k} \right) \mathbb{E}\Big[|X_k|\, |X_l| \;\Big|\; \mathcal{H}_{ij} \Big] + \\ & + \sum_{k \in \mathcal{J}_j \setminus \mathcal{J}_i} \left(\frac{1}{4} \sum_{l \in \mathcal{J}_k \setminus (\mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j)} + \frac{1}{6} \sum_{l \in (\mathcal{J}_j \cup \mathcal{J}_k) \setminus \mathcal{J}_i} + \frac{1}{12} \sum_{l \in \mathcal{J}_i \cup \mathcal{J}_j \cup \mathcal{J}_k} \right) \mathbb{E}\Big[|X_k|\, |X_l| \;\Big|\; \mathcal{H}_{ij} \Big] \end{aligned} \tag{3.11.74}$$

Z uporabo Jensenove neenakosti $xyz \le \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3)$ podobno kot v zgledu 3.9.2 (le malo bolj na grobo) ocenimo:

$$S_1 \le 7D^2 \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}\, |X_i|^3 \tag{3.11.75}$$

Z uporabo iste neenakosti ocenimo tudi S_2, le da pišemo:

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \mathbb{E}\Big((3D)^{1/3} |X_i| \Big) \Big((3D)^{1/3} |X_j| \Big) \Big[(3D)^{-2/3} \Big(\sqrt{\tilde{\Xi}_{ij}} + \sqrt{\Xi_{ij}}\, \Big) \Big] \le \\ &\le \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \left[2D\, \mathbb{E}\, |X_i|^3 + 2D\, \mathbb{E}\, |X_j|^3 + \frac{1}{27D^2}\, \mathbb{E}\, \tilde{\Xi}_{ij}^{3/2} + \frac{1}{27D^2}\, \mathbb{E}\, \Xi_{ij}^{3/2} \right] \le \\ &\le 4D^2 \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}\, |X_i|^3 + \frac{1}{27D^2} \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \Big(\mathbb{E}\, \tilde{\Xi}_{ij}^{3/2} + \mathbb{E}\, \Xi_{ij}^{3/2} \Big) \end{aligned} \tag{3.11.76}$$

Z uporabo neenakosti (3.11.17) in nato še Jensenove neenakosti ocenimo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,\tilde{\Xi}_{ij}^{3/2} \le{}& \left[\sum_{k\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j}\left(\frac{3}{2}\big|\mathcal{J}_k\setminus(\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j)\big| + \frac{1}{2}\big|\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j\cup\mathcal{J}_k\big|\right)\right]^{1/2} \times \\
&\times \sum_{k\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j}\left[\sum_{l\in\mathcal{J}_k\setminus(\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j)}\Big(\mathbb{E}\,|X_k|\,\mathbb{E}\,|X_l|\Big)^{3/2} + \frac{1}{2}\left(\sum_{l\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j\cup\mathcal{J}_k} + \sum_{l\in\mathcal{J}_k\setminus(\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j)}\right)\Big(\mathbb{E}\,|X_k|\,|X_l|\Big)^{3/2}\right] \le \\
\le{}& \sqrt{6}\,D\sum_{k\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j}\left(\frac{3}{4}\sum_{l\in\mathcal{J}_k\setminus(\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j)} + \frac{1}{4}\sum_{l\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j\cup\mathcal{J}_k}\right)\Big(\mathbb{E}\,|X_k|^3 + \mathbb{E}\,|X_l|^3\Big)
\end{aligned} \tag{3.11.77}$$

Sledi:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i}\mathbb{E}\,\tilde{\Xi}_{ij}^{3/2} \le 6^{3/2}D^4\sum_{i\in\mathcal{I}}\mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{3.11.78}$$

Podobno ocenimo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,\Xi_{ij}^{3/2} \le{}& \left(\frac{35}{3}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{8}\sum_{k\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j}\sum_{l\in\mathcal{J}_k\setminus(\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j)} + \frac{1}{24}\sum_{k\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j}\sum_{l\in(\mathcal{J}_j\cup\mathcal{J}_k)\setminus\mathcal{J}_i} + \frac{7}{12}\sum_{k\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j}\sum_{l\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j\cup\mathcal{J}_k} + \right. \\
&\left. + \frac{1}{8}\sum_{k\in\mathcal{J}_j\setminus\mathcal{J}_i}\sum_{l\in\mathcal{J}_k\setminus(\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j)} + \frac{1}{12}\sum_{k\in\mathcal{J}_j\setminus\mathcal{J}_i}\sum_{l\in(\mathcal{J}_j\cup\mathcal{J}_k)\setminus\mathcal{J}_i} + \frac{13}{24}\sum_{k\in\mathcal{J}_j\setminus\mathcal{J}_i}\sum_{l\in\mathcal{J}_i\cup\mathcal{J}_j\cup\mathcal{J}_k}\right)\Big(\mathbb{E}\,|X_k|^3 + \mathbb{E}\,|X_l|^3\Big)
\end{aligned} \tag{3.11.79}$$

in sledi:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i}\mathbb{E}\,\Xi_{ij}^{3/2} \le \left(\frac{35}{3}\right)^{3/2}D^4\sum_{i\in\mathcal{I}}\mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{3.11.80}$$

Iz (3.11.76), (3.11.78) in (3.11.80) sedaj dobimo oceno:

$$S_2 \le \left[4 + \frac{1}{27}\left(6^{3/2} + \left(\frac{35}{3}\right)^{3/2}\right)\right]D^2\sum_{i\in\mathcal{I}}\mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{3.11.81}$$

in iz (3.11.70), (3.11.81) in (3.11.81) po nekaj numeričnega ocenjevanja končno dobimo oceno (3.11.19). ■

4.

Ocene Berry–Esseenovega tipa

4.1 Klasični Berry–Esseenov izrek

V prejšnjem poglavju smo dobro razdelali uporabo Steinove metode za vsote odvisnih slučajnih spremenljivk, oceno napake pa smo podali bodisi v Wassersteinovi metriki bodisi v metriki, ki temelji na drugih odvodih testnih funkcij. Izpeljevali smo torej ocene tipa:

$$\left|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\right| \le \delta\, M_r(f) \tag{4.1.1}$$

ali ekvivalentno:

$$d_r\Big(\mathcal{L}(W), \mathrm{N}(0,1)\Big) \le \delta \tag{4.1.2}$$

za $r = 1, 2$ (z $\mathcal{L}(W)$ smo označili porazdelitev slučajne spremenljivke W, d_r pa so metrike iz (A.9.2)).

V praksi (npr. v statistiki pri konstrukciji intervalov zaupanja) pa navadno dosti bolj prav pridejo ocene v *metriki Kolmogorova*, t. j. ocene količin:

$$d_{\mathrm{K}}\Big(\mathcal{L}(W), \mathrm{N}(0,1)\Big) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)\right| \tag{4.1.3}$$

kjer kot ponavadi definiramo:

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\, \mathrm{d}z \tag{4.1.4}$$

V razdelku A.8 smo dokazali, da konvergenca v metrikah d_r implicira šibko konvergenco in v razdelku A.7 smo pokazali, da je šibka konvergenca proti normalni porazdelitvi ekvivalentna konvergenci v metriki Kolmogorova. Še več: v razdelku A.10 smo razdaljo Kolmogorova eksplicitno ocenili z razdaljami d_r – v (A.10.8) smo dokazali oceno:

$$d_{\mathrm{K}}\Big(\mathcal{L}(W), \mathrm{N}(0,1)\Big) \le C_r\bigg(d_r\Big(\mathcal{L}(W), \mathrm{N}(0,1)\Big)\bigg)^{1/(r+1)} \tag{4.1.5}$$

Če smo torej za vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk v Wassersteinovi metriki izpeljali hitrost konvergence $O(n^{-1/2})$ (ki je, kot smo pokazali v zgledu 1.4.2, tudi dosežena), bi od tod sledilo, da je hitrost konvergence v metriki Kolmogorova vsaj reda $O(n^{-1/4})$.

Dobro pa je znano, da je za vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk ta ocena hitrosti konvergence pregroba: tudi v metriki Kolmogorova se da izpeljati ocene, ki so istega velikostnega reda kot tiste v Wassersteinovi metriki. Natančneje, velja *Berry–Esseenov izrek*.

Izrek 4.1.1 (Berry, Esseen). *Naj bodo X_i, $i \in \mathcal{I}$, neodvisne slučajne spremenljivke, za katere velja $\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i| < \infty$ in $\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,X_i^2 < \infty$. Označimo $W := \sum_{i\in\mathcal{I}} X_i$ ter privzemimo, da je $\mathbb{E}\,X_i = 0$ in $\operatorname{var}(W) = 1$. Tedaj za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja:*

$$\Big|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)\Big| \le C \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{4.1.6}$$

kjer je C univerzalna konstanta.

Zgornji izrek sta za enako porazdeljene slučajne spremenljivke neodvisno drug od drugega odkrila A. C. Berry [27] in C.-G. Esseen [53]; v obliki, kot je formuliran, je izrek dokazal Esseen [54].

Veliko truda je bilo vloženega tudi v čimboljšo oceno konstante C. Velik napredek pri tem je naredil Zolotarjev (glej [132] in [133]). Kolikor je avtorju znano, je doslej najboljšo oceno konstante izpeljala Ševcova [121], ki je dokazala, da ocena (4.1.6) velja za $C = 0{,}56$. Znana pa je tudi optimalna vrednost konstante C za *asimptotično* različico izreka 4.1.1 za enako porazdeljene slučajne spremenljivke: to je $C = (\sqrt{10} + 3)/(6\sqrt{2\pi}) \doteq 0{,}4097$ (glej Bhattacharya in Ranga Rao [29], 23. razdelek, str. 240). Zolotarjev domneva, da ta konstanta velja tudi za *vse* vsote neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk.

Berry–Esseenov izrek se da dokazati tudi s Steinovo metodo. Ocene v metriki Kolmogorova pravega velikostnega reda so podane že v članku [124], v katerem je Stein uvedel svojo metodo, in sicer tudi za vsote odvisnih slučajnih spremenljivkih, le da ocene vključujejo tudi osme momente. Stein je na dva različna načina dokazal tudi Berry–Esseenov izrek, kot je podan zgoraj, za vsote neodvisnih in enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk (za prvi način glej Stein [125], IX. poglavje, za drugi način pa Ho in Chen [66]). Oba načina sta povezana s kumulativno premo utežitvijo.

Žal Steinova metoda doslej še zdaleč ni dala tako dobrih konstant kot metoda karakterističnih funkcij, s katero je delal Zolotarjev: kolikor je avtorju znano, sta najboljšo konstanto $C = 4{,}1$ doslej dobila Chen in Shao [40], ki sta poleg tega izpeljala tudi ocene Lindeberg–Fellerjevega tipa v metriki Kolmogorova (glej izrek 3.10.3), poleg tega pa še *neenakomerne* ocene (t. j. take, pri katerih ocena napake $|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)|$ pada z $|x|$). Po drugi strani pa je res, da se da Steinova metoda dosti lažje posplošiti na vsote določenih odvisnih slučajnih spremenljivk.

V tem razdelku bomo predstavili razmeroma preprost dokaz Berry–Esseenovega izreka s Steinovo metodo, ki se bo dal modificirati tudi za vsote odvisnih slučajnih spremenljivk. Naš dokaz bo kombinacija idej, ki so jih razvili Bolthausen [34], Götze [64] in Rinott [103].

Izkaže se, da je ugodno delati z nekoliko splošnejšo formulacijo kot v izreku 4.1.1. Za testne funkcije bomo vzeli posplošene linearne kombinacije indikatorjev poltrakov

– to bodo funkcije s končno *totalno variacijo*, t. j.:

$$V(f) := \sup\left\{\sum_{i=0}^{n}\big|f(x_i) - f(x_{i-1})\big| \,;\, x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n\right\} \tag{4.1.7}$$

Potrebovali bomo *posplošeni Riemann–Stieltjesov integral* $\int_{-\infty}^{\infty} g\,\mathrm{d}f$, ki ga definiramo kot ustrezno limito Riemann–Stieltjesovih vsot:

$$\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\big(f^*(x_i) - f^*(x_{i-1})\big) \tag{4.1.8}$$

kjer za x_i jemljemo le točke, kjer se leva in desna limita funkcije f ujemata (take pa so vse razen kvečjemu števno mnogo); vrednost $f^*(x)$ definiramo prav kot levo oz. desno limito funkcije f v točki x, če se ujemata. Obstoj in vrednost tako definiranega Riemann–Stieltjesovega integrala sta tako odvisna le od levih in desnih limit funkcije f.

Tako definirani posplošeni Riemann–Stieltjesov integral obstaja, brž ko ima f omejeno totalno variacijo, funkcija g pa ima kvečjemu končno mnogo točk nezveznosti in v vseh se leva in desna limita funkcije f ujemata. Velja ocena:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} g\,\mathrm{d}f\right| \le M_0(g)\,V(f) \tag{4.1.9}$$

Lema 4.1.2. *Naj bo $C > 0$. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(1) *Za poljubne neodvisne slučajne spremenljivke X_i, $i \in \mathcal{I}$ z vsoto W, za katere velja $\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i| < \infty$, $\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,X_i^2 < \infty$, $\mathbb{E}\,X_i = 0$ in $\mathrm{var}(W) = 1$, velja ocena* (4.1.6).

(2) *Za poljubne neodvisne slučajne spremenljivke X_i in W, ki so tako kot v prejšnji točki, in poljubno funkcijo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s končno totalno variacijo velja ocena:*

$$\big|\mathbb{E}\,f(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f\}\big| \le C\,V(f)\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{4.1.10}$$

(3) *Za poljubne neodvisne slučajne spremenljivke X_i, $i \in \mathcal{I}$ z vsoto W, za katere velja $\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i| < \infty$ in $0 < \sigma^2 := \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,X_i^2 < \infty$, in poljubno funkcijo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s končno totalno variacijo velja ocena:*

$$\big|\mathbb{E}\,f(W) - \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)\{f\}\big| \le \frac{C\,V(f)}{\sigma^3}\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i - \mu_i|^3 \tag{4.1.11}$$

kjer je $\mu_i = \mathbb{E}\,X_i$ in $\mu = \mathbb{E}\,W = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mu_i$.

Dokaz. Ekvivalenca (2) $\Leftrightarrow$ (3) sledi iz dejstva, da desno komponiranje z linearno preslikavo ohranja totalno variacijo. Implikacija (2) $\Rightarrow$ (3) je očitna. Dokazati moramo le še njen obrat. Le-ta pa sledi iz tega, da lahko vsako funkcijo f s končno totalno variacijo izrazimo z indikatorji poltrakov na naslednji način:

$$f(w) = L - \int_w^\infty \mathrm{d}f = L - \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}(x \geq w)\,\mathrm{d}f(x) = L - \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(-\infty,x]}(w)\,\mathrm{d}f(x) \tag{4.1.12}$$

kjer je $L = \lim_{x\to\infty} f(x)$ (zgornja zveza velja in ima smisel za vse w, kjer je f zvezna; ker pa ima f končno totalno variacijo, je to povsod razen v kvečjemu števno mnogo w). ■

V lemi 1.4.1 smo pokazali, da za vsako zvezno funkcijo f z $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x < \infty$, funkcija h, podana po formuli (1.4.18), reši Steinovo enačbo:

$$h'(w) - h(w)w = f(w) - \mathrm{N}(0,1)\{f\} \tag{4.1.13}$$

Ocenili smo tudi supremum norme odvodov funkcije h. Naslednji rezultat, ki ga bomo dokazali na koncu razdelka, je različica točke (3) leme 1.4.1 za totalno variacijo.

Lema 4.1.3. *Naj bo $r \in \mathbb{N}_0$, $f \in \flat^{(r)}(\mathbb{R})$ in naj ima $f^{(r)}$ končno totalno variacijo. Nadalje naj bo h tako kot v* (1.4.18) *(torej je h v primeru, ko je f zvezna, klasična rešitev Steinove enačbe* (4.1.13)*). Tedaj velja:*

$$\lim_{w\to-\infty} h^{(r+1)}(w) = \lim_{w\to\infty} h^{(r+1)}(w) = 0 \tag{4.1.14}$$

poleg tega pa velja ocena:

$$V(h^{(r+1)}) \leq 2\,V(f^{(r)}) \tag{4.1.15}$$

Opomba. Oznaka $\flat^{(0)}(\mathbb{R})$ pomeni prostor vseh omejenih funkcij na $\mathbb{R}$, za $r \geq 1$ pa $\flat^{(r)}(\mathbb{R})$ pomeni prostor vseh funkcij z Lipschitzevim odvodom reda $r-1$ (za podrobnosti glej razdelek E.5). To pomeni, da $f^{(r)}$ obstaja le *skoraj* povsod, torej na povsod gosti množici. Za take funkcije lahko prav tako definiramo totalno variacijo, tako da pri vsotah v (4.1.7) vzamemo le točke, kjer je funkcija definirana. Prav tako lahko definiramo tudi posplošeni Riemann-Stieltjesov integral po takih delnih funkcijah (v naši definiciji so tako ali tako pomembne zgolj leve in desne limite).

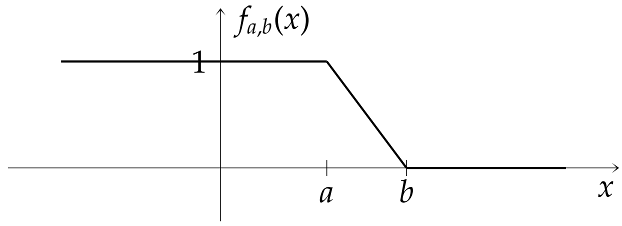
Dokaz Berry–Esseenovega izreka s Steinovo metodo. Najprej za vsak $\alpha > 0$ označimo:

$$K_\alpha := \sup \frac{\left|\mathbb{P}(W \leq x) - \Phi(x)\right|}{\alpha + \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|^3} \tag{4.1.16}$$

kjer supremum teče po vseh $x \in \mathbb{R}$ in vseh možnih vsotah $W = \sum_{i\in\mathcal{I}} X_i$ neodvisnih slučajnih spremeljivk z $\mathbb{E}\,X_i = 0$ in $\mathrm{var}(W) = 1$. Očitno je $K_\alpha \leq 1/\alpha < \infty$ (prav zaradi tega tudi potrebujemo α).

Pri oceni Steinovega matematičnega upanja smo vselej potrebovali druge odvode funkcije h. Toda rešitev Steinove enačbe (4.1.13) za funkcijo f, ki je indikator poltraka, ni dvakrat odvedljiva (če smo natančni, klasična rešitev sploh ne obstaja; če pa vzamemo rešitev v nekoliko šibkejšem smislu, ima njen prvi odvod skok). Zato si bomo morali podobno kot v dokazu izreka 3.11.1 pomagati z glajenjem. Za poljubna $a < b$ definirajmo:

$$f_{a,b}(x) := \begin{cases} 1 & ;\ x \leq a \\ \dfrac{b-x}{b-a} & ;\ a \leq x \leq b \\ 0 & ;\ x \geq b \end{cases} \tag{4.1.17}$$



Slika 4.1.1

Velja:

$$0 \le \mathrm{N}(0,1)\{f_{a,b}\} - \Phi(a) = \int_a^b \frac{b-x}{b-a}\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{2\sqrt{2\pi}} \tag{4.1.18}$$

$$0 \le \Phi(b) - \mathrm{N}(0,1)\{f_{a,b}\} = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{2\sqrt{2\pi}} \tag{4.1.19}$$

Naj bo zdaj $W = \sum_{i\in\mathcal{I}} X_i$ tako kot zgoraj in naj bo še $\varepsilon > 0$. Tedaj lahko za vsak $x \in \mathbb{R}$ ocenimo:

$$\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x) \le \mathbb{E}\, f_{x,x+\varepsilon}(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f_{x,x+\varepsilon}\} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}} \tag{4.1.20}$$

$$\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x) \ge \mathbb{E}\, f_{x-\varepsilon,x}(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f_{x-\varepsilon,x}\} - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}} \tag{4.1.21}$$

Torej velja:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \Big|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)\Big| \le \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big\{\Big|\mathbb{E}\, f_{x,x+\varepsilon}(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f_{x,x+\varepsilon}\}\Big|\Big\} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}} \tag{4.1.22}$$

Naj bo torej $x \in \mathbb{R}$ in naj bo h rešitev Steinove enačbe:

$$h'(w) - h(w)w = f_{x,x+\varepsilon}(w) - \mathrm{N}(0,1)\{f_{x,x+\varepsilon}\} \tag{4.1.23}$$

tako kot v lemah 1.4.1 in 4.1.3. Označimo $W_i := W - X_i$. Tedaj velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, f_{x,x+\varepsilon}(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f_{x,x+\varepsilon}\} &= \mathbb{E}\Big[h'(W) - h(W)W\Big] = \\ &= \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\Big[h'(W_i + X_i)\,\mathbb{E}\,X_i^2 - h(W_i + X_i)X_i\Big] \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

Taylorjev razvoj okoli W_i nam da:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, f_{x,x+\varepsilon}(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f_{x,x+\varepsilon}\} = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\Big[&h'(W_i)\,\mathbb{E}\,X_i^2 + h''(W_i + \theta X_i)X_i\,\mathbb{E}\,X_i^2 - \\ &- h(W_i)X_i - h'(W_i)X_i^2 - (1-\theta)h''(W_i + \theta X_i)X_i^3\Big] \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

kjer je θ tako kot ponavadi porazdeljena enakomerno po $[0,1]$ in neodvisna od vsega ostalega. Zaradi neodvisnosti velja:

$$\mathbb{E}\, f_{x,x+\varepsilon}(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f_{x,x+\varepsilon}\} = \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\, T_i\Big(X_i\, \mathbb{E}\, X_i^2 - (1-\theta)X_i^3\Big) \tag{4.1.26}$$

kjer je:

$$T_i := \mathbb{E}\Big[h''(W_i + \theta X_i) \;\Big|\; X_i, \theta\Big] \tag{4.1.27}$$

Pri oceni slučajnih spremenljivk T_i bomo podobno kot v razdelku 3.11 uporabili razširjeno *sklicevanje nase*, le da bo to potekalo v še širši obliki: medtem ko smo se v razdelku 3.11 sklicevali le na slučajno spremenljivko W, se bomo tukaj sklicevali na celo družino vsot neodvisnih slučajnih spremenljivk.

Pogojno na X_i in θ je $W_i + \theta X_i$ tudi vsota neodvisnih slučajnih spremenljivk, zato po (4.1.16) in točki (3) leme 4.1.2 velja:

$$\Big|T_i - \mathrm{N}\Big(\theta X_i, \mathrm{var}(W_i)\Big)\{h''\}\Big| \le K_\alpha\, V(h'')\Bigg(\alpha + \mathrm{var}(W_i)^{-3/2} \sum_{i\in\mathcal{I}\setminus\{i\}} \mathbb{E}\,|X_i|^3\Bigg) \tag{4.1.28}$$

Velja $V(f_{x,x+\varepsilon}) = 2/\varepsilon$, torej po lemi 4.1.3 velja $V(h'') \le 4/\varepsilon$. Ker je $\mathrm{var}(W_i) = 1 - \mathrm{var}(X_i)$, lahko nadalje ocenimo:

$$\Big|T_i - \mathrm{N}\Big(\theta X_i, \mathrm{var}(W_i)\Big)\{h''\}\Big| \le \frac{4K_\alpha}{\varepsilon}\Big(\alpha + (1-\beta^{2/3})^{3/2}\beta\Big) \tag{4.1.29}$$

kjer je $\beta := \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|^3$, pod pogojem, da je $\beta < 1$.

Opomba. Če je indeksna množica $\mathcal{I}$ končna, lahko razširjeno sklicevanje nase, ki smo ga uporabili, razumemo tudi kot indukcijo: če je moč množice $\mathcal{I}$ enaka n, je pogojno na X_i in θ slučajna spremenljivka $W_i + \theta X_i$ vsota $n-1$ neodvisnih slučajnih spremenljivk. Torej lahko namesto sklicevanja nase uporabimo indukcijo po moči indeksne množice $\mathcal{I}$.

Ocenimo še:

$$\Big|\mathrm{N}\Big(\theta X_i, \mathrm{var}(W_i)\Big)\{h''\}\Big| \le \frac{\mathrm{var}(W_i)^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \max\Big\{\|(h'')_+\|_1, \|(h'')_-\|_1\Big\} \tag{4.1.30}$$

kjer smo označili $g_+ := \max\{g, 0\}$, $g_- := -\min\{g, 0\}$ in $\|g\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,\mathrm{d}x$. Očitno je norma $\|h''\|_1$ enaka totalni variaciji funkcije h' v pozitivni smeri, $\|h''\|_1$ pa totalni variaciji v negativni smeri. Toda iz (4.1.14) sledi, da sta totalni variaciji v obeh smereh enaki, torej po (4.1.15) velja $\max\{\|(h'')_+\|_1, \|(h'')_-\|_1\} = \frac{1}{2}V(h') \le V(f_{x,x+\varepsilon}) = 1$. Torej velja:

$$\Big|\mathrm{N}\Big(\theta X_i, \mathrm{var}(W_i)\Big)\{f_{x,x+\varepsilon}\}\Big| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(1-\beta^{2/3})^{-1/2} \tag{4.1.31}$$

Z uporabo Jensenove neenakosti ocenimo še:

$$\mathbb{E}\Big|X_i\, \mathbb{E}\, X_i^2 - (1-\theta)X_i^3\Big| \le \mathbb{E}\,|X_i|\, \mathbb{E}\, X_i^2 + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,|X_i|^3 \le \frac{3}{2}\,\mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{4.1.32}$$

Iz (4.1.26) ter ocen (4.1.29), (4.1.31) in (4.1.32) dobimo:

$$\left|\mathbb{E}\, f_{x,x+\varepsilon}(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f_{x,x+\varepsilon}\}\right| \le \left[\frac{3}{2\sqrt{2\pi}}\,(1-\beta^{2/3})^{-1/2} + 6K_\alpha \frac{\alpha+\beta}{\varepsilon}\,(1-\beta^{2/3})^{-3/2}\right]\beta \quad (4.1.33)$$

Zdaj pa pišimo $\varepsilon := (\alpha+\beta)s$ in vse skupaj vstavimo v (4.1.22). Poleg tega bomo $1-\beta^{2/3}$ navzdol ocenili z neko fiksno konstanto. Natančneje, izberimo neki $0 < \beta_0 < 1$. Če je $\beta \le \beta_0$, po (4.1.22) za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja:

$$\left|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)\right| \le (\alpha+\beta)\left[\frac{3}{2\sqrt{2\pi}}\left(1-\beta_0^{2/3}\right)^{-1/2} + \frac{6K_\alpha}{s}\left(1-\beta_0^{2/3}\right)^{-3/2} + \frac{s}{2\sqrt{2\pi}}\right] \quad (4.1.34)$$

Za $\beta \ge \beta_0$ pa trivialno ocenimo:

$$\left|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)\right| \le 1 \le \frac{\alpha+\beta}{\beta_0} \quad (4.1.35)$$

Ko oceni (4.1.34) in (4.1.35) delimo z $\alpha+\beta$ ter naredimo še supremum po $x \in \mathbb{R}$ in vseh možnih vsotah neodvisnih slučajnih spremenljivk, dobimo oceno:

$$K_\alpha \le \max\left\{\frac{1}{\beta_0},\ \frac{3}{2\sqrt{2\pi}}\left(1-\beta_0^{2/3}\right)^{-1/2} + \frac{6\,K_\alpha}{s}\left(1-\beta_0^{2/3}\right)^{-3/2} + \frac{s}{2\sqrt{2\pi}}\right\} \quad (4.1.36)$$

Parametra β_0 in s sta lahko še poljubna. Optimizacija po s nam da:

$$K_\alpha \le \max\left\{\frac{1}{\beta_0},\ \frac{3}{2\sqrt{2\pi}}\left(1-\beta_0^{2/3}\right)^{-1/2} + \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt[4]{2\pi}}\left(1-\beta_0^{2/3}\right)^{-3/4}\sqrt{K_\alpha}\right\} \quad (4.1.37)$$

Ker je $K_\alpha < \infty$, od tod sledi $K_\alpha \le k(\beta_0)$, kjer je $k(\beta_0)$ edini koren *enačbe*:

$$k(\beta_0) = \max\left\{\frac{1}{\beta_0},\ \frac{3}{2\sqrt{2\pi}}\left(1-\beta_0^{2/3}\right)^{-1/2} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{2\pi}}\left(1-\beta_0^{2/3}\right)^{-3/4}\sqrt{k(\beta_0)}\right\} \quad (4.1.38)$$

Zdaj pa optimizirajmo še po β_0. Po nekaj numeričnega računanja dobimo, da pri $\beta_0 = 0{,}117$ velja $k(\beta_0) = 1/\beta_0 < 8{,}6$, se pravi, da je tudi $K_\alpha < 8{,}6$. Ker to velja za vsak α, smo tako dokazali, da Berry–Esseenova ocena (4.1.6) velja s konstanto $K = 8{,}6$. ∎

Konstanta, ki smo jo dobili v dokazu Berry–Esseenovega izreka, je seveda vse prej kot dobra. Res pa je, da se je pri dokazovanju nismo prav dosti trudili izboljšati, da ne bi s tehničnimi podrobnostmi zameglili osnovne ideje. Poleg tega smo dokaz zastavili tako, da se bo dal v naslednjem razdelku preprosto posplošiti na vsote odvisnih slučajnih spremenljivk.

V okviru zgornjega dokaza bi se dala konstanta z nekaj dodatnega računanja izboljšati na naslednje načine:

1. Del slučajne spremenljivke T_i se da oceniti brez sklicevanja nase, ki prispeva večji del konstante. Natančneje, h'' se da razdeliti na dva dela, od katerih se da eden omejiti neodvisno od ε (za podrobnosti glej Chen in Shao [40]).

2. Ocena $\mathrm{var}(W_i) \geq 1 - \beta^{2/3}$ je razmeroma groba, posebej če so slučajne spremenljivke X_i porazdeljene enako. To je oceno konstante znatno poslabšalo, saj velja $k_0 < 5{,}93$ (Stein v IX. poglavju svoje monografije [125] dokaže Berry–Esseenov izrek za neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke s konstanto 6). A tudi če ostanemo pri oceni z $1 - \beta^{2/3}$, se da izboljšati konstanta v pavšalni oceni (4.1.35) (spet glej Chen in Shao [40]). Prav tako bi lahko uporabili ocene, ki jih dobimo tako, da razdaljo Kolmogorova po trditvi A.10.2 ocenimo z Wassersteinovo razdaljo (tako v metriki Kolmogorova dobimo oceno oblike $C\sqrt{\beta}$).

3. V oceni (4.1.32) smo absolutno vrednost razlike ocenili kar z vsoto absolutnih vrednosti. Če bi upoštevali, da gre dejansko za *razliko*, bi prav tako lahko izboljšali konstanto. Res pa je, da bi bila tovrstna izboljšava bolj ali manj omejena le na vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk.

4. Verjetno bi se dala konstanta izboljšati tudi z uporabo bolj zapletene definicije konstant K_α. V našem dokazu smo se sklicevali na totalno variacijo. Najboljše konstante so zaenkrat dale karakteristične funkcije. Tako bi konstante K_α lahko definirali tudi s pomočjo testnih funkcij oblike $x \mapsto e^{itx}$. Povezava med Steinovo metodo in karakterističnimi funkcijami je nakazana v članku, ki so ga napisali Bentkus, Götze in Tihomirov [23].

5. Oba Steinova dokaza, omenjena na začetku razdelka, se v celoti izogneta glajenju. Posebno zanimiv je dokaz, opisan v Hojevem in Chenovem članku [66] (glej tudi avtorjevo magistrsko delo [95]), ki namesto na sklicevanju nase temelji na *koncentracijski neenakosti*, t. j. zgornji oceni verjetnosti $\mathbb{P}(a \leq W \leq b)$, kjer sta a in b blizu skupaj. Ta pristop sta uporabila tudi Chen in Shao v člankih [40] in [41].

Dolžni smo še dokazati lemo 4.1.3.

Dokaz leme 4.1.3. Izhajali bomo iz naslednje različice formule (1.4.27):

$$h^{(r+1)}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} G(w, x)\, \mathrm{d}f^{(r)}(x) \tag{4.1.39}$$

kjer je:

$$G(w, x) := \begin{cases} -\psi^{(r+1)}(w)\, \Phi_{r+1}(-x) & ;\ w < x \\ \psi^{(r+1)}(-w)\, \Phi_{r+1}(x) & ;\ w > x \end{cases} \tag{4.1.40}$$

(za primer, ko je $w = x$, pustimo izraz $G(x, w)$ nedefiniran). Formulo (4.1.39) podobno kot v dokazu leme 1.4.1 izpeljemo iz formule (1.4.28) z integracijo per partes, velja pa povsod, kjer je odvod $h^{(r+1)}$ definiran (če ima odvod dane absolutno zvezne funkcije omejeno totalno variacijo, je zvezen povsod, kjer obstaja).

Ocenimo:

$$\left|h^{(r+1)}(w)\right| \leq V(f^{(r)}; -\infty, w)\, \psi^{(r+1)}(-w)\, \Phi_{r+1}(w) + V(f^{(r)}; w, \infty)\, \psi^{(r+1)}(w)\, \Phi_{r+1}(-w) \tag{4.1.41}$$

kjer smo z $V(f; a, b)$ označili totalno variacijo funkcije f na intervalu (a, b). Iz zgornje ocene in še iz trditve C.3.4 že sledi (4.1.14).

Iz formule (C.3.9) pa sledi, da ima funkcija $w \mapsto G(w, x)$ za vsak x totalno variacijo 2. Od tod zdaj sledi tudi ocena (4.1.15). ∎

4.2 Posplošitev na odvisne slučajne spremenljivke

V prejšnjem razdelku smo videli, da se da po Steinovi metodi izpeljati tudi ocene v metriki Kolmogorova, ki so enake kakovosti kot ocene v Wassersteinovi metriki in so pravega velikostnega reda. Glavna odlika Steinove metode pa je, da se da preprosto posplošiti tudi na vsote slučajnih spremenljivk z določeno vrsto odvisnosti.

Posplošitev Berry–Esseenovega izreka na vsote *lokalno* odvisnih slučajnih spremenljivk je izpeljal že Stein [124], in sicer za stacionarna zaporedja slučajnih spremenljivk s končnimi osmimi momenti. Naslednji preboj je dosežen v Rinottovem članku [103], kjer je izpeljana posplošitev Berry–Esseenovega izreka na vsote slučajnih spremenljivk, ki morajo sicer biti omejene, zato pa imajo lahko splošnejšo strukturo lokalne odvisnosti in tudi ni nujno, da so enako porazdeljene. Chen in Shao [41] podata posplošitev na slučajne spremenljivke s končnimi tretjimi momenti, vendar pa njun rezultat na primeru vsot slučajnih spremenljivk, ki jih obravnava Rinott [103], da slabšo odvisnost konstante od stopnje grafa odvisnosti (v splošnem D^5 namesto D^2; je pa res, da v mnogih pomembnih posebnih primerih pride optimalna odvisnost, t. j. reda D^2). Chen in Shao podata tudi neenakomerne ocene.

Veliko posplošitev je bilo izpeljanih tudi za primere, ko odvisnost ni lokalna. Barbour [8] izpelje ocene v metriki Kolmogorova za določene statistike na slučajnih grafih, Bolthausen [34] pa za slučajne permutacije. Nadalje Rinott in Rotar [105] izpeljeta oceno napake za t. i. *antivoter* model in utežene (predvsem izrojene) U-statistike. Goldstein [61] pa izpelje precej splošen izrek za slučajne spremenljivke, za katere je podano sklapljanje s kumulativno premo utežitvijo.

Tu pa bomo podali oceno napake za slučajne spremenljivke z razčlenitvami drugega reda iz razdelka 3.9, a z določenimi omejitvami. Ponekod bomo namreč zahtevali *omejenost*. Z drugimi besedami, izpeljali bomo posplošitev Rinottovega rezultata [103]. Rezultat, ki ga bomo izpeljali, je poseben primer avtorjevega rezultata iz [94], ki obravnava tudi velike odklone.

Glavna težava pri dokazovanju Berry–Esseenovega izreka je bila ocena slučajnih spremenljivk:

$$T_i := \mathbb{E}\Big[h''(W_i + \theta X_i) \;\Big|\; X_i, \theta\Big] \tag{4.2.1}$$

iz (4.1.27). Te slučajne spremenljivke smo ocenili s pomočjo razširjenega sklicevanja nase. Le-to pa pri vsotah odvisnih slučajnih spremenljivk postane izjemno zapleteno, zato se bomo omejili na klasično sklicevanje nase (t. j. sklicevali se bomo le na približno normalnost slučajne spremenljivke W, ne pa tudi na približno normalnost drugih slučajnih spremenljivk). Tu pa potrebujemo omejenost. Natančneje, sklicali se bomo na dejstvo, da se, če slučajni spremenljivki W, ki je porazdeljena približno normalno, prištejemo slučajno spremenljivko R, ki je po absolutni vrednosti omejena z δ, razdalja Kolmogorova do normalne porazdelitve poveča za red velikosti δ. Tega ne moremo trditi za primer, ko ima R omejen le določen moment reda p, saj se v tem primeru razdalja lahko poveča za red velikosti $(\mathbb{E}\,|R|^p)^{1/(p+1)}$ (glej zgled 4.2.1). Sklicevanje nase nam bi torej pri slučajnih spremenljivkah s končnimi momenti določenega reda dalo slabšo oceno hitrosti konvergence.

Zgled 4.2.1. Naj bo kar $W \sim \mathrm{N}(0,1)$, $p > 0$ in $\varepsilon > 0$. Definirajmo:

$$R := \begin{cases} -W & ; |W| \le \varepsilon \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Tedaj ni težko preveriti, da je $\mathbb{E}\,|R|^p$ velikostnega reda ε^{p+1}. Po drugi strani pa je $\mathbb{P}(W + R = 0)$ reda ε in to je tudi red velikosti razdalje Kolmogorova od slučajne spremenljivke $W + R$ do standarne normalne porazdelitve. Skratka, ko gre ε proti nič, je ustrezna razdalja reda velikosti $(\mathbb{E}\,|R|^p)^{1/(p+1)}$. □

Opišimo zdaj različico razčlenitev, ki jih bomo potrebovali. Tako kot v razdelku 3.9 naj bo $W = \sum_{i \in \mathcal{I}} X_i$ in za vsak $i \in \mathcal{I}$ naj bo podana slučajna spremenljivka W_i, neodvisna od X_i. Nadalje naj bo $W - W_i = \sum_{j \in \mathcal{J}_i} X_{ij}$ in za vsak $j \in \mathcal{J}_i$ naj bo podana σ-algebra $\mathcal{H}_{ij}$, v kateri sta X_i in X_{ij} merljivi, in še slučajna spremenljivka W_{ij}, neodvisna od $\mathcal{H}_{ij}$. Končno naj bosta podani še slučajni spremenljivki $\tilde{W}_{ij}$ in $\bar{W}_{ij}$, pri čemer naj bo $\tilde{W}_{ij}$ enako porazdeljena kot W_{ij}.

Razlike med zgoraj podanimi slučajnimi spremenljivkami naj bodo omejene na naslednji način: najprej naj za vsak $i \in \mathcal{I}$ in $j \in \mathcal{J}_i$ obstajata $\mathcal{H}_{ij}$-merljivi slučajni spremenljivki U'_{ij} in U''_{ij}, za kateri velja:

$$|W_i - W_{ij}| \le U'_{ij}, \qquad |W - W_{ij}| \le U''_{ij} \tag{4.2.3}$$

Nadalje naj obstajata taka konstanta $\tilde{B}_{ij}$ in taka slučajna spremenljivka U_{ij}, neodvisna od $\bar{W}_{ij}$, da velja:

$$|\tilde{W}_{ij} - \bar{W}_{ij}| \le \tilde{B}_{ij}, \qquad |W - \bar{W}_{ij}| \le U_{ij} \tag{4.2.4}$$

Končno naj bo dana še taka konstanta B_{ij}, da je $\mathbb{P}(U_{ij} \le B_{ij}) > 0$.

Izrek 4.2.1. *Naj bo W razčlenjena tako kot zgoraj in naj bo še $\mathbb{E}\,X_i = 0$ in $\operatorname{var}(W) = 1$. Tedaj za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja ocena:*

$$\Big|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)\Big| \le 2{,}33 \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,|X_i X_{ij}| \left[U'_{ij} + U''_{ij} + 2\tilde{B}_{ij} + \frac{4B_{ij} + 2U_{ij}}{\mathbb{P}(U_{ij} \le B_{ij})} \right] \tag{4.2.5}$$

Opomba. Če je razlika $W - \tilde{W}_{ij}$ omejena, je najugodneje postaviti kar $\bar{W}_{ij} := W$, tako da je potem $U_{ij} = B_{ij} = 0$. Zgornji koncept pa dopušča, da je lahko razlika $W - \tilde{W}_{ij}$ tudi neomejena, toda z neko slučajno spremenljivko, ki je neodvisna od $\bar{W}_{ij}$. Opisana "neodvisna neomejenost" je posplošitev ideje, ki jo je uporabil Barbour [8] pri izpeljevanju Berry–Esseenove ocene napake pri normalni aproksimaciji števila izoliranih dreves v slučajnem grafu.

Slučajnih grafov se bomo dotaknili v 7. poglavju in tam bomo tudi potrebovali prej opisano "neodvisno neomejenost". Razlika $W - \tilde{W}_{ij}$ bo namreč neomejena, čeprav bodo sumandi X_i omejeni.

Izrek 4.2.1 bomo dokazali malo kasneje. Prej pa si oglejmo še poseben primer – končne družine enakomerno omejenih lokalno odvisnih slučajnih spremenljivk v skladu z definicijo iz zgleda 3.5.3. Naslednji izrek je različica Dembovega in Rinottovega [47] rezultata.

Izrek 4.2.2. *Naj bo $W = \sum_{i\in\mathcal{I}}^{n} X_i$ in naj za družino $X_1, \ldots X_n$ obstaja graf odvisnosti, v katerem ima vsako oglišče s samim seboj vred največ D sosedov. Poleg tega naj obstaja taka konstanta B, da za vsak i velja $|X_i| \le B$. Če je še $\mathbb{E}\, X_i = 0$ in $\operatorname{var}(W) = 1$, za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja ocena:*

$$\left|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)\right| \le 16{,}5\, D^2 B \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\, X_i^2 \tag{4.2.6}$$

Opomba. Dembo in Rinott [47] izpeljeta oceno:

$$\left|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)\right| \le 7 D^2 B^2 \sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i| \tag{4.2.7}$$

Znatno boljšo konstanto dosežeta z uporabo razčlenitev *prvega* reda (glej razdelek 3.5). Je pa po drugi strani tudi res, da je $\mathbb{E}\, X_i^2 \le B\, \mathbb{E}\,|X_i|$, in v resnici ocena (4.2.7) ni vedno boljša od ocene (4.2.6).

Dokaz izreka 4.2.2. Za vsak $i \in \mathcal{I} := \{1, \ldots n\}$ naj bo $\mathcal{J}_i$ množica indeksov, ki so kot oglišča v grafu odvisnosti sosedni ali pa enaki i. Za vsak $j \in \mathcal{J}_i$ postavimo $X_{ij} := X_j$, tako da je potem $W_i = \sum_{j\in\mathcal{I}\setminus\mathcal{J}_i} X_j$. Nadalje za vsak $i \in \mathcal{I}$ in vsak $j \in \mathcal{J}_i$ definirajmo $\mathcal{H}_{ij}$ kot σ-algebro, ki jo generirata X_i in X_j. Postavimo še $W_{ij} := \tilde{W}_{ij} := \sum_{k\in\mathcal{I}\setminus(J_i\cup\mathcal{J}_j)} X_k$ in $\bar{W}_{ij} := W$. Tedaj oceni (4.2.3) in (4.2.4) gotovo veljata za $U'_{ij} := DB$, $U''_{ij} := \tilde{B}_{ij} := 2DB$ in $U_{ij} := B_{ij} := 0$. Če to zdaj vstavimo v (4.2.5), dobimo:

$$\left|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)\right| \le 16{,}5\, DB \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\,|X_i X_j| \tag{4.2.8}$$

Z uporabo neenakosti $xy \le (x^2 + y^2)/2$ pa že dobimo (4.2.6). ∎

Lotimo se sedaj dokazovanja izreka 4.2.1. Potrebovali bomo še naslednji rezultat, ki nam bo omogočil sklicevanje nase.

Lema 4.2.3. *Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ merljiva funkcija in W taka slučajna spremenljivka, da za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja ocena $\mathbb{E}\, f(W + t) \le 1$. Nadalje naj bosta dani še slučajni spremenljivki $\bar{W}$ in $\tilde{W}$, za kateri velja:*

$$|W - \bar{W}| \le U, \qquad |\tilde{W} - \bar{W}| \le \tilde{B} \tag{4.2.9}$$

kjer je $\tilde{B}$ konstanta, U pa slučajna spremenljivka, neodvisna od $\bar{W}$. Dana naj bo še konstanta B, za katero velja $\mathbb{P}(U \le B) > 0$. Tedaj velja ocena:

$$\left|\mathbb{E} \int_{\tilde{W}}^{W} f(s)\, \mathrm{d}s\right| \le \tilde{B} + \frac{2B + \mathbb{E}\, U}{\mathbb{P}(U \le B)} \tag{4.2.10}$$

Dokaz. Najprej za poljubna $R, S \in \mathbb{R}$ ocenimo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_{\bar{W}+R}^{\bar{W}+S} f(s)\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{\mathbb{P}(U \le B)}\,\mathbb{E}\int_{\bar{W}+R}^{\bar{W}+S} f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathbf{1}(U \le B) \le \\ &\le \frac{1}{\mathbb{P}(U \le B)}\,\mathbb{E}\int_{W+R-B}^{W+S+B} f(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(U \le B)}\int_{R-B}^{S+B} \mathbb{E}\, f(W+t)\,\mathrm{d}t \le \\ &\le \frac{2B + (S-R)_+}{\mathbb{P}(U \le B)}\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Če zamenjamo R in S, dobimo še oceno:

$$\mathbb{E}\int_{\bar{W}+R}^{\bar{W}+S} f(s)\,\mathrm{d}s \ge -\frac{2B + (R-S)_+}{\mathbb{P}(U \le B)} \tag{4.2.12}$$

Namesto števil R in S pa lahko vzamemo poljubni slučajni spremenljivki, ki sta skupno neodvisni od $\bar{W}$. Dobimo:

$$-\frac{2B + \mathbb{E}(R-S)_+}{\mathbb{P}(U \le B)} \le \mathbb{E}\int_{\bar{W}+R}^{\bar{W}+S} f(s)\,\mathrm{d}s \le \frac{2B + \mathbb{E}(R-S)_+}{\mathbb{P}(U \le B)} \tag{4.2.13}$$

Zdaj pa ocenimo:

$$\mathbb{E}\int_{\bar{W}}^{W} f(s)\,\mathrm{d}s \le \mathbb{E}\int_{\bar{W}-\tilde{B}}^{W} f(s)\,\mathrm{d}s \le \mathbb{E}\int_{\bar{W}-\tilde{B}}^{\bar{W}+U-\tilde{B}} f(s)\,\mathrm{d}s + \mathbb{E}\int_{W-\tilde{B}}^{W} f(s)\,\mathrm{d}s \le \bar{B} + \frac{2B + \mathbb{E}\,U}{\mathbb{P}(U \le B)} \tag{4.2.14}$$

in podobno:

$$\mathbb{E}\int_{W}^{\tilde{W}} f(s)\,\mathrm{d}s \le \mathbb{E}\int_{W}^{\bar{W}+\tilde{B}} f(s)\,\mathrm{d}s \le \mathbb{E}\int_{W}^{W+\tilde{B}} f(s)\,\mathrm{d}s + \mathbb{E}\int_{\bar{W}-U+\tilde{B}}^{\bar{W}+\tilde{B}} f(s)\,\mathrm{d}s \le \bar{B} + \frac{2B + \mathbb{E}\,U}{\mathbb{P}(U \le B)} \tag{4.2.15}$$

Ocena (4.2.10) je s tem dokazana. ■

Dokaz izreka 4.2.1. Označimo:

$$\delta := \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)\right| \tag{4.2.16}$$

Očitno je $\delta \le 1$, torej je δ končna količina. Nadaljujemo tako kot v dokazu klasičnega Berry–Esseenovega izreka. Tako kot v (4.1.22) za vsak $\varepsilon > 0$ velja:

$$\delta \le \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbb{E}\, f_{x,x+\varepsilon}(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f_{x,x+\varepsilon}\}\right| + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}} \tag{4.2.17}$$

kjer je funkcija $f_{x,x+\varepsilon}$ definirana tako kot v (4.1.17). Naj bo zdaj h rešitev Steinove enačbe:

$$h'(w) - h(w)w = f_{x,x+\varepsilon}(w) - \mathrm{N}(0,1)\{f_{x,x+\varepsilon}\} \tag{4.2.18}$$

tako kot v lemah 1.4.1 in 4.1.3. Iz (3.9.8) dobimo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\, f_{x,x+\varepsilon}(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f_{x,x+\varepsilon}\} = \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\Big(h'(W) - h'(\tilde W_{ij})\Big)\,\mathbb{E}\, X_i X_{ij} - \\ - \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\Big(h'(W_i + \theta R_i) - h'(W_{ij})\Big) X_i X_{ij}\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

kjer je θ kot ponavadi porazdeljena enakomerno po $[0,1]$ in neodvisna od vsega ostalega.

Združimo dobljeni vsoti v eno samo! Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da obstaja slučajni vektor $(\tilde W^*_{ij}, \bar W^*_{ij}, W^*_{ij}, U^*_{ij})$, čigar pogojna porazdelitev glede na $\mathcal{H}_{ij}$ in θ se ujema z brezpogojno porazdelitvijo slučajnega vektorja $(\tilde W_{ij}, \bar W_{ij}, W, U_{ij})$. Tedaj velja:

$$\mathbb{E}\, f_{x,x+\varepsilon}(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f_{x,x+\varepsilon}\} = \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\, T_{ij} X_i X_{ij} \tag{4.2.20}$$

kjer je:

$$T_{ij} := \mathbb{E}\left[\int_{W_i+\theta R_i}^{W^*_{ij}} h''(s)\, \mathrm{d}s \;\middle|\; \mathcal{H}_{ij}, \theta\right] \tag{4.2.21}$$

Po lemi 4.1.3 je $\|h''\|_1 \le 2V(f_{x,x+\varepsilon}) = 2$ in $V(h'') \le 2V(f'_{x,x+\varepsilon})/\varepsilon = 4/\varepsilon$. Naj bo g z desne zvezna razširitev funkcije h''. Tedaj je še vedno $\|g\|_1 \le 2$ in $V(|g|) = V(g) \le 4/\varepsilon$. Iz (4.2.16) in leme 4.1.2 dobimo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[|g(W^*_{ij} + t)| \;\Big|\; \mathcal{H}_{ij}, \theta\Big] &\le \mathrm{N}(t,1)\{|g|\} + \Big|\mathbb{E}\Big[|g(W^*_{ij} + t)| \;\Big|\; \mathcal{H}_{ij}, \theta\Big] - \mathrm{N}(t,1)\{|g|\}\Big| \le \\ &\le \frac{\|g\|_1}{\sqrt{2\pi}} + \delta\, V(|g|) \le \\ &\le \frac{2}{\sqrt{2\pi}} + \frac{4\delta}{\varepsilon}\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

Zdaj pa uporabimo pogojno različico leme 4.2.3 glede na $\mathcal{H}_{ij}$ in θ ter z W^*_{ij}, $\bar W^*_{ij}$, $W_i + \theta R_i$, $\tilde B_{ij} + (1-\theta)U'_{ij} + \theta U''_{ij}$, U^*_{ij} in B_{ij} v vlogah W, $\bar W$, $\tilde W$, $\tilde B$, U in B. Dobimo:

$$|T_{ij}| \le \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} + \frac{4\delta}{\varepsilon}\right)\left((1-\theta)U'_{ij} + \theta U''_{ij} + \tilde B_{ij} + \frac{2B_{ij} + \mathbb{E}\, U_{ij}}{\mathbb{P}(U_{ij} \le B_{ij})}\right) \tag{4.2.23}$$

Torej velja:

$$\Big|\mathbb{E}\, f_{x,x+\varepsilon}(W) - \mathrm{N}(0,1)\{f_{x,x+\varepsilon}\}\Big| \le \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2\delta}{\varepsilon}\right)\beta \tag{4.2.24}$$

kjer je:

$$\beta := \sum_{i\in\mathcal{I}}\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \mathbb{E}\, |X_i X_{ij}| \left(U'_{ij} + U''_{ij} + 2\tilde B_{ij} + \frac{4B_{ij} + 2U_{ij}}{\mathbb{P}(U_{ij} \le B_{ij})}\right) \tag{4.2.25}$$

Iz (4.2.17) zdaj sledi:

$$\delta \le \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2\delta}{\varepsilon}\right)\beta + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}} \tag{4.2.26}$$

Optimizacija po ε nam da:

$$\delta \leq \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} + 2\frac{\sqrt{\beta\delta}}{\sqrt[4]{2\pi}} \tag{4.2.27}$$

Iz zgornje kvadratne neenačbe in dejstva, da je δ končna količina, pa po nekaj računanja dobimo oceno $\delta \leq 2{,}33\,\beta$, od koder sledi naš rezultat. ■

4.3 Posplošitev na večrazsežni primer

V tem razdelku bomo Berry–Esseenov izrek posplošili na več dimenzij. Natančneje, ocenjevali bomo količine:

$$\left|\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\}\right| \tag{4.3.1}$$

kjer je W vsota neodvisnih d-razsežnih slučajnih vektorjev z $\mathbb{E}\,W = 0$ in $\mathrm{Var}(W) = \mathbf{I}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ pa je dovolj lepa (npr. konveksna) množica.

Oceno napake pri večrazsežni normalni aproksimaciji vsot neodvisnih slučajnih vektorjev so med drugim obravnavali Esseen [54], Bergström [26], von Bahr [3], Ranga Rao [98], [99], Sazonov [113], [114], Paulauskas [91] in Bhattacharya [28]. Pri tem so večinoma uporabljali karakteristične funkcije. Dober splošen pregled večrazsežne normalne aproksimacije s pomočjo karakterističnih funkcij je podan v Bhattacharyevi in Ranga Raovi monografiji [29].

Ocenjevanje napake s pomočjo karakterističnih funkcij je v večrazsežnem primeru neprimerno bolj zapleteno kot v enorazsežnem. Bistveno bolje se v večrazsežnem primeru obnaša Lindeberg–Bergströmova metoda, še manj pa se v večrazsežnem primeru zaplete Steinova metoda, posebej v primeru, ko slučajni vektorji niso enako porazdeljeni. Poleg tega so tako kot v enorazsežnem primeru možne tudi posplošitve na vsote odvisnih slučajnih vektorjev.

Kolikor je avtorju znano, je Steinovo metodo za večrazsežno normalno aproksimacijo prvi uporabil Götze [64]. V Bolthausnovem in Götzejevem članku [35] je podana posplošitev na statistike slučajnih permutacij, a njun rezultat je v taki obliki, kot je formuliran, žal napačen (za protiprimer glej Chen in Shao [42]). Po avtorjevem mnenju se rezultat sicer da preformulirati v pravilno obliko, a dokazati bi ga bilo treba nekoliko drugače. Rinott in Rotar [104] pa sta izpeljala oceno napake za vsote lokalno odvisnih slučajnih spremenljivk, a z nekoliko slabšo hitrostjo konvergence ($n^{-1/2}\log n$ namesto $n^{-1/2}$).

Pri oceni napake je pomembna tudi odvisnost konstante od dimenzije d. Rezultate z eksplicitno odvisnostjo od dimenzije, in sicer reda d, so izpeljali Nagajev [83], Senatov [119], Sazonov [115] in tudi Götze [64]. Pomemben napredek je dosegel Bentkus [21], ki je odvisnost konstante od dimenzije prevedel na velikost Gaussovega perimetra konveksne množice. Glede na dotlej znano oceno je tako dobil odvisnost reda $d^{1/2}$. Zdaj vemo, da maksimalni Gaussov perimeter konveksne množice raste z $d^{1/4}$ (glej dodatek H) in temu primerno se je izboljšala tudi odvisnost konstante od dimenzije (glej Bentkus [22]).

Bentkus izpelje svoj rezultat z Lindeberg–Bergströmovo metodo, in sicer za enako porazdeljene slučajne vektorje. Tu bomo s Steinovo metodo dokazali različico za primer, ko slučajni vektorji niso nujno enako porazdeljeni.

Izrek 4.3.1. *Naj bodo X_i, $i \in \mathcal{I}$, neodvisni slučajni vektorji z vrednostmi v $\mathbb{R}^d$, za katere velja $\mathbb{E}\, X_i = 0$ in* $\operatorname{var}(W) = \mathbf{I}$, *kjer je $W = \sum_{i \in \mathcal{I}} X_i$. Tedaj za vsako merljivo konveksno množico $C \subseteq \mathbb{R}^d$ velja ocena:*

$$\left|\mathbb{P}(W \in C) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{C\}\right| \le \left(47 + 42\, d^{1/4}\right) \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}\, |X_i|^3 \tag{4.3.2}$$

Zgornji izrek sledi iz splošnejšega izreka 4.3.2, ki ga bomo formulirali v nadaljevanju, ter še zgleda 4.3.2.

Opomba. Izrek 4.3.1 je posplošitev Bentkusovega [22] izreka na primer, ko slučajni vektorji niso nujno enako porazdeljeni. Nekoliko je izboljšana tudi konstanta: Bentkus sicer izpelje oceno s konstanto $400\, d^{1/4}$, a slednja temelji na Ballovi [5] konstanti v oceni Gaussovih perimetrov konveksnih množic. Če grobo Ballovo oceno zamenjamo z oceno iz izreka H.1.3, nam Bentkusov postopek da konstanto $64 + 59\, d^{1/4}$, ki je še vedno nekoliko slabša od tiste v (4.3.2).

Opomba. Kot smo že omenili, bi bila možna tudi posplošitev na odvisne slučajne vektorje, ki pa je tu ne bomo razdelali. Z uporabo razčlenitev drugega reda bi dobili oceno reda $n^{-1/2} \log n$, podobno kot v Rinottovem in Rotarjevem članku [104]. Za oceno brez logaritemskega faktorja pa bi potrebovali razčlenitve tretjega reda, podobno kot v razdelku 3.11.

Odvisnost konstante od dimenzije v izreku 4.3.1 izvira iz rasti Gaussovih perimetrov konveksnih množic (izrek H.1.3). Ocena iz izreka H.1.3 da v splošnem pravi velikostni red; vseeno pa obstajajo pomembne družine konveksnih množic, katerih perimetri rastejo počasneje ali pa se dajo sploh oceniti neodvisno od dimenzije (glej zgled 4.3.3). Zato bomo izrek 4.3.1 posplošili. Za formulacijo bomo potrebovali:

- družino $\mathcal{A}$ merljivih, a ne nujno konveksnih množic v $\mathbb{R}^d$, ki je zaprta za translacije in raztege za faktor, večji od ena;
- za vsako neprazno množico $A \in \mathcal{A}$ naj bo podana funkcija $\delta_A\colon\ A \to [0, \infty)$;
- za vsako neprazno množico $A \in \mathcal{A}$ in vsak $\varepsilon > 0$ naj bosta podani podmnožici $A^\varepsilon, A^{-\varepsilon} \in \mathcal{A}$; postavimo še $\emptyset^\varepsilon := \emptyset^{-\varepsilon} := \emptyset$.

Poleg tega bomo za vsak neprazen $A \in \mathcal{A}$ privzeli še naslednje:

(P1) Za vsak $x \in A$ naj bo $\delta_A(x) = 0$.

(P2) Funkcija δ_A naj bo neraztezna, t. j. $|\delta_A(x) - \delta_A(y)| \le |x - y|$.

(P3) Za vsak $\varepsilon > 0$ naj velja $\{x\,;\, \delta_A(x) < \varepsilon\} \subseteq A^\varepsilon \subseteq \{x\,;\, \delta_A(x) \le \varepsilon\}$.

(P4) Za vsak $\varepsilon > 0$ naj bo bodisi $A^{-\varepsilon} = \emptyset$ bodisi naj velja $\{x\,;\, \delta_{A^{-\varepsilon}}(x) < \varepsilon\} \subseteq A$.

(P5) Množica $\{(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \,;\, x \in A^\varepsilon\}$ naj bo merljiva.

(P6) Obstaja naj taka konstanta L_1, da za poljuben $\mu \in \mathbb{R}^d$ in poljubno pozitivno definitno matriko Σ z najmanjšo lastno vrednostjo λ^2, pri čemer je $\lambda > 0$, velja:

$$\mathrm{N}(\mu, \Sigma)\{A^\varepsilon \setminus A\} \le L_1 \varepsilon \max\left\{1, \frac{1}{\lambda}\right\} \quad \text{in} \quad \mathrm{N}(\mu, \Sigma)\{A \setminus A^{-\varepsilon}\} \le L_1 \varepsilon \max\left\{1, \frac{1}{\lambda}\right\} \tag{4.3.3}$$

(P7) Odvod δ'_A naj bo na množici $\{x \,;\, \delta_A(x) > 0\}$ lokalno Lipschitzev in obstaja naj taka konstanta L_2, da velja:

$$|\delta''_A(x)|_\vee \le \frac{L_2}{\delta_A(x)} \tag{4.3.4}$$

za vsak x, kjer je δ'_A odvedljiva.

Izrek 4.3.2. *Naj bo $W = \sum_{i \in \mathcal{I}} X_i$ tako kot v izreku 4.3.1 in naj bo $\mathcal{A}$ družina merljivih množic, ki izpolnjuje zgornje zahteve. Tedaj za vsak $A \in \mathcal{A}$ velja ocena:*

$$\Big|\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\}\Big| \le \max\Big\{27,\ 1 + 55 L_1 \sqrt{1 + L_2}\Big\} \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{4.3.5}$$

Če pa je družina $\mathcal{A}$ zaprta tudi za afine transformacije, velja še nekoliko boljša ocena:

$$\Big|\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\}\Big| \le \max\Big\{27,\ 1 + 50 L_1 \sqrt{1 + L_2}\Big\} \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{4.3.6}$$

Preden gremo dokazat zgornji izrek, si oglejmo še nekaj konkretnih primerov družin množic, za katere pride v poštev. Zahteve (P1)–(P7) so potrebne za konstrukcijo *glajenja* indikatorjev množic iz $\mathcal{A}$. Potrebujemo namreč funkcije, ki se bodo le malo razlikovale od indikatorjev, obenem pa bodo imele ustrezno omejene prve in druge odvode. Naša konstrukcija je posplošitev Bentkusove [21] ideje, pri kateri je kar:

$$\delta_A(x) = \operatorname{dist}(x, A) := \inf_{y \in A} |x - y| \tag{4.3.7}$$

Zgornja izbira je primerna za konveksne množice, saj velja naslednji rezultat, ki ga bomo dokazali kasneje.

Lema 4.3.3. *Naj bo $C \subseteq \mathbb{R}^d$ konveksna množica in δ_C tako kot v* (4.3.7). *Tedaj je funkcija δ_C neraztezna, njen odvod δ'_C pa je na topološki zunanjosti množice C ($\mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$) Lipschitzeva funkcija in za vsak $x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$, kjer je odvedljiva, velja:*

$$|\delta''_C(x)|_\vee \le \frac{1}{\delta_C(x)} \tag{4.3.8}$$

Posledica 4.3.4. *Naj bo $\mathcal{A}$ družina merljivih konveksnih množic v $\mathbb{R}^d$, zaprta za translacije in raztege za faktor, večji od ena. Postavimo δ_A tako kot v* (4.3.7). *Privzemimo še, da za vsak $\varepsilon > 0$ velja bodisi $A^\varepsilon := \{x \,;\, \delta_A(x) \le \varepsilon\} \in \mathcal{A}$ bodisi $A^\varepsilon := \{x \,;\, \delta_A(x) < \varepsilon\} \in \mathcal{A}$ in še bodisi $A^{-\varepsilon} := \{x \,;\, \delta_{\mathbb{R}^d \setminus A}(x) \ge \varepsilon\} \in \mathcal{A}$ bodisi $A^{-\varepsilon} := \{x \,;\, \delta_{\mathbb{R}^d \setminus A}(x) > \varepsilon\} \in \mathcal{A}$. Nadalje naj velja še:*

$$\mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A^\varepsilon \setminus A\} \le L\varepsilon \quad \textit{in} \quad \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A \setminus A^{-\varepsilon}\} \le L\varepsilon \tag{4.3.9}$$

Tedaj družina $\mathcal{A}$ izpolnjuje zahteve (P1)–(P7) *za $L_1 = L$ in $L_2 = 1$.*

Opomba. Če je A konveksna, sta po trditvi H.1.1 tudi množici $\{x\ ;\ \mathrm{dist}(x, A) \le \varepsilon\}$ in $\{x\ ;\ \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus A) \ge \varepsilon\}$ konveksni. Podobno lahko to dokažemo tudi za množici $\{x\ ;\ \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$ in $\{x\ ;\ \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus A) > \varepsilon\}$.

Dokaz posledice 4.3.4. Zahtevi (P1) in (P3) sta očitni, zahtevi (P2) in (P4) sledita iz trikotniške neenakosti, zahteva (P5) pa sledi iz zveznosti razdalje. Nadalje zahteva (P7) sledi iz leme 4.3.3. Tako moramo preveriti le še, da iz (4.3.9) sledi (P6). Vzemimo neodvisna slučajna vektorja $Z \sim \mathrm{N}(0, \mathbf{I})$ in $R \sim \mathrm{N}(\mu, \Sigma - \lambda^2 \mathbf{I})$. Tedaj je očitno $\lambda Z + R \sim \mathrm{N}(\mu, \Sigma)$, zato je:

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(\mu, \Sigma)\{A^\varepsilon \setminus A\} &= \mathbb{P}\Big(\lambda Z + R \in A^\varepsilon \setminus A\Big) = \\ &= \mathbb{P}\Big[Z \in \Big(\lambda^{-1}(A - R)\Big)^{\varepsilon/\lambda} \setminus \Big(\lambda^{-1}(A - R)\Big)\Big] \le \\ &\le \frac{L\varepsilon}{\lambda}\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Podobno dobimo tudi $\mathrm{N}(\mu, \Sigma)\{A \setminus A^{-\varepsilon}\} \le L\varepsilon/\lambda$ in rezultat je dokazan. ∎

Oglejmo si zdaj nekaj zgledov družin $\mathcal{A}$.

Zgled 4.3.1. Družina vseh poltrakov na realni osi izpolnjuje zahteve (P1)–(P7) za $L_1 = 1/\sqrt{2\pi}$ in $L_2 = 0$, pri čemer δ_A, A^ε in $A^{-\varepsilon}$ postavimo tako kot v posledici 4.3.4. Podobno velja tudi za zaprte intervale, le s konstanto $L_1 = 2/\sqrt{2\pi}$. □

Zgled 4.3.2. Po izreku H.1.3 družina *vseh* merljivih konveksnih množic v $\mathbb{R}^d$ izpolnjuje pogoje (P1)–(P7) za $L_1 = 0{,}64 + 0{,}59\, d^{1/4}$ in $L_2 = 1$. □

Zgled 4.3.3. Družina vseh krogel v $\mathbb{R}^d$ izpolnjuje pogoje (P1)–(P7) za konstanto L_1, ki je neodvisna od dimenzije (glej Sazonov [114], [115]). □

Zgled 4.3.4. Pri elipsoidih funkcije δ_A ne moremo postaviti tako kot v (4.3.7), ker epsilonska okolica elipsoida v splošnem ni elipsoid. Pač pa lahko postavimo $\delta_A(x) := \mathrm{dist}(Qx, A)$, kjer je Q primerna linearna transformacija. □

Zgornji zgled je smiselno obravnavati splošneje.

Trditev 4.3.5. *Naj družina $\mathcal{A}$ skupaj s funkcijami δ_A, množicami $\mathcal{A}^{\pm\varepsilon}$ ter konstantama L_1 in L_2 izpolnjuje pogoje* (P1)–(P7). *Nadalje naj bo Q neizrojena linearna transformacija na $\mathbb{R}^d$. Tedaj tudi družina $\tilde{\mathscr{A}} := \{QA\ ;\ A \in \mathcal{A}\}$ skupaj s primernimi funkcijami $\tilde{\delta}_{\tilde{A}}$ in množicami $\Upsilon^{\pm\varepsilon}\tilde{A}$, ki igrajo vlogo množic $A^{\pm\varepsilon}$, izpolnjuje pogoje* (P1)–(P7) *za konstanti $\tilde{L}_1 := \|Q\|\,\|Q^{-1}\|\, L_1$ in $\tilde{L}_2 := L_2$.*

Dokaz. Označimo $B := \|Q\|$ in $b := 1/\|Q^{-1}\|$. Zaradi zaprtosti razreda $\mathcal{A}$ za raztege za faktor, večji od ena, smemo brez škode za splošnost privzeti, da je $B \ge 1$. Postavimo:

$$\tilde{\delta}_{\tilde{A}}(x) := b\, \delta_{Q^{-1}\tilde{A}}(Q^{-1}x), \quad \Upsilon^{\pm\varepsilon}\tilde{A} := Q(Q^{-1}\tilde{A})^{\pm\varepsilon/b} \tag{4.3.11}$$

Tedaj ni težko preveriti, da novi razred $\tilde{\mathcal{A}}$ izpolnjuje pogoje (P1)–(P5). Naj bo zdaj $\mu \in \mathbb{R}^d$, Σ pa pozitivno definitna matrika z najmanjšo lastno vrednostjo λ^2, pri čemer naj bo $\lambda > 0$. Velja:

$$\mathrm{N}(\mu,\Sigma)\Big\{\tilde{\Upsilon}^{\varepsilon}\tilde{A} \setminus \tilde{A}\Big\} = \mathrm{N}(\mu,\Sigma)\Big\{Q(Q^{-1}\tilde{A})^{\varepsilon/b} \setminus \tilde{A}\Big\} = \mathrm{N}\Big(Q^{-1}\mu, Q^{-1}\Sigma(Q^{-1})^T\Big)\Big\{(Q^{-1}\tilde{A})^{\varepsilon/b} \setminus Q^{-1}\tilde{A}\Big\} \tag{4.3.12}$$

Očitno je najmanjša lastna vrednost simetrične matrike $Q^{-1}\Sigma(Q^{-1})^T$ navzdol omejena z λ^2/B^2. Sledi:

$$\mathrm{N}(\mu,\Sigma)\Big\{\tilde{\Upsilon}^{\varepsilon}\tilde{A} \setminus \tilde{A}\Big\} \le L_1\frac{\varepsilon}{b}\min\left\{1, \frac{B}{\lambda}\right\} \le \frac{BL_1}{b}\,\varepsilon\min\left\{1, \frac{1}{\lambda}\right\} \tag{4.3.13}$$

Podobno lahko izpeljemo tudi za $\tilde{A} \setminus \tilde{\Upsilon}^{-\varepsilon}\tilde{A}$, torej razred $\tilde{\mathcal{A}}$ izpolnjuje pogoj (P6) za $\tilde{L}_1 = BL_1/b = \|Q\|\,\|Q^{-1}\|\,L_1$. Končno velja še:

$$\left|\tilde{\delta}''_{\tilde{A}}(x)\right|_{\vee} \le \frac{\delta''_{Q^{-1}\tilde{A}}(Q^{-1}x)}{b} \le \frac{L_2}{b\,\delta_{Q^{-1}\tilde{A}}(Q^{-1}x)} = \frac{L_2}{\tilde{\delta}_{\tilde{A}}(x)} \tag{4.3.14}$$

torej je izpolnjen tudi pogoj (P7) za $\tilde{L}_2 = L_2$. ■

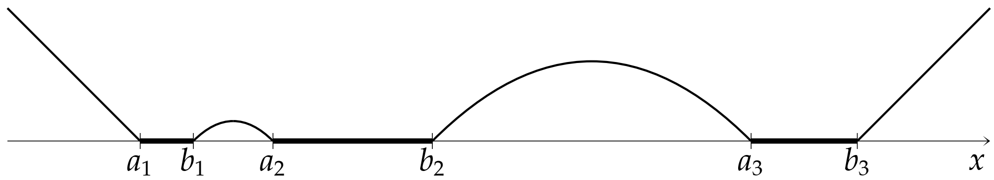
Podajmo še primer družine nekonveksnih množic.

ZGLED 4.3.5. Naj bo $\mathcal{A}$ družina vseh unij intervalov na realni osi, katerih sredine so si narazen vsaj za $\Delta > 0$. Ker elementi te družine niso nujno konveksne množice, ni rečeno, da je (4.3.7) primerna izbira za funkcije δ_A. To tudi v resnici ni primerna izbira, saj brž ko množica $A \in \mathcal{A}$ vsebuje vsaj dva intervala, funkcija $x \to \mathrm{dist}(x, A)$ na sredini med njima ni zvezno odvedljiva.

Funkcijo δ_A bomo morali izbrati nekoliko bolj gladko. Kot že rečeno, je množica A unija intervalov od a_i do b_i, kjer je $i = 1, 2, \ldots m$ ali pa $i \in \mathbb{Z}$, poleg tega pa še $a_i \le b_i \le a_{i+1}$ in $(a_{i+1} + b_{i+1})/2 \ge (a_i + b_i)/2 + \Delta$. Za $x \in [a_i, b_i]$ mora biti $\delta_A(x) = 0$. Za $b_i \le x \le a_{i+1}$ postavimo:

$$\delta_A(x) := \frac{1}{a_{i+1} - b_i}\left[\left(\frac{a_{i+1} - b_i}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b_i + a_{i+1}}{2}\right)^2\right] \tag{4.3.15}$$

Končno, če gre za končno unijo, za $x < a_1$ postavimo še $\delta_A(x) := a_1 - x$, za $x > b_n$ pa $\delta_A(x) := x - b_m$.



Slika 4.3.1: konstrukcija funkcije δ_A za unijo treh intervalov

Ni težko preveriti, da je funkcija δ_A neraztezna in da za $b_i < x < a_{i+1}$ velja $\delta_A''(x) \le 2/(a_{i+1} - b_i) \le 1/(2\delta_A(x))$. Pogoj (P7) je torej izpolnjen za $L_2 = 1/2$.

Prav tako ni težko preveriti, da je $\operatorname{dist}(x, A) \le 2\delta_A(x)$. Če torej postavimo $A^\varepsilon := \{x \,;\, \delta_A(x) \le \varepsilon\}$, je prav gotovo $A^\varepsilon \subseteq \bigcup_i [a_i - 2\varepsilon, b_i + 2\varepsilon]$. Ni tudi težko videti, da množice $A^{-\varepsilon} := \bigcup_i [a_i + 2\varepsilon, b_i - 2\varepsilon]$ izpolnjujejo pogoj (P4) (če je $a > b$, postavimo $[a, b] := \emptyset$). Ker pri konstrukcijah množic A^ε in $A^{-\varepsilon}$ sredine intervalov ostanejo enake ali pa intervali bodisi izginejo bodisi se združijo, je še vedno $A^\varepsilon, A^{-\varepsilon} \in \mathcal{A}$.

Preveriti je treba le še točko (P6). Velja:

$$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)(A^\varepsilon \setminus A) \le \frac{1}{\sigma} \int_0^{2\varepsilon} \sum_i \left[\phi\left(\frac{a_i - t - \mu}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{b_i + t - \mu}{\sigma}\right)\right] \mathrm{d}t \tag{4.3.16}$$

$$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)(A \setminus A^{-\varepsilon}) \le \frac{1}{\sigma} \int_{-2\varepsilon}^{0} \sum_i \left[\phi\left(\frac{a_i - t - \mu}{\sigma}\right) + \phi\left(\frac{b_i + t - \mu}{\sigma}\right)\right] \mathrm{d}t \tag{4.3.17}$$

kjer je ϕ kot ponavadi standardna normalna gostota, t. j. $\phi(x) := (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$. Vsote izrazov $\phi((a_i - t - \mu)/\sigma)$ in $\phi((b_i + t - \mu)/\sigma)$ pa najprej razdelimo na vsote po indeksih, kjer so izrazi $a_i - t - \mu$ in $b_i + t - \mu$ pozitivni oziroma negativni. Ob upoštevanju monotonosti funkcije ϕ ter ocen:

$$a_{i+n} - a_i \ge \frac{a_{i+n-1} + b_{i+n-1}}{2} - \frac{a_i + b_i}{2} \ge (n-1)\Delta, \quad b_{i+n} - b_i \ge \frac{a_{i+n} + b_{i+n}}{2} - \frac{a_{i+1} + b_{i+1}}{2} \ge (n-1)\Delta \tag{4.3.18}$$

po nekaj računanja končno dobimo oceno:

$$\begin{aligned} \max\Big\{\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)(A^\varepsilon \setminus A), \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)(A \setminus A^{-\varepsilon})\Big\} &\le \frac{8\varepsilon}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\Delta^2/(2\sigma^2)}\right) \le \\ &\le \frac{8\varepsilon}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(2 + \int_0^\infty e^{-\Delta^2 x^2/(2\sigma^2)}\,\mathrm{d}x\right) = \\ &= \varepsilon\left(\frac{16}{\sigma\sqrt{2\pi}} + \frac{4}{\Delta}\right) \le \\ &\le \varepsilon\left(\frac{16}{\sqrt{2\pi}} + \frac{4}{\Delta}\right)\max\left\{1, \frac{1}{\sigma}\right\} \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

iz katere sledi tudi točka (P6). □

Lotimo se sedaj dokazovanja izreka 4.3.2. Pred tem formulirajmo še dve lemi. Prva zadeva glajenje indikatorjev konveksnih množic, druga pa bo ključna pri razširjenem sklicevanju nase.

Lema 4.3.6. *Naj bo $\mathcal{A}$ družina množic, ki izpolnjuje zahteve* (P1)–(P5) *in še* (P7)*. Tedaj za vsak $A \in \mathcal{A}$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstajata funkciji $f_A^{\varepsilon}, f_A^{-\varepsilon} \in \flat^{(2)}(\mathbb{R}^d)$, za kateri velja:*

(1) $0 \le f_A^{\varepsilon}, f_A^{-\varepsilon} \le 1$.

(2) *Za vsak $x \in A$ je $f_A^{\varepsilon}(x) = 1$ in za vsak $x \in \mathbb{R}^d \setminus A^{\varepsilon}$ je $f_A^{\varepsilon}(x) = 0$.*

(3) *Za vsak $x \in A^{-\varepsilon}$ je $f_A^{-\varepsilon} = 1$ in za vsak $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$ je $f_A^{-\varepsilon}(x) = 0$.*

(4) *Veljajo ocene:*

$$M_1(f_A^{\varepsilon}) \le \frac{2}{\varepsilon}, \quad M_1(f_A^{-\varepsilon}) \le \frac{2}{\varepsilon}, \quad M_2(f_A^{\varepsilon}) \le \frac{4(1+L_2)}{\varepsilon^2}, \quad M_2(f_A^{-\varepsilon}) \le \frac{4(1+L_2)}{\varepsilon^2} \tag{4.3.20}$$

(5) *Funkciji f_A^{ε} in $f_A^{-\varepsilon}$ lahko zapišemo v obliki $f_A^{\varepsilon}(x) = \mathbb{P}(x \in A^{\zeta})$ in $f_A^{-\varepsilon}(x) = \mathbb{P}(x \in (A^{-\varepsilon})^{\zeta})$, kjer je ζ primerna slučajna spremenljivka.*

Lema 4.3.7. *Naj bo $\mathcal{A}$ družina merljivih množic v $\mathbb{R}^d$, ki izpolnjujejo zahteve* (P1)–(P7)*. Nadalje naj bo W slučajni vektor z vrednostmi v $\mathbb{R}^d$, za katerega za vsak $A \in \mathcal{A}$ velja ocena:*

$$\left|\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{N}(\mu, \Sigma)(A)\right| \le \delta \tag{4.3.21}$$

kjer je $\mu \in \mathbb{R}^d$, Σ pa je pozitivno definitna matrika (oz. $(1,1)$*-tenzor). Tedaj tudi za vsak $\varepsilon > 0$ in vsak $0 < \alpha \le \pi/2$ velja:*

$$\int_0^{\pi/2} \left|\mathbb{E}\Big(\mathcal{U}_\alpha f_A^{\varepsilon}(W)\Big)'''\right|_{\vee} \operatorname{tg}\alpha \, \mathrm{d}\alpha \le B \quad \textit{in} \quad \int_0^{\pi/2} \left|\mathbb{E}\Big(\mathcal{U}_\alpha f_A^{-\varepsilon}(W)\Big)'''\right|_{\vee} \operatorname{tg}\alpha \, \mathrm{d}\alpha \le B \tag{4.3.22}$$

kjer je:

$$B := \frac{c_3}{6} \max\left\{1, \frac{1}{\lambda^3}\right\} + \sqrt{2(1+L_2)c_1c_3}\left(L_1 \max\left\{1, \frac{1}{\lambda}\right\} + \frac{4\delta}{\varepsilon}\right) \tag{4.3.23}$$

in kjer so operatorji $\mathcal{U}_\alpha$ definirani tako kot v (2.4.17)*, f_A^{ε} in $f_A^{-\varepsilon}$ tako kot v lemi 4.3.6, c_1 in c_3 tako kot v* (2.5.19)*, λ^2 pa je najmanjša lastna vrednost matrike Σ, pri čemer je $\lambda > 0$.*

Dokaz izreka 4.3.2. Najprej dokažimo izrek za primer, ko je družina $\mathcal{A}$ zaprta za afine transformacije. V tem primeru podobno kot v (4.1.16) za vsak $\alpha > 0$ definirajmo:

$$K_\alpha := \sup \frac{\left|\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\}\right|}{\alpha + \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|^3} \tag{4.3.24}$$

kjer supremum teče po vseh $A \in \mathcal{A}$ in vseh možnih vsotah $W = \sum_{i \in \mathcal{I}} X_i$ neodvisnih slučajnih vektorjev z $\mathbb{E}\,X_i = 0$ in $\mathrm{Var}(W) = \mathbf{I}$. Iz leme 4.3.6 in (4.3.3) sledi:

$$0 \le \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f_A^{\varepsilon}\} - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\} \le \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A^{\varepsilon}\} - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\} \le L_1 \varepsilon \tag{4.3.25}$$

$$0 \le \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\} - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f_A^{-\varepsilon}\} \le \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\} - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A^{-\varepsilon}\} \le L_1 \varepsilon \tag{4.3.26}$$

Naj bo zdaj $W = \sum_{i \in \mathcal{I}} X_i$ tako kot zgoraj. Tedaj velja:

$$\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\} \le \mathbb{E}\, f_A^\varepsilon(W) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f_A^\varepsilon\} + L_1 \varepsilon \tag{4.3.27}$$

$$\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\} \ge \mathbb{E}\, f_A^{-\varepsilon}(W) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f_A^{-\varepsilon}\} - L_1 \varepsilon \tag{4.3.28}$$

Torej velja:

$$\Big|\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\}\Big| \le \max\Big\{\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f\}\Big| \;;\; f \in \{f_A^\varepsilon, f_A^{-\varepsilon}\}\Big\} + L_1 \varepsilon \tag{4.3.29}$$

Količino $\Big|\mathbb{E}\, f(W) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f\}\Big|$, kjer je $f \in \{f_A^\varepsilon, f_A^{-\varepsilon}\}$, bomo ocenili z uporabo trditve 2.5.1. Tehnični pogoj (2.5.15) je izpolnjen, ker iz trditve 2.5.2 in leme 4.3.6 sledi:

$$\int_0^{\pi/2} M_1\big(\mathcal{U}_\alpha f\big) \operatorname{tg} \alpha \, \mathrm{d}\alpha \le \int_0^{\pi/2} M_1(f) \sin \alpha \, \mathrm{d}\alpha \le \frac{2}{\varepsilon} \tag{4.3.30}$$

$$\int_0^{\pi/2} M_2\big(\mathcal{U}_\alpha f\big) \operatorname{tg} \alpha \, \mathrm{d}\alpha \le \int_0^{\pi/2} M_2(f) \sin \alpha \cos \alpha \, \mathrm{d}\alpha \le \frac{2(1 + L_2)}{\varepsilon^2} \tag{4.3.31}$$

Za oceno Steinovega matematičnega upanja najprej podobno kot v (4.1.24)–(4.1.26) izpeljemo:

$$\mathbb{E}\Big[\Delta \mathcal{U}_\alpha f(W) - (\mathcal{U}_\alpha f)'(W) W\Big] = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}\, T_i(\alpha) \Big(X_i\, \mathbb{E}\, X_i^2 - (1 - \theta) X_i^3\Big) \tag{4.3.32}$$

kjer so operatorji $\mathcal{U}_\alpha$ definirani tako kot v (2.4.17), θ je kot ponavadi porazdeljena enakomerno po $[0, 1]$ in neodvisna od vsega ostalega ter še:

$$T_i(\alpha) := \mathbb{E}\Big[(\mathcal{U}_\alpha f)'''(W_i + \theta X_i) \;\Big|\; X_i, \theta\Big] \tag{4.3.33}$$

Količine $T_i(\alpha)$ bomo ocenili z uporabo pogojne različice leme 4.3.7 in sklicevanja nase. Slučajni vektor $W_i + \theta X_i$ je pogojno na X_i in θ prav tako vsota neodvisnih slučajnih vektorjev, le da nima nujno matematičnega upanja nič in variance (kovariančne matrike) $\mathbf{I}$. Označimo $\Sigma_i := \mathrm{Var}(W_i) = \mathrm{Var}(W_i \mid X_i, \theta)$ in privzemimo, da je $\Sigma_i > 0$ (za primer, ko je matrika Σ_i izrojena, bomo stvar dokazali posebej). Ker je razred $\mathcal{A}$ zaprt za afine transformacije, iz (4.3.24) sledi:

$$\begin{aligned} &\Big|\mathbb{P}(W_i + \theta X_i \in A \mid X_i, \theta) - \mathrm{N}(\theta X_i, \Sigma_i)\{A\}\Big| = \\ &\quad = \Big|\mathbb{P}\Big(\Sigma_i^{-1/2} W_i \in \Sigma_i^{-1/2}(A - \theta X_i) \mid X_i, \theta\Big) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\Big\{\Sigma_i^{-1/2}(A - \theta X_i)\Big\}\Big| \le K_\alpha \left(\alpha + \frac{\beta}{\lambda_i^3}\right) \end{aligned} \tag{4.3.34}$$

kjer je $\beta = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathbb{E}\, |X_i|^3$, λ_i^2 pa je najmanjša lastna vrednost matrike Σ_i, pri čemer je $\lambda_i > 0$. Ker lahko za vsak enotski vektor $u \in \mathbb{R}^d$ ocenimo:

$$\langle \Sigma_i u \,,\, u \rangle = u^T \Sigma_i u = u^T (\mathbf{I} - \mathbb{E}\, X_i X_i^T) u = 1 - \mathbb{E} \langle X_i \,,\, u \rangle^2 \ge 1 - \mathbb{E}\, |X_i|^2 \ge 1 - \beta^{2/3} \tag{4.3.35}$$

velja tudi $\lambda_i^2 \geq 1 - \beta^{2/3}$. Iz pogojne različice leme 4.3.7 dobimo:

$$\int_0^{\pi/2} |T_i(\alpha)|_\vee \operatorname{tg}\alpha \, d\alpha \leq \sqrt{2(1+L_2)c_1c_3}\left[L_1(1-\beta^{2/3})^{-1/2} + \frac{4K_\alpha}{\varepsilon}\Big(\alpha + (1-\beta^{2/3})^{-3/2}\beta\Big)\right] + \\ + \frac{c_3}{6}(1-\beta^{2/3})^{-3/2} \tag{4.3.36}$$

seveda pod pogojem, da je $\beta < 1$. Iz (4.3.32) in trditve 2.5.1 tako dobimo:

$$\Big|\mathbb{E} f(W) - \mathrm{N}(0,\mathbf{I})\{f\}\Big| \leq \beta\sqrt{2(1+L_2)c_1c_3}\left[\frac{3L_1}{2}(1-\beta^{2/3})^{-1/2} + \frac{6K_\alpha}{\varepsilon}\Big(\alpha + (1-\beta^{2/3})^{-3/2}\beta\Big)\right] + \\ + \frac{c_3}{4}(1-\beta^{2/3})^{-3/2}\beta \tag{4.3.37}$$

Izberimo neki $0 < \beta_0 < 1$. Za $\beta \leq \beta_0$ postavimo $\varepsilon := K_\alpha(\alpha+\beta)/(2L_1)$ in vse skupaj vstavimo v (4.3.29). Dobimo:

$$\Big|\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{N}(0,\mathbf{I})\{A\}\Big| \leq (\alpha+\beta)\left[\frac{K_\alpha}{2} + \frac{c_3}{4}\Big(1-\beta_0^{2/3}\Big)^{-3/2} + \right. \\ \left. + L_1\sqrt{2(1+L_2)c_1c_3}\left(\frac{3}{2}\Big(1-\beta_0^{2/3}\Big)^{-1/2} + 12\Big(1-\beta_0^{2/3}\Big)^{-3/2}\right)\right] \tag{4.3.38}$$

Za $\beta \geq \beta_0$ pa trivialno ocenimo:

$$\Big|\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{N}(0,\mathbf{I})\{A\}\Big| \leq 1 \leq \frac{\alpha+\beta}{\beta_0} \tag{4.3.39}$$

Zdaj pa oceni (4.3.38) in (4.3.39) delimo z $\alpha+\beta$ in naredimo supremum po vseh množicah $A \in \mathcal{A}$ in vseh vsotah W. Ob upoštevanju (4.3.24) dobimo:

$$K_\alpha \leq \max\left\{\frac{1}{\beta_0}, \frac{K_\alpha}{2} + \frac{c_3}{4}\Big(1-\beta_0^{2/3}\Big)^{-3/2} + \right. \\ \left. + L_1\sqrt{2(1+L_2)c_1c_3}\left(\frac{3}{2}\Big(1-\beta_0^{2/3}\Big)^{-1/2} + 12\Big(1-\beta_0^{2/3}\Big)^{-3/2}\right)\right\} \tag{4.3.40}$$

Ker je $K_\alpha < \infty$, od tod sledi:

$$K_\alpha \leq \max\left\{\frac{1}{\beta_0}, \frac{c_3}{2}\Big(1-\beta_0^{2/3}\Big)^{-3/2} + \right. \\ \left. + L_1\sqrt{2(1+L_2)c_1c_3}\left(3\Big(1-\beta_0^{2/3}\Big)^{-1/2} + 24\Big(1-\beta_0^{2/3}\Big)^{-3/2}\right)\right\} \tag{4.3.41}$$

Če postavimo $\beta_0 := 1/27$, kar je približno optimalna vrednost za poltrake na realni osi, in pošljemo α proti nič, po nekaj numeričnega ocenjevanja dobimo oceno (4.3.6).

Obravnavati moramo še primer, ko razred $\mathcal{A}$ ni nujno zaprt za afine transformacije (še vedno pa mora biti zaprt za translacije in raztege za faktor, večji od ena). V tem primeru moramo biti previdnejši. Za poljubne $\alpha > 0$ in $l_1, l_2 \geq 0$ postavimo:

$$K(\alpha, l_1, l_2) := \sup \frac{\left|\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\}\right|}{\alpha + L_1\sqrt{1 + L_2}\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|^3} \tag{4.3.42}$$

kjer supremum teče po vseh vsotah $W = \sum_{i\in\mathcal{I}} X_i$ neodvisnih slučajnih vektorjev z $\mathbb{E}\,X_i = 0$ in $\mathrm{var}(W) = \mathbf{I}$, vseh množicah $A \in \mathcal{A}$ ter še vseh trojicah $(\mathcal{A}, L_1, L_2)$, ki izpolnjujejo pogoje (P1)–(P7) in za katere velja $L_1 \geq l_1$ in $L_2 \geq l_2$. Očitno je spet $K(\alpha, l_1, l_2) \leq 1/\alpha < \infty$.

Naj bosta torej $W = \sum_{i\in\mathcal{I}} X_i$ in $\mathcal{A}$ kot zgoraj, $\varepsilon > 0$, $A \in \mathcal{A}$ in $f \in \{f_A^{\varepsilon}, f_A^{-\varepsilon}\}$. Nadaljnje ocenjevanje poteka tako kot v primeru, ko smo privzeli zaprtost razreda $\mathcal{A}$ za afine transformacije. Prva razlika nastopi pri ocenjevanju količin $T_i(\alpha)$ s pomočjo leme 4.3.7, kjer uporabimo sklicevanje nase. Pri ocenah količin:

$$\left|\mathbb{P}\Big(\Sigma_i^{-1/2} W_i \in \Sigma_i^{-1/2}(A - \theta X_i) \mid X_i, \theta\Big) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\Big\{\Sigma_i^{-1/2}(A - \theta X_i)\Big\}\right| \tag{4.3.43}$$

namreč zdaj razred $\mathcal{A}$ ne zadošča. Toda po trditvi 4.3.5 razred $\tilde{\mathcal{A}} := \{\Sigma_i^{-1/2} A\ ;\ A \in \mathcal{A}\}$ izpolnjuje zahteve (P1)–(P7) za konstanti $\tilde{L}_1 = \Lambda_i L_1/\lambda_i$ in $\tilde{L}_2 = L_2$, kjer je λ_i^2 najmanjša, Λ_i^2 pa največja lastna vrednost matrike Σ_i. Ocenimo lahko $\Lambda_i \leq (1 + \beta^{2/3})^{1/2}$. Tako namesto ocene (4.3.37) zdaj dobimo:

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\,f(W) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f\}\right| &\leq \frac{c_3}{4}(1 - \beta^{2/3})^{-3/2}\beta + \\ &+ \beta\sqrt{2(1 + L_2)c_1c_3}\left[\frac{3L_1}{2}(1 - \beta^{2/3})^{-1/2} + \frac{6K(\alpha, l_1, l_2)}{\varepsilon}\left(\alpha + L_1\sqrt{1 + L_2}\,\frac{(1 + \beta^{2/3})^{1/2}\beta}{(1 - \beta^{2/3})^2}\right)\right]\end{aligned} \tag{4.3.44}$$

Spet izberimo $0 < \beta_0 < 1$ in za $\beta \leq \beta_0$ postavimo $\varepsilon := K(\alpha, l_1, l_2)(\alpha + \beta L_1\sqrt{1 + L_2})/(2L_1)$ in vse skupaj vstavimo v (4.3.29). Dobimo:

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\}\right| \leq \Big(\alpha + \beta L_1\sqrt{1 + L_2}\Big)&\left[\frac{K(\alpha, l_1, l_2)}{2} + \frac{c_3}{4l_1\sqrt{1 + l_2}}\Big(1 - \beta_0^{2/3}\Big)^{-3/2} + \right. \\ &\left. + \frac{3\sqrt{2c_1c_3}}{2}\Big(1 - \beta_0^{2/3}\Big)^{-1/2} + \frac{12\sqrt{2c_1c_3}\Big(1 + \beta_0^{2/3}\Big)^{1/2}}{\Big(1 - \beta_0^{2/3}\Big)^2}\right]\end{aligned} \tag{4.3.45}$$

Za $\beta \geq \beta_0$ pa trivialno ocenimo:

$$\left|\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\}\right| \leq 1 \leq \frac{\alpha + \beta L_1\sqrt{1 + L_2}}{\beta_0 l_1\sqrt{1 + l_2}} \tag{4.3.46}$$

Oceni (4.3.45) in (4.3.46) delimo z $\alpha+\beta L_1\sqrt{1+L_2}$ in naredimo supremum po vseh vsotah W, vseh množicah $A \in \mathcal{A}$ in vseh družinah $\mathcal{A}$. Ob upoštevanju (4.3.42) in dejstva, da je $K(\alpha, l_1, l_2) < \infty$, podobno kot v (4.3.41) dobimo:

$$K(\alpha, l_1, l_2) \le \max\left\{\frac{1}{\beta_0 l_1\sqrt{1+l_2}}, \frac{c_3}{2l_1\sqrt{1+l_2}}\left(1-\beta_0^{2/3}\right)^{-3/2}+3\sqrt{2c_1c_3}\left(1-\beta_0^{2/3}\right)^{-1/2}+\frac{24\sqrt{2c_1c_3}}{\left(1-\beta_0^{2/3}\right)^{3/2}}\right\} \tag{4.3.47}$$

Če postavimo $\beta_0 := 1/27$ in pošljemo α proti nič, po nekaj numeričnega ocenjevanja dobimo, da za vsako vsoto $W = \sum_{i\in\mathcal{I}} X_i$ neodvisnih slučajnih vektorjev z $\mathbb{E}\, X_i = 0$ in $\operatorname{var}(W) = \mathbf{I}$, vsak razred $\mathcal{A}$, ki izpolnjuje pogoje (P1)–(P7) za $L_1 \ge l_1$ in $L_2 \ge l_2$, ter vsak $A \in \mathcal{A}$ velja:

$$\left|\mathbb{P}(W \in A) - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\}\right| \le \max\left\{\frac{27}{l_1\sqrt{1+l_2}}, \frac{1}{l_1\sqrt{1+l_2}} + 55\right\} L_1\sqrt{1+L_2}\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathbb{E}\,|X_i|^3 \tag{4.3.48}$$

kar je ekvivalentno oceni (4.3.5). ∎

Opomba. V zgornjem dokazu smo Steinovo metodo uporabili prek trditve 2.5.1. Seveda bi lahko šli tudi z reševanjem Steinove enačbe, torej z uporabo trditve 2.6.1. V tem primeru bi morali lemo 4.3.7 zapisati prav za rešitev Steinove enačbe. Vendar pa je uporaba trditve 2.5.1 tu nazornejša, ker je integralska izražava rešitve Steinove enačbe pri ocenjevanju ključna.

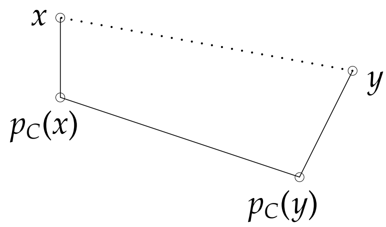
Opomba. Ocene, ki smo jih izpeljali, so, kar se konstant tiče, še vedno precej grobe. Če za $\mathcal{A}$ vzamemo družino vseh poltrakov na realni osi, so pogoji (P1)–(P7) izpolnjeni za $L_1 = 1/\sqrt{2\pi}$ in $L_2 = 1$. Tako nam izrek 4.3.2 da konstanto 29,3, ki je bistveno slabša od konstante 8,6, ki smo jo izpeljali v razdelku 4.1, kaj šele od konstante Ševcove [121], ki je 0,56. Razloga za to sta v glavnem dva: prvič smo razliko $\mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f_A^\varepsilon\} - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\}$ ocenili kar z $\mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A^\varepsilon \setminus A\}$ in s tem izgubili faktor 2. Čeprav bi tako lahko oceno za $\mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f_A^\varepsilon\} - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\}$ zlahka prepolovili, pa se izkaže, da to ne bi šlo tudi za $\mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{A\} - \mathrm{N}(0, \mathbf{I})\{f_A^{-\varepsilon}\}$. Drugi razlog za slabšo konstanto pa je ta, da v večrazsežnem primeru potrebujemo boljše glajenje, namreč tako, ki nam da funkcije z omejenimi drugimi, ne le prvimi odvodi.

Lotimo se zdaj dokazovanja lem 4.3.6 in 4.3.7.

Dokaz leme 4.3.3. Za $x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$ je očitno $\delta_C(x) = |x - p_C(x)|$, kjer je p_C pravokotna projekcija na C (glej razdelek G.3). Sledi $\delta_C'(x) = (x - p_C(x))^T/|x - p_C(x)|$ ali ekvivalentno:

$$\operatorname{grad} p_C(x) = \frac{x - p_C(x)}{|x - p_C(x)|} \tag{4.3.49}$$

Vzemimo zdaj poljubni točki $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$. Po točki (2) leme G.3.3 velja $\langle x - p_C(x)\,,\, p_C(x) - p_C(y)\rangle \ge 0$ in $\langle y - p_C(y)\,,\, p_C(y) - p_C(x)\rangle \ge 0$:



Slika 4.3.2

Sledi:

$$\begin{aligned} |x-y|^2 - \Big|x-y-(p_C(x)-p_C(y))\Big|^2 &= |p_C(x)-p_C(y)|^2 + 2\langle x-p_C(x)\,,\, p_C(x)-p_C(y)\rangle + \\ &\quad + 2\langle y-p_C(y)\,,\, p_C(y)-p_C(x)\rangle \geq \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.3.50}$$

Torej je:

$$|x-y| \geq \Big|(x-p_C(x)) - (y-p_C(y))\Big| = \Big|\delta_C(x)u - \delta_C(y)v\Big| \tag{4.3.51}$$

kjer je:

$$u := \operatorname{grad}\delta_C(x) = \frac{x-p_C(x)}{|x-p_C(x)|}, \qquad v := \operatorname{grad}\delta_C(y) = \frac{y-p_C(y)}{|y-p_C(y)|} \tag{4.3.52}$$

Označimo $r := \min\{\delta_C(x), \delta_C(y)\}$. Ker sta vektorja u in v enotska, velja:

$$\begin{aligned} \Big|\delta_C(x)u - \delta_C(y)v\Big|^2 - r^2|u-v|^2 &= \delta_C^2(x) + \delta_C^2(y) - 2r^2 - 2\Big(\delta_C(x)\delta_C(y) - r^2\Big)\langle u\,,\, v\rangle \geq \\ &\geq \delta_C^2(x) + \delta_C^2(y) - 2r^2 - 2\Big(\delta_C(x)\delta_C(y) - r^2\Big) = \\ &= \Big(\delta_C(x) - \delta_C(y)\Big)^2 \geq \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.3.53}$$

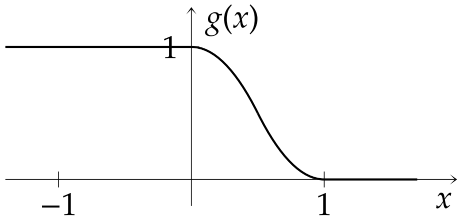
Torej je tudi:

$$|x-y| \geq r\Big|\operatorname{grad}\delta_C(x) - \operatorname{grad}\delta_C(y)\Big| \tag{4.3.54}$$

od koder že sledi naš rezultat. ■

Dokaz leme 4.3.6. Konstruirajmo najprej funkcijo f_A^ε. Če je množica A prazna, vzemimo kar $f_A^\varepsilon \equiv 0$. Sicer pa bomo f_A^ε konstruirali s pomočjo funkcije:

$$g(x) := \begin{cases} 1 & ;\ x \leq 0 \\ 1-2x^2 & ;\ 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x)^2 & ;\ 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0 & ;\ x \geq 1 \end{cases} \tag{4.3.55}$$



Slika 4.3.3

Definirajmo:

$$f_A^\varepsilon(x) := g\left(\frac{\delta_A(x)}{\varepsilon}\right) \tag{4.3.56}$$

Tedaj sta zahtevi (1) in (2) naše leme očitno izpolnjeni. Pišemo lahko tudi:

$$f_A^\varepsilon(x) = \int_0^1 \mathbf{1}\left[u < g\left(\frac{\delta_A(x)}{\varepsilon}\right)\right] \mathrm{d}u = \mathbb{P}\Big(\delta_A(x) < \varepsilon\, g^{-1}(U)\Big) \tag{4.3.57}$$

kjer je U enakomerno porazdeljena po $[0, 1]$. Podobno je tudi $f_A^\varepsilon(x) = \mathbb{P}(\delta_A(x) \le \varepsilon\, g^{-1}(U))$. Sledi:

$$f_A^\varepsilon(x) = \mathbb{P}\Big(\delta_A(x) < \varepsilon\, g^{-1}(U)\Big) \le \mathbb{P}\Big(x \in A^{g^{-1}(U)}\Big) \le \mathbb{P}\Big(\delta_A(x) \le \varepsilon\, g^{-1}(U)\Big) = f_A^\varepsilon(x) \tag{4.3.58}$$

Torej je $f_A^\varepsilon(x) = \mathbb{P}(x \in A^\zeta)$, kjer je $\zeta = \varepsilon\, g^{-1}(U)$, se pravi, da funkcija f_A^ε izpolnjuje pogoje točke (5) naše leme.

Ker je $M_1(\delta_A) \le 1$ in $M_1(g) = 2$, je tudi $M_1(f_A^\varepsilon) \le 2/\varepsilon$. Pokažimo zdaj, da je f_A^ε zvezno odvedljiva. Definirajmo množico $B := \{x \,;\, \delta_A(x) \le 0\}$. Ker na B velja $f_A^\varepsilon(x) = 1$, je funkcija f_A^ε v notranjosti množice B odvedljiva z odvodom nič; torej je tam zvezno odvedljiva. Prav tako je zvezno odvedljiva zunaj množice B – tam namreč velja:

$$(f_A^\varepsilon)'(x) = \frac{1}{\varepsilon}\, g'\left(\frac{\delta_A(x)}{\varepsilon}\right)\delta_A'(x) \tag{4.3.59}$$

Ker za $t \ge 0$ velja $|g'(t)| \le 4t$ in ker je δ_A neraztezna funkcija, gre $(f_A^\varepsilon)'(x)$ proti nič, ko gre $\delta_A(x)$ proti nič. Sledi, da se da odvod zvezno razširiti tudi na rob množice B, torej na celotni prostor. Ker je f_A^ε tudi zvezna, to pomeni, da je f_A^ε zvezno odvedljiva na zaprtju unije notranjosti in komplementa množice B, to pa je cel prostor.

Ocenimo še drugi odvod. V notranjosti množice B je enak nič, zunaj te množice pa tam, kjer obstaja, velja:

$$(f_A^\varepsilon)''(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}\, g''\left(\frac{\delta_A(x)}{\varepsilon}\right)\delta_A'(x) + \frac{1}{\varepsilon}\, g'\left(\frac{\delta_A(x)}{\varepsilon}\right)\delta_A''(x) \tag{4.3.60}$$

Prvi člen ocenimo z $M_2(g)/\varepsilon^2 = 4/\varepsilon^2$, pri drugem členu pa upoštevamo oceno $|g'(t)| \le 4t$. Sledi $|(f_A^\varepsilon)''(x)|_\vee \le 4(1 + L_2)/\varepsilon^2$ za vsak $x \in \mathbb{R}^d \setminus B$, kjer je f_A^ε dvakrat odvedljiva, torej skoraj povsod na $\mathbb{R}^d \setminus B$ (v notranjosti množice B pa je seveda $(f_A^\varepsilon)'' \equiv 0$).

Odvod f_A^ε je torej Lipschitzevo zvezen s konstanto $4(1+L_2)/\varepsilon^2$ tako v notranjosti množice B kot tudi zunaj nje, t. j. na njenem komplementu. Ker je zvezen, to velja tudi na zaprtju komplementa množice B. Za poljubni točki x in y, ki sta bodisi obe v notranjosti množice B bodisi obe v zaprtju njenega komplementa, torej velja $|(f_A^\varepsilon)'(x) - (f_A^\varepsilon)'(y)| \le 4(1+L_2)\varepsilon^{-2}|x-y|$. Ker je unija notranjosti množice B in zaprtja njenega komplementa cel prostor, moramo zdaj to neenačbo dokazati le še za primer, ko je x v notranjosti množice B, y pa v zaprtju njenega komplementa. V tem primeru pa obstaja točka z, ki leži na daljici med točkama x in y, nakar po trikotniški neenakosti ocenimo $|(f_A^\varepsilon)'(x) - (f_A^\varepsilon)'(y)| \le 4(1+L_2)\varepsilon^{-2}\big(|x-z| + |z-y|\big) = 4(1+L_2)\varepsilon^{-2}|x-y|$. Sledi, da je res $M_2(f_A^\varepsilon) \le 4(1+L_2)/\varepsilon^2$. Funkcija f_A^ε tako izpolnjuje vse zahteve naše leme.

Konstruirati je treba še funkcijo $f_A^{-\varepsilon}$. Za to pa vzamemo kar $f_A^{-\varepsilon} := f_{A^{-\varepsilon}}^{\varepsilon}$. Ni se težko prepričati, da tudi ta funkcija izpolnjuje pogoje leme. ∎

Dokažimo še lemo 4.3.7. Potrebovali bomo še naslednji rezultat.

Lema 4.3.8. *Naj bo $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ merljiva in omejena funkcija, $0 < \alpha \le \pi/2$, $\mu \in \mathbb{R}^d$, Σ pa naj bo pozitivno definitna matrika z najmanjšo lastno vrednostjo λ^2, pri čemer je $\lambda > 0$. Tedaj za vsak $r \in \mathbb{N}$ velja ocena:*

$$\Big|\mathrm{N}(\mu,\Sigma)\big\{(\mathcal{U}_\alpha f)^{(r)}\big\}\Big|_\vee \le M_0^*(f)\, c_r \cos^r\alpha \max\{1, \lambda^{-r}\} \tag{4.3.61}$$

kjer je $M_0^*(f) := (\sup f - \inf f)/2$, konstante c_r pa so definirane tako kot v (2.5.19).

Dokaz. Naj bosta Z in Z' neodvisna standardna normalna vektorja v $\mathbb{R}^d$. Tedaj iz (2.4.17) dobimo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\mathcal{U}_\alpha f(\Sigma^{1/2}Z+\mu) &= \mathbb{E}\, f\big(\cos\alpha(\Sigma^{1/2}Z+\mu) + \sin\alpha\, Z'\big) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\cos\alpha\,\mu + Q_\alpha z)\,\phi_d(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{4.3.62}$$

kjer je $Q_\alpha := (\cos^2\alpha\,\Sigma + \sin^2\alpha\,\mathbf{I})^{1/2}$, ϕ_d pa standardna d-razsežna normalna gostota. S substitucijo dobimo:

$$\mathbb{E}\,\mathcal{U}_\alpha f(\Sigma^{1/2}Z+\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} f(Q_\alpha y)\,\phi_d\big(y - \cos\alpha\, Q_\alpha^{-1}\mu\big)\,\mathrm{d}y \tag{4.3.63}$$

in odvajanje po μ nam da:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\mathcal{U}_\alpha f)^{(r)}(\Sigma^{1/2}Z+\mu)u_1\ldots u_r = \\ &\quad= (-1)^r\cos^r\alpha \int_{\mathbb{R}^d} f(Q_\alpha y)\,\phi_d^{(r)}\big(y-\cos\alpha\,Q_\alpha^{-1}\mu\big)(Q_\alpha^{-1}u_1)\ldots(Q_\alpha^{-1}u_r)\,\mathrm{d}y = \\ &\quad= (-1)^r\cos^r\alpha \int_{\mathbb{R}^d} f(\cos\alpha\,\mu + Q_\alpha z)\,\phi_d^{(r)}(z)(Q_\alpha^{-1}u_1)\ldots(Q_\alpha^{-1}u_r)\,\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{4.3.64}$$

Torej velja:

$$\begin{aligned}\Big|\mathrm{N}(\mu,\Sigma)\big\{(\mathcal{U}_\alpha f)^{(r)}\big\}\Big|_\vee &= \Big|\mathbb{E}(\mathcal{U}_\alpha f)^{(r)}(\Sigma^{1/2}Z+\mu)\Big|_\vee \le \\ &\le \cos^r\alpha \big\|Q_\alpha^{-1}\big\|^r \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(\cos\alpha\,\mu + Q_\alpha z)\,\phi_d^{(r)}(z)\,\mathrm{d}z\right|_\vee\end{aligned} \tag{4.3.65}$$

Z uporabo ocene:

$$\left\|Q_\alpha^{-1}\right\| = (\cos^2\alpha\,\lambda^2 + \sin^2\alpha)^{-1/2} \le \max\{1, \lambda^{-1}\} \tag{4.3.66}$$

in še leme 2.5.4 dobimo želeni rezultat. ∎

Dokaz leme 4.3.7. Naj bo $0 < \beta < \pi/2$. Za $0 < \alpha \le \beta$ po trditvi 2.4.7 pišimo:

$$\mathbb{E}(\mathcal{U}_\alpha f_A^\varepsilon)'''(W) = -\frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} F(z)\,\phi_d'(z)\,\mathrm{d}z \tag{4.3.67}$$

kjer je:

$$F(z) := \mathbb{E}(f_A^\varepsilon)''(\cos\alpha\,W + \sin\alpha\,z) \tag{4.3.68}$$

Po lemi 4.3.6 velja:

$$|F(z)|_\vee \le \frac{4(1+L_2)}{\varepsilon^2}\,\mathbb{P}\Big(\cos\alpha\,W + \sin\alpha\,z \in A^\varepsilon \setminus A\Big) \tag{4.3.69}$$

Iz (4.3.3) sledi:

$$\mathrm{N}\Big(\cos\alpha\,\mu + \sin\alpha\,z,\ \cos^2\alpha\,\Sigma\Big)\{A^\varepsilon \setminus A\} \le L_1\varepsilon\max\left\{1, \frac{1}{\lambda\cos\alpha}\right\} \le \frac{L_1\varepsilon}{\cos\alpha}\max\{1,\lambda^{-1}\} \tag{4.3.70}$$

Ker velja (4.3.21), ker je razred $\mathcal{A}$ zaprt za translacije, raztege za faktor, večji od ena, in transformacije $A \mapsto A^\varepsilon$ ter še ker je $A \subseteq A^\varepsilon$, pa velja:

$$\left|\mathbb{P}\Big(\cos\alpha\,W + \sin\alpha\,z \in A^\varepsilon \setminus A\Big) - \mathrm{N}\Big(\cos\alpha\,\mu + \sin\alpha\,z,\ \cos^2\alpha\,\Sigma\Big)\{A^\varepsilon \setminus A\}\right| \le 2\delta \tag{4.3.71}$$

Iz (4.3.69), (4.3.70) in (4.3.71) tako dobimo:

$$|F(z)|_\vee \le \frac{4(1+L_2)}{\varepsilon}\left(\frac{L_1}{\cos\alpha}\max\{1,\lambda^{-1}\} + \frac{2\delta}{\varepsilon}\right) \le \frac{4(1+L_2)}{\varepsilon\cos\alpha}\left(L_1\max\{1,\lambda^{-1}\} + \frac{2\delta}{\varepsilon}\right) \tag{4.3.72}$$

in iz leme 2.5.4 sledi:

$$\left|\mathbb{E}(\mathcal{U}_\alpha f_A^\varepsilon)'''(W)\right|_\vee \le \frac{4(1+L_2)c_1\cos^2\alpha}{\varepsilon\sin\alpha}\left(L_1\max\{1,\lambda^{-1}\} + \frac{2\delta}{\varepsilon}\right) \tag{4.3.73}$$

Za $\alpha \ge \beta$ pa $\mathbb{E}(\mathcal{U}_\alpha f_A^\varepsilon)'''(W)$ ocenimo drugače. Najprej po lemi 4.3.8 velja:

$$\left|\mathrm{N}(\mu,\Sigma)\Big\{(\mathcal{U}_\alpha f_A^\varepsilon)'''\Big\}\right|_\vee \le \frac{c_3\cos^3\alpha}{2}\max\{1,\lambda^{-3}\} \tag{4.3.74}$$

Za oceno ostanka spet uporabimo trditev 2.4.7, a tokrat pišimo:

$$(\mathcal{U}_\alpha f_A^\varepsilon)'''(w) = -\operatorname{ctg}^3\alpha\int_{\mathbb{R}^d} f_A^\varepsilon(\cos\alpha\,w + \sin\alpha\,z)\,\phi_d'''(z)\,\mathrm{d}z \tag{4.3.75}$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(\mathcal{U}_\alpha f_A^\varepsilon)'''(W) - \mathrm{N}(\mu,\Sigma)\Big\{(\mathcal{U}_\alpha f_A^\varepsilon)'''\Big\} = -\operatorname{ctg}^3\alpha\int_{\mathbb{R}^d} G(z)\,\phi_d'''(z)\,\mathrm{d}z \tag{4.3.76}$$

kjer je:

$$G(z) := \mathbb{E}\, f_A^\varepsilon(\cos\alpha\, W + \sin\alpha\, z) - \mathrm{N}\Big(\cos\alpha\,\mu + \sin\alpha\, z,\ \cos^2\alpha\,\Sigma\Big)\{f_A^\varepsilon\} \tag{4.3.77}$$

Ker lahko po točki (5) leme 4.3.6 funkcijo f_A^ε izrazimo z indikatorji samih merljivih množic iz $\mathcal{A}$, lahko predpostavko (4.3.21) uporabimo tudi na funkcijah f_A^ε. Če zraven upoštevamo še zaprtost razreda $\mathcal{A}$ za translacije in raztege za faktor, večji od ena, dobimo $|G(z)| \le \delta$. Z uporabo (4.3.74), (4.3.76) in leme 2.5.4 tako dobimo:

$$\Big|(\mathcal{U}_\alpha f_A^\varepsilon)'''(w)\Big|_\vee \le \frac{c_3\cos^3\alpha}{2}\,\max\{1,\lambda^{-3}\} + c_3\delta\,\mathrm{ctg}^3\,\alpha \tag{4.3.78}$$

Iz (4.3.73) in (4.3.78) po integraciji dobimo:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\Big|\mathbb{E}(\mathcal{U}_\alpha f_A^\varepsilon)'''(W)\Big|_\vee \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{d}\alpha &\le \int_0^\beta \frac{4(1+L_2)c_1\cos\alpha}{\varepsilon}\left(L_1\max\{1,\lambda^{-1}\} + \frac{2\delta}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}\alpha\, + \\
&\quad + c_3\int_\beta^{\pi/2}\left(\frac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{2}\,\max\{1,\lambda^{-3}\} + \delta\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha\right)\mathrm{d}\alpha \le \\
&\le \frac{4(1+L_2)c_1\,\mathrm{tg}\,\beta}{\varepsilon}\left(L_1\max\{1,\lambda^{-1}\} + \frac{2\delta}{\varepsilon}\right) + \\
&\quad + \frac{c_3}{6}\,\max\{1,\lambda^{-3}\} + c_3\delta\,\mathrm{ctg}\,\beta
\end{aligned} \tag{4.3.79}$$

Zdaj pa kot β izberimo tako, da bo vsota členov z δ optimalna. To se zgodi, če postavimo:

$$\beta := \mathrm{arctg}\left(\varepsilon\sqrt{\frac{c_3}{8(1+L_2)c_1}}\right) \tag{4.3.80}$$

Če zdaj to vstavimo v (4.3.79), dobimo tisti del ocene (4.3.22), ki zadeva f_A^ε. Na čisto enak način pa dobimo tudi del, ki zadeva $f_A^{-\varepsilon}$. ∎

II. del:

Zgledi

5.

Uporaba v statistiki

Statistika na vzorcu $\xi_1, \ldots \xi_n$ je funkcija slučajnega vektorja $(\xi_1, \ldots \xi_n)$. Tu bomo obravnavali statistike, razčlenjene na naslednji način:

$$W = \sum_{\alpha \subseteq \mathbb{N}_n} X_\alpha \tag{5.0.1}$$

kjer je $\mathbb{N}_n = \{1, \ldots n\}$, posamezna slučajna spremenljivka X_α pa je funkcija slučajnih spremenljivk ξ_i, $i \in \alpha$. Seveda bi lahko vzeli kar trivialno razčlenitev $X_\alpha = W$ za $\alpha = \mathbb{N}_n$ in $X_\alpha = 0$, a taka razčlenitev je v večini primerov neuporabna. Mišljeno je, da je razčlenitev skoncentrirana na vsote slučajnih spremenljivk X_α za majhne množice α.

Pomemben primer takih statistik so *U-statistike*, pri katerih so slučajne spremenljivke X_α različne od nič le za množice α določene moči: U-statistika reda r je statistika oblike:

$$W = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} F(\xi_{i_1}, \ldots \xi_{i_r}) \tag{5.0.2}$$

kjer je F simetrična funkcija. Podobne so von Misesove [81] V-statistike, ki so oblike:

$$W = \sum_{1 \le i_1, i_2, \ldots i_r \le n} F(\xi_{i_1}, \ldots \xi_{i_r}) \tag{5.0.3}$$

Osredotočili se bomo na dve vrsti vzorcev $\xi_1, \ldots \xi_n$. Prvi primer je, ko so elementi $\xi_1, \ldots \xi_n$ preprosto neodvisni, drugi primer pa je, ko $\xi_1, \ldots \xi_n$ tvorijo enostavni slučajni vzorec brez ponavljanja, vzet iz končne populacije. Oba primera sta že zelo dobro raziskana, posebej za U- in V-statistike. Centralni limitni izrek za U-statistike vzorcev z neodvisnimi elementi je izpeljal že Hoeffding [67], za V-statistike pa von Mises [81]. Nandi in Sen [84] sta izpeljala centralni limitni izrek za U-statistike vzorcev brez ponavljanja. Dober pregled osnovnih rezultatov je podan v Serflingovi monografiji [120].

Naslednji korak pri normalni aproksimaciji je ocena napake. Ocene Berry–Esseenovega tipa za U-statistike reda dve vzorcev z neodvisnimi elementi sta izpeljala Callaert in Janssen [36]. Različico za vzorce brez ponavljanja sta izpeljala Zhao in Chen [129], ki sta v članku [130] izpeljala tudi ocene Lindebergovega tipa. Rezultati so bili doseženi tudi na področju velikih odklonov (glej npr. Aleškevičienė [1] ter Kokic in Weber [70]) in Edgeworthovega razvoja (glej Kokic in Weber [69] ter Bloznelis in Götze [31]).

Pri študiju statistik (5.0.1) je bila uporabljena tudi Steinova metoda. Tako Rinott in Rotar [105] obravnavata normalno aproksimacijo uteženih in izrojenih U-statistik vzorcev z neodvisnimi elementi, Zhao, Bai, Chao in Liang [131] pa izpeljejo Berry–Esseenov izrek za dvojno indeksirane permutacijske statistike (DIPS), t. j. statistike tipa (5.0.1), pri katerih so X_α različni od nič le za množice α moči dve, ξ_i pa tvorijo enostavni slučajni vzorec brez ponavljanja. Avtorjeva prispevka [97] in [94] obravnavata statistike (5.0.1) v razmeroma splošni obliki: prvi izpelje ocene Lindebergovega tipa v več dimenzijah, a za gladke testne funkcije, drugi pa obravnava velike odklone.

Čeprav so statistike (5.0.1) že dodobra raziskane, je, kolikor je avtorju znano, še vedno kar nekaj stvari, ki so vredne obravnave. Večina dosedanjih rezultatov je izpeljana za statistike, ki so *simetrične* statistike slučajnih spremenljivk $\xi_1, \ldots \xi_n$, ki imajo vrednosti v realnih številih, močnejši rezultati pa so razdelani v glavnem le za U- in V-statistike, pa še to v glavnem le reda dve. Nobena od teh omejitev za Steinovo metodo ni bistvena ovira. Poleg tega se pri obravnavi statistik (5.0.1) večinoma uporabljajo *Hoeffdingove razčlenitve*, pri katerih morajo biti vsote $W^{(r)} := \sum_{|\alpha|=r} X_\alpha$ med seboj ortogonalne. Videli bomo, da pri Steinovi metodi to ni potrebno, kar obravnavo znatno olajša. Skratka, uporaba Steinove metode v statistiki po avtorjevem mnenju nikakor ni izčrpana do konca.

V tem delu se bomo omejili le na ocene Berry–Esseenovega tipa za primer, ko so statistike omejene. To bomo storili z uporabo izreka 4.2.1. Za Lipschitzeve testne funkcije bi lahko z uporabo izrekov 3.9.1 in 3.10.5 izpeljali tudi ocene za neomejene statistike, natančneje ocene, ki bi se izražale s tretjimi momenti, in ocene Lindebergovega tipa. Prav tako bi lahko ocene posplošili na več dimenzij. Izpeljava sicer ne bi zahtevala nobene posebne dodatne ideje, bila pa bi razmeroma tehnično zahtevna (glej npr. avtorjev prispevek [97]).

Po avtorjevem mnenju bi bilo možno izpeljati tudi ocene Berry–Esseenovega tipa, ki bi se izražale s tretjimi momenti, in celo večrazsežne ocene, kot nastopajo v izrekih 4.3.1 in 4.3.2. Na ta način bi dobili široki posplošitvi Callaertovega in Janssenovega [36], Zhaovega in Chenovega [129] ter Zhaovega, Baijevega, Chaovega in Liangovega [131] rezultata. Za ta namen pa bi bilo potrebno tehniko dokazovanja iz razdelkov 4.1 in 4.3 posplošiti na odvisne slučajne spremenljivke. Glavna težava pri tem bi bila formulacija indukcijske hipoteze, prav tako pa bi bilo ocenjevanje tehnično izjemno zahtevno.

5.1 Neodvisno izbiranje

Naj bo W tako kot v (5.0.1), kjer so $\xi_1, \ldots \xi_n$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. V tem primeru gre v resnici za *lokalno odvisnost*, ker sta slučajni spremenljivki X_α in X_β neodvisni, brž ko je $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Vendar pa velikost okolic odvisnosti ni omejena, zato ne bomo mogli uporabiti izrekov, ki smo jih izpeljali posebej za lokalno odvisnost.

Izrek 5.1.1. *Privzemimo, da obstajajo take konstante $B_1, \ldots B_n$, da za vsak $\alpha \subseteq \mathbb{N}_n$ velja $|X_\alpha| \le B_{|\alpha|}$, kjer smo z $|\alpha|$ označili moč množice α. Nadalje naj bo še $\mathbb{E}\, X_\alpha = 0$ in* $\operatorname{var}(W) = 1$.

Tedaj za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja ocena:

$$\left|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)\right| \le \frac{16{,}5\, S_1^2 S_2}{n^2} \tag{5.1.1}$$

kjer je:

$$S_k := \sum_{r=1}^{n} r^k \binom{n}{r} B_r \tag{5.1.2}$$

Dokaz. Uporabili bomo izrek 4.2.1, in sicer na podoben način kot v dokazu izreka 4.2.2 (ker gre prav tako kot v izreku 4.2.2 za lokalno odvisnost). Za vsak $\alpha \subseteq \mathbb{N}_n$ naj bo $\mathcal{J}_\alpha := \{\beta \subseteq \mathbb{N}_n \; ; \; \alpha \cap \beta \neq \emptyset\}$ in za vsak $\beta \in \mathcal{J}_\beta$ postavimo $X_{\alpha\beta} := X_\beta$, tako da je potem $W_\alpha := \sum_{\beta;\alpha\cap\beta=\emptyset} X_\beta$ res neodvisna od X_α. Poleg tega definirajmo $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ kot σ-algebro, ki jo generirajo ξ_γ, $\gamma \in \alpha \cup \beta$. Postavimo še $W_{\alpha\beta} := \tilde{W}_{\alpha\beta} := \sum_{\gamma;(\alpha\cup\beta)\cap\gamma=\emptyset} X_\gamma$ in $\bar{W}_{\alpha\beta} := W$. Ker je število s-elementnih podmnožic množice $\mathbb{N}_n$, ki imajo z dano r-elementno množico neprazen presek, navzgor omejeno z $rs\binom{n}{s}/n$, oceni (4.2.3) in (4.2.4) veljata za:

$$U'_{\alpha\beta} := \frac{|\beta|}{n} S_1, \quad U''_{\alpha\beta} := \tilde{B}_{\alpha\beta} := \frac{|\alpha| + |\beta|}{n} S_1, \quad U_{\alpha\beta} := B_{\alpha\beta} := 0 \tag{5.1.3}$$

Če to zdaj vstavimo v (4.2.5), dobimo:

$$\left|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)\right| \le 2{,}33\, S_1 \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} B_r \sum_{s=1}^{n} \frac{rs(3r+4s)}{n^2} \binom{n}{s} B_s = 2{,}33 \cdot 7 \cdot \frac{S_1^2 S_2}{n^2} \le \frac{16{,}5\, S_1^2 S_2}{n^2} \tag{5.1.4}$$

Izrek je tako dokazan. ∎

Kot poseben primer uporabe izreka 5.1.1 si oglejmo U-statistike. Za $\alpha = \{i_1, i_2, \ldots i_r\}$, kjer so $i_1, \ldots i_r$ sama različna števila, naj bo torej:

$$X_\alpha := F(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots \xi_{i_r}) \tag{5.1.5}$$

kjer je F simetrična funkcija r spremenljivk (funkciji F pravimo *jedro* U-statistike); za $|\alpha| \neq r$ pa naj bo $X_\alpha := 0$. Brez škode za splošnost bomo privzeli, da je $\mathbb{E}\, X_\alpha = 0$. Ni težko preveriti, da se varianca slučajne spremenljivke W izraža s formulo:

$$\operatorname{var}(W) = \binom{n}{r} \sum_{l=1}^{r} \binom{r}{l} \binom{n-r}{r-l} \kappa_l \tag{5.1.6}$$

kjer je $\kappa_l = \mathbb{E}\, X_\alpha X_\beta$, pri čemer je $|\alpha \cap \beta| = l$. Kovariance κ_l so odvisne le od jedra F in porazdelitve slučajnih spremenljivk ξ_i. S pogojevanjem na $\{\xi_i \; ; \; i \in \alpha \cap \beta\}$ se zlahka prepričamo, da je $\kappa_l \ge 0$ za vsak l. Privzemimo še, da je naša U-statistika *neizrojena*, t. j. $\kappa_1 > 0$. Naslednja trditev je različica Callaertovega in Janssenovega [36] rezultata.

Trditev 5.1.2. *Naj bo W U-statistika, ki izpolnjuje zgornje predpostavke, in naj bo $|F| \le B$ za neko konstanto B. Tedaj za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja:*

$$\left|\mathbb{P}\Big(\operatorname{var}(W)^{-1/2} W \le x\Big) - \Phi(x)\right| \le \frac{16{,}5\, B^3}{\kappa_1^{3/2}\sqrt{n}} \tag{5.1.7}$$

Dokaz. Iz izreka 5.1.1 sledi:

$$\left|\mathbb{P}\Big(\operatorname{var}(W)^{-1/2} W \le x\Big) - \Phi(x)\Big)\right| \le \frac{16{,}5\, r^3 B^3}{n^2 \operatorname{var}(W)^{3/2}} \binom{n}{r}^3 \tag{5.1.8}$$

Toda ker je $\kappa_l \ge 0$ za vsak l, iz (5.1.6) sledi:

$$\operatorname{var}(W) \ge r\binom{n}{r}\binom{n-1}{r-1}\kappa_1 = \frac{r^2}{n}\binom{n}{r}^2 \kappa_1 \tag{5.1.9}$$

Od tod pa že sledi naš rezultat. ∎

5.2 Izbiranje brez ponavljanja

Oglejmo si še primer, ko je $\xi_1, \ldots \xi_n$ enostavni vzorec brez ponavljanja, vzet iz populacije velikosti N (opravka bomo torej imeli s *statistikami končnih populacij*). To je posplošitev zgledov iz slučajnih permutacij, ki smo jih navajali v 3. poglavju (le-te dobimo, če je $X_\alpha = 0$, brž ko je $|\alpha| > 1$). Dokazali bomo, da velja podoben rezultat kot izrek 5.1.1.

Izrek 5.2.1. *Če obstajajo take konstante $B_1, \ldots B_n$, da za vsak $\alpha \subseteq \mathbb{N}_n$ velja $|X_\alpha| \le B_{|\alpha|}$, ter če je še $\mathbb{E}\, X_\alpha = 0$ in $\operatorname{var}(W) = 1$, za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja ocena:*

$$\left|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)\right| \le \frac{159\, S_1^2 S_2}{n^2} \tag{5.2.1}$$

kjer so količine S_k definirane tako kot v (5.1.2).

Dokaz. Pišemo lahko $X_\alpha = h_\alpha(\pi)$, kjer je π enakomerno porazdeljena slučajna permutacija na $\mathbb{N}_N = \{1, \ldots N\}$, posamezna funkcija $h_\alpha(\pi)$ pa je odvisna le od zožitve permutacije π na množico α. Razčlenitve bomo konstruirali tako kot v zgledu 3.9.3, t. j. na podlagi *slepih premestitev*. Za vsak $\alpha \subseteq \mathbb{N}_n$ naj bo torej ρ_α slepa premestitev množice α v okviru množice $\mathbb{N}_N$ in cela družina $\{\rho_\alpha\,;\, \alpha \subseteq \mathbb{N}_n\}$ naj bo neodvisna od π. Po trditvi 3.9.3 je tedaj slučajna spremenljivka:

$$W_\alpha := \sum_{\beta \subseteq \mathbb{N}_n} h_\beta(\pi \circ \rho_\alpha^{-1}) = \sum_{\beta \subseteq \mathbb{N}_N} h_{\rho_\alpha(\beta)}(\pi \circ \rho_\alpha^{-1}) \tag{5.2.2}$$

neodvisna od X_α (za primer, ko γ ni podmnožica $\mathbb{N}_n$, postavimo $h_\gamma \equiv 0$). Velja tudi $W - W_\alpha = \sum_{\beta \subseteq \mathbb{N}_N} X_{\alpha\beta}$, kjer je:

$$X_{\alpha\beta} := h_\beta(\pi) - h_{\rho_\alpha(\beta)}(\pi \circ \rho_\alpha^{-1}) \tag{5.2.3}$$

Ni težko preveriti, da je posamezna slučajna spremenljivka $X_{\alpha\beta}$ merljiva glede na σ-algebro $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$, ki jo generirajo zožitev slučajne permutacije π na $\alpha \cup \beta$ in slučajne premestitve ρ_α. Če zdaj vzamemo še eno družino slučajnih premestitev ρ'_β, $\beta \subseteq \mathbb{N}_N$, ki je neodvisna od π in družine $\{\rho_\alpha \,;\, \alpha \subseteq \mathbb{N}_n\}$, je slučajna spremenljivka:

$$W_{\alpha\beta} := \sum_{\gamma \subseteq \mathbb{N}_n} h_\gamma\Big(\pi \circ (\rho'_{\alpha\cup\beta})^{-1}\Big) \tag{5.2.4}$$

neodvisna od $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$.

Po definiciji slepe premestitve se slučajna spremenljivka $h_\gamma(\pi \circ (\rho'_{\alpha\cup\beta})^{-1})$ od slučajne spremenljivke $h_\gamma(\pi)$ razlikuje kvečjemu v primeru, ko je $\gamma \cap (\alpha \cup \beta \cup \rho'_{\alpha\cup\beta}(\alpha\cup\beta)) \neq \emptyset$. Takih množic $\gamma \subseteq \mathbb{N}_n$ dane moči t pa je kvečjemu $2(|\alpha|+|\beta|)t\binom{n}{t}/n$. Podobno se $h_\gamma(\pi \circ (\rho'_{\alpha\cup\beta})^{-1})$ od slučajne spremenljivke $h_\gamma(\pi \circ \rho_\alpha^{-1})$ razlikuje, kvečjemu če je $\gamma \cap (\alpha \cup \rho_\alpha(\alpha) \cup \beta \cup \rho'_{\alpha\cup\beta}(\alpha\cup\beta)) \neq \emptyset$, takih množic moči t pa je kvečjemu $(3|\alpha|+2|\beta|)t\binom{n}{t}/n$. Če torej postavimo še $\tilde{W}_{\alpha\beta} := W_{\alpha\beta}$ in $\bar{W}_{\alpha\beta} := W$, oceni (4.2.3) in (4.2.4) veljata za:

$$U'_{\alpha\beta} := \frac{6|\alpha| + 4|\beta|}{n} S_1, \quad U''_{\alpha\beta} := \tilde{B}_{\alpha\beta} := \frac{4(|\alpha| + |\beta|)}{n} S_1, \quad U_{\alpha\beta} := B_{\alpha\beta} := 0 \tag{5.2.5}$$

Če to zdaj vstavimo v (4.2.5), dobimo $|\,\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)| \le 2{,}33\, S$, kjer je:

$$S := S_1 \sum_{\alpha \subseteq \mathbb{N}_n} \big|h_\alpha(\pi)\big| \sum_{\beta \subseteq \mathbb{N}_N} \big|h_\beta(\pi) - h_{\rho_\alpha(\beta)}(\pi \circ \rho_\alpha^{-1})\big| \,\frac{18|\alpha| + 16|\beta|}{n} \tag{5.2.6}$$

Tudi slučajna spremenljivka $h_\beta(\pi)$ se od slučajne spremenljivke $h_{\rho_\alpha(\beta)}(\pi \circ \rho_\alpha^{-1})$ razlikuje kvečjemu v primeru, ko je $\beta \cap (\alpha \cap \rho_\alpha(\alpha)) \neq \emptyset$; takih množic $\beta \subseteq \mathbb{N}_n$ dane moči s pa je kvečjemu $2|\alpha|s\binom{n}{s}/n$, prav tako tudi tovrstnih množic moči s, za katere je $\rho_\alpha(\beta) \subseteq \mathbb{N}_n$. Sledi:

$$S \le S_1 \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} B_r \sum_{s=1}^{n} \frac{rs(36r + 32s)}{n^2} \binom{n}{s} B_s = \frac{68\, S_1^2 S_2}{n^2} \tag{5.2.7}$$

Izrek je tako dokazan. ∎

Opomba. Konstanta v oceni (5.2.1) je znatno slabša od tiste v oceni (5.1.1). S pazljivejšim ocenjevanjem bi se jo dalo izboljšati, tako da bi v primeru, ko gre n/N proti nič, dobili oceno (5.1.1).

Podobno kot v prejšnjem razdelku si tudi tu oglejmo U-statistike, t. j. primer, ko za $|\alpha| \neq r$ velja $X_\alpha = 0$, za $\alpha = \{i_1, \ldots i_r\}$, kjer so $i_1, \ldots i_r$ sama različna števila, pa velja:

$$X_\alpha = F(\xi_{i_1}, \ldots \xi_{i_r}) \tag{5.2.8}$$

kjer je F simetrična funkcija. Spet bomo brez škode za splošnost privzeli, da je $\mathbb{E}\, X_\alpha = 0$. Varianca naše U-statistike se prav tako izraža s formulo (5.1.6). Razlika pa je v tem, da so lahko kovariance κ_l tudi negativne. Ker je ocenjevanje variance $\mathrm{var}(W)$ *navzdol* razmeroma zapleteno, bomo oceno pri normalni aproksimaciji slučajne spremenljivke W podali v manj eksplicitni obliki: obravnavali bomo *zaporedja* $W^{(k)} = \sum_{|\alpha|=r} X_\alpha^{(k)}$ U-statistik enostavnih slučajnih vzorcev brez ponavljanja velikosti n_k iz populacij velikosti N_k, ki izpolnjujejo še naslednje pogoje:

(P1) Obstaja taka konstanta B, da je $\left|X_\alpha^{(k)}\right| \le B$ za vse k.

(P2) $\liminf_{k\to\infty} \kappa_1^{(k)} > 0$, kjer je $\kappa_l^{(k)} = \mathbb{E}\, X_\alpha^{(k)} X_\beta^{(k)}$, pri čemer je $|\alpha \cap \beta| = l$.

(P3) $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$;

(P4) Obstaja taka konstanta $b < 1$, da za vse k velja $n_k \le bN_k$.

Opomba. Omenili smo še, da so lahko kovariance $\kappa_l^{(k)}$ tudi negativne. Vendar pa sta v primeru, ko je N_k velik, slučajni spremenljivki X_α in X_β pogojno glede na ξ_i, $i \in \alpha \cap \beta$, skoraj neodvisni, tako da navadno res velja $\liminf_{k\to\infty} \kappa_l^{(k)} > 0$.

Opomba. Obravnavati bi se dalo tudi primer, ko je n_k sicer blizu N_k, toda še vseeno $\lim_{k\to\infty}(N_k - n_k) = \infty$. Bloznelis in Götze [30] namreč pokažeta, da se da vsaka U-statistika reda r, ki temelji na enostavnem slučajnem vzorcu brez ponavljanja velikosti n, vzetem iz populacije velikosti N, zapisati kot linearna kombinacija U-statistik reda največ r, ki temeljijo na vzorcih velikosti $N - n$.

Naslednji rezultat bomo dokazali malo kasneje.

Lema 5.2.2. *Pod pogoji* (P1)–(P4) *velja:*

$$\liminf_{k\to\infty} n_k^{-(2r-1)} \operatorname{var}(W^{(k)}) > 0 \tag{5.2.9}$$

Iz izreka 5.2.1 in zgornje leme takoj sledi naslednja različica Zhaovega in Chenovega [129] rezultata.

Trditev 5.2.3. *Naj bo $W^{(k)}$ zaporedje U-statistik, ki temeljijo na enostavnih slučajnih vzorcih brez ponavljanja velikosti n_k, vzetih iz populacij velikosti N_k. Velja naj $\mathbb{E}\, W^{(k)} = 0$ in naj bodo izpolnjeni še pogoji* (P1)–(P4). *Tedaj obstaja taka konstanta C, da za dovolj velike k velja:*

$$\left|\mathbb{P}\Big(\operatorname{var}(W)^{-1/2} W \le x\Big) - \Phi(x)\right| \le \frac{C}{\sqrt{n_k}} \tag{5.2.10}$$

■

Dokaz leme 5.2.2. Pišemo lahko $X_\alpha^{(k)} = F^{(k)}(\pi^{(k)}(\alpha))$, kjer je $\pi^{(k)}$ enakomerno porazdeljena slučajna injekcija iz $\mathbb{N}_{n_k}$ v $\mathbb{N}_{N_k}$. Tedaj velja:

$$\kappa_l^{(k)} = \frac{1}{\binom{N_k}{r}\binom{r}{l}\binom{N_k-r}{r-l}} \sum_{\substack{A,B\subseteq \mathbb{N}_{N_k}\\ |A|=|B|=r\\ |A\cap B|=l}} F^{(k)}(A) F^{(k)}(B) \tag{5.2.11}$$

Ker je $\sum_{B\subseteq \mathbb{N}_{N_k}} F^{(k)}(B) = 0$, velja:

$$\kappa_0^{(k)} = -\frac{1}{\binom{N_k}{r}\binom{N_k-r}{r}} \sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{A,B\subseteq \mathbb{N}_{N_k}\\ |A|=|B|=r\\ |A\cap B|=l}} F^{(k)}(A) F^{(k)}(B) = -\sum_{l=1}^{r} \sum_{\substack{A,B\subseteq \mathbb{N}_{N_k}\\ |A|=|B|=r\\ |A\cap B|=l}} \frac{\binom{r}{l}\binom{N_k-r}{r-l}}{\binom{N_k-r}{r}} \kappa_l^{(k)} \tag{5.2.12}$$

Torej velja:

$$\operatorname{var}\Big(W^{(k)}\Big) = \binom{n_k}{r} \sum_{l=1}^{r} \left[\binom{r}{l}\binom{n_k - r}{r - l} - \frac{\binom{n_k-r}{r}\binom{r}{l}\binom{N_k-r}{r-l}}{\binom{N_k-r}{r}} \right] \kappa_l^{(k)} \tag{5.2.13}$$

Preprost račun pokaže, da lahko to prepišemo na naslednji način:

$$\operatorname{var}\Big(W^{(k)}\Big) = \binom{n_k}{r}\binom{n_k - r}{r - 1}\left(r\, \frac{N_k - n_k}{N_k - 2r + 1}\, \kappa_1^{(k)} + R_k \right) \tag{5.2.14}$$

kjer je:

$$R_k = \sum_{l=2}^{r} \frac{\binom{r}{l}\binom{r-1}{l-1}}{\binom{n_k-2r+l}{l-1}} \left[1 - \frac{\binom{n_k-2r+l}{l}}{\binom{N_k-2r+l}{l}} \right] \kappa_l^{(k)} \tag{5.2.15}$$

pod pogojem, da je $n_k > 2r - 1$. Ker je $\left|\kappa_l^{(k)}\right| \le B^2$, lahko ocenimo:

$$|R_k| \le \sum_{l=2}^{r} \frac{r!(r-1)!}{l!\big[(r-l)!\big]^2}\, \frac{B^2}{(n_k - 2r + 1)^{l-1}} \tag{5.2.16}$$

Ker je $\liminf_{k\to\infty} \kappa_1^{(k)} > 0$, obstaja tak $a > 0$, da za dovolj velike k velja $\kappa_1^{(k)} > a$. Iz (5.2.14) in (5.2.16) tako sledi:

$$\begin{aligned} \operatorname{var}\Big(W^{(k)}\Big) \ge {} & \frac{a(1-b)}{\big[(r-1)!\big]^2}(n_k - 2r + 1)^{2r-1} - \\ & - \sum_{l=2}^{r} \frac{B^2}{l!\big[(r-l)!\big]^2}(n_k - 2r + 1)^{2r-l} \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

Od tod pa že sledi naš rezultat. ∎

6.

Statistike na grafih

6.1 Število povezav s krajiščema iste barve

Naj bo Γ neusmerjen D-regularen graf z N oglišči (t. j. vsako oglišče ima natanko D sosedov, pri čemer oglišče samo ni vključeno). Oglišča grafa slučajno in neodvisno pobarvamo z barvami iz končne ali števno neskončne množice C, pri čemer posamezno oglišče pobarvamo z i-to barvo z verjetnostjo p_i ($\sum_{i \in C} p_i = 1$). Želeli bo oceniti napako pri normalni aproksimaciji slučajne spremenljivke W, ki predstavlja število povezav, ki imajo obe krajišči iste barve.

Širši problem (večrazsežno normalno aproksimacijo slučajnega vektorja, katerega i-ta komponenta predstavlja število povezav, katerih obe krajišči sta i-te barve) obravnavata Goldsteinov in Rinottov [63] ter Rinottov in Rotarjev članek [104]. V prvem članku so podane ocene za gladke testne funkcije, v drugem pa ocene podobnega tipa kot v izreku 4.3.2, le z dodatnim faktorjem $\ln n$ in neraziskano odvisnostjo konstante od dimenzije. Še širše zastavljen problem pa obravnava tudi Goldstein [61].

Izračunajmo najprej matematično upanje in varianco slučajne spremenljivke W. Pišimo $W = \sum_{e \in \mathcal{E}(\Gamma)} X_e$, kjer je $\mathcal{E}(\Gamma)$ množica vseh povezav grafa Γ, slučajna spremenljivka X_e pa je enaka ena, če sta krajišči povezave e iste barve, sicer pa nič. Očitno je $\mathbb{E}\, X_e = \sum_{i \in C} p_i^2$. Označimo:

$$S_k := \sum_{i \in C} p_i^k \tag{6.1.1}$$

Ker ima graf Γ zaradi regularnosti natanko $ND/2$ povezav, velja:

$$\mathbb{E}\, W = \frac{NDS_2}{2} \tag{6.1.2}$$

Očitno za vsak $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ velja $\operatorname{var}(X_e) = S_2 - S_2^2$; za različni povezavi e in f, ki imata skupno krajišče, pa velja $\operatorname{cov}(X_e, X_f) = S_3 - S_2^2$. Ker spet zaradi regularnosti za vsako povezavo obstaja natanko $2(D-1)$ povezav, ki so od dane povezave različne, a imajo z njo skupno krajišče, od tod sledi:

$$\operatorname{var}(W) = \frac{ND}{2}\Big[S_2 - S_2^2 + 2(D-1)\big(S_3 - S_2^2\big)\Big] \tag{6.1.3}$$

Očitno je $S_2 \geq S_3$. Torej velja:

$$\operatorname{var}(W) \geq \frac{ND(2D-1)(S_3 - S_2^2)}{2} \tag{6.1.4}$$

Opomba. Desna stran v oceni (6.1.4) je vedno nenegativna, saj iz Cauchy–Schwarzeve neenačbe sledi:

$$S_2 = \sum_{i \in C} p_i^2 = \sum_{i \in C} p_i^{1/2} p_i^{3/2} \leq \left(\sum_{i \in C} p_i\right)^{1/2} \left(\sum_{i \in C} p_i^3\right)^{1/2} = S_3^{1/2} \tag{6.1.5}$$

Enakost velja natanko tedaj, ko vsa oglišča z verjetnostjo ena pobarvamo z eno samo barvo.

Slučajne spremenljivke X_e so lokalno odvisne v skladu z definicijo iz razdelka 3.5.3, in sicer sta povezavi $e, f \in \mathcal{E}(\Gamma)$ v grafu odvisnosti sosedni, če imata skupno krajišče. Vsaka povezava $e \in \mathcal{E}(\Gamma)$ ima torej kot oglišče v grafu odvisnosti s samo seboj vred natanko $2D - 1$ sosed. Iz izreka 4.2.2 tako dobimo:

$$\left|\mathbb{P}\Big(\operatorname{var}(W)^{-1/2}(W - \mathbb{E}\, W) \leq x\Big) - \Phi(x)\right| \leq \frac{33(S_2 - S_2^2)}{\sqrt{N}\left(S_3 - S_2^2\right)^{3/2}} \tag{6.1.6}$$

6.2 Lokalni maksimumi

Naj bo Γ neusmerjen graf na n ogliščih, ki jih slučajno uredimo po velikosti, pri čemer so vse razporeditve enako verjetne. Z drugimi besedami, naj bo π enakomerno porazdeljena slučajna permutacija na $\mathbb{N}_n := \{1, \ldots n\}$. Želeli bi oceniti napako pri normalni aproksimaciji slučajne spremenljivke W, ki označuje število lokalnih maksimumov slučajne permutacije π, t. j. število vseh oglišč i, za katere je $\pi(i) > \pi(j)$, brž ko je oglišče j sosedno oglišču i.

Normalno aproksimacijo števila lokalnih maksimumov obravnavajo Baldi, Rinott in Stein [4], Goldstein [61] ter Chen in Shao [41], vsi s pomočjo Steinove metode.

Pišemo lahko $W = \sum_{i \in \mathcal{I}} X_i$, kjer je $\mathcal{I}$ množica oglišč grafa Γ, slučajna spremenljivka X_i pa je enaka ena, če je v i lokalni maksimum, sicer pa nič. Slučajne spremenljivke X_i so lokalno odvisne: če z $\delta(i, j)$ označimo grafovsko razdaljo med ogliščema i in j, t. j. minimalno število povezav, ki jih moramo prehoditi, da pridemo od i do j, sta nabora slučajnih spremenljivk $\{X_i\,;\, i \in A\}$ in $\{X_j\,;\, j \in B\}$ neodvisna, brž ko za poljubna $i \in A$ in $j \in B$ velja $\delta(i, j) > 2$. To je posledica znanega dejstva, da za poljubne različne indekse $i_1, \ldots i_r$ in $j_1, \ldots j_s$ velja, da je slučajni vektor $(\pi(i_1), \ldots \pi(i_r))$ neodvisen od dogodka, da je $\pi(j_1) < \pi(j_2) < \cdots < \pi(j_s)$.

Če z D označimo maksimalno število sosedov posameznega oglišča skupno z njim samim, iz izreka 4.2.2 dobimo naslednjo oceno:

$$\left|\mathbb{P}\Big(\operatorname{var}(W)^{-1/2}(W - \mathbb{E}\, W) \leq x\Big) - \Phi(x)\right| \leq \frac{16{,}5\, D^2(D-1)^2}{\operatorname{var}(W)^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i) \tag{6.2.1}$$

Izračunati in oceniti moramo še matematično upanje in varianco. Omejili se bomo le na primer, ko je graf Γ regularen (torej $(D-1)$-regularen). V tem primeru je očitno $\mathbb{E}\,X_i = 1/D$ in $\operatorname{var}(X_i) = (D-1)/D^2$. Izračun variance cele vsote W pa je nekoliko težji.

Lema 6.2.1. *Pri zgornjih pogojih velja:*

$$\operatorname{var}(W) = \sum_{i,j;\delta(i,j)=2} \frac{s(i,j)}{D^2(2D - s(i,j))} \geq \tag{6.2.2}$$

$$\geq \frac{n(D-1)(D-2) - 6T}{2D^3} \tag{6.2.3}$$

kjer smo z $s(i,j)$ označili število skupnih sosedov oglišč i in j (brez oglišč i in j samih), s T pa število trikotnikov v grafu.

Iz ocene (6.2.1) in zgornje leme po krajšem računu dobimo, da za $D > 2$ velja:

$$\left|\mathbb{P}\Big(\operatorname{var}(W)^{-1/2}(W - \mathbb{E}\,W) \leq x\Big) - \Phi(x)\right| \leq \frac{47D^{9/2}}{\sqrt{n}} \left(\frac{D-1}{D-2}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{6T}{n(D-1)(D-2)}\right)^{-3/2} \tag{6.2.4}$$

Opomba. Primer, ko je $D = 2$, je trivialen, saj je tak graf unija nepovezanih daljic in število lokalnih maksimumov je konstantno.

Dokaz leme 6.2.1. Zaradi lokalne odvisnosti lahko pišemo:

$$\operatorname{var}(W) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \operatorname{var}(X_i) + \sum_{i,j;\delta(i,j)=1} \operatorname{cov}(X_i, X_j) + \sum_{i,j;\delta(i,j)=2} \operatorname{cov}(X_i, X_j) \tag{6.2.5}$$

Očitno je $\operatorname{var}(X_i) = (D-1)/D^2$. Če je $\delta(i,j) = 1$, torej če sta točki i in j različni in sosedni, ne moreta biti obe hkrati lokalna maksimuma. Torej je $\mathbb{E}\,X_iX_j = 0$ oz. $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = -1/D^2$. Po krajšem računu tako dobimo:

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} \operatorname{var}(X_i) + \sum_{i,j;\delta(i,j)=1} \operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0 \tag{6.2.6}$$

Kovarianco moramo izračunati le še za primer, ko je $\delta(i,j) = 2$. Za ta primer moramo torej izračunati verjetnost, da sta oglišči i in j obe lokalna maksimuma. To bo dvakratna verjetnost dogodka, da sta oglišči i in j obe lokalna maksimuma ter še $\pi(i) < \pi(j)$. Označimo s C množico skupnih sosedov oglišč i in j, z A množico oglišč, ki so sosedna i, ne pa tudi j, z B pa množico oglišč, ki so sosedna j, ne pa tudi i. Zamislimo si, da permutacijo π, t. j. vrstni red oglišč, konstruiramo tako, da najprej določimo vrstni red oglišč iz $A \cup C$, nato mednje slučajno vrinemo oglišči i in j, nakar vrinemo še B in preostala oglišča. Vrstni red oglišč iz $A \cup C$ je lahko poljuben. Nato mora oglišče i priti pred $A \cup C$, oglišče j pa pred i. Verjetnost takega dogodka je $1/D(D+1)$. Naslednje oglišče iz B mora priti za j, pogojna verjetnost tega dogodka je $(D+1)/(D+2)$. Še naslednje mora prav tako priti za j, pogojna verjetnost je zdaj $(D+2)/(D+3)$. Pogojna verjetnost za zadnje oglišče iz B je enaka $(2D-s(i,j)-1)(2D-s(i,j))$, za preostala oglišča pa je vseeno, kam pridejo. Ko vse skupaj zmnožimo, dobimo, da je verjetnost dogodka, da sta oglišči i in j obe lokalna maksimuma, enaka $2/(D(2D-s(i,j)))$. Po krajšem računu sledi:

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = \frac{s(i,j)}{D^2(2D - s(i,j))} \tag{6.2.7}$$

od koder dobimo (6.2.2). Ocenimo $\operatorname{var}(W) \geq S/(2D^3)$, kjer je:

$$S := \sum_{i,j;\delta(i,j)=2} s(i,j) = \sum_{i,k,j} \mathbf{1}\Big(i \sim j \sim k,\ \text{oglišča } i, j, k \text{ so različna in ne tvorijo trikotnika}\Big) \tag{6.2.8}$$

kjer smo z $\sim$ označili relacijo sosednosti. Ni težko videti, da je $S = n(D-1)(D-2) - 6T$ in lema je dokazana. ∎

6.3 Nasheva ravnovesja

Denimo, da p igralcev igra igro, v kateri vsak izmed njih lahko igra z eno izmed s t. i. čistih strategij. Označimo z $\mathbf{i} = \{i_1, \ldots i_p\} \in \mathbb{N}_s^p$, kjer je $\mathbb{N}_s = \{1, \ldots s\}$, vektor njihovih strategij, z $V_{\mathbf{i}}^{(k)}$ pa dobiček k-tega igralca pri danem vektorju strategij $\mathbf{i}$. Pravimo, da je v $\mathbf{i}$ doseženo *Nashevo ravnovesje*, če za vsak vektor $\mathbf{j} = (i_1, \ldots i_{k-1}, j, i_{k+1}, \ldots i_p)$, $j \in \mathbb{N}_s$, in za vse $k \in \mathbb{N}_p$ velja $V_{\mathbf{i}}^{(k)} \geq V_{\mathbf{j}}^{(k)}$. Tovrstna ravnovesja je Nash uvedel v člankih [85] in [86] (glej tudi npr. Černe [44]).

Tu bomo obravnavali igre s slučajnimi dobitki, in sicer takimi, da so vektorji dobičkov $V_{\mathbf{i}} = \left(V_{\mathbf{i}}^{(1)}, \ldots V_{\mathbf{i}}^{(p)}\right)$, $\mathbf{i} \in \mathbb{N}_s^p =: \mathcal{I}$, neodvisni in enako porazdeljeni. Zanimala nas bo porazdelitev števila Nashevih ravnovesij. Asimptotično obnašanje porazdelitve tega števila izčrpno obravnavata Rinott in Scarsini [108]. Tu bomo povzeli enega izmed njunih rezultatov.

Naj bo torej W število Nashevih ravnovesij. Pišimo $W = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{I}} X_{\mathbf{i}}$, kjer je posamezna slučajna spremenljivka $X_{\mathbf{i}}$ enaka ena, če je v $\mathbf{i}$ doseženo Nashevo ravnovesje, sicer pa nič. Podobno kot v prejšnjem razdelku so slučajne spremenljivke $X_{\mathbf{i}}$ lokalno odvisne glede na graf odvisnosti, v katerem sta vektorja strategij sosedna, če se razlikujeta v največ dveh komponentah. Graf odvisnosti ima s^p oglišč in je regularen: vsako oglišče ima (brez njega samega) natanko $(s-1)p + \binom{p}{2}(s-1)^2 \leq (sp)^2 - 1$ sosedov.

Označimo s Q verjetnost, da je v posameznem vektorju strategij doseženo Nashevo ravnovesje. Tedaj iz izreka 4.2.2 dobimo:

$$\left|\mathbb{P}\Big(\operatorname{var}(W)^{-1/2}(W - \mathbb{E}\,W) \leq x\Big) - \Phi(x)\right| \leq \frac{16{,}5\,(sp)^4 s^p Q(1-Q)}{\operatorname{var}(W)^{3/2}} \tag{6.3.1}$$

Rinott in Scarsini [108] nadalje ocenjujeta Q in $\operatorname{var}(W)$ za primer, ko je porazdelitev vektorjev dobičkov $V_{\mathbf{i}}$ večrazsežna normalna z izmenljivimi komponentami. Tako med drugim iz zgornje ocene izpeljeta, da v primeru, ko je produkt sp dovolj velik, komponente vektorjev $V_{\mathbf{i}}$ pa pozitivno korelirane, velja ocena:

$$\left|\mathbb{P}\Big(\operatorname{var}(W)^{-1/2}(W - \mathbb{E}\,W) \leq x\Big) - \Phi(x)\right| \leq \frac{C\,(sp)^4 (6e)^{p/2} (\log s)^{(1+\rho(p^2-1))/(4+4\rho(p-1))}}{s^{\rho p(p-1)/(2+2\rho(p-1))}} \tag{6.3.2}$$

kjer je ρ korelacijski koeficient med posameznima komponentama vektorja dobičkov. Tako lahko za najrazličnejše primere, ko gre *sp* proti neskončno, izpeljemo konvergenco proti standardni normalni porazdelitvi.

7.

Slučajni grafi

7.1 Splošna obravnava

Naj bo Γ neusmerjen slučajni graf z n oglišči, v katerem so dogodki, da sta posamezni dve oglišči sosedni, med seboj neodvisni. Obravnavali bomo statistike na takih grafih, ki so v anglosaksonski terminologiji znane kot *semi-induced properties*: to so statistike, ki so odvisne od povezav, ki izhajajo iz oglišč danih množic $\alpha \subseteq \mathbb{N}_n = \{1, \ldots n\}$. Natančneje, podobno kot v 5. poglavju bomo obravnavali statistike oblike:

$$W = \sum_{\alpha \subseteq \mathbb{N}_n} h_\alpha(\Gamma) \tag{7.1.1}$$

kjer je, kot že rečeno, funkcija $h_\alpha(\Gamma)$ odvisna le od povezav iz množice J_α, ki jo definiramo kot množico povezav, ki izhajajo iz množice α, in povezav med oglišči iz α.

Statistike zgornjega tipa izčrpno obravnavajo Barbour, Karoński in Ruciński [7], ki s pomočjo Steinove metode in razčlenitev drugega reda (tistih iz razdelka 3.9) izpeljejo oceno napake pri normalni aproksimaciji slučajne spremenljivke W za Lipschitzeve testne funkcije. Oceno nato uporabijo za štetje izoliranih dreves in oglišč z dano stopnjo (vključno z izoliranimi oglišči). Konieczna [71] uporabi rezultat Barbourja, Karońskega in Rucińskega pri štetju oglišč z dano stopnjo v slučajnih podgrafih kocke. Tu pa bomo z uporabo izreka 4.2.1 izpeljali oceno Berry–Esseenovega tipa in jo nato uporabili za stopnje oglišč (kar bo vključevalo tudi štetje oglišč z dano stopnjo). Rezultati bodo uporabni predvsem za primer, ko sta posamezni oglišči sosedni z verjetnostjo reda $1/n$.

Izrek 7.1.1. *Naj obstajajo take konstante $B_1, \ldots B_n$, da za vsak $\alpha \subseteq \mathbb{N}_n$ velja $|h_\alpha| \le B_{|\alpha|}$, kjer smo z $|\alpha|$ označili moč množice α. Nadalje naj bo še $\mathbb{E}\, X_\alpha = 0$ in* $\operatorname{var}(W) = 1$. *Tedaj za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja ocena:*

$$\Big|\mathbb{P}(W \le x) - \Phi(x)\Big| \le (66 + 569\lambda + 401\lambda^2)\,\frac{S_1^2 S_2}{n^2} \tag{7.1.2}$$

kjer je:

$$S_k := \sum_{r=1}^{n} r^k \binom{n}{r} B_r \tag{7.1.3}$$

$$\lambda := \max_{i\in\mathbb{N}_n} \sum_{j\in\mathbb{N}_n} \mathbb{P}(i \text{ in } j \text{ sosedni}) \tag{7.1.4}$$

Opomba. S pazljivejšim ocenjevanjem bi se dalo konstante znatno izboljšati.

Za dokaz izreka 7.1.1 bomo potrebovali še naslednjo lemo.

Lema 7.1.2. *Naj bo λ tako kot v* (7.1.4). *Tedaj za poljubni množici $\alpha, \beta \subseteq \mathbb{N}_n$ velja:*

$$\mathbb{E}\,|J_\alpha| \le \lambda\,|\alpha| \tag{7.1.5}$$

$$\mathbb{E}\,|J_\alpha|\,|J_\beta| \le (\lambda^2 + \lambda)\,|\alpha|\,|\beta| \tag{7.1.6}$$

Dokaz. Zaradi subaditivnosti je rezultat dovolj dokazati za enoelementne množice. Ocena (7.1.5) je očitna. Dokažimo še drugo neenakost. Pišimo $\alpha = \{j\}$ in $\beta = \{j\}$. Nadalje s p_{ij} označimo verjetnost, da sta oglišči i in j sosedni. Označimo še $u := \sum_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{i,j\}} p_{ik}$ in $v := \sum_{k\in\mathbb{N}_n\setminus\{i,j\}} p_{jk}$. Tedaj velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|J_{\{i\}}|\,|J_{\{j\}}| &= (1 - p_{ij})uv + p_{ij}(1+u)(1+v) = \\ &= uv + p_{ij}(1 + u + v) \le \\ &\le (u + p_{ij})(v + p_{ij}) + p_{ij} \le \\ &\le \lambda^2 + \lambda \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

Tako smo dokazali tudi oceno (7.1.6). ■

Dokaz izreka 7.1.1. Spet bomo uporabili izrek 4.2.1. Pišimo $W = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} X_\alpha$, kjer je $\mathcal{I}$ družina vseh nepraznih podmnožic množice $\mathbb{N}_n$ in $X_\alpha = h_\alpha(\Gamma)$. Nadalje za vsak $\alpha \subseteq \mathbb{N}_n$ z Γ_α označimo slučajni graf, ki ga dobimo tako, da grafu Γ odstranimo vse povezave iz J_α. Očitno je graf Γ_α neodvisen od X_α, zato to velja tudi za slučajno spremenljivko:

$$W_\alpha := \sum_{\beta\in\mathcal{I}} h_\beta(\Gamma_\alpha) \tag{7.1.8}$$

Tako lahko definiramo $\mathcal{J}_\alpha := \mathcal{I}$ in $X_{\alpha\beta} := h_\beta(\Gamma) - h_\beta(\Gamma_\alpha)$. Nadalje definirajmo $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ kot σ-algebro, ki jo generirajo vse povezave iz J_α. Postavimo:

$$W_{\alpha\beta} := \tilde{W}_{\alpha\beta} := \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} h_\gamma(\Gamma_{\alpha\cup\beta}), \quad \bar{W}_{\alpha\beta} := \sum_{\gamma\cap(\alpha\cup\beta)\neq\emptyset} h_\gamma(\Gamma) + \sum_{\gamma\cap(\alpha\cup\beta)=\emptyset} h_\gamma(\Gamma_{\alpha\cup\beta}) \tag{7.1.9}$$

Slučajni spremenljivki $h_\beta(\Gamma)$ in $h_\beta(\Gamma_\alpha)$ se razlikujeta kvečjemu v primeru, ko množica β bodisi seka množico α bodisi obstaja oglišče iz β, ki je sosedno kakemu oglišču iz α.

Takih množic β dane moči r pa je največ $(|\alpha| + |J_\alpha|)r\binom{n}{r}/n$. Zato oceni (4.2.3) in (4.2.4) veljata za:

$$U'_{\alpha\beta} := \frac{2\Big(|\beta| + |J_\beta|\Big)}{n} S_1,\; U''_{\alpha\beta} := \frac{2\Big(|\alpha| + |\beta| + |J_{\alpha\cup\beta}|\Big)}{n} S_1,\; \tilde{B}_{\alpha\beta} := \frac{2\Big(|\alpha| + |\beta|\Big)}{n} S_1,\; U_{\alpha\beta} := \frac{2\,|J_{\alpha\cup\beta}|}{n} S_1 \tag{7.1.10}$$

Če postavimo $B_{\alpha\beta} := 4\lambda(|\alpha| + |\beta|)S_1/n$, iz ocene (7.1.5) sledi, da je $B_{\alpha\beta} \geq 2\,\mathbb{E}\,U_{\alpha\beta}$. Po neenačbi Markova je torej $\mathbb{P}(U_{\alpha\beta} \leq B_{\alpha\beta}) \geq 1/2$. Če zdaj vse skupaj vstavimo v oceno (4.2.5), dobimo:

$$\Big|\mathbb{P}(W \leq x) - \Phi(x)\Big| \leq 2{,}33\, S \tag{7.1.11}$$

kjer je:

$$S = \frac{4S_1}{n^2} \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} B_{|\alpha|} \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \mathbb{E}(|\alpha| + |J_\alpha|)\,|\beta|\,B_{|\beta|}\Big[3|\alpha| + 4|\beta| + |J_\beta| + 5|J_{\alpha\cup\beta}| + 16\lambda(|\alpha| + |\beta|)\Big] \tag{7.1.12}$$

Zdaj pa uporabimo lemo 7.1.2. Po nekaj računanja dobimo:

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{4S_1}{n^2} \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} B_r \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} B_s \Big[(1+\lambda) rs\Big(3r + 4s + \lambda(21r + 22s)\Big) + \lambda rs(5r + 6s)\Big] = \\ &= \frac{4S_1^2 S_2}{n^2}\,(7 + 61\lambda + 43\lambda^2) \end{aligned} \tag{7.1.13}$$

Od tod pa že sledi ocena 7.1.1. ∎

7.2 Stopnje oglišč

Naj bo dan slučajni graf Γ tako kot v prejšnjem razdelku, le da se bomo omejili na primer, ko so vse verjetnosti, da sta posamezni oglišči sosedni, enake denimo p. Z drugimi besedami, velja $\Gamma = K(n, p)$. Preučevali bomo statistike stopenj oglišč za primer, ko gre n proti neskončno, p pa proti nič. Označimo z δ_i stopnjo oglišča i v grafu Γ, t. j. število njenih sosedov brez njega samega. Nadalje naj bo $h\colon\, \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ omejena funkcija in naj bo:

$$W := \sum_{i=1}^{n} h(\delta_i) \tag{7.2.1}$$

Izračunajmo matematično upanje in varianco slučajne spremenljivke W. Stopnje δ_i so očitno porazdeljene binomsko $\mathrm{Bi}(n-1, p)$. Če z $B_{m,p}$ označimo slučajno spremenljivko, ki je porazdeljena binomsko $\mathrm{Bi}(m, p)$, torej očitno velja $\mathbb{E}\,W = n\,\mathbb{E}\,h(B_{n-1,p})$.

Naj bo $i \neq j$. Tedaj velja:

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}\Big(h(\delta_i), h(\delta_j)\Big) &= (1-p)\Big[\mathbb{E}\,h(B_{n-2,p})\Big]^2 + p\Big[\mathbb{E}\,h(1 + B_{n-2,p})\Big]^2 - \\ &\quad - \Big[(1-p)\,\mathbb{E}\,h(B_{n-2,p}) + p\,\mathbb{E}\,h(1 + B_{n-2,p})\Big]^2 = \\ &= p(1-p)\Big[\mathbb{E}\,h(B_{n-2,p}) - \mathbb{E}\,h(1 + B_{n-2,p})\Big]^2 \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

Torej velja:

$$\operatorname{var}(W) = n\Big\{\operatorname{var}\big(h(B_{n-1,p})\big) + \lambda(1-p)\big[\mathbb{E}\,h(B_{n-2,p}) - \mathbb{E}\,h(1+B_{n-2,p})\big]^2\Big\} \tag{7.2.3}$$

kjer smo označili $\lambda := (n-1)p$ (kar je isto kot v (7.1.4)).

Ko gre p proti nič, se binomska porazdelitev približuje Poissonovi. Najprej velja $\mathbb{E}\,h(B_{n-1,p}) - \mathbb{E}\,h(B_{n-2,p}) = p(\mathbb{E}\,h(1+B_{n-2,p}) - \mathbb{E}\,h(B_{n-2,p}))$. Če je torej $|h| \le A$, velja $\big|\mathbb{E}\,h(B_{n-1,p}) - \mathbb{E}\,h(B_{n-2,p})\big| \le 2Ap$. Poleg tega iz ocene (1.3.23) sledi, da je tudi $\big|\mathbb{E}\,h(B_{n-1,p}) - \mathbb{E}\,h(\Pi)\big| \le 2Ap$, kjer smo s Π označili slučajno spremenljivko, porazdeljeno po Poissonu $\mathrm{Po}(\lambda)$. Torej velja:

$$\operatorname{var}(W) = n\Big\{\operatorname{var}\big(h(\Pi)\big) + \lambda\big[\mathbb{E}\,h(\Pi) - \mathbb{E}\,h(1+\Pi)\big]^2 + O(p)\Big\} \tag{7.2.4}$$

Če zdaj uporabimo izrek 7.1.1, dobimo, da za dovolj velike n in dovolj majhne p velja ocena:

$$\Big|\mathbb{P}\big(\operatorname{var}(W)^{-1/2}(W - \mathbb{E}\,W) \le x\big) - \Phi(x)\Big| \le \frac{C(1+\lambda^2)}{\sqrt{n}\Big\{\operatorname{var}\big(h(\Pi)\big) + \lambda\big[\mathbb{E}\,h(\Pi) - \mathbb{E}\,h(1+\Pi)\big]^2\Big\}^{3/2}} \tag{7.2.5}$$

kjer je C konstanta, odvisna le od funkcije h.

III. del:

Dodatki

Dodatek A

Konvergenca porazdelitev

Dostikrat nas zanima, ali zaporedje porazdelitev $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na danem merljivem prostoru $(S, \mathcal{S})$ konvergira k dani porazdelitvi μ. Za ta namen pa moramo na prostoru $\mathrm{Pr}(S, \mathcal{S})$ vseh porazdelitev na $(S, \mathcal{S})$ najprej definirati topologijo. To bomo storili tako, da bomo porazdelitve "otipavali" s primernimi *testnimi funkcijami*: porazdelitvi μ in ν sta si "blizu", če sta za primeren nabor merljivih testnih funkcij f blizu integrala $\mu(f)$ in $\nu(f)$, kjer označimo:

$$\mu(f) := \int f \, \mathrm{d}\mu \tag{A.0.1}$$

Opomba. Če so testne funkcije neomejene, z njimi ne moremo "otipati" vsh možnih porazdelitev. V tem primeru moramo pač $\mathrm{Pr}(S, \mathcal{S})$ zamenjati s primernim podprostorom.

V celotnem dodatku bo $(S, \mathcal{S})$ merljiv prostor, z $\mathcal{M}$ pa bomo označevali podprostor prostora $\mathrm{Pr}(S, \mathcal{S})$.

A.1 Metrike iz testnih funkcij

Eden od načinov, kako na podlagi prostora testnih funkcij, ki ga označimo z $\mathcal{F}$, konstruirati topologijo na $\mathcal{M}$, je, da definiramo kar metriko:

$$d(\mu, \nu) = \sup_{f\in\mathcal{F}} |\nu(f) - \mu(f)| \tag{A.1.1}$$

Preveriti moramo, ali je desna stran sploh dobro definirana in ali predstavlja metriko. Najprej mora za poljuben $\mu \in \mathcal{M}$ in vsak $f \in \mathcal{F}$ veljati $\mu(|f|) < \infty$. S tem seveda še ni rečeno, da je $d(\mu, \nu) < \infty$. Pa recimo, da to drži. Od aksiomov metrike je potem simetrija očitna, tudi trikotniško neenakost preverimo brez težav, zatakne pa se še pri preverjanju, ali iz $d(\mu, \nu) = 0$ sledi $\mu = \nu$. Če želimo, da bo veljalo tudi to, mora biti razred $\mathcal{F}$ dovolj bogat. Brez težav dokažemo naslednjo trditev.

Trditev A.1.1. *Naj bo d tako kot v* (A.1.1) *in naj bo $d(\mu, \nu) < \infty$ za poljubna μ in ν. Tedaj je d metrika natanko tedaj, ko testne funkcije iz $\mathcal{F}$ ločijo porazdelitve iz $\mathcal{M}$, t. j. kadar za poljubni porazdelitvi $\mu \neq \nu \in \mathcal{M}$ obstaja taka funkcija $f \in \mathcal{F}$, da je $\mu(f) \neq \nu(f)$.* ∎

Naslednji rezultat pa nam da zadosten pogoj, da $\mathcal{F}$ loči porazdelitve. Označimo z $\operatorname{Lin}\mathcal{F}$ linearno ogrinjačo razreda $\mathcal{F}$.

Trditev A.1.2. *Naj bo $\mathcal{F}$ razred merljivih funkcij na $(S, \mathcal{S})$ in naj bo $\mathcal{P}$ π-sistem, ki generira $\mathcal{S}$, in naj za vsak $A \in \mathcal{P}$ obstaja enakomerno omejeno zaporedje funkcij $f_n \in \operatorname{Lin}\mathcal{F}$, ki po točkah konvergira k indikatorju $\mathbf{1}_A$ množice A. Tedaj $\mathcal{F}$ loči vse porazdelitve iz* $\Pr(S, \mathcal{S})$.

Dokaz. Naj bosta $\mu, \nu \in \Pr(S, \mathcal{S})$ in naj bo $\mu(f) = \nu(f)$ za vsak $f \in \mathcal{F}$. Zaradi linearnosti to potem velja tudi za vse $f \in \operatorname{Lin}\mathcal{F}$. Iz izreka o dominirani konvergenci takoj dobimo, da je $\mu(A) = \nu(A)$ za vsak $A \in \mathcal{P}$. Družina vseh množic A, za katere je $\mu(A) = \nu(A)$, pa je λ-sistem. Pravkar smo dokazali, da ta λ-sistem vsebuje π-sistem $\mathcal{P}$, ki generira $\mathcal{S}$. Po Dynkinovi lemi potem ta λ-sistem tudi vsebuje $\mathcal{S}$, zato je $\mu = \nu$. ■

A.2 Metrika totalne variacije

Razred testnih funkcij, ki ga lahko definiramo v vsakem primeru, so seveda indikatorji. Le-ta nam določa *metriko totalne variacije*. Za dani porazdelitvi μ in ν torej definiramo:

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) := \sup_{A \in \mathcal{S}} |\nu(A) - \mu(A)| \tag{A.2.1}$$

Očitno indikatorji množic ločijo vse porazdelitve, torej je d_{TV} res metrika. Definiramo jo lahko še malce drugače, in sicer tako, da za testne funkcije vzamemo kar vse merljive funkcije, ki slikajo v $[0, 1]$ – glej trditev A.4.6.

Metrika totalne variacije je zelo močna. Primerna je predvsem za porazdelitve, ki so skoncentrirane na določeni števni množici: Le Camov izrek (izrek 1.3.2) nam da oceno napake pri Poissonovi aproksimaciji v metriki totalne variacije. V splošnem pa je ta metrika navadno premočna, kar ilustrirata naslednja dva zgleda.

Zgled A.2.1. Naj bo S topološki prostor z Borelovo σ-algebro in zaporedje točk x_n, ki niso enake x, konvergira k x. Tedaj zaporedje Diracovih mer δ_{x_n} ne konvergira k δ_x. Torej niti skoraj gotova konvergenca (ki je zelo močna) ne implicira konvergence metriki totalne variacije. □

Zgled A.2.2. Naj bo $0 < p < 1$ in naj bodo $X_n \sim \mathrm{Bi}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, binomsko porazdeljene slučajne spremenljivke. Definirajmo:

$$Y_n := \operatorname{var}(X_n)^{-1/2}\Big(X_n - EX_n\Big) = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{A.2.2}$$

Tedaj zaporedje slučajnih spremenljivk Y_n v metriki totalne variacije ne konvergira k standardni normalni porazdelitvi $\mathrm{N}(0, 1)$. Če namreč označimo $A := \{k/\sqrt{n}\,;\, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$, za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\mathbb{P}(Y_n \in A) = 1$, medtem ko je $\mathrm{N}(0, 1)\{A\} = 0$. □

V naslednjih razdelkih bomo definirali nekaj topologij in metrik, ki bodo sicer šibkejše od metrike totalne variacije, a še vseeno dovolj močne, da bo konvergenca glede nanje nekaj pomenila.

A.3 Šibke topologije v splošnem

V razdelku A.1 smo iz danega razreda testnih funkcij $\mathcal{F}$ konstruirali metriko na prostoru verjetnostnih mer. Ta metrika porodi topologijo, ki jo bomo imenovali *metrična topologija*. Iz razreda $\mathcal{F}$ pa izhaja še ena zelo naravna topologija.

Definicija. Naj bosta množica verjetnostnih mer $\mathcal{M}$ in razred testnih funkcij $\mathcal{F}$ taka, da je $\mu(|f|) < \infty$ za vse $\mu \in \mathcal{M}$ in vse $f \in \mathcal{F}$. *Šibka topologija* na $\mathcal{M}$ glede na $\mathcal{F}$ je najšibkejša topologija, v kateri so funkcionali oblike $\mu \mapsto \mu(f)$ zvezni za vse $f \in \mathcal{F}$. Z drugimi besedami, to je topologija, ki ima za podbazo množice oblike:

$$G(f, U) := \{\nu \in \mathcal{M}\ ;\ \nu(f) \in U\} \tag{A.3.1}$$

kjer je $f \in \mathcal{F}$, U pa je odprta množica v $\mathbb{R}$.

Opomba. Brez težav preverimo, da v tej topologiji za vsak $\mu \in \mathcal{M}$ množice oblike:

$$N(\mu \in \mathcal{M}\ ;\ f_1, \ldots f_n; \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n) := \Big\{\nu\ ;\ |\nu(f_i) - \mu(f_i)| < \varepsilon_i, i = 1, \ldots n\Big\} \tag{A.3.2}$$

kjer je $f_1, \ldots f_n \in \mathcal{F}$ in $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n > 0$, sestavljajo bazični sistem okolic porazdelitve μ. *Od tod dobimo, da v tako definirani topologiji zaporedje porazdelitev μ_n konvergira proti porazdelitvi μ natanko tedaj, ko za vsako funkcijo $f \in \mathcal{F}$ zaporedje $\mu_n(f)$ konvergira proti $\mu(f)$.* Pravimo, da zaporedje porazdelitev μ_n *šibko konvergira* proti μ.

Če pravkar vpeljano topologijo primerjamo z metrično topologijo iz razdelka A.1, dobimo naslednji rezultat.

Trditev A.3.1. *Za dana $\mathcal{M}$ in $\mathcal{F}$ je pripadajoča šibka topologija šibkejša od pripadajoče metrične topologije.*

Dokaz. Označimo s $K(\mu, r)$ odprto kroglo okrog porazdelitve μ s polmerom r. Velja torej $K(\mu, r) = \{\nu\ ;\ d(\mu, \nu) < r\}$. Tedaj je dovolj dokazati, da vsaka množica $N(\mu; f_1, \ldots f_n; \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n)$ vsebuje kakšno odprto krogla oblike $K(\mu, r)$, kjer je $r > 0$. To pa je gotovo res, če postavimo $r := \min\{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n\}$. ■

Metrična topologija, ki jo dobimo iz danega razreda testnih funkcij, je navadno kar strogo močnejša od šibke. To bomo na kratko ilustrirali z naslednjim zgledom.

Zgled A.3.1. Naj bo množica S opremljena s topologijo, v kateri je dobljeni prostor metrizabilen in ni diskreten, $\mathcal{S}$ pa naj bo Borelova σ-algebra. Naj bo $\mathcal{F}$ razred vseh zveznih funkcij $S \to [0, 1]$. Šibki topologiji, ki jo dobimo iz $\mathcal{F}$, pravimo običajna šibka topologija (glej razdelek A.5). Pokažimo še, da $\mathcal{F}$ določa tudi metriko. Ker je prostor metrizabilen, za vsako zaprto množico F obstaja zaporedje funkcij $f_n \in \mathcal{F}$, ki po točkah konvergira k indikatorju $\mathbf{1}_F$ množice $\mathcal{F}$. Po trditvi A.1.2 razred $\mathcal{F}$ loči porazdelitve, torej $\mathcal{F}$ po trditvi A.1.1 določa tudi metriko.

Ker prostor ni diskreten, obstaja taka točka x, da $\{x\}$ ni odprta množica. Zaradi normalnosti obstaja zaporedje točk x_n, različnih od x, ki konvergira proti x. Tedaj zaporedje Diracovih mer δ_{x_n} gotovo šibko konvergira proti δ_x. Po drugi strani pa po Urisonovi lemi za vsak n obstaja funkcija $f \in \mathcal{F}$, za katero je $f(x) = 0$ in $f(x_n) = 1$, zato je tudi $d_{\mathcal{F}}(\delta_x, \delta_{x_n}) = 1$ in zaporedje v metrični topologiji ne konvergira. □

Zgornji zgled nam da dober razlog, zakaj je smiselno obravnavati šibko topologijo: v veliko primerih je metrična topologija premočna.

Za topologijo, ki jo vpeljemo, je vedno pomembno, kakšne lastnosti ima. Naslednja trditev govori o dveh lastnostih, ki ju imajo vsi metrični prostori. Dokaz prepuščamo bralcu.

Trditev A.3.2.

(1) *Topologija, vpeljana s podbazo iz množic v* (A.3.1)*, je Hausdorffova natanko tedaj, ko prostor testnih funkcij $\mathcal{F}$ loči porazdelitve iz $\mathcal{M}$.*

(2) *Če je množica $\mathcal{F}$ števna, topologija zadošča prvemu aksiomu števnosti.*

■

A.4 Zamenjava razreda testnih funkcij

Včasih je ugodno vedeti, kaj se zgodi, če pri metriki, definirani v razdelku A.1, ali šibki topologiji, definirani v razdelku A.3, zamenjamo razred testnih funkcij. Ogledali si bomo tri primere: inkluzijo, linearne kombinacije in limite. Prvi primer, inkluzija, je očiten.

Trditev A.4.1. *Naj bosta $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ razreda testnih funkcij in $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Privzemimo, da je $\mu(|g|) < \infty$ za vse $\mu \in \mathcal{M}$ in vse $g \in \mathcal{G}$.*

(1) *Naj bosta $d_{\mathcal{F}}$ in $d_{\mathcal{G}}$ definirani tako kot v* (A.1.1)*. Če je $d_{\mathcal{F}}$ metrika na $\mathcal{M}$, je to tudi $d_{\mathcal{G}}$ in velja $d_{\mathcal{F}} \le d_{\mathcal{G}}$, torej je metrika $d_{\mathcal{F}}$ enakomerno šibkejša od metrike $d_{\mathcal{G}}$.*

(2) *Šibka topologija, ki jo določa $\mathcal{F}$, je šibkejša od tiste, ki jo določa $\mathcal{G}$.*

■

Trditev A.4.2. *Naj bo $\mathcal{F}$ razred testnih funkcij. Privzemimo, da je $\mu(|f|) < \infty$ za vse $\mu \in \mathcal{M}$ in vse $f \in \mathcal{F}$.*

(1) *Če je:*

$$\bar{\mathcal{F}} = \left\{ \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \,;\, f_i \in \mathcal{F},\ \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \le 1,\ n \in \mathbb{N} \right\} \tag{A.4.1}$$

se metrika, dobljeni po (A.1.1) *iz $\mathcal{F}$, ujema s tisto, dobljeno iz $\bar{\mathcal{F}}$.*

(2) *Šibka topologija, ki jo določa $\mathcal{F}$, se ujema s šibko topologijo, ki jo določa linearna ogrinjača $\operatorname{Lin}\big(\{1\} \cup \mathcal{F}\big)$ razreda $\mathcal{F}$.*

Posledica A.4.3. *Brž ko je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \bar{\mathcal{F}}$, se metrika, dobljena po* (A.1.1) *iz $\mathcal{G}$, ujema z metriko, dobljeno iz $\mathcal{F}$. Podobno, brž ko je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathrm{Lin}\big(\{1\} \cup \mathscr{F}\big)$, se šibka topologija, ki jo določa $\mathcal{G}$, ujema s tisto, ki jo določa $\mathcal{F}$. Med drugim se torej tudi šibka topologija, ki jo določa $\bar{\mathcal{F}}$, ujema s tisto, ki jo določa $\mathcal{F}$.* ∎

Dokaz trditve A.4.2.

(1): Označimo ustrezni metriki z $d_{\mathcal{F}}$ in $d_{\bar{\mathcal{F}}}$ in vzemimo poljubni verjetnostni meri $\mu, \nu \in \mathcal{M}$. Očitno je $d_{\mathcal{F}}(\mu,\nu) \le d_{\bar{\mathcal{F}}}(\mu,\nu)$. Toda za vsak $f \in \bar{\mathcal{F}}$ velja tudi $|\nu(f) - \mu(f)| \le d_{\mathcal{F}}(\mu,\nu)$, torej je tudi $d_{\bar{\mathcal{F}}}(\mu,\nu) \le d_{\mathcal{F}}(\mu,\nu)$.

(2): Dovolj je dokazati, da je šibka topologija, ki jo določa $\mathrm{Lin}\,\mathcal{F}$, šibkejša od tiste, ki jo določa $\mathcal{F}$. Za to pa je dovolj pokazati, da je za vsak $f \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{F}$ in vsako odprto množico $U \subseteq \mathbb{R}$ množica $G(f,U)$, definirana tako kot v (A.3.1), odprta v šibki topologiji, določeni z $\mathcal{F}$. Naj bo torej $f = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \in \mathrm{Lin}\big(\{1\} \cup \mathcal{F}\big)$, kjer je $f_i \in \mathcal{F}$. Če je $\mu \in G(f,U)$, se pravi $\mu(f) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(f_i) \in U$, zaradi zveznosti preslikave $(y_1, \ldots y_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ obstajajo take odprte množice $U_i \subseteq \mathbb{R}$, da je $\mu(f_i) \in U_i$ in da za poljubne $y_i \in U_i$ velja $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \in U$. Sledi $\mu \in \bigcap_{i=1}^n G(f_i, U_i) \subseteq G(f,U)$. To pa pomeni, da je $G(f,U)$ res odprta v šibki topologiji, ki jo določa razred $\mathcal{F}$, in trditev je dokazana. ∎

Trditev A.4.4. *Naj bosta $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ razreda merljivih testnih funkcij na $(S, \mathcal{S})$. Privzemimo, da je $\mu(|f|) < \infty$ za vse $\mu \in \mathcal{M}$ in vse $f \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$.*

(1) *Označimo z $d_{\mathcal{F}}$ in $d_{\mathcal{G}}$ metriki, dobljeni iz $\mathcal{F}$ oziroma $\mathcal{G}$ po* (A.1.1). *Če za vsak $f \in \mathcal{F}$ obstaja tako zaporedje testnih funkcij $f_n \in \mathcal{G}$, da za vsak $\mu \in \mathcal{M}$ velja $\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu(f)$, velja $d_{\mathcal{F}} \le d_{\mathcal{G}}$.*

(2) *Če za vsak $f \in \mathcal{F}$ in vsak $\mu \in \mathcal{M}$ obstajata zaporedji funkcij $f_n^+, f_n^- \in \mathcal{G}$, za kateri velja $f_n^- \le f \le f_n^+$ in $\lim_{n\to\infty} \mu(f_n^+) = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n^-) = \mu(f)$, je šibka topologija na $\mathcal{M}$, določena z $\mathcal{G}$, močnejša od tiste, ki jo določa $\mathcal{F}$.*

Posledica A.4.5. *Če privzamemo predpostavke zgornje leme in še, da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, se tako metriki kot tudi šibki topologiji, dobljeni iz $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$, ujemata.* ∎

Opombi.

(1) Pogoji točke (1) so izpolnjeni, če zaporedje funkcij f_n po točkah konvergira k f in je bodisi monotono bodisi enakomerno omejeno.

(2) Pogoji točke (2) so izpolnjeni, če zaporedji f_n^+ in f_n^- po točkah konvergirata k f in sta bodisi enakomerno omejeni, bodisi je zaporedje f_n^+ padajoče, zaporedje f_n^- pa naraščajoče.

Dokaz trditve A.4.4.

(1): Očitno.

(2): Dovolj je za vsak $\mu \in \mathcal{M}$, vsak $f \in \mathcal{F}$ in vsak $\varepsilon > 0$ konstruirati okolico mere μ v šibki topologiji, določeni z $\mathcal{G}$, ki bo vsebovana v množici $N(\mu; f; \varepsilon)$, definirani tako kot

v (A.3.2). Vzemimo zdaj ustrezni zaporedji f_n^+ in f_n^-. Tedaj za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak n, da je $\mu(f_n^+) - \varepsilon/2 < \mu(f) < \mu(f_n^-) + \varepsilon/2$. Definirajmo:

$$U := \left\{ \nu \in \mathcal{M} \,;\, \nu(f_n^+) - \mu(f_n^+) < \frac{\varepsilon}{2},\ \mu(f_n^-) - \nu(f_n^-) < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \tag{A.4.2}$$

Očitno je $\mu \in U$, poleg tega pa za vsak $\nu \in U$ velja:

$$\nu(f) \le \nu(f_n^+) = \nu(f_n^+) - \mu(f_n^+) + \mu(f_n^+) < \mu(f) + \varepsilon \tag{A.4.3}$$

in

$$\nu(f) \ge \nu(f_n^-) = \nu(f_n^-) - \mu(f_n^-) + \mu(f_n^-) > \mu(f) - \varepsilon \tag{A.4.4}$$

Torej je tudi $U \subseteq N(\mu; f; \varepsilon)$ in trditev je dokazana. ■

Kot preprost zgled si oglejmo naslednjo karakterizacijo metrike totalne variacije.

Trditev A.4.6. *Velja:*

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) = \sup_{\substack{f \text{ merljiva} \\ 0 \le f \le 1}} |\nu(f) - \mu(f)| \tag{A.4.5}$$

Opomba. Nekateri avtorji za metriko totalne variacije jemljejo tudi naslednjo metriko:

$$d(\mu, \nu) = \sup_{\substack{f \text{ merljiva} \\ -1 \le f \le 1}} |\nu(f) - \mu(f)| = 2\, d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) \tag{A.4.6}$$

Dokaz trditve A.4.6. Po točki (1) trditve A.4.2 lahko razred indikatorjev merljivih množic zamenjamo z razredom vseh merljivih stopničastih funkcij iz S v $[0, 1]$. Vsako merljivo stopničasto funkcijo z vrednostmi v $[0, 1]$ lahko namreč izrazimo v obliki:

$$f(x) = \begin{cases} y_0 & ;\ x \in H_0 \\ y_1 & ;\ x \in H_1 \\ \vdots & \quad\ \vdots \\ y_n & ;\ x \in H_n\,, \end{cases}$$

kjer je $0 = y_0 \le y_1 \le \cdots \le y_n \le 1$, $H_0, H_1, \ldots$ pa so disjunktne merljive množice. To pa se da zapisati tudi v obliki:

$$f = y_1 \mathbf{1}_{H_1} + (y_2 - y_1) \mathbf{1}_{H_1 \cup H_2} + \cdots (y_n - y_{n-1}) \mathbf{1}_{H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n}\,,$$

pri čemer je $\sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) = y_n \le 1$.

Za vsako merljivo funkcijo z vrednostmi v $[0, 1]$ obstaja monotono zaporedje merljivih stopničastih funkcij prav tako z vrednostmi v $[0, 1]$, ki po točkah konvergira k njej. Zato smemo po točki (1) trditve A.4.4 razred vseh merljivih stopničastih funkcij nadomestiti z razredom vseh merljivih funkcij z vrednostmi v $[0, 1]$ in dokaz je zaključen. ■

A.5 Običajna šibka topologija

V celotnem razdelku bomo privzeli, da je množica S opremljena s topologijo, $\mathcal{S}$ pa je pripadajoča Borelova σ-algebra.

Definicija. *Običajna šibka topologija* na prostoru $\mathrm{Pr}(S, \mathcal{S})$ je šibka topologija, definirana v razdelku A.3, pri kateri za testne funkcije vzamemo vse zvezne in omejene funkcije $S \to \mathbb{R}$.

Dogovor. Če v nadaljevanju pri šibki topologiji ne bomo določili razreda testnih funkcij, bomo šteli, da gre za običajno šibko topologijo, torej bomo za testne funkcije vzeli zvezne in omejene funkcije.

Trditev A.5.1. *Šibka topologija je šibkejša od tiste, ki jo porodi metrika totalne variacije, brž ko S ni diskreten, pa je strogo šibkejša.*

Dokaz. Da je topologija šibkejša, sledi iz trditev A.4.1 in A.4.6. Privzemimo sedaj, da prostor S ni diskreten. To pomeni, da obstaja taka točka x, da $\{x\}$ ni odprta množica. Naj bo G odprta krogla okoli Diracove mere δ_x s polmerom 1 v metriki totalne variacije. Pokazali bomo, da G v šibki topologiji ni okolica mere δ_x. Če bi namreč bila, bi vsebovala določeno množico $N(\mu; f_1, \dots f_n; \varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$, definirano tako kot v (A.3.2) za določene funkcije $f_1, \dots, f_n$ in števila $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$. Ker so funkcije $f_1, \dots, f_n$ zvezne in omejene, obstaja taka okolica U točke x, da je $|f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon_i$ za vse i in vse $y \in U$. Ker množica $\{x\}$ ni odprta, obstaja vsaj ena taka točka $y \neq x$. Očitno je $\delta_y \in N(\mu; f_1, \dots f_n; \varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$. Toda Diracova mera δ_y ne pripada množici G, ker je $d_{\mathrm{TV}}(\delta_x, \delta_y) = 1$. To pa je v nasprotju s predpostavko, da je $G \supseteq N(\mu; f_1, \dots f_n; \varepsilon_1, \dots \varepsilon_n)$. ■

Trditev A.5.2. *Če je S metrizabilen, je šibka topologija na* $\mathrm{Pr}(S, \mathcal{S})$ *Hausdorffova.*

Dokaz. Iz točke (1) trditve A.3.2 sledi, da je dovolj dokazati, da omejene zvezne funkcije ločijo vse porazdelitve iz $\mathrm{Pr}(S, \mathcal{S})$. Po trditvi A.1.2 je za to dovolj dokazati, da obstaja π-sistem $\mathcal{P}$, ki generira $\mathcal{S}$ in je tak, da za vsako množico $A \in \mathcal{P}$ obstaja enakomerno omejeno zaporedje zveznih funkcij, ki po točkah konvergira k indikatorju $\mathbf{1}_A$ množice A. Toda ker je $\mathcal{S}$ Borelova σ-algebra, družina vseh zaprtih množic, ki je π-sistem, generira $\mathcal{S}$. Ker je S metrizabilen, pa za vsako zaprto množico A obstaja zaporedje zveznih funkcij $f_n \colon S \to [0, 1]$, ki po točkah konvergira priti indikatorju množice A. Dokaz je s tem zaključen. ■

Hausdorffova lastnost je vse, kar bomo potrebovali od lastnosti šibke topologije na prostoru porazdelitev. Kot zanimivost pa naj omenimo, da velja še precej več.

Izrek A.5.3. *Če je S separabilen in metrizabilen, je tudi prostor* $\mathrm{Pr}(S, \mathcal{S})$ *s šibko topologijo metrizabilen.*

Dokaz bomo opustili. Za primer, ko je prostor S *poln*, glej npr. Rogers in Williams [109], strani 205–209. Ta dokaz je zelo posreden (skliče se npr. na Banach–Alaoglujev izrek). Vendar pa se da izrek dokazati tudi neposredno, in sicer tako, da prostor $\mathrm{Pr}(S, \mathcal{S})$ opremimo z *metriko Lévy–Prohorova*:

$$\rho(\mu, \nu) := \inf\{\varepsilon \geq 0 \; ; \; \mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ za vsako zaprto množico } A\} \tag{A.5.1}$$

kjer je $A^\varepsilon := \{x \in S \; ; \; d(x, A) < \varepsilon\}$, d pa je metrika na S. Po precej mučnega računanja najprej preverimo, da je to res metrika in da res porodi šibko topologijo. Dobršen del tega si lahko bralec pogleda v Ethierjevi in Kurtzevi monografiji [55] na straneh 96–110. Tam je dokazano vse razen dejstva, da je šibka topologija močnejša od topologije, ki jo porodi metrika Lévy–Prohorova. To je treba preveriti neposredno – sklicevanje le na zaporedja ne zadostuje.

A.6 Zadostni pogoji za šibko konvergenco

Konvergenca v (običajni) šibki topologiji je v večini primerov najmanj, kar glede konvergence pričakujemo od zaporedja verjetnostnih mer. Dostikrat pa jo je težko neposredno preveriti ali pa smo že izpeljali konvergenco v kaki drugi topologiji. Zato se je smiselno vprašati, kdaj je dana topologija močnejša od šibke. Podali bomo naslednjo precej splošno karakterizacijo.

Tudi v tem razdelku se bomo držali dogovora, da je S opremljen s topologijo, $\mathcal{S}$ pa je pripadajoča Borelova σ-algebra.

Trditev A.6.1. *Naj bo $\mathcal{F}$ družina merljivih testnih funkcij na $(S, \mathcal{S})$ in naj bo $\mu(|f|) < \infty$ za vsak $\mu \in \mathcal{M}$. Nadalje naj bo izpolnjen vsaj eden izmed naslednjih dveh pogojev:*

(1) *Za vsako odprto množico $G \subseteq S$ obstaja enakomerno navzdol omejeno zaporedje funkcij $f_n \in \mathcal{F}$, $f_n \leq \mathbf{1}_G$, ki po točkah konvergira k $\mathbf{1}_G$.*

(2) *Za vsako zaprto množico $F \subseteq S$ obstaja enakomerno navzgor omejeno zaporedje funkcij $f_n \in \mathcal{F}$, $f_n \geq \mathbf{1}_F$, ki po točkah konvergira k $\mathbf{1}_F$.*

Tedaj je šibka topologija na $\mathcal{M}$, ki jo določa $\mathcal{F}$, močnejša od običajne šibke topologije.

Posledica A.6.2. *Če je S metrični prostor, se običajna šibka topologija, zožena na porazdelitve s končnim prvim absolutnim momentom, ujema s šibko topologijo, določeno z razredom omejenih Lipschitzevih funkcij.*

Dokaz. Dokazali bomo, da je izpolnjen pogoj (2). Če je namreč F zaprta množica, lahko postavimo:

$$f_n(x) := \Big(1 - n \operatorname{dist}(x, F)\Big)_+ \tag{A.6.1}$$

(držimo se dogovora, da je $\operatorname{dist}(x, \emptyset) = \infty$). Dokaz je tako zaključen. ■

Dokaz trditve A.6.1. Najprej opazimo, da smemo po točki (2) trditve A.4.2 brez škode za splošnost privzeti, da je $\mathcal{F}$ vektorski prostor in da vsebuje konstante. Med drugim to pomeni tudi, da za vsak $f \in \mathcal{F}$ velja tudi $1 - f \in \mathcal{F}$, torej sta pogoja (1) in (2) ekvivalentna. Privzeti smemo torej, da sta izpolnjena oba.

Uporabili bomo točko (2) trditve A.4.4: za vsako omejeno zvezno funkcijo $f\colon S \to \mathbb{R}$ in vsako porazdelitev $\mu \in \mathcal{M}$ bomo konstruirali zaporedji funkcij $f_n^+, f_n^- \in \mathcal{F}$, za kateri bo veljalo $f_n^- \le f \le f_n^+$ in $\lim_{n\to\infty} \mu(f_n^+) = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n^-) = \mu(f)$. Brez škode za splošnost privzamemo, da f slika v $[0,1]$. Za poljuben $t \in \mathbb{R}$ označimo:

$$F_t := \{x\,;\, f(x) \ge t\}\,, \qquad G_t := \{x\,;\, f(x) > t\} \tag{A.6.2}$$

Ni se težko prepričati, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$f - \frac{1}{n} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{1}_{G_{k/n}} \le f \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{F_{k/n}} \le f + \frac{1}{n} \tag{A.6.3}$$

Iz predpostavke (1) in izreka o dominirani konvergenci sledi, da obstajajo take funkcije $f_{n,1}^-, \ldots f_{n,n-1}^- \in \mathcal{F}$, da za vsak k velja $f_{n,k}^- \le \mathbf{1}_{G_{k/n}}$ in $\mu(f_{n,k}^-) > \mu(G_{k/n}) - 1/n$. Podobno iz (2) sledi, da obstajajo take funkcije $f_{n,0}^+, \ldots f_{n,n-1}^+ \in \mathcal{F}$, da za vsak k velja $f_{n,k}^+ \ge \mathbf{1}_{F_{k/n}}$ in $\mu(f_{n,k}^+) < \mu(F_{k/n}) + 1/n$. Postavimo:

$$f_n^+ := \sum_{k=0}^{n-1} f_{n,k}^+\,, \quad f_n^- := \sum_{k=1}^{n-1} f_{n,k}^-\,, \tag{A.6.4}$$

Tedaj gotovo velja $f_n^- \le f \le f_n^+$, po krajšem računu pa dobimo še, da velja:

$$\mu(f) - \frac{2}{n} \le \mu(f_n^-) \le \mu(f) \le \mu(f_n^+) \le \mu(f) + \frac{2}{n} \tag{A.6.5}$$

torej smo res našli iskani zaporedji in trditev je dokazana. ■

Trditev A.6.3. *Naj bo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje slučajnih spremenljivk na $(S, \mathcal{S})$, izpolnjen pa naj bo še eden od naslednjih dveh pogojev.*

(1) *Zaporedje X_n skoraj gotovo konvergira proti X.*

(2) *S je metrizabilen in zaporedje X_n v verjetnosti konvergira proti X.*

Tedaj zaporedje njihovih porazdelitev šibko konvergira proti porazdelitvi slučajne spremenljivke X.

Dokaz.

(1): Sledi iz izreka o dominirani konvergenci.

(2): Po posledici A.6.2 je dovolj dokazati, da za vsako omejeno Lipschitzevo funkcijo f velja $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, f(X_n) = \mathbb{E}\, f(X)$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je f kar neraztezna in $|f| \le 1$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \ge n_0$ velja $\mathbb{P}(|X_n - X| \ge \varepsilon/3) < \varepsilon/3$. Tedaj velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|f(X_n) - f(X)| &= \mathbb{E}\left[|f(X_n) - f(X)|\,\mathbf{1}\Big(|X_n - X| < \frac{\varepsilon}{3}\Big)\right] + \\ &\qquad + \mathbb{E}\left[|f(X_n) - f(X)|\,\mathbf{1}\Big(|X_n - X| \ge \frac{\varepsilon}{3}\Big)\right] \le \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \\ &= \varepsilon\end{aligned} \tag{A.6.6}$$

Dokaz je tako končan. ■

Zgled A.6.1. Naj zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vektorjev v $\mathbb{R}^n$ konvergira proti a in naj zaporedje pozitivno semidefinitnih matrik $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathbb{R}^{n\times n}$ konvergira proti Σ. Trdimo: zaporedje normalnih porazdelitev $\mathrm{N}(a_n, \Sigma_n)$ šibko konvergira proti porazdelitvi $\mathrm{N}(a, \Sigma)$. Naj bo namreč Z standardizirano normalno porazdeljen slučajni vektor z vrednostmi v $\mathbb{R}^n$. Definirajmo slučajne vektorje X_n po predpisu $X_n := a_n + \Sigma_n^{1/2} Z$ in naj bo še $X := a + \Sigma^{1/2} Z$. Očitno je $X_n \sim \mathrm{N}(a_n, \Sigma_n)$ in $X \sim \mathrm{N}(a, \Sigma)$. Ker je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ in $\lim_{n\to\infty} \Sigma_n^{1/2} = \Sigma^{1/2}$, zaporedje slučajnih spremenljivk X_n po točkah konvergira k X. Po trditvi A.6.3 zaporedje njihovih porazdelitev šibko konvergira k $\mathrm{N}(a, \Sigma)$. □

A.7 Zadostni pogoji za konvergenco v metriki

Za dani razred testnih funkcij $\mathcal{F}$ smo definirali dve topologiji na prostoru $\mathcal{M}$: šibko in metrično. Metrična topologija je močnejša od šibke in v večini primerov je kar strogo močnejša (glej zgled A.3.1).

Primerjamo pa lahko tudi metrično topologijo, ki jo določa en razred testnih funkcij, s šibko topologijo, ki jo določa drug razred testnih funkcij. Tako nam na primer trditev A.4.4 da zadostne pogoje za to, kdaj je šibka topologija, določena z nekim razredom testnih funkcij $\mathcal{F}$, močnejša od običajne šibke topologije. Takrat je posledično tudi metrična topologija, ki jo določa $\mathcal{F}$, močnejša od običajne šibke topologije.

Tu pa se bomo ukvarjali z vprašanjem, kdaj velja obrat. Izkaže se namreč, da za določene porazdelitve ν običajna šibka konvergenca proti ν implicira konvergenco v metriki, določeni z danim razredom testnih funkcij $\mathcal{F}$.

Naj bo S separabilen metrični prostor in $\mathcal{F}$ družina merljivih funkcij $S \to [0, 1]$. Na metrike, ki jih dobimo iz takih družin, je ugodno gledati kot na posplošitve *metrike Kolmogorova*, pri kateri za testne funkcije vzamemo indikatorje poltrakov $(-\infty, x]$; glej razdelek A.10. Za vsak $\varepsilon > 0$ definirajmo:

$$\Upsilon_\varepsilon^+ f(x) := \sup_{|y|<\varepsilon} f(x+y) \quad \text{in} \quad \Upsilon_\varepsilon^- f(x) := \inf_{|y|<\varepsilon} f(x+y) \tag{A.7.1}$$

Opomba. Funkciji $\Upsilon_\varepsilon^+ f$ in $\Upsilon_\varepsilon^- f$ sta zagotovo merljivi (tudi če f sama ni merljiva), saj je $\Upsilon_\varepsilon^+ f$ navzdol, $\Upsilon_\varepsilon^- f$ pa navzgor polzvezna.

Trditev A.7.1. *Naj bo $\mathcal{F}$ tako kot zgoraj, ν pa verjetnostna mera, za katero velja:*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{f\in\mathcal{F}} \nu(\Upsilon_\varepsilon^+ f - f) = 0, \qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{f\in\mathcal{F}} \nu(f - \Upsilon_\varepsilon^- f) = 0 \tag{A.7.2}$$

Tedaj je vsaka okolica mere μ v metriki, ki jo določa $\mathcal{F}$, tudi njena okolica v običajni šibki topologiji.

Nekaj zgledov mer, ki izpolnjujejo pogoja (A.7.2), bomo podali v razdelku A.10. Za dokaz trditve A.7.1 pa potrebujemo nekaj priprave. Potrebovali bomo razčlenitve enote.

Definicija. *Nosilec* funkcije $f\colon S \to \mathbb{R}$ je zaprtje množice točk, kjer funkcija ni enaka nič. Povedano s formulo, označimo:

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \,;\, f(x) \neq 0\}} \tag{A.7.3}$$

Definicija. Naj bo S topološki prostor. Družina zveznih funkcij $g_\alpha\colon S \to [0,1]$, $\alpha \in \mathcal{A}$, je *razčlenitev enote* na S, če velja:

(1) Nosilci funkcij g_α tvorijo lokalno končno pokritje prostora S, t. j. za vsak $x \in S$ obstaja okolica U točke x, ki seka nosilce kvečjemu končno mnogo funkcij g_α.

(2) Za vsak $x \in S$ velja $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} g_\alpha(x) = 1$ (zaradi prejšnje točke je ta vsota zmeraj končna).

Razčlenitev enote g_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, je *podrejena* odprtemu pokritju U_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, prostora S, če za vsak $\alpha \in \mathcal{A}$ množica U_α vsebuje nosilec funkcije g_α.

Izrek A.7.2. *Za vsako odprto pokritje separabilnega metričnega prostora obstaja razčlenitev enote, ki mu je podrejena.*

Dokaz. Glej Dugundji [52], VIII. poglavje, izrek 2.3 na strani 163 in izrek 4.2 na strani 170. ■

Dokaz trditve A.7.1. Dovolj je dokazati, da za vsak $\varepsilon > 0$ velja, da je množica:

$$V := \Big\{\mu\ ; \sup_{f\in\mathcal{F}} |\mu(f) - \nu(f)| < \varepsilon\Big\} \tag{A.7.4}$$

tudi okolica mere ν v šibki topologiji.

Po (A.7.2) obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $f \in \mathcal{F}$ velja $\nu(\Upsilon_\delta^+ f - f) < \varepsilon/3$ in $\nu(f - \Upsilon_\delta^- f) < \varepsilon/3$. Nadalje po izreku A.7.2 obstaja razčlenitev enote g_α, $\alpha \in \mathcal{A} = S$, podrejena pokritju prostora S z odprtimi kroglami okrog točk α z radijem $\delta/2$. Očitno za največ štetno mnogo indeksov α velja, da je $\nu(g_\alpha) > 0$ (sicer bi obstajal tak $m > 0$, da bi za neštevno mnogo α veljalo, da je $\nu(g_\alpha) > m$, torej bi obstajala tudi štetno neskončna množica $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ s to lastnostjo, potem pa bi veljalo $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}'} \nu(g_\alpha) = \infty$, kar je protislovje).

Obstaja končna množica $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, za katero velja, da je $\sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} \nu(g_\alpha) < \varepsilon/3$. Naj bo $f \in \mathcal{F}$. Definirajmo:

$$\tilde{f}^- := \sum_{\alpha\in\mathcal{B}} \Big(\inf_{\operatorname{supp} g_\alpha} f\Big) g_\alpha \tag{A.7.5}$$

Očitno je:

$$f \geq \tilde{f}^- \geq \sum_{\alpha\in\mathcal{B}} (\Upsilon_\delta^- f) g_\alpha = \Upsilon_\delta^- f - \sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} (\Upsilon_\delta^- f) g_\alpha \tag{A.7.6}$$

Sledi:

$$\mu(\tilde{f}^-) \leq \mu(f) \tag{A.7.7}$$

$$\nu(\tilde{f}^-) \geq \nu\Bigg(\Upsilon_\delta^- f - \sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} (\Upsilon_\delta^- f) g_\alpha\Bigg) \geq \nu(f) - \frac{2\varepsilon}{3} \tag{A.7.8}$$

Torej je:

$$\mu(f) - \nu(f) \geq \mu(\tilde{f}^-) - \nu(\tilde{f}^-) - \frac{2\varepsilon}{3} \tag{A.7.9}$$

Podobno definirajmo:

$$\tilde{f}^+ := 1 - \sum_{\alpha\in\mathcal{B}}\Bigl(1 - \sup_{\operatorname{supp} g_\alpha} f\Bigr) g_\alpha \tag{A.7.10}$$

in velja:

$$f \le \tilde{f}^+ \le 1 - \sum_{\alpha\in\mathcal{B}}(1 - \Upsilon_\delta^+ f) g_\alpha = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} g_\alpha + \sum_{\alpha\in\mathcal{B}}(\Upsilon_\delta^+ f) g_\alpha \tag{A.7.11}$$

Sledi:

$$\mu(\tilde{f}^+) \ge \mu(f) \tag{A.7.12}$$

$$\nu(\tilde{f}^+) \le \nu\Biggl(\sum_{\alpha\in\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} g_\alpha + \sum_{\alpha\in B}(\Upsilon_\delta^+ f) g_\alpha\Biggr) \le \nu(f) + \frac{2\varepsilon}{3} \tag{A.7.13}$$

Torej je:

$$\mu(f) - \nu(f) \le \mu(\tilde{f}^+) - \nu(\tilde{f}^+) + \frac{2\varepsilon}{3} \tag{A.7.14}$$

Funkcija $\tilde{f}^-$ pa je linearna kombinacija funkcij g_α s koeficienti med 0 in 1. Tudi $\tilde{f}^+$ lahko zapišemo kot tako linearno kombinacijo, povečano za konstanto ena. Zato lahko ocenimo:

$$\Bigl|\mu(\tilde{f}^-) - \nu(\tilde{f}^-)\Bigr| \le \sum_{\alpha\in\mathcal{B}} |\mu(g_\alpha) - \nu(g_\alpha)| \tag{A.7.15}$$

$$\Bigl|\mu(\tilde{f}^+) - \nu(\tilde{f}^+)\Bigr| \le \sum_{\alpha\in\mathcal{B}} |\mu(g_\alpha) - \nu(g_\alpha)| \tag{A.7.16}$$

Definiramo sedaj:

$$U := \Bigl\{\mu\ ;\ (\forall\alpha\in\mathcal{B})\ |\mu(g_\alpha) - \nu(g_\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3m}\Bigr\} \tag{A.7.17}$$

kjer je m moč množice $\mathcal{B}$. Očitno je U šibka okolica mere ν, iz ocen (A.7.9), (A.7.14), (A.7.15) in (A.7.16) pa sledi, da je $U \subseteq V$. Trditev je s tem dokazana. ∎

A.8 Wassersteinova metrika

V celotnem razdelku bomo privzeli, da je S opremljen z metriko d, $\mathcal{S}$ pa je pripadajoča Borelova σ-algebra.

Ugotovili smo že, da je topologija, ki jo porodi metrika totalne variacije, precej močna, in definirali šibko topologijo, ki se v večini primerov zdi primernejša. Šibka topologija na $\Pr(S, \mathcal{S})$ je sicer metrizabilna in metrika se da tudi eksplicitno konstruirati – ena od možnih rešitev je metrika Lévy–Prohorova. Slednja metrika pa vendarle ni prav naravna, saj se nepravilno spremeni, če prostor raztegnemo ali skrčimo (ali še drugače, če metriko na prostoru S pomnožzimo s konstantnim faktorjem). Po drugi strani pa smo videli, da lahko pri šibki topologiji za testne funkcije vzamemo že Lipschitzeve in omejene funkcije. Če predpostavko o omejenosti izpustimo, moramo na drugi strani skrčiti razred porazdelitev.

Definicija. Porazdelitev μ na $(S, \mathcal{S})$ *ima končni prvi moment* (glede na metriko d), če za kako (vsako) točko $x \in S$ velja:

$$\int d(x, y)\, \mu(\mathrm{d}y) < \infty \tag{A.8.1}$$

Opomba. Za vsako porazdelitev μ s končnim prvim absolutnim momentom in vsako Lipschitzevo funkcijo f velja $\mu(|f|) < \infty$.

Definicija. *Wassersteinova metrika* (znana tudi kot Dudleyjeva, Fortet–Mourierova ali Kantorovičeva metrika) na prostoru vseh Borelovih porazdelitev s končnim prvim absolutnim momentom je definirana po predpisu:

$$d_{\mathrm{W}}(\mu, \nu) := \sup_{M_1(f) \le 1} |\nu(f) - \mu(f)| \tag{A.8.2}$$

kjer je:

$$M_1(f) := \sup_{x \ne y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \tag{A.8.3}$$

Trditev A.8.1. *Desna stran v* (A.8.2) *je končna za poljubni verjetnostni meri μ, ν s končnim prvim absolutnim momentom in določa metriko; topologija, ki jo le-ta porodi, pa je močnejša od običajne šibke topologije.*

Dokaz. Najprej preverimo končnost. Vzemimo poljubno funkcijo f, za katero je $M_1(f) \le 1$, in izberimo poljubno točko $z \in S$. Tedaj velja:

$$\begin{aligned} |\nu(f) - \mu(f)| &= \left| \int_S \int_S \big(f(x) - f(y)\big)\, \mu(\mathrm{d}x)\, \nu(\mathrm{d}y) \right| \le \\ &\le \int_S \int_S d(x, y)\, \mu(\mathrm{d}x)\, \nu(\mathrm{d}y) \le \\ &\le \int_S \int_S \big(d(x, z) + d(y, z)\big)\, \mu(\mathrm{d}x)\, \nu(\mathrm{d}y) = \\ &= \int_S d(x, z)\, \mu(\mathrm{d}x) + \int_S d(y, z)\, \nu(\mathrm{d}y) < \infty \end{aligned} \tag{A.8.4}$$

Iz trditve A.1.2 sledi, da Lipschitzeve funkcije ločijo porazdelitve, torej je po trditvi A.1.1 d_{W} res metrika. Natančneje, pogoji trditve A.1.2 so izpolnjeni, ker lahko indikator vsake zaprte množice izrazimo kot limito enakomerno omejenega zaporedja Lipschitzevih funkcij, zaprte množice pa tvorijo π-sistem, ki generira Borelovo σ-algebro. Da je topologija, ki jo porodi Wassersteinova metrika, močnejša od šibke, pa sledi iz trditve A.3.1. ■

Zgled A.8.1. Pokažimo, da je na neomejenih metričnih prostorih topologija, ki jo porodi Wassersteinova metrika, v resnici strogo močnejša od šibke. Vzemimo zaporedje točk $x_0, x_1, x_2, \ldots$, za katere velja $d(x_n, x_0) \ge n$ za vse n, in definirajmo porazdelitve $\mu_1, \mu_2, \ldots$ kot:

$$\mu_n := \begin{pmatrix} x_0 & x_n \\ 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}. \tag{A.8.5}$$

Tedaj zaporedje μ_n konvergira proti Diracovi meri δ_{x_0} celo v metriki totalne variacije. Če pa vzamemo testno funkcijo $f(x) := d(x, x_0)$, dobimo, da je $\mu_n(f) \ge 1$, medtem ko je $\delta_{x_0}(f) = 0$, torej zaporedje v Wassersteinovi metriki ne konvergira proti δ_{x_0} (kot tudi ne proti kateri drugi porazdelitvi, ker je topologija, ki jo porodi Wassersteinova metrika, močnejša od šibke, slednja pa je Hausdorffova). □

Wassersteinovo metriko pa lahko definiramo tudi drugače. Zelo pomembna je karakterizacija s *sklapljanji* (za dokaz naslednjega izreka glej Račev [93]).

Izrek A.8.2. *Če je S separabilen, za poljubni porazdelitvi μ in ν s končnim prvim absolutnim momentom velja:*

$$d_{\mathrm{W}}(\mu, \nu) = \inf \mathbb{E}\, d(X, Y) \tag{A.8.6}$$

kjer infimum teče po vseh parih slučajnih spremenljivk X in Y, definiranih na istem verjetnostnem prostoru, pri čemer ima X porazdelitev μ, Y pa porazdelitev ν. ■

Opomba. Karakterizacija s sklapljanji je tesno povezana s Steinovo metodo, še posebej z uporabo kumulativne preme utežitve. Tako lahko v skladu z zgornjim izrekom izrek 3.6.3 preprosto formuliramo kot oceno:

$$d_{\mathrm{W}}\big(\mu, \mathrm{N}(0,1)\big) \le 2\, d_{\mathrm{W}}(\mu, \mu^*) \tag{A.8.7}$$

kjer je μ^* kumulativna prema utežitev porazdelitve μ.

Opomba. Desna stran v (A.8.6) je poseben primer *Kantorovičevega funkcionala*, ki meri različnost dveh pozitivnih mer in pri katerem namesto razdalje d vzamemo poljubno zvezno nenegativno funkcijo na $S \times S$.

Na realni osi pa Wassersteinova razdalja ni nič drugega kot L^1-razdalja med porazdelitvenima funkcijama.

Izrek A.8.3. *Za poljubni porazdelitvi μ in ν na realni osi s končnim prvim absolutnim momentom velja:*

$$d_{\mathrm{W}}(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big|\mu\big((-\infty, x]\big) - \nu\big((-\infty, x]\big)\Big| \mathrm{d}x \tag{A.8.8}$$

Opomba. Da se desna stran v (A.8.8) ujema s Kantorovičevim funkcionalom (A.8.6), sta dokazala že Salvemini [112] (za diskretne porazdelitve) in Dall'Aglio [45] (za splošni primer).

Dokaz izreka A.8.3. Označimo s F in G ustrezni porazdelitveni funkciji, t. j. $F(x) = \mu\big((-\infty, x]\big)$ in $G(x) = \nu\big((-\infty, x]\big)$. Nadalje naj bo h poljubna Lipschitzeva (torej absolutno zvezna) funkcija. Tedaj iz integracije per partes sledi, da za poljubni točki a in b, v katerih je razlika $F - G$ zvezna, velja:

$$\int_a^b h(x)\big(\mathrm{d}F(x) - \mathrm{d}G(x)\big) = h(b)\big(F(b) - G(b)\big) - h(a)\big(F(a) - G(a)\big) - \int_a^b h'(x)\big(F(x) - G(x)\big)\,\mathrm{d}x \tag{A.8.9}$$

Pošljimo a proti minus neskončno, b pa proti plus neskončno! Ker imata porazdelitvi μ in ν končen prvi absolutni moment, je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| \Big(\mathrm{d}F(x) + \mathrm{d}G(x)\Big) \le \int_{-\infty}^{\infty} \Big(|h(0)| + M_1(h)\,|x|\Big)\Big(\mathrm{d}F(x) + \mathrm{d}G(x)\Big) < \infty \tag{A.8.10}$$

zato limita leve strani enačbe (A.8.9) obstaja in je končna. Nadalje lahko ocenimo:

$$\begin{aligned} \Big|h(b)\Big(F(b) - G(b)\Big)\Big| &= \Big|h(b) \int_b^{\infty} \Big(\mathrm{d}G(x) - \mathrm{d}F(x)\Big)\Big| \le \\ &\le |h(b)| \int_b^{\infty} \Big(\mathrm{d}F(x) + \mathrm{d}G(x)\Big) \le \\ &\le \int_b^{\infty} \Big(|h(0)| + M_1(h)\,|x|\Big)\Big(\mathrm{d}F(x) + \mathrm{d}G(x)\Big) \end{aligned} \tag{A.8.11}$$

iz zaradi končnosti integrala v (A.8.10) gre desna, z njo pa tudi leva stran proti nič, ko gre b proti neskončno. Podobno je tudi $\lim_{a\to-\infty} h(a)\Big(F(a) - G(a)\Big) = 0$. Torej velja:

$$\mu(h) - \nu(h) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\Big(\mathrm{d}F(x) - \mathrm{d}G(x)\Big) = -\int_{-\infty}^{\infty} h'(x)\Big(F(x) - G(x)\Big)\,\mathrm{d}x \tag{A.8.12}$$

in zato tudi:

$$\Big|\mu(h) - \nu(h)\Big| \le M_1(h) \int_{-\infty}^{\infty} \Big|F(x) - G(x)\Big|\,\mathrm{d}x \tag{A.8.13}$$

Toda če za h postavimo funkcijo, za katero velja $h'(x) = \operatorname{sgn}\Big(F(x) - G(x)\Big)$, v zgornji oceni velja enakost. S tem je izrek dokazan. ∎

A.9 Posplošitve Wassersteinove metrike

Wassersteinova metrika temelji na Lipschitzevih testnih funkcijah. Na evklidskih prostorih pa gremo lahko še korak dlje in namesto Lipschitzevih funkcij vzamemo funkcije z Lipschitzevimi odvodi. Tako kot v (E.5.9) bomo definirali:

$$M_r(f) := \sup_{\substack{x,y\in D \\ x\ne y}} \frac{\|f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(y)\|}{|x-y|} \tag{A.9.1}$$

(za notacijo v zvezi z odvodi funkcij več spremenljivk glej dodatek E).

Iz trditve E.5.11 sledi, da za vsako verjetnostno mero μ, za katero je $\int |x|^r\,\mu(\mathrm{d}x) < \infty$, velja, da je tudi $\mu(|f|) < \infty$ za vsako funkcijo f z $M_r(f) < \infty$. Na prostoru takih mer potem lahko definiramo:

$$d_r(\mu, \nu) := \sup_{M_r(f)\le 1} |\nu(f) - \mu(f)| \tag{A.9.2}$$

Wassersteinovo metriko dobimo kot poseben primer, saj je $d_1 = d_{\mathrm{W}}$.

Trditev A.9.1.

(1) *Naj bosta μ in ν verjetnostni meri na $\mathbb{R}^d$ in $r \in \mathbb{N}$. Velja naj še $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^r \, \mu(\mathrm{d}x) < \infty$ in $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^r \, \nu(\mathrm{d}x) < \infty$. Tedaj je $d_r(\mu, \nu) < \infty$ natanko tedaj, ko imata meri μ in ν enake vse momente do vključno reda $r-1$, t. j. ko za vse $s = 1, 2, \ldots r-1$ velja $\int_{\mathbb{R}^d} x^s \, \mu(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^d} x^s \, \nu(\mathrm{d}x)$.*

(2) *Za poljubna $1 \le s \le r$ obstaja taka konstanta $C_{s,r}$, da je $d_s \le C_{s,r} d_r^{s/r}$.*

(3) *Na poljubnem prostoru verjetnostnih mer μ, za katere je $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^r \, \mu(\mathrm{d}x) < \infty$ in $\int_{\mathbb{R}^d} x^s \, \mu(\mathrm{d}x) = \alpha_s$ za vse $s = 1, 2, \ldots r-1$, kjer so $\alpha_1, \ldots \alpha_{r-1}$ vnaprej predpisani tenzorji, velja, da je d_r res metrika.*

(4) *Za poljubna $1 \le s \le r$ je metrika d_r močnejša od metrike d_s.*

Opomba. Zapis x^s v točki (1) predstavlja tenzorski produkt $x \otimes x \otimes \cdots \otimes x$ (glej dodatek D. Zahteva, da je $\int x^s \, \mu(\mathrm{d}x) = \int x^s \, \nu(\mathrm{d}x)$, je ekvivalentna zahtevi, da za poljubno s-linearno formo Φ velja:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, x, \ldots x) \, \mu(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, x, \ldots x) \, \nu(\mathrm{d}x) \tag{A.9.3}$$

Opomba. Če je $s \le r$ in zaporedje verjetnostnih mer konvergira v metriki d_r, po točki (4) konvergira tudi v metriki d_s. Vendar pa ocena, ki jo dokažemo v točki (2), dostikrat ne da prave hitrosti konvergence. Često se namreč zgodi, da zveza med d_r in d_s ne ustreza zgornji meji iz točke (2) (npr. da sta d_r in d_s kar istega velikostnega reda). Zato je tudi v primeru, ko ocenimo hitrost konvergence v metriki d_r, še vedno zanimivo posebej ocenjevati hitrost konvergence v metriki d_s.

Preden dokažemo trditev, bomo formulirali še tehnični rezultat, ki nam pomaga ocenjevati razdalje d_r, in še dva zgleda. Prvi ilustrira, da se ocena iz točke (2) v splošnem ne da izboljšati, drugi pa pokaže, da je metrika d_r lahko strogo močnejša od metrike d_s (pri formulaciji slednjega moramo biti previdnejši, saj metriki taki, kot sta, lahko gledamo le na razredu porazdelitev, ki imajo enake momente reda k za vse $k = 1, 2, \ldots r-1$; pač pa lahko na prostoru vseh porazdelitev s končnim r-tim absolutnim momentom definiramo metriki $\min\{1, d_r\}$ in $\min\{1, d_s\}$ in prva je močnejša od druge).

Lema A.9.2. *Naj bo $r \in \mathbb{N}$ in naj bosta μ in ν verjetnostni meri na $\mathbb{R}^d$, za kateri velja $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^r \, \mu(\mathrm{d}x) < \infty$, $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^r \, \nu(\mathrm{d}x) < \infty$ ter še $\int_{\mathbb{R}^d} x^s \, \mu(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^d} x^s \, \nu(\mathrm{d}x)$ za vse $s = 1, 2, \ldots r-1$. Tedaj za vsak $a \in \mathbb{R}^d$ velja:*

$$d_r(\mu, \nu) \le \frac{1}{r!} \int_{\mathbb{R}^d} |x - a|^r \, |\nu - \mu|(\mathrm{d}x) \tag{A.9.4}$$

Dokaz. Naj bo $f \in \flat^{(r)}(\mathbb{R}^d)$, t. j. $M_s(f) < \infty$ (glej razdelek E.5). Po trditvi E.5.11 lahko ocenimo:

$$\begin{aligned} |(\nu-\mu)(f)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \left(f(x) - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(s)}(x)}{s!}\,(x-a)^s \right) (\nu-\mu)(\mathrm{d}x) \right| \leq \\ &\leq \frac{M_r(f)}{r!} \int_{\mathbb{R}^d} |x-a|^r \, |\mu-\nu|(\mathrm{d}x) \end{aligned} \tag{A.9.5}$$

■

Zgled A.9.1. Naj bo $1 \leq s \leq r$. Konstruirali bomo družini verjetnostnih mer μ_t in ν_t, $t > 0$, za katere bo veljalo $\lim_{t\to 0} d_r(\mu_t, \nu_t) = 0$ in še $d_s(\mu_t, \nu_t) = c_{s,r}\big(d_r(\mu_t, \nu_t)\big)^{s/r}$ za neko konstanto $c_{s,r}$, ki ni odvisna od t.

Naj bo P_r Legendrov polinom stopnje r (se pravi, da je ortogonalen na vse polinome stopnje, manjše od r, glede na običajni integralski skalarni produkt na $[-1, 1]$). Definirajmo:

$$g_r(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} + \alpha_r\, P_r(x) & ;\ -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases} \tag{A.9.6}$$

Koeficient α_r določimo kot največje število, pri katerem je funkcija g_r še pozitivna. Tako je g_r gostota neke porazdelitve, ki ima zaradi ortogonalnosti prvih $r-1$ momentov enakih kot enakomerna porazdelitev na $[-1, 1]$. Če z μ označimo enakomerno porazdelitev, z ν pa porazdelitev z gostoto g_r, po točki (1) velja $0 < d_r(\mu, \nu) < \infty$ in $0 < d_s(\mu, \nu) < \infty$.

Naj bosta zdaj μ_t in ν_t porazdelitvi μ in ν, raztegnjeni za faktor $t > 0$ (t. j. μ_t je enakomerna porazdelitev na $[-t, t]$). Ni se težko prepričati, da je $d_r(\mu_t, \nu_t) = t^r\, d_r(\mu, \nu)$ in $d_s(\mu_t, \nu_t) = t^s\, d_s(\mu, \nu)$. Sledi:

$$d_s(\mu_t, \nu_t) = c_{s,r} \left(d_r(\mu_t, \nu_t) \right)^{s/r} \tag{A.9.7}$$

kjer je $c_{s,r} = d_s(\mu, \nu) / \big(d_r(\mu, \nu)\big)^{s/r}$. □

Zgled A.9.2. Naj bo $r \in \mathbb{N}$. Konstruirali bomo zaporedje verjetnostnih mer μ_n in še dodatno verjetnostno mero μ, za katere bo veljalo:

- $\int |x|^r \mu_n(dx) < \infty$, $\int |x|^r \mu(dx) < \infty$.
- $\int x^s\, \mu_n(dx) = \int x^s\, \mu(dx)$ za vse $s = 1, 2, \ldots r-1$.
- Zaporedje μ_n konvergira proti μ v vseh metrikah d_s, $s = 1, 2, \ldots r-1$.
- Zaporedje μ_n v metriki d_r ne konvergira proti μ.

Polinomi $1, x, \ldots x^{r-1}$ tvorijo bazo prostora polinomov stopnje $r-1$ ali manj. Naj bo $\{p_0, p_1, \ldots p_{r-1}\}$ njena dualna baza glede na običajni integralski skalarni produkt na $[0, 1]$. Z drugimi besedami, za poljubna $0 \leq i, j < r$ naj velja:

$$\int_0^1 x^i\, p_j(x)\, \mathrm{d}x = \mathbf{1}(i = j) \tag{A.9.8}$$

Nadalje naj bo ν_j mera z gostoto $p_j \mathbf{1}_{[0,1]}$, tako da velja $\int_{\mathbb{R}} x^i \, \nu_j(\mathrm{d}x) = \mathbf{1}(i = j)$.

Naj bo zdaj μ kar enakomerna porazdelitev na $[0, 1]$. Definirajmo:

$$\mu_n := \mu + \frac{1}{n}\left(\delta_{n^{1/r}} + \sum_{i=0}^{r-1} n^{i/r} \nu_i\right) \tag{A.9.9}$$

kjer kot ponavadi z δ_x označimo Diracovo mero v točki x. Če je n dovolj velik, so μ_n verjetnostne mere, ki imajo prvih $r-1$ momentov enakih kot μ in očitno imajo vse mere tudi končen r-ti absolutni moment (ker so skoncentrirane na omejeni množici). Naj bo zdaj $s < r$. Po lemi A.9.2 lahko ocenimo:

$$\begin{aligned} d_s(\mu_n, \mu) &\le \frac{1}{s!} \int_{\mathbb{R}} |x|^s \, |\mu_n - \mu|(\mathrm{d}x) \le \\ &\le \frac{1}{n\, s!}\left(n^{s/r} + \sum_{i=0}^{r-1} n^{i/r} \int_0^1 x^s |p_i(x)| \, \mathrm{d}x\right) \end{aligned} \tag{A.9.10}$$

kar gre proti nič, ko gre n proti nič. Po drugi strani pa je:

$$\int_{\mathbb{R}} x^r (\mu_n - \mu)(\mathrm{d}x) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{r-1} \int_0^1 x^r p_i(x) \, \mathrm{d}x \tag{A.9.11}$$

kar gre proti 1. Torej zaporedje μ_n konvergira proti μ v vseh metrikah d_s, $s < r$, v metriki d_r pa to ni res. □

Dokaz trditve A.9.1.

(1): Če za vse $s = 1, \ldots r-1$ velja $\int x^s \, \mu(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^d} x^s \, \nu(\mathrm{d}x)$, iz leme A.9.2 sledi, da je $d_r(\mu, \nu) < \infty$. Privzemimo zdaj, da za neki $1 \le s < r$ velja $\int x^s \, \mu(\mathrm{d}x) \ne \int x^s \, \nu(\mathrm{d}x)$, torej za neki kontravarianten tenzor Φ reda s velja $a := \int \Phi x^s \, (\mu - \nu)(\mathrm{d}x) \ne 0$. Izberimo $c \ge 0$ in definirajmo $f(x) := c\Phi x^s$. Tedaj je $M_r(f) = 0$ in $\int_{\mathbb{R}^d} f \, \mathrm{d}(\mu - \nu) = ca$. Ker je c lahko poljuben, mora biti $d_r(\mu, \nu) = \infty$.

(2): Trditev bomo pokazali tako, da bomo testne funkcije iz $\mathfrak{b}^{(s)}(\mathbb{R}^d)$ zgladili v funkcije, ki bodo pripadale $\mathfrak{b}^{(r)}(\mathbb{R}^d)$. To bomo naredili s konvolucijami, podobno kot v dokazu trditve 2.4.7. Obstaja taka funkcija $h \in C^{(r-s)}(\mathbb{R}^d)$, da je $h \ge 0$, $h(x) = 0$, brž ko je $|x| \ge 1$, in $\int_{\mathbb{R}^d} h(x) \, \mathrm{d}x = 1$. Naj bo $f \in \mathfrak{b}^{(s)}(\mathbb{R}^d)$. Definirajmo:

$$\Upsilon_\varepsilon f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x + \varepsilon z) \, h(z) \, \mathrm{d}z \tag{A.9.12}$$

Po posledici E.5.10 funkcija f pripada tudi prostoru Soboljeva $\mathcal{W}^{s,\infty}(\mathbb{R}^d)$ in vsem prostorom $\mathfrak{b}^{(k)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ za $k \le s$, velja pa še $M_s(f) = \operatorname{ess\,sup} \|f^{(s)}\|$ (za podrobnosti v zvezi z notacijo glej razdelka E.3 in E.5). Od tod sledi, da so izpolnjeni pogoji za s-kratno uporabo trditve E.6.2, po kateri smemo odvajati pod integralskim znakom. Dobimo:

$$\begin{aligned} (\Upsilon_\varepsilon f)^{(s)}(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f^{(s)}(x + \varepsilon z) \, h(z) \, \mathrm{d}z = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f^{(s)}(\varepsilon y) \, h\left(y - \frac{x}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{A.9.13}$$

Z nadaljnjo $(r-s)$-kratno uporabo trditve E.6.2 dobimo:

$$\begin{aligned}(\Upsilon_\varepsilon f)^{(r)}(x) &= \frac{(-1)^{r-s}}{\varepsilon^{r-s}} \int_{\mathbb{R}^d} f^{(s)}(\varepsilon y)\, h^{(r-s)}\left(y - \frac{x}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}y = \\ &= \frac{(-1)^{r-s}}{\varepsilon^{r-s}} \int_{\mathbb{R}^d} f^{(s)}(x + \varepsilon z)\, h^{(r-s)}(z)\, \mathrm{d}z\end{aligned} \tag{A.9.14}$$

Torej velja:

$$M_r(\Upsilon_\varepsilon f) \le \frac{M_s(f)}{\varepsilon^{r-s}} \int_{\mathbb{R}^d} \left| h^{(r-s)}(z) \right| \mathrm{d}z \tag{A.9.15}$$

Naj bosta zdaj μ in ν verjetnostni meri. Pisali bomo kar $d_s := d_s(\mu, \nu)$. Najprej velja:

$$\nu(f) - \mu(f) = (\nu - \mu)(f - \Upsilon_\varepsilon f) + (\nu - \mu)(\Upsilon_\varepsilon f) \tag{A.9.16}$$

Po (A.9.15) lahko ocenimo:

$$|(\nu - \mu)(\Upsilon_\varepsilon f)| \le d_r\, M_r(\Upsilon_\varepsilon f) \le d_r\, \frac{M_s(f)}{\varepsilon^{r-s}} \int_{\mathbb{R}^d} \left| h^{(r-s)}(z) \right| \mathrm{d}z \tag{A.9.17}$$

Nadalje velja:

$$(\nu - \mu)(f - \Upsilon_\varepsilon f) = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 f'(x + t\varepsilon z)\, \mathrm{d}t\, h(z)\, \mathrm{d}z\, (\nu - \mu)(\mathrm{d}x) \tag{A.9.18}$$

Od tod naprej ločimo dva primera. Pravzaprav bomo naš rezultat dokazali z indukcijo po s. Za $s = 1$ ocenimo kar:

$$|(\nu - \mu)(f - \Upsilon_\varepsilon f)| \le 2\varepsilon\, M_1(f) \tag{A.9.19}$$

Iz (A.9.17) in (A.9.19) dobimo, da za poljuben $\varepsilon > 0$ velja:

$$|\nu(f) - \mu(f)| \le \left[\frac{d_r}{\varepsilon^{r-1}} \int_{\mathbb{R}^d} h^{(r-1)}(z)\, \mathrm{d}z + 2\varepsilon \right] M_1(f) \tag{A.9.20}$$

Torej velja tudi:

$$d_1 \le \frac{d_r}{\varepsilon^{r-1}} \int_{\mathbb{R}^d} h^{(r-1)}(z)\, \mathrm{d}z + 2\varepsilon \tag{A.9.21}$$

Optimizacija po ε nam po nekaj računanja da:

$$d_1 \le C_{1,r}\, d_r^{1/r} \tag{A.9.22}$$

Narediti moramo še indukcijski korak z $r - 1$ na r. V tem primeru pa ocenimo:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f'(x + t\varepsilon z)\, (\nu - \mu)(\mathrm{d}x) \right| \le d_{s-1}\, M_s(f) \tag{A.9.23}$$

Iz te ocene ter iz (A.9.17) in (A.9.18) dobimo:

$$|\nu(f) - \mu(f)| \le \left[\frac{d_r}{\varepsilon^{r-s}} \int_{\mathbb{R}^d} h^{(r-s)}(z)\, \mathrm{d}z + \varepsilon\, d_{s-1} \right] M_1(f) \tag{A.9.24}$$

Torej velja:

$$d_s \le \frac{d_r}{\varepsilon^{r-s}} \int_{\mathbb{R}^d} h^{(r-s)}(z)\,\mathrm{d}z + \varepsilon\, d_{s-1} \tag{A.9.25}$$

Razdaljo d_{s-1} lahko ocenimo po indukcijski predpostavki. Dobimo:

$$d_s \le \frac{d_r}{\varepsilon^{r-s}} \int_{\mathbb{R}^d} h^{(r-s)}(z)\,\mathrm{d}z + C_{s-1,r}\, d_r^{(s-1)/r}\, \varepsilon \tag{A.9.26}$$

Optimizacija po ε nam spet po nekaj računanja da $d_s \le C_{s,r} d_r^{s/r}$, to pa je bilo potrebno dokazati.

(3) in (4): Sledi iz točk (1) in (2) ter dejstva, da je $d_1 = d_{\mathrm{W}}$ res metrika (trditev A.8.1).
■

A.10 Metrika Kolmogorova in posplošitve

Metrika Kolmogorova temelji na porazdelitvenih funkcijah, ki marsikje igrajo ključno vlogo, npr. v statistiki pri konstrukciji intervalov zaupanja.

Definicija. *Metriko Kolmogorova* na prostoru vseh Borelovih verjetnostnih mer na $\mathbb{R}$ definiramo kot:

$$d_{\mathrm{K}}(\mu, \nu) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \Big| \nu\big((-\infty, x]\big) - \mu\big((-\infty, x]\big) \Big| \tag{A.10.1}$$

To je torej metrika iz (A.1.1), pri čemer za testne funkcije vzamemo indikatorje vseh poltrakov $(-\infty, x]$.

Opombi.

(1) Ni se težko prepričati, da je to res metrika. Iz razlik indikatorjev poltrakov namreč lahko tvorimo indikatorje vseh intervalov oblike $(a, b]$, le-ti pa tvorijo π-sistem, ki generira Borelovo σ-algebro na $\mathbb{R}$. Po trditvi A.1.2 potem indikatorji poltrakov ločijo verjetnostne mere na $\mathbb{R}$ in po trditvi A.1.1 je d_{K} res metrika.

(2) Namesto poltrakov oblike $(-\infty, x]$ bi lahko vzeli tudi poltrake oblike $(-\infty, x)$. Indikatorje prvih namreč lahko dobimo kot monotone limite indikatorjev drugih in po točki (1) trditve A.4.4 se morata ustrezni metriki ujemati.

Podobno kot metrika Kolmogorova se obnaša še vrsta metrik, ki temeljijo na omejenih testnih funkcijah, ki pa ne smejo biti "predivje" (za preciznejšo formulacijo le-tega glej spodaj). Pomembna je npr. metrika, ki jo dobimo iz indikatorjev vseh konveksnih množic na $\mathbb{R}^d$. Zanimivo metriko dobimo tudi, če za testne funkcije vzamemo indikatorje vseh unij intervalov na $\mathbb{R}$, daljših od ena.

Trditev A.10.1. *Metrika Kolmogorova porodi topologijo, močnejšo od šibke. Splošneje, to velja za vsako metriko na* $\mathbb{R}^d$*, ki jo dobimo po* (A.1.1)*, če testne funkcije zajemajo indikatorje kartezijskih produktov oblike* $(-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_d]$.

Dokaz. Uporabili bomo trditev A.6.1. Označimo z $\mathcal{F}$ razred testnih funkcij, ki določa našo metriko. Najprej iz trditve A.3.1 sledi, da je topologija, ki jo porodi naša metrika, močnejša od šibke topologije glede na $\mathcal{F}$. Nadalje iz točke (2) trditve A.4.2 sledi, da lahko razred $\mathcal{F}$ zamenjamo z njegovo linearno ogrinjačo. Le-ta pa vsebuje indikatorje vseh končnih disjunktnih unij pravokotnikov oblike $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$. Ni težko preveriti, da le-ti izpolnjujejo pogoj (1) trditve A.6.1 in rezultat je dokazan. ∎

Metrika Kolmogorova ni primerljiva z nobeno od metrik d_r iz razdelka A.8. To pokažeta naslednja dva zgleda.

Zgled A.10.1. Naj bo $r \in \mathbb{N}$ in naj bodo μ_n in μ tako kot v zgledu A.9.2. Zaporedje μ_n torej v metriki d_r ne konvergira k μ, pač pa konvergira v metriki Kolmogorova, saj velja:

$$\begin{aligned}\Big|(\mu_n - \mu)\big((-\infty, x]\big)\Big| &\le \frac{1}{n}\left(\delta_{n^{1/r}} + \sum_{i=0}^{r-1} n^{i/r}\nu_i\right) \le \\ &\le \frac{1}{n} + \sum_{i=0}^{r-1} n^{i/r-1}\int_0^1 |p_i(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned} \tag{A.10.2}$$

□

Zgled A.10.2. Naj bo spet $r \in \mathbb{N}$. Konstruirali bomo zaporedje porazdelitev μ_n, ki bo v metriki d_r konvergiralo proti porazdelitvi μ, v metriki Kolmogorova pa to ne bo veljalo. Naj bo ε enakomerna porazdelitev na $[0, 1]$. Definirajmo najprej:

$$\mu := \tfrac{1}{2}(\delta_0 + \varepsilon) \tag{A.10.3}$$

Nadalje naj bo spet $\{p_0, \ldots p_{r-1}\}$ baza prostora polinomov stopnje, manjše od r, ki je dualna bazi $\{1, x, \ldots x^{r-1}\}$ glede na običajni integralski skalarni produkt na $[0, 1]$. Označimo spet $\nu_i(\mathrm{d}x) := p_i(x)\,\mathbf{1}(0 \le x \le 1)\,\mathrm{d}x$ in definirajmo:

$$\mu_n := \frac{1}{2}\left(\delta_{1/n} + \varepsilon - \sum_{i=1}^{r-1} n^{-i}\nu_i\right) \tag{A.10.4}$$

Za dovolj velike n je μ_n res verjetnostna mera in ni težko preveriti, da ima vse momente, manjše od r, enake kot μ. Po lemi A.9.2 velja:

$$\begin{aligned}d_r(\mu, \mu_n) &\le \frac{1}{2\,r!}\int_{\mathbb{R}} x^r\left(\delta_0 + \delta_{1/n} + \sum_{i=1}^{r-1} n^{-i}|\nu_i|\right)(\mathrm{d}x) = \\ &= \frac{1}{2\,r!}\left(n^{-r} + \sum_{i=1}^{r-1} n^{-i}\int_0^1 |p_i(t)|\,\mathrm{d}t\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned} \tag{A.10.5}$$

torej zaporedje μ_n v metriki d_r res konvergira proti μ. V metriki Kolmogorova pa to ne drži, ker za vsak n velja $\mu_n\big((-\infty, 0]\big) = 0$, medtem ko je $\mu\big((-\infty, 0]\big) = 1/2$. □

Zadnji zgled pokaže, da zaporedje, ki konvergira v metriki d_r, še ne konvergira nujno v metriki Kolmogorova. Po drugi strani pa smo v razdelku A.7 videli, da pod določenimi pogoji že šibka konvergenca proti določenim meram implicira konvergenco v metrikah, ki so posplošitve metrike Kolmogorova. Tu pa bomo razdaljo v teh metrikah še ekslicitno ocenili z razdaljami d_r.

Podobno kot v razdelku A.7 naj bo $\mathcal{F}$ razred testnih funkcij $\mathbb{R}^d \to [0,1]$. Tako kot v (A.7.1) za vsak $\varepsilon > 0$ definirajmo:

$$\Upsilon_\varepsilon^+ f(x) := \sup_{|y|<\varepsilon} f(x+y) \quad \text{in} \quad \Upsilon_\varepsilon^- f(x) := \inf_{|y|<\varepsilon} f(x+y) \tag{A.10.6}$$

Nadalje naj bo ν taka verjetnostna mera in $K \ge 0$ taka konstanta, da za vsak $f \in \mathcal{F}$ in vsak $\varepsilon > 0$ velja:

$$\nu(\Upsilon_\varepsilon^+ f - f) \le K\varepsilon \quad \text{in} \quad \nu(f - \Upsilon_\varepsilon^- f) \le K\varepsilon \tag{A.10.7}$$

Poleg tega pa naj bo še $r \in \mathbb{N}$ in $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^r \, \mu(\mathrm{d}x) < \infty$.

Opomba. Pogoj (A.10.7) implicira tudi pogoj (A.7.2), torej so po trditvi A.7.1 okolice mer ν, ki izpolnjujejo ta pogoj, tudi njihove okolice v običajni šibki topologiji. Če $\mathcal{F}$ vsebuje indikatorje kartezijskih produktov poltrakov, pa je konvergenca proti ν v metriki, ki jo dobimo iz $\mathcal{F}$, ekvivalentna običajni šibki konvergenci.

Trditev A.10.2. *Pri zgornjih pogojih obstaja taka konstanta $C(K,d,r)$, da za vsako verjetnostno mero μ, za katero za vsak $s = 1, \ldots r-1$ velja $\int_{\mathbb{R}^d} x^s \, \mu(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^d} x^s \, \nu(\mathrm{d}x)$, velja ocena:*

$$d_{\mathcal{F}}(\mu,\nu) \le C(K,d,r)\Big(d_r(\mu,\nu)\Big)^{1/(r+1)} \tag{A.10.8}$$

Preden dokažemo trditev, bomo navedli še tri zglede razredov $\mathcal{F}$ in mer ν, poleg tega pa bomo navedli še zgled, ki pove, da se ocena (A.10.8) vsaj glede velikostnih redov v splošnem ne da izboljšati.

Zgled A.10.3. Naj bo $\mathcal{F}$ razred indikatorjev poltrakov oblike $(-\infty, x)$ in $(-\infty, x]$ (gledamo torej metriko Kolmogorova). Videli smo že, da je metrika Kolmogorova močnejša od šibke. Toda če je ν verjetnostna mera z gostoto, ki je navzgor omejena z B, ocena (A.10.7) velja za $K = B$. Torej velja tudi ocena (A.10.8), konvergenca proti ν v metriki Kolmogorova pa je ekvivalentna običajni šibki konvergenci.

Podobno dobimo, če za $\mathcal{F}$ vzamemo razred indikatorjev vseh intervalov na $\mathbb{R}$. Tedaj ocena (A.10.7) velja za $K = 2B$. □

Zgled A.10.4. Naj bo $\mathcal{F}$ razred indikatorjev vseh unij intervalov na $\mathbb{R}$, katerih dolžine so vsaj ena, ν pa naj bo standardizirana normalna porazdelitev. Tedaj zveza (A.10.7) velja za:

$$\begin{aligned} K &:= \sup \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Big(\phi(a_i) + \phi(b_i)\Big) \,;\, (\forall i)\; a_i + 1 \le b_i \le a_{i+1} \right\} = \\ &= 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi(x+i) < \infty \end{aligned} \tag{A.10.9}$$

kjer kot ponavadi označimo $\phi(x) := (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$. Torej spet velja ocena (A.10.8), konvergenca proti ν v metriki, ki jo dobimo iz $\mathcal{F}$, pa je ekvivalentna običajni šibki konvergenci. □

Zgled A.10.5. Naj bo $\mathcal{F}$ razred indikatorjev vseh konveksnih množic v $\mathbb{R}^d$, ν pa standardizirana večrazsežna normalna porazdelitev. Tedaj iz izreka H.1.3 sledi, da zveza (A.10.7) velja za $K = 0{,}64 + 0{,}59\, d^{1/4}$ in spet velja isto kot prej. □

Zgled A.10.6. Pokažimo, da se ocena (A.10.8) vsaj glede velikostnih redov v splošnem ne da izboljšati. Naj bo ν poljubna zvezna porazdelitev na $\mathbb{R}$, za katero velja, da je infimum njene gostote na intervalu $(0,1)$ strogo pozitiven (lahko bi sicer vzeli poljuben interval, a bomo zaradi enostavnosti vzeli kar $(0,1)$). Spet naj bo $r \in \mathbb{N}$ in $\{p_0, p_1, \ldots p_{r-1}\}$ baza prostora polinomov stopnje, manjše od r, ki je glede na običajni integralski skalarni produkt na $[0,1]$ dualna bazi $\{1, x, \ldots x^{r-1}\}$. Definirajmo:

$$\mu_n(\mathrm{d}x) := \nu(\mathrm{d}x) + \alpha \left[\frac{1}{n}\, \delta_{1/n}(\mathrm{d}x) - \sum_{i=0}^{r-1} p_i(nx)\, \mathbf{1}\Big(0 \le x \le \frac{1}{n}\Big)\, \mathrm{d}x \right] \tag{A.10.10}$$

kjer je:

$$\alpha := \frac{m}{\sup_{0 \le x \le 1} \left| \sum_{i=0}^{r-1} p_i(x) \right|} \tag{A.10.11}$$

m pa je infimum gostote porazdelitve ν na intervalu $(0,1)$. Ni se težko prepričati, da so μ_n res verjetnostne mere in da je $\int_{\mathbb{R}} x^s\, \mu_n(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} x^s\, \nu(\mathrm{d}x)$ za vse $s = 1, \ldots r-1$.

Za vsako lokalno integrabilno funkcijo f velja:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\, (\mu_n - \nu)(\mathrm{d}x) &= \alpha \left[\frac{1}{n}\, f\Big(\frac{1}{n}\Big) - \sum_{i=0}^{r-1} \int_0^{1/n} f(x)\, p_i(nx)\, \mathrm{d}x \right] = \\
&= \frac{\alpha}{n} \left[f\Big(\frac{1}{n}\Big) - \sum_{i=0}^{r-1} \int_0^1 f\Big(\frac{t}{n}\Big)\, p_i(t)\, \mathrm{d}t \right] = \\
&= \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} f\Big(\frac{x}{n}\Big) (\mu_1 - \nu)(\mathrm{d}x)
\end{aligned} \tag{A.10.12}$$

Če za f vstavimo indikatorje poltrakov, dobimo:

$$d_{\mathrm{K}}(\mu_n, \nu) = \frac{1}{n}\, d_{\mathrm{K}}(\mu_1, \nu) \tag{A.10.13}$$

Če pa za f vstavimo funkcije iz $\mathfrak{b}^{(r)}(\mathbb{R}^d)$, dobimo:

$$d_r(\mu_n, \nu) = \frac{1}{n^{r+1}}\, d_r(\mu_1, \nu) \tag{A.10.14}$$

Torej velja:

$$d_{\mathrm{K}}(\mu_n, \nu) = c_r \Big(d_r(\mu_n, \nu) \Big)^{1/(r+1)} \tag{A.10.15}$$

kjer je $c_r = d_{\mathrm{K}}(\mu_1, \nu) / \Big(d_r(\mu_1, \nu) \Big)^{1/(r+1)}$. Zgornja meja v (A.10.8) je torej vsaj glede velikostnega reda dosežena. □

Dokaz trditve A.10.2. Naj bosta h in $\Upsilon_\varepsilon f$ tako kot v (A.9.12). Očitno je $f \le \Upsilon_\varepsilon \Upsilon_\varepsilon^+ f \le \Upsilon_{2\varepsilon} f$. Sledi:

$$\begin{aligned}\mu(f) - \nu(f) &\le (\mu - \nu)(\Upsilon_\varepsilon \Upsilon_\varepsilon^+ f) + \nu(\Upsilon_\varepsilon \Upsilon_\varepsilon^+ f - f) \le \\ &\le (\mu - \nu)(\Upsilon_\varepsilon \Upsilon_\varepsilon^+ f) + \nu(\Upsilon_{2\varepsilon}^+ f - f) \le \\ &\le (\mu - \nu)(\Upsilon_\varepsilon \Upsilon_\varepsilon^+ f) + 2K\varepsilon\end{aligned} \tag{A.10.16}$$

Podobno izpeljemo:

$$\begin{aligned}\mu(f) - \nu(f) &\ge (\mu - \nu)(\Upsilon_\varepsilon \Upsilon_\varepsilon^- f) - \nu(f - \Upsilon_\varepsilon \Upsilon_\varepsilon^- f) \ge \\ &\ge (\mu - \nu)(\Upsilon_\varepsilon \Upsilon_\varepsilon^- f) - \nu(f - \Upsilon_{2\varepsilon}^+ f) \ge \\ &\ge (\mu - \nu)(\Upsilon_\varepsilon \Upsilon_\varepsilon^- f) - 2K\varepsilon\end{aligned} \tag{A.10.17}$$

Po (A.9.15) velja ocena:

$$M_r(\Upsilon_\varepsilon f) \le \frac{1}{\varepsilon^r} \int_{\mathbb{R}^d} \left| h^{(r)}(z) \right| \mathrm{d}z \tag{A.10.18}$$

Sledi:

$$|\mu(f) - \nu(f)| \le \frac{d_r(\mu, \nu)}{\varepsilon^r} \int_{\mathbb{R}^d} \left| h^{(r)}(z) \right| \mathrm{d}z + 2K\varepsilon \tag{A.10.19}$$

Če zdaj vzamemo supremum po $f \in \mathcal{F}$ in optimiziramo po ε, dobimo ravno (A.10.8) in trditev je dokazana. ∎

Dodatek B

Operatorske polgrupe

B.1 Definicija in osnovne lastnosti

Definicija. *Operatorska polgrupa* je družina omejenih linearnih operatorjev $\mathcal{P}_t$ na Banachovem prostoru L, kjer je $t \geq 0$ in velja:

(1) $\mathcal{P}_0 = \mathcal{I}$ (t. j. identiteta na L).

(2) $\mathcal{P}_{t+s} = \mathcal{P}_t\mathcal{P}_s$.

Polgrupa je *krepko zvezna*, če za vsak $f \in L$ velja $\lim_{t\downarrow 0} \mathcal{P}_t f = f$. Polgrupa je *kontrakcijska*, če so njeni operatorji kontrakcije, t. j. če je $\|P_t\| \leq 1$.

Do konca razdelka bo oznaka L pomenila Banachov prostor.

Opomba. Kontrakcijske polgrupe so pomembne, ker nastopajo v verjetnosti: če je $(X_t)_{t\geq 0}$ markovski proces, operatorji $\mathcal{P}_t$, definirani po predpisu:

$$\mathcal{P}_t(X_0) = \mathbb{E}\Big[f(X_t)|X_0\Big] \tag{B.1.1}$$

tvorijo kontrakcijsko operatorsko polgrupo. Natančneje, obstajajo *verzije* operatorjev $\mathcal{P}_t$, ki tvorijo kontrakcijsko operatorsko polgrupo. Za podrobnosti glej npr. Rogers in Williams [109].

Trditev B.1.1. *Naj bo $(P_t)_{t\geq 0}$ krepko zvezna operatorska polgrupa. Tedaj obstajata tak $M > 0$ in tak $\omega \in \mathbb{R}$, da za vsak $t \geq 0$ velja:*

$$\|\mathcal{P}_t\| \leq Me^{\omega t} \tag{B.1.2}$$

Opomba. Pri kontrakcijskih operatorskih polgrupah zgornja trditev seveda avtomatično velja. Vendar pa nam trditev pove tudi, da med krepko zveznimi operatorskimi polgrupami kontrakcijske niso prav zelo poseben primer. Brž ko je $(\mathcal{P}_t)_{t\geq 0}$ krepko zvezna operatorska polgrupa in velja $\|\mathcal{P}_t\| \leq Me^{\omega t}$, operatorji $\mathcal{P}'_t := e^{-\omega t}\mathcal{P}_t$ tvorijo krepko zvezno operatorsko polgrupo, za katero velja ocena $\|\mathcal{P}'_t\| \leq M$. Če normo na prostoru L zamenjamo z enakomerno ekvivalentno normo, definirano po predpisu:

$$\|f\|' := \sup_{t\geq 0}\|\mathcal{P}'_t f\| \tag{B.1.3}$$

pa postane operatorska polgrupa $(\mathcal{P}'_t)_{t\geq 0}$ kontrakcijska.

Dokaz trditve B.1.1. Najprej bomo pokazali, da obstajata tak $t_0 > 0$ in tak $M > 0$, da za vsak $t \in [0, t_0]$ velja $\|\mathcal{P}_t\| \leq M$. Če to ne bi bilo res, bi obstajalo tako zaporedje t_n, ki pada proti 0, da bi veljalo $\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{P}_{t_n}\| = \infty$. Toda zaradi krepke zveznosti je za vsak $f \in L$ zaporedje $\mathcal{P}_{t_n} f$ omejeno in pridemo v protislovje s principom enakomerne omejenosti.

Definirajmo $\omega := \frac{1}{t_0} \log M$. Naj bo $t \geq 0$. Obstajata tak $k \in \mathbb{N}_0$ in tak $s \in [0, t_0]$, da je $t = kt_0 + s$. Sledi:

$$\|\mathcal{P}_t\| \leq \|\mathcal{P}_t^k \mathcal{P}_s\| \leq M M^{t/t_0} = M e^{\omega t} \tag{B.1.4}$$

■

Trditev B.1.2. *Naj bo $(\mathcal{P}_t)_{t\in\geq 0}$ krepko zvezna operatorska polgrupa. Tedaj je za vsak $f \in L$ funkcija $t \mapsto \mathcal{P}_t f$ zvezna funkcija iz $[0, \infty)$ v L.*

Dokaz. Naj bo $t \geq 0$ in naj bosta M in ω kot v trditvi B.1.1. Za $h \geq 0$ velja:

$$\|\mathcal{P}_{t+h} f - \mathcal{P}_t f\| = \|\mathcal{P}_t(\mathcal{P}_h f - f)\| \leq Me^{\omega t}\|\mathcal{P}_h f - f\| \tag{B.1.5}$$

za $0 \leq h \leq t$ pa velja:

$$\|\mathcal{P}_{t-h} f - \mathcal{P}_t f\| = \|\mathcal{P}_{t-h}(\mathcal{P}_h f - f)\| \leq Me^{\omega t}\|\mathcal{P}_h f - f\| \tag{B.1.6}$$

Od tod pa že sledi zveznost. ■

Definicija.

(1) *Linearni operator v Banachovem prostoru L* je (lahko tudi neomejen) linearni operator $\mathcal{A}$ iz $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ v L, kjer je *definicijsko območje* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ linearni podprostor v L.

(2) Operator $\mathcal{A}$ je *gosto definiran*, če je podprostor $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ gost v L.

(3) *Graf* linearnega operatorja $\mathcal{A}\colon \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to L'$, kjer je $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq L$, je množica $\Gamma := \{(f, \mathcal{A}f) \ ; \ f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\}$. Operator $\mathcal{A}$ je *zaprt*, če je njegov graf zaprt v $L \times L'$ s produktno topologijo.

(4) *Zaloga vrednosti* linearnega operatorja $\mathcal{A}$ je množica $\mathcal{R}(\mathcal{A}) := \{\mathcal{A}f \ ; \ f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\}$.

(5) *Omejen linearni operator na L* je omejen linearni operator iz L v L.

Opomba. Vsak omejen in povsod definiran linearni operator je zaprt. Drugače pa je linearni operator zaprt natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementov iz $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, ki konvergira k f, velja: če zaporedje $(\mathcal{A}f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira h g, je $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ in $\mathcal{A}f = g$.

Definicija. *(Infinitezimalni) generator* operatorske polgrupe $(\mathcal{P}_t)_{t\geq 0}$ je (navadno neomejen) linearni operator $\mathcal{A}$, definiran po predpisu:

$$\mathcal{A}f := \lim_{h\downarrow 0} \frac{\mathcal{P}_h f - f}{h} \tag{B.1.7}$$

Definicijsko območje $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ operatorja $\mathcal{A}$ so vsi elementi $f \in L$, za katere zgornja limita obstaja.

Trditev B.1.3. *Naj bo $(\mathcal{P}_t)_{t\geq 0}$ krepko zvezna operatorska polgrupa z generatorjem $\mathcal{A}$. Če je $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, je za vsak t tudi $\mathcal{P}_t f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ in velja:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{P}_t f = \mathcal{A}\mathcal{P}_t f = \mathcal{P}_t\mathcal{A} f \tag{B.1.8}$$

Pri tem gre pri $t = 0$ le za desni, pri $t > 0$ pa za obojestranski odvod.

Dokaz. Za vsak $h > 0$ definirajmo $\mathcal{A}_h := \frac{1}{h}(\mathcal{P}_h - \mathcal{I})$. Velja:

$$\mathcal{A}_h\mathcal{P}_t f = \frac{1}{h}(\mathcal{P}_{t+h} - \mathcal{P}_t) f = \mathcal{P}_t\mathcal{A}_h f \tag{B.1.9}$$

Ker je $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ in je operator $\mathcal{P}_t$ omejen, desna stran konvergira proti $\mathcal{P}_t\mathcal{A}f$, ko gre h proti 0. Od tod pa že dobimo to, kar smo iskali, le da smemo namesto obojestranskega pisati le desni odvod. Da dokažemo, da smemo pisati tudi levi odvod, zgornjo enačbo zapišemo malo drugače. Če je $t > 0$, za $0 < h \leq t$ velja:

$$\frac{1}{-h}(\mathcal{P}_{t-h} - \mathcal{P}_t) f = \mathcal{P}_{t-h}\mathcal{A}_h f \tag{B.1.10}$$

Dokazati moramo, da gre desna stran proti $\mathcal{P}_t\mathcal{A}f$. To pa sledi iz ocene:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_{t-h}\mathcal{A}_h f - \mathcal{P}_t\mathcal{A} f\| &\leq \|\mathcal{P}_{t-h}(\mathcal{A}_h f - \mathcal{A} f)\| + \|\mathcal{P}_{t-h}(\mathcal{I} - \mathcal{P}_h)\mathcal{A} f\| \leq \\ &\leq M e^{\omega t}\Big(\|\mathcal{A}_h f - \mathcal{A} f\| + \|\mathcal{A} f - \mathcal{P}_h\mathcal{A} f\|\Big) \xrightarrow[h\downarrow 0]{} 0 \end{aligned} \tag{B.1.11}$$

kjer sta M in ω kot v trditvi B.1.1. ■

B.2 Riemannov integral v Banachovih prostorih

Definicija. Naj bo $\Delta = [a, b]$ omejen interval na realni osi. Dana naj bo preslikava $u\colon \Delta \to L$, kjer je L Banachov prostor. Izberimo delitev intervala $[a, b]$ s pripadajočimi vmesnimi točkami, naj bo torej $D = (t_0, x_1, t_1, x_2, \ldots x_n, t_n)$, kjer je $a = t_0 \leq x_1 \leq \ldots x_n \leq t_n = b$, in ji priredimo *Riemannovo vsoto*:

$$R_D(u) := \sum_{k=1}^{n} u(x_k)(t_k - t_{k-1}) \tag{B.2.1}$$

Za dano delitev D označimo $\operatorname{diam} D := \max_k(t_k - t_{k-1})$. Število R je *Riemannov integral* funkcije f na intervalu Δ, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubno delitev D, za katero je $\operatorname{diam} D < \delta$, velja $\|R_D(u) - R\| < \varepsilon$.

Očitno je Riemannov integral funkcije u na Δ kvečjemu eden. Če obstaja, pravimo, da je preslikava u na Δ *integrabilna po Riemannu*. Njen integral označimo z $\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$ ali $\int_\Delta u(t)\,\mathrm{d}t$.

Opomba. *Riemannov integral preslikave u obstaja natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za poljubni delitvi D_1 in D_2, za kateri je* $\operatorname{diam} D_1 < \delta$ *in* $\operatorname{diam} D_2 < \delta$, *velja, da je* $\|R_{D_2}(u) - R_{D_1}(u)\| < \varepsilon$. V tem primeru namreč izberemo poljubno zaporedje delitev D_n, katerih diametri konvergirajo proti 0. Zaporedje Riemannovih vsot $R_{D_n}(u)$ je potem Cauchyjevo, torej konvergentno. Ni težko preveriti, da je njegova limita ravno Riemannov integral preslikave u na Δ.

Definicija Riemannovega integrala preslikave v Banachov prostor je torej le prirejena definicija Riemannovega integrala realne funkcije. Tudi osnovne lastnosti so podobne, le da jih je nekoliko težje dokazati. Brez težav dokažemo naslednji trditvi.

Trditev B.2.1. *Če je $a < b$ in je funkcija $u\colon [a, b] \to L$, kjer je L Banachov prostor, po Riemannu integrabilna na $[a, b]$, je u omejena, funkcija $t \mapsto \|u(t)\|$ je tudi integrabilna in velja ocena:*

$$\left\| \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\|\,\mathrm{d}t \tag{B.2.2}$$

■

Trditev B.2.2. *Naj bo $a \leq b \leq c$. Dana naj bo preslikava u iz $[a, c]$ v Banachov prostor. Tedaj je u po Riemannu integrabilna na $[a, c]$ natanko tedaj, ko je po Riemannu integrabilna na $[a, b]$ in $[b, c]$. V primeru integrabilnosti veljajo formule:*

$$\int_a^c u(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c u(t)\,\mathrm{d}t \tag{B.2.3}$$

$$\int_a^c u(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{b \uparrow c} \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t \tag{B.2.4}$$

$$\int_a^c u(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{b \downarrow a} \int_b^c u(t)\,\mathrm{d}t \tag{B.2.5}$$

■

Tako lahko zdaj integral $\int_a^b$ definiramo tudi za primer, ko je $a > b$: v tem primeru pač postavimo $\int_a^b := -\int_b^a$ in trditev še vedno velja.

Definicija. Naj bo Δ poljuben interval na realni osi (odprt, zaprt, ali polodprt, omejen ali neomejen) in naj bo dana preslikava $u\colon \Delta \to L$. *Posplošeni Riemannov integral* funkcije f na Δ obstaja in je enak R, če je f po Riemannu integrabilna na poljubnem kompaktnem podintervalu intervala Δ in če za poljubno naraščajoče zaporedje kompaktnih intervalov Δ_n z unijo Δ zaporedje $\int_{\Delta_n} u(t)\,\mathrm{d}t$ konvergira k R. Posplošeni Riemannov integral prav tako označimo z $\int_\Delta u(t)\,\mathrm{d}t$ ali $\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$, kjer sta a in b krajišči intervala Δ.

Opomba. Iz trditve B.2.2 sledi, da je posplošeni Riemannov integral v resnici posplošitev običajnega: če obstaja običajni Riemannov integral, obstaja tudi posplošeni in integrala sta enaka. Poleg tega trditev B.2.2 velja tudi za posplošeni Riemannov integral, brž ko je u posplošeno integrabilna na (a, c). *Od zdaj naprej bodo za nas integrabilne preslikave tiste, ki so posplošeno integrabilne po Riemannu.*

Naj bo Δ interval na realni osi. S $C(\Delta; L)$ označimo prostor vseh zveznih preslikav iz Δ v L, s $C^{(1)}(\Delta; L)$ pa prostor vseh preslikav iz Δ v L, ki so zvezne na Δ in zvezno odvedljive v notranjosti intervala Δ.

Trditev B.2.3.

(1) *Če je $u \in C(\Delta; L)$ in je $\int_\Delta \|u(t)\|\,\mathrm{d}t < \infty$, je u integrabilna na Δ in spet velja ocena:*

$$\left\| \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\|\,\mathrm{d}t \tag{B.2.6}$$

(2) *Naj bo $\mathcal{A}\colon\ \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to L'$, kjer je $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq L$, zaprt linearni operator. Nadalje naj bo Δ interval na $\mathbb{R}$ in $u\colon\ \Delta \to L$ integrabilna preslikava. Za vsak $t \in \Delta$ naj bo $u(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ in naj bo tudi preslikava $\mathcal{A}u$ integrabilna. Tedaj je $\int_\Delta u(t)\,\mathrm{d}t \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ in velja formula:*

$$\mathcal{A} \int_\Delta u(t)\,\mathrm{d}t = \int_\Delta \mathcal{A}u(t)\,\mathrm{d}t \tag{B.2.7}$$

(3) *Če je $u \in C^{(1)}([a, b]; L)$, velja:*

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t)\,\mathrm{d}t = u(b) - u(a) \tag{B.2.8}$$

(4) *Naj bo $a < b$ ter u zvezna in integrabilna na $[a, b)$. Potem za vsak $t \in [a, b)$ velja:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^t u(s)\,\mathrm{d}s = u(t) \tag{B.2.9}$$

Pri tem je za $t = a$ mišljen desni, za $a < t < b$ pa obojestranski odvod.

Skica dokaza.

(1): Naj bo interval Δ najprej kompakten. V tem primeru imamo opravka z običajnim Riemannovim integralom. Dokazati moramo, da se Riemannovi vsoti po delitvah, ki imata majhna diametra, ne razlikujeta preveč. To storimo tako, da najprej poiščemo delitev, ki je finejša od obeh (za vmesne točke se ne menimo) in upoštevamo enakomerno zveznost. Ta korak je malo bolj zoprn kot pri integralu realne funkcije, ker si ne moremo pomagati z Darbouxovimi vsotami. Pri dokazovanju posplošene integrabilnosti po Riemannu pa je glavno orodje ocena (B.2.2).

(2): Upoštevamo, da je vsak (tudi posplošen) Riemannov integral limita primernih Riemannovih vsot. Riemannovo vsoto smemo izmenjati z operatorjem $\mathcal{A}$, saj je le-ta linearen. Torej velja $\mathcal{A}\, R_D(u) = R_D(\mathcal{A}u)$. Kratek premislek pokaže, da lahko izberemo tako zaporedje D_n delitev primernih podintervalov intervala Δ, da gre $R_{D_n}(u)$ proti $\int_\Delta u(t)\,\mathrm{d}t$ in $R_{D_n}(\mathcal{A}u) = \mathcal{A}R_{D_n}(u)$ proti $\int_\Delta \mathcal{A}u(t)\,\mathrm{d}t$. Ko naredimo limito in upoštevamo, da je $\mathcal{A}$ zaprt, dobimo, kar smo iskali.

(3): Dovolj je dokazati za primer, ko je u odvedljiva na vsem intervalu $[a, b]$ (t. j. v a obstaja desni, v b pa levi odvod); splošni primer dobimo od tod z limitiranjem. Dokaz je spet malo bolj zoprn kot v realnem primeru, ker ne moremo uporabiti Lagrangeevega izreka. Naj bo $\varepsilon > 0$ in $\delta > 0$. Za vsak $x \in [a, b]$ obstaja tak $\delta_x > 0$, da za vsak t, za katerega je $|t - x| < \delta_x$, velja $\|\frac{u(t)-u(x)}{t-x} - u'(x)\| < \varepsilon$. Od tod sledi, da za poljubna t_1 in t_2, za katera je $x - \delta_x < t_1 \le x \le t_2 < x + \delta_x$, velja ocena:

$$\|u(t_2) - u(t_1) - u'(x)(t_2 - t_1)\| \le \varepsilon(t_2 - t_1) \tag{B.2.10}$$

Brez škode za splošnost lahko postavimo $\delta_x < \delta$. Pokritje intervala $[a, b]$ z intervali $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ ima končno podpokritje, iz katerega dobimo delitev D intervala $[a, b]$ z diametrom, manjšim od δ, za katero velja ocena $\|R_D(u') - (u(b) - u(a))\| \le \varepsilon(b - a)$. Naš rezultat zdaj sledi iz točke (1).

(4): Dovolj je preveriti, da velja:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s)\,\mathrm{d}s = u(t) \tag{B.2.11}$$

Če je $a < t + h < b$, lahko zgornji integral obravnavamo kot navaden Riemannov integral. Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je za vsak s, za katerega je $|s - t| < \delta$, tudi $\|u(s) - u(t)\| < \varepsilon$. Če je $0 < h < \delta$ in je D delitev intervala $[t, t + h]$, je potem $\left\|\frac{1}{h}R_D(u) - u(t)\right\| < \varepsilon$, potem pa je tudi $\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(t)\,\mathrm{d}t - u(t)\right\| < \varepsilon$. Slednjo oceno pa lahko na enak način dokažemo tudi za $-\delta < h < 0$. Iz te ocene pa že sledi to, kar smo hoteli dokazati. ■

Opomba. Če je L prostor realnih funkcij s supremum normo, so evaluacijski funkcionali $x \mapsto f(x)$ gotovo omejeni. Iz prejšnje trditve potem sledi:

$$\left(\int_\Delta u(t)\,\mathrm{d}t\right)(x) = \int_\Delta u(t)(x)\,\mathrm{d}t \tag{B.2.12}$$

Integral se torej prevede na običajni Riemannov integral realne funkcije.

B.3 Dynkinova formula

Trditev B.3.1 (Dynkinova formula). *Naj bo $(\mathcal{P}_t)_{t\ge 0}$ krepko zvezna operatorska polgrupa z generatorjem $\mathcal{A}$. Naj bo $f \in L$ in $t \ge 0$. Tedaj je $\int_0^t \mathcal{P}_s f\,\mathrm{d}s \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ in velja:*

$$\mathcal{P}_t f - f = \mathcal{A} \int_0^t \mathcal{P}_s f\,\mathrm{d}s \tag{B.3.1}$$

Če pa je $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, velja še:

$$\mathcal{P}_t f - f = \int_0^t \mathcal{A}\mathcal{P}_s f\,\mathrm{d}s = \int_0^t \mathcal{P}_s \mathcal{A} f\,\mathrm{d}s \tag{B.3.2}$$

Dokaz. Iz točke (2) trditve B.2.3 in še trditve B.2.2 sledi, da za vsak $h > 0$ velja:

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(\mathcal{P}_h - \mathcal{I}) \int_0^t \mathcal{P}_s f \, \mathrm{d}s &= \frac{1}{h} \int_0^t (\mathcal{P}_{s+h} f - \mathcal{P}_s f) \, \mathrm{d}s = \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_h^{t+h} \mathcal{P}_s f \, \mathrm{d}s - \int_0^t \mathcal{P}_s f \, \mathrm{d}s \right) = \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathcal{P}_s f \, \mathrm{d}s - \frac{1}{h} \int_0^h \mathcal{P}_s f \, \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{B.3.3}$$

Ko gre h proti 0, iz definicije generatorja in točke (4) trditve B.2.3 sledi (B.3.1). Zveza (B.3.2) pa takoj sledi iz trditve B.1.3 in točke (3) trditve B.2.3. ■

Opomba. Na prvi pogled bi se zdelo, da lahko drugi del trditve izpeljemo kar iz točke (2) trditve B.2.3. Vendar pa tega ne moremo storiti, ker še ne vemo, da je generator A zaprt. To pa je naslednja stvar, ki jo bomo izpeljali.

Posledica B.3.2. *Generator krepko zvezne operatorske polgrupe je gosto definiran in zaprt.*

Dokaz. Iz točke (1) trditve B.2.3 sledi, da je $f_t := \int_0^t \mathcal{P}_s f \, \mathrm{d}s \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ za vsak $t > 0$ in vsak $f \in L$. Ker je $\lim_{t \downarrow 0} f_t / t = f$, je $\mathcal{A}$ res gosto definiran. Naj zdaj zaporedje f_n konvergira proti f, zaporedje $\mathcal{A} f_n$ pa proti g. Po točki (2) trditve B.2.3 je $\mathcal{P}_t f_n - f_n = \int_0^t \mathcal{P}_s \mathcal{A} f_n \, \mathrm{d}s$. Pošljimo najprej n proti neskončno! Leva stran očitno konvergira proti $P_t f - f$. Iz enakomerne omejenosti operatorjev $\mathcal{P}_s$ (trditev B.1.1) in ocene (B.2.2) pa dobimo, da gre desna stran proti $\int_0^t \mathcal{P}_s g \, \mathrm{d}s$. Zdaj pa enačbo $\mathcal{P}_t f - f = \int_0^t \mathcal{P}_s g \, \mathrm{d}s$ delimo s t, pošljemo t proti 0 in ob upoštevanju točke (4) trditve B.2.3 dobimo, da je $\mathcal{A} f = g$, od tod pa sledi, da je generator $\mathcal{A}$ res zaprt. ■

B.4 Resolventa, Hille–Yosidov izrek

Definicija. Naj bo $\mathcal{A}$ zaprt linearni operator v Banachovem prostoru L. Operator $\mathcal{A}$ je *obrnljiv*, če je $\mathcal{A}$ bijektivna preslikava iz $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ na L. *Resolventna množica* $\rho(\mathcal{A})$ operatorja $\mathcal{A}$ je množica tistih realnih števil λ, za katera je operator $\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}$ obrnljiv. Pripadajočim inverzom $(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1}$ pravimo *resolventa*.

Opomba. Iz izreka o zaprtem grafu sledi, da je inverz obrnljivega operatorja omejen linearni operator na L.

Trditev B.4.1. *Naj bo $(\mathcal{P}_t)_{t \geq 0}$ krepko zvezna operatorska polgrupa z generatorjem $\mathcal{A}$. Tedaj obstaja tak $\lambda_0 > 0$, da je $(\lambda_0, \infty) \subseteq \rho(\mathcal{A})$, za vsak $f \in L$ in vsak $\lambda > \lambda_0$ pa velja:*

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathcal{P}_t f \, \mathrm{d}t \tag{B.4.1}$$

Natančneje, če za vsak $t \geq 0$ velja $\|\mathcal{P}_t\| \leq M e^{\omega t}$, lahko postavimo $\lambda_0 = \omega$. Če je torej polgrupa kontrakcijska, je $(0, \infty) \subseteq \rho(\mathcal{A})$.

Opomba. Integral na desni ni nič drugega kot Laplaceova transformiranka preslikave $t \mapsto \mathcal{P}_t f$.

Dokaz bomo opustili, za dokaz glej npr. Ethier in Kurtz [55] ali Rudin [111]. Pri Steinovi metodi pa nas bo bolj zanimal primer, ko je polgrupa kontrakcijska in $\lambda = 0$. Tu trditev, tako kot je napisana, ne velja, potrebno je postaviti dodatne pogoje tako pri operatorski polgrupi kot tudi pri elementu f.

Posledica B.4.2. *Naj bo $(\mathcal{P}_t)_{t \geq 0}$ krepko zvezna operatorska polgrupa z generatorjem $\mathcal{A}$ in naj za vsak $t \geq 0$ velja $\|\mathcal{P}_t\| \leq M e^{\omega t}$. Tedaj za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak $\lambda > \omega$ velja:*

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A})^{-n} f = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} \mathcal{P}_t f \, \mathrm{d}t \tag{B.4.2}$$

in:

$$\left\| (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A})^{-n} \right\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \tag{B.4.3}$$

Skica dokaza. Formulo (B.4.2) dokažemo z indukcijo po n in zamenjavo vrstnega reda integracije. Da res smemo menjati vrstni red integracije, dokažemo tako, da elemente Banachovega prostora "otipavamo" z omejenimi linearnimi funkcionali (ki jih po Hahn–Banachovem izreku natančno določajo). Tako s pomočjo točke (2) trditve B.2.3 Riemannov integral v Banachovem prostoru prevedemo na običajni Riemannov integral. ■

Izkaže se, da so lastnosti generatorjev, ki smo jih izpeljali do zdaj, že zadosten pogoj za to, da je dani operator generator krepko zvezne operatorske polgrupe.

Izrek B.4.3 (Hille, Yosida). *Naj bo $\mathcal{A}$ linearni operator v Banachovem prostoru ter $M > 0$ in $\omega \in \mathbb{R}$. Naslednji dve trditvi sta ekvivalentni.*

(1) *Operator $\mathcal{A}$ generira operatorsko polgrupo $\mathcal{P}_t$, za katero velja $\|\mathcal{P}_t\| \leq M e^{\omega t}$.*

(2) *Za vsak $\lambda > \omega$ je $\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}$ obrnljiv in za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja ocena* (B.4.3).

Poleg tega vsak linearni operator generira največ eno operatorsko polgrupo.

Dokaz tega izreka bomo opustili, za dokaz glej npr. Rudin [111], izrek 13.37, stran 380.

Dodatek C

O Millsovem razmerju

C.1 Definicija in osnovne lastnosti

Definicija. Označimo s ϕ standardizirano Gaussovo gostoto na $\mathbb{R}$:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \tag{C.1.1}$$

in definirajmo *Gaussov verjetnostni integral* na naslednji način:

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \phi(z)\,\mathrm{d}z \tag{C.1.2}$$

Millsovo razmerje je razmerje med zgornjima funkcijama, ki ga definiramo na naslednji način:

$$\psi(x) := \frac{\Phi(x)}{\phi(x)} = e^{\frac{1}{2}x^2} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z \tag{C.1.3}$$

Opomba. V literaturi je Millsovo razmerje dostikrat definirano nekoliko drugače, tako da se namesto $\psi(x)$ vzame $\psi(-x)$. To je zato, ker je ψ, definiran v (C.1.3), "krotka" funkcija za negativne x. Vendar pa ima tudi definicija (C.1.3) svoje prednosti.

Millsovo razmerje je pomembno, ker se z njim izražajo rešitve Steinove enačbe. Ni težko preveriti, da Millsovo razmerje reši enačbo:

$$\psi'(x) = x\,\psi(x) + 1 \tag{C.1.4}$$

ki je varianta Steinove enačbe (1.4.14). Z zaporednim odvajanjem lahko izračunamo tudi nekaj višjih odvodov:

$$\psi''(x) = (x^2 + 1)\,\psi(x) + x \tag{C.1.5}$$
$$\psi'''(x) = (x^3 + 3x)\,\psi(x) + x^2 + 2 \tag{C.1.6}$$
$$\psi^{(4)}(x) = (x^4 + 6x^2 + 3)\,\psi(x) + x^3 + 5x \tag{C.1.7}$$

C.2 Nekaj neenakosti

V tem razdelku bomo raziskali obnašanje funkcije ψ in njenih odvodov.

Trditev C.2.1. *Za vsak $r \in \mathbb{N}_0$ in za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $\psi^{(r)}(x) > 0$.*

Dokaz. S substitucijo $t = x - z$ v integral v (C.1.3) dobimo:

$$\psi(x) = \int_0^\infty e^{tx-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t \tag{C.2.1}$$

Po odvajanju pod integralskim znakom (ni težko preveriti, da so izpolnjeni pogoji trditve E.6.3) dobimo:

$$\psi^{(r)}(x) = \int_0^\infty t^r e^{tx-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t > 0 \tag{C.2.2}$$

■

Trditev C.2.2. *Za vsak $r \in \mathbb{N}_0$ in vsak $x > 0$ velja ocena:*

$$\psi^{(r)}(-x) < \frac{r!}{x^{r+1}} \tag{C.2.3}$$

Dokaz. Iz (C.2.2) dobimo:

$$\psi^{(r)}(-x) = \int_0^\infty t^r e^{-tx-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t < \int_0^\infty t^r e^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{r!}{x^{r+1}} \tag{C.2.4}$$

■

Tako smo za negativna števila odvode Millsovega razmerja omejili navzgor in navzdol. Samo Millsovo razmerje pa bomo ocenili še ostreje.

Trditev C.2.3. *Za vsak $x \geq 0$ velja:*

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} + x} \leq \psi(-x) \leq \frac{2}{x + \sqrt{x^2 + \frac{8}{\pi}}} \leq \min\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{x}\right\} \tag{C.2.5}$$

Opomba. Notranji oceni funkcije ψ sta razmeroma ostri. Za $x = 0$ in $x \to \infty$ sta točni, sicer pa numerični izračuni pokažejo:

$$\max_{x\geq 0} \psi(-x)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + x\right) < 1{,}19\,, \quad \max_{x\geq 0} \frac{2}{\psi(-x)\left(x + \sqrt{x^2 + \frac{8}{\pi}}\right)} < 1{,}06 \tag{C.2.6}$$

Zunanja ocena na desni pa je malo bolj groba. Za $x = 0$ in $x \to \infty$ je še vedno točna, sicer pa velja:

$$\frac{\min\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{x}\right\}}{\psi(-x)} < 1{,}72 \tag{C.2.7}$$

Opomba. Da je desna stran v (C.2.5) zgornja meja za $\psi(-x)$, takoj sledi iz ocene (C.2.4) ter dejstva, da je ψ po trditvi C.2.1 naraščajoča funkcija in $\psi(0) = \sqrt{\pi/2}$.

Dokaz trditve C.2.3. Za prvo neenakost v (C.2.5) je ekvivalentno dokazati, da za vsak $x \geq 0$ velja:

$$F_1(x) := \int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z - \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} + x} \geq 0 \tag{C.2.8}$$

Po odvajanju in nekaj računanja dobimo:

$$F_1'(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + x\right)^2}\left(1 - \frac{2}{\pi} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x\right) \tag{C.2.9}$$

Torej obstaja tak $x_1 > 0$, da za $0 \leq x \leq x_1$ velja $F_1'(x) \geq 0$, za $x \geq x_1$ pa $F_1'(x) \leq 0$. Ker je tudi $F_1(0) = \lim_{x\to\infty} F_1(x) = 0$, res velja (C.2.8).

Podobno je za drugo neenakost ekvivalentno dokazati, da za vsak $x \geq 0$ velja:

$$F_2(x) := \frac{2\,e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x + \sqrt{x^2 + \frac{8}{\pi}}} - \int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2}\,\mathrm{d}z \geq 0 \tag{C.2.10}$$

Spet po odvajanju in nekaj računanja dobimo:

$$F_2'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{8}{\pi}}\left(x + \sqrt{x^2 + \frac{8}{\pi}}\right)^2}\left(\frac{8}{\pi} - 2 - \frac{\frac{8}{\pi}}{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{\pi x^2}}}\right) \tag{C.2.11}$$

in spet ni težko videti, da obstaja tak $x_2 > 0$, da za $0 \leq x \leq x_2$ velja $F_2'(x) \geq 0$, za $x \geq x_2$ pa $F_2'(x) \leq 0$. Torej velja tudi (C.2.10). S tem sta prvi dve neenakosti v (C.2.5) dokazani, zadnja pa je očitna. ∎

C.3 Nekaj enakosti

Dokazali bomo nekaj zvez, ki zadevajo višje odvode Millsovega razmerja ψ, prav tako pa tudi večkratne integrale standardizirane Gaussove gostote ϕ.

Z zaporednim odvajanjem lahko vse višje odvode Millsovega razmerja izrazimo z njim samim in polinomi. To lahko storimo tudi s pomočjo *rekurentnih formul*.

Trditev C.3.1. *Za vsak $r \in \mathbb{N}$ in vsak $x \in \mathbb{R}$ velja zveza:*

$$\psi^{(r+1)}(x) = x\,\psi^{(r)}(x) + r\,\psi^{(r-1)}(x) \tag{C.3.1}$$

Dokaz. Za $r = 1$ zveza takoj sledi iz (C.1.4) in (C.1.5). Indukcijski korak z r na $r + 1$ pa naredimo tako, da zvezo (C.3.1) odvajamo. Dobimo:

$$\psi^{(r+2)}(x) = x\,\psi^{(r+1)}(x) + (r+1)\,\psi^{(r)}(x) \tag{C.3.2}$$

kar je natančno zveza (C.3.1), pri kateri r nadomestimo z $r + 1$. ∎

Posledica C.3.2. *Za vsak $r \in \mathbb{N}$ velja zveza:*

$$\psi^{(r)}(x) = P_r(x)\,\psi(x) + Q_r(x) \tag{C.3.3}$$

kjer je P_r polinom stopnje r, Q_r pa polinom stopnje $r-1$. ■

Odvodi Millsovega razmerja so tesno povezani z večkratnimi integrali standardizirane Gaussove gostote ϕ. Induktivno definirajmo:

$$\Phi_0(x) := \phi(x)\,, \quad \Phi_{r+1}(x) := \int_{-\infty}^{x} \Phi_r(z)\,\mathrm{d}z \tag{C.3.4}$$

Trditev C.3.3. *Funkcije Φ_r so dobro definirane (t. j. vsi integrali v* (C.3.4) *konvergirajo) in za vsak $r \in \mathbb{N}_0$ velja:*

$$\Phi_{r+1}(x) = \frac{1}{r!}\,\phi(x)\,\psi^{(r)}(x) \tag{C.3.5}$$

Dokaz. Za $r = 0$ zveza (C.3.5) sledi neposredno iz definicije Millsovega razmerja. Naredimo indukcijski korak z $r-1$ na r. Privzemimo torej:

$$\Phi_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\,\phi(x)\,\psi^{(r-1)}(x) \tag{C.3.6}$$

Najprej iz ocene (C.2.4) sledi, da je funkcija Φ_r integrabilna na intervalih $(-\infty, x]$ in da zveza (C.3.5) velja za $x \to -\infty$. Tako je dovolj dokazati *odvod* zveze (C.3.5). Po indukcijski predpostavki (C.3.6) velja:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\Phi_{r+1}(x) - \frac{1}{r!}\,\phi(x)\,\psi^{(r)}(x)\right] &= \Phi_r(x) - \frac{1}{r!}\,\phi'(x)\,\psi^{(r)}(x) - \frac{1}{r!}\,\phi(x)\,\psi^{(r+1)}(x) = \\ &= \frac{1}{r!}\,\phi(x)\Big[r\,\psi^{(r-1)}(x) + x\,\psi^{(r)}(x) - \psi^{(r+1)}(x)\Big] \end{aligned} \tag{C.3.7}$$

Toda po rekurentni formuli (C.3.1) je zgornji izraz enak nič. S tem je naša trditev dokazana. ■

Trditev C.3.4. *Za vsak $r \in \mathbb{N}_0$ in vsak $x \in \mathbb{R}$ velja:*

$$\lim_{x\to\infty} \Phi_r(x)\,\psi^{(r)}(-x) = 0 \tag{C.3.8}$$

in še:

$$\Phi_r(-x)\,\psi^{(r)}(x) + \Phi_r(x)\,\psi^{(r)}(-x) = 1 \tag{C.3.9}$$

Dokaz. Če je $r = 0$ ali $r = 1$, (C.3.8) takoj sledi iz ocene (C.2.3). Za $r \geq 2$ pa iz (C.3.3) in (C.3.5) sledi:

$$\Phi_r(x) = \frac{1}{(r-1)!}\Big(P_{r-1}(x)\Phi(x) + Q_{r-1}(x)\,\phi(x)\Big) \tag{C.3.10}$$

kjer je P_{r-1} polinom stopnje $r-1$, Q_{r-1} pa stopnje $r-2$. Torej obstaja konstanta C, da za vsak $x \geq 0$ velja:

$$\Phi_r(x) \leq C(1 + x^{r-1}) \tag{C.3.11}$$

in (C.3.8) spet sledi iz (C.2.3) .

Zvezo (C.3.9) pa spet izpeljemo z indukcijo po r. Za $r = 0$ se (C.3.9) prevede na zvezo $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, ki očitno drži. Za $r \in \mathbb{N}$ pa je po trditvi C.3.3 zveza (C.3.9) ekvivalentna zvezi:

$$J_r(x) := \phi(x)\Big[\psi^{(r-1)}(-x)\,\psi^{(r)}(x) + \psi^{(r-1)}(x)\,\psi^{(r)}(-x)\Big] = (r-1)! \tag{C.3.12}$$

Za $r = 1$ po (C.1.4) velja:

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \phi(x)\Big[\psi(-x)\,\psi'(x) + \psi(x)\,\psi'(-x)\Big] = \\ &= \phi(x)\Big[\psi(-x)\big(x\,\psi(x) + 1\big) + \psi(x)\big(-x\,\psi(-x) + 1\big)\Big] = \\ &= \phi(x)\big(\psi(-x) + \psi(x)\big) = \\ &= 1 \end{aligned} \tag{C.3.13}$$

Naredimo zdaj indukcijski korak z r na $r + 1$. Tokrat namesto (C.1.4) upoštevamo rekurentno formulo (C.3.1). Dobimo:

$$\begin{aligned} J_{r+1}(x) &= \phi(x)\Big[\psi^{(r)}(-x)\,\psi^{(r+1)}(x) + \psi^{(r)}(x)\,\psi^{(r+1)}(-x)\Big] = \\ &= \phi(x)\Big[\psi^{(r)}(-x)\big(x\,\psi^{(r)}(x) + r\,\psi^{(r-1)}(x)\big) + \\ &\qquad + \psi^{(r)}(x)\big(-x\,\psi^{(r)}(-x) + r\,\psi^{(r-1)}(-x)\big)\Big] = \\ &= rJ_r(x) = \\ &= r! \end{aligned} \tag{C.3.14}$$

Trditev je s tem dokazana. ∎

Dodatek D

Tenzorski račun

D.1 Multilinearne preslikave

V tem razdelku bomo definirali multilinearne preslikave in jih za končnorazsežne prostore karakterizirali z linearnimi. Prostor vseh linearnih preslikav iz V v W bomo označili z $\mathcal{L}(V, W)$.

Definicija. Naj bodo $V_1, \dots V_r$ in W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Preslikava $\Phi\colon V_1 \times \cdots \times V_r \to W$ je *multilinearna*, če je linearna v vsakem argumentu posebej, t. j., če je za vsak i in poljubne fiksne $v_j \in V_j$, kjer je $j = 1, \dots i-1, i+1, \dots r$, preslikava

$$v_i \mapsto \Phi(v_1, \dots v_r) \tag{D.1.1}$$

linearna. Za $r = 2$ bomo taki preslikavi rekli *bilinearna*. V primeru, ko je kar $W = \mathbb{F}$, bomo preslikavi rekli multilinearni oz. bilinearni *funkcional*. Multilinearnemu (r-linearnemu) funkcionalu na produktu enakih vektorskih prostorov bomo rekli multilinearna oz. r-linearna *forma* (ali krajše *r-forma*).

Prostor multilinearnih preslikav iz $V_1 \times \cdots \times V_r$ v vektorski prostor W bomo označevali z $\mathcal{M}(V_1, \dots V_r; W)$, prostor vseh r-form na V pa z $\mathcal{M}_r(V)$

Vektorski prostor multilinearnih preslikav lahko preprosto izrazimo s prostori linearnih preslikav. Bolj ali manj očitna je namreč naslednja trditev.

Trditev D.1.1. *Naj bodo U, V in W vektorski prostori nad istim obsegom. Tedaj predpis:*

$$\Phi \mapsto (u \mapsto (v \mapsto \Phi(u, v))) \tag{D.1.2}$$

predstavlja linearni izomorfizem iz $\mathcal{M}(U, V; W)$ v $\mathcal{L}(U, \mathcal{L}(V, W))$. ■

Posledica D.1.2. *Predpis*

$$\Phi \mapsto \Big(v_1 \mapsto (v_2 \mapsto \dots (v_r \mapsto \Phi(v_1, \dots v_r) \dots)\Big) \tag{D.1.3}$$

predstavlja linearni izomorfizem med $\mathcal{M}(V_1, \dots V_r; W)$ in $\mathcal{L}(V_1, \mathcal{L}(V_2, \dots \mathcal{L}(V_r, W) \dots))$. ■

Tako lahko za multilinearno preslikavo Φ, ki jo v skladu s posledico D.1.2 identificiramo z ustrezno linearno preslikavo, izraz $\Phi(v_1, \dots v_r)$ pišemo tudi kot:

$$\Phi v_1 v_2 \dots v_{r-1} v_r := (\dots((\Phi v_1) v_2) \dots v_{r-1}) v_r \tag{D.1.4}$$

D.2 Dualni pari vektorskih prostorov

Definicija. *Dualni par vektorskih prostorov* je trojica $(U, V, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$, kjer sta U in V vektorska prostora nad istim obsegom, predpis $(u, v) \mapsto \langle u\,,\,v \rangle$ pa predstavlja neizrojen bilinearni funkcional na $U \times V$ v $\mathbb{F}$, t. j.:

(1) za vsak $u \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$ obstaja tak $v \in V$, da je $\langle u\,,\,v \rangle \neq 0$;

(2) za vsak $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ obstaja tak $u \in U$, da je $\langle u\,,\,v \rangle \neq 0$.

Zgled D.2.1. Realni vektorski prostor s skalarnim produktom tvori dualni par sam s seboj. Kompleksni skalarni produkt pa ni bilinearni funkcional. □

Zgled D.2.2. Če je V' algebraični dual prostora V, prostora V' in V skupaj z bilinearnim funkcionalom $\langle \varphi\,,\,v \rangle := \varphi(v)$ tvorita dualni par. □

Zgled D.2.3. Iz Hahn–Banachovega izreka sledi, da tudi normiran prostor skupaj s svojim normiranim dualom tvori dualni par. □

Trditev D.2.1. *Naj bo $(U, V, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ dualni par vektorskih prostorov in naj bosta U' in V' algebraična duala prostorov U in V. Če je vsaj eden izmed prostorov U in V končnorazsežen, predpisa:*

$$u \mapsto \big(v \mapsto \langle u\,,\,v \rangle\big) \quad \text{in} \quad v \mapsto \big(v \mapsto \langle u\,,\,v \rangle\big) \tag{D.2.1}$$

predstavljata izomorfizma iz U v V' in iz V v U'.

Dokaz. Po definiciji dualnega para sta obe preslikavi injektivni. Sledi:

$$\dim U \leq \dim V' = \dim V \leq \dim U' = \dim U \tag{D.2.2}$$

torej povsod velja enačaj in vse dimenzije so končne. Monomorfizem, ki slika v prostor iste dimenzije, pa je pri končnorazsežnih prostorih že izomorfizem. ■

Trditev D.2.2. *Naj bosta U in V končnorazsežna vektorska prostora iste dimenzije nad istim obsegom $\mathbb{F}$ in naj bo $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ bilinearni funkcional na $U \times V$. Tedaj vsak izmed pogojev* (1) *in* (2) *implicira tudi drugega. Z drugimi besedami, že eden izmed obeh pogojev zadošča, da je $(U, V, \langle \cdot\,,\,\cdot \rangle)$ dualni par vektorskih prostorov.*

Dokaz. Zaradi simetrije zadošča dokazati, da iz pogoja (1) sledi pogoj (2). Naj bo V' algebraični dual prostora V. Iz pogoja (1) sledi, da prvi predpis v (D.2.1) predstavlja injektivno linearno preslikavo (monomorfizem) iz U v V'. Ker pa imata prostora U in V' isto dimenzijo, je ta preslikava tudi surjektivna. Zato za vsak linearni funkcional $\varphi \in V'$ obstaja tak $u \in U$, da za vsak $v \in V$ velja $\varphi(v) = \langle u\,,\,v \rangle$.

Naj bo $v \in V \setminus \{0\}$. Obstaja tak $\varphi \in V'$, da je $\varphi(v) \neq 0$, torej obstaja tudi tak $u \in U$, da je $\langle u\,,\,v \rangle \neq 0$. To pa že pomeni, da je izpolnjen tudi pogoj (2). ■

Definicija. Bazi $\{f_1, \ldots f_n\}$ in $\{e_1, \ldots e_n\}$ končnorazsežnih vektorskih prostorov U in V, ki tvorita dualni par, sta *dualni*, če za poljubna i in j velja:

$$\langle f_j\,,\,e_i \rangle = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases} \tag{D.2.3}$$

Trditev D.2.3. *Če je (U, V) dualni par končnorazsežnih vektorskih prostorov, za vsako bazo prostora V obstaja natanko ena baza prostora U, ki ji je dualna.*

Dokaz. Po trditvi D.2.1 lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je U kar dualni prostor prostora V. Za ta primer pa je trditev očitna. ■

D.3 Tenzorji

Dostikrat imamo opravka z izrazi tipa:

$$\sum_i \Phi(v_{i1}, v_{i2}, \dots v_{ir}) \tag{D.3.1}$$

kjer je Φ multilinearna preslikava. Včasih bi želeli argumente preslikave Φ gledati posebej, tako da bi bila preslikava Φ delovala na vsoti nekih izrazov, povezanih z v_{ij}. Kakšen objekt bi bila potem ta vsota? Vsekakor bi bila Φ linearna preslikava na prostoru takih objektov, ki jim bomo rekli *tenzorji*.

Definicija. Naj bodo $V_1, \dots V_r$ vektorski prostori nad istim obsegom. *Tenzorski produkt* vektorskih prostorov $V_1, \dots V_r$ je vektorski prostor W_0 skupaj z multilinearno preslikavo $\Phi_0 \in \mathcal{M}(V_1, \dots V_r; W_0)$, pri čemer mora za vsak vektorski prostor W in multilinearno preslikavo $\Phi \in \mathcal{M}(V_1, \dots V_r; W)$ obstajati natanko ena taka *linearna* preslikava $L\colon\ W_0 \to W$, da naslednji diagram komutira:

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_r \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Phi_0"'] & W \\ W_0 \arrow[ur, dashed, "L"'] & \end{tikzcd} \tag{D.3.2}$$

Prostor W_0 navadno označimo z $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$, če so prostori V_i vsi enaki nekemu prostoru V, pa kar z $V^{\otimes r}$. Elementom prostora W_0 pravimo *tenzorji*, vrednostim $\Phi_0(v_1, \dots v_r)$ pa *razcepni tenzorji*. Slednje navadno označujemo z $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$.

Opomba. Če so prostori $V_1, \dots V_r$ končnorazsežni, se je v zgornji definiciji dovolj omejiti na primer, ko je tudi prostor W končnorazsežen. Če so $V_1, \dots V_r$ končnorazsežni, je namreč zaloga vrednosti preslikave Φ vsebovana v nekem končnorazsežnem podprostoru prostora W.

Opomba. Vsaka linearna preslikava, ki slika iz tenzorskega produkta, je enolično določena z vrednostmi na razcepnih tenzorjih. Od tod sledi tudi, da je vsak tenzor linearna kombinacija razcepnih.

Opomba. Preslikava:

$$L \mapsto \Big((v_1, \dots v_r) \mapsto L(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)\Big) \tag{D.3.3}$$

predstavlja izomorfizem med $\mathcal{L}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_r, W)$ in $\mathcal{M}(V_1, \dots V_r; W)$.

Porodi se seveda vprašanje, ali tenzorski produkti sploh obstajajo in koliko se med seboj razlikujejo. Odgovor na prvo vprašanje je pritrdilen, obstajajo celo tenzorski produkti modulov (glej npr. Blyth [32]). V tem delu bomo potrebovali le tenzorske produkte končnorazsežnih prostorov, ki jih bomo konstruirali v naslednjem razdelku. Na drugo vprašanje pa odgovarja naslednja trditev.

Trditev D.3.1. *Vsi tenzorski produkti danih vektorskih prostorov $V_1, \dots V_r$ so si izomorfni. Natančneje, za poljubna tenzorska produkta W_1 in W_2 s pripadajočima preslikavama Φ_1 in Φ_2 obstaja tak izomorfizem $L\colon W_1 \to W_2$, da naslednji diagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times \cdots \times V_r \arrow[dl, "\Phi_1"'] \arrow[dr, "\Phi_2"] & \\ W_1 \arrow[rr, dashed, "L", "\cong"'] & & W_2 \end{tikzcd} \tag{D.3.4}$$

Dokaz. Obstajata taki linearni preslikavi $L\colon W_1 \to W_2$ in $L'\colon W_2 \to W_1$, da komutira naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times \cdots \times V_r \arrow[dl, "\Phi_1"'] \arrow[d, "\Phi_2"] \arrow[dr, "\Phi_1"] & \\ W_1 \arrow[r, "L"'] & W_2 \arrow[r, "L'"'] & W_1 \end{tikzcd} \tag{D.3.5}$$

Torej komutira tudi naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times \cdots \times V_r \arrow[dl, "\Phi_1"'] \arrow[dr, "\Phi_2"] & \\ W_1 \arrow[rr, "L' \circ L"'] & & W_1 \end{tikzcd} \tag{D.3.6}$$

Ta diagram pa komutira tudi, če preslikavo $L' \circ L$ zamenjamo z identiteto. Zaradi enoličnosti mora biti torej $L' \circ L$ kar identiteta na W_1. Podobno vidimo, da je $L \circ L'$ identiteta na W_2. Od tod pa sledi, da je L izomorfizem. ∎

Trditev D.3.2. *Vsak element tenzorskega produkta je linearna kombinacija razcepnih tenzorjev.*

Dokaz. Naj bo W_0 skupaj s preslikavo Φ_0 tenzorski produkt vektorjev $V_1, \dots V_r$ in naj bo W_0^{F} linearna ogrinjača razcepnih tenzorjev v W_0. Očitno Φ_0 slika v W_0^{F}. Označimo z ι naravno vložitev prostora W_0^{F} v W_0. Po definiciji vložitve in tenzorskega produkta obstaja taka preslikava $p\colon W_0 \to W_0^{\mathrm{F}}$, da naslednji diagram komutira:

$$\begin{tikzcd} & V_1 \times \cdots \times V_r \arrow[dl, "\Phi_1"'] \arrow[d, "\Phi_2"] \arrow[dr, "\Phi_1"] & \\ W_0 \arrow[r, "p"'] & W_0^{\mathrm{F}} \arrow[r, "\iota"'] & W_0 \end{tikzcd} \tag{D.3.7}$$

Podobno kot pri prejšnjem dokazu se mora zaradi enoličnosti $\iota \circ p$ ujemati z identiteto na W_0. Od tod pa že sledi, da je $W_0^{\mathrm{F}} = W_0$. ∎

Pri študiju tenzorskih produktov se je dovolj omejiti le na tenzorske produkte dveh prostorov in faktorje lahko po potrebi menjamo: ni težko dokazati naslednje trditve.

Trditev D.3.3. *Naj bodo U, V in W vektorski prostori in $U\otimes V$, $V\otimes U$, $V\otimes W$, $(U\otimes V)\otimes W$, $U\otimes(V\otimes W)$ in $U\otimes V\otimes W$ ustrezni tenzorski produkti. Tedaj je s predpisom:*

$$u\otimes v\mapsto v\otimes u \tag{D.3.8}$$

enolično določen izomorfizem med $U\otimes V$ in $V\otimes U$, s predpisoma:

$$u\otimes v\otimes w\mapsto (u\otimes v)\otimes w \tag{D.3.9}$$

$$u\otimes v\otimes w\mapsto u\otimes (v\otimes w) \tag{D.3.10}$$

pa sta enolično določena izomorfizma med $U\otimes V\otimes W$ in $(U\otimes V)\otimes W$ oz. $U\otimes(V\otimes W)$. ■

D.4 Tenzorski produkti končnorazsežnih prostorov

Naj bosta U in V končnorazsežna vektorska prostora nad poljem $\mathbb{F}$ z bazama $\{e_1,\ldots e_m\}$ in $\{f_1,\ldots f_n\}$. Ker je po trditvi D.3.2 vsak element tenzorskega produkta $U\otimes V$ linearna kombinacija razcepnih tenzorjev, se mora dati tudi zapisati v obliki:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\,e_i\otimes f_j \tag{D.4.1}$$

Tenzorski produkt končnorazsežnih prostorov je torej (če obstaja) spet končnorazsežen. Zapis (D.4.1) nam namiguje, da je to (mn)-razsežen prostor z bazo, ki jo sestavljajo $e_i\otimes f_j$, $i=1,\ldots m$, $j=1,\ldots n$.

Če želimo zgoraj povedano eksaktno utemeljiti, moramo vso stvar pogledati v luči definicije tenzorskega produkta. Vsaka bilinearna preslikava $\Phi\in\mathcal{M}(U,V;W)$ natančno določena z vektorji $w_{ij}:=\Phi(e_i,f_j)$. Vzemimo zdaj vektorja $u=\sum_{i=1}^m\alpha_ie_i\in U$ in $v=\sum_{j=1}^n\beta_jf_j\in V$. Tedaj velja:

$$\Phi(u,v)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_jw_{ij} \tag{D.4.2}$$

Izraz na desni pa lahko gledamo kot linearno preslikavo na matriki $[\alpha_i\beta_j]_{i,j}\in\mathbb{F}^{m\times n}$. Natančneje, če definiramo bilinearno preslikavo $\Phi_0\in\mathcal{M}(U,V;\mathbb{F}^{m\times n})$ in linearno preslikavo $L\colon\ \mathbb{F}^{m\times n}\to W$ po predpisu:

$$\Phi_0\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_ie_i,\sum_{j=1}^{m}\beta_jf_j\right):=[\alpha_i\beta_j]_{i,j} \tag{D.4.3}$$

$$L\big([\gamma_{ij}]_{i,j}\big):=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ij}w_{ij} \tag{D.4.4}$$

naslednji diagram komutira:

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\Phi_0"'] & W \\ \mathbb{F}^{m\times n} \arrow[ur, "L"'] & \end{tikzcd} \tag{D.4.5}$$

Če sta preslikavi Φ in Φ_0 predpisani, je preslikava L je tudi edina taka preslikava, da zgornji diagram komutira, saj je enolično določena na elementarnih matrikah $[\delta_{ij}]_{i,j}$, kjer je δ_{ij} Kroneckerjev delta (t. j. enak ena, če je $i = j$, sicer pa nič). To pa pomeni, da je $\left(\mathbb{F}^{m\times n}, \Phi_0\right)$ tenzorski produkt prostorov U in V.

Tenzorski produkt m- in n-razsežnega prostora je torej res (mn)-razsežen prostor in tenzorje si po zgornji konstrukciji lahko predstavljamo kot matrike. Če sta $U = \mathbb{F}^{m\times 1}$ in $V = \mathbb{F}^{n\times 1}$ kar prostora m in n-razsežnih stolpcev, velja:

$$\Phi_0(\mathsf{u}, \mathsf{v}) = \mathsf{u} \otimes \mathsf{v} = \mathsf{u}\mathsf{v}^{\mathsf{T}} \tag{D.4.6}$$

Tako tudi za poljubne $\mathsf{u} \in \mathbb{F}^{m\times 1}$ in $\mathsf{v}_1, \mathsf{v}_2 \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ velja:

$$(\mathsf{u} \otimes \mathsf{v}_1)\mathsf{v}_2 = \mathsf{u}\mathsf{v}_1^{\mathsf{T}}\mathsf{v}_2 = (\mathsf{v}_1^{\mathsf{T}}\mathsf{v}_2)\mathsf{u} \tag{D.4.7}$$

Prostora $\mathbb{F}^{1\times n}$ in $\mathbb{F}^{n\times 1}$ pa skupaj s predpisom $\langle \mathsf{v}', \mathsf{v}\rangle := \mathsf{v}'\mathsf{v}$ tvorita dualni par. To nam da navdih za konstrukcijo tenzorskega produkta, ki je neodvisna od baze. Naslednja trditev se da dokazati brez težav.

Trditev D.4.1. *Naj bodo U, V in V' končnorazsežni vektorski prostori ter naj V in V' tvorita dualni par. Tedaj predpis:*

$$u \otimes v \mapsto (v' \mapsto \langle v\,,\, v'\rangle u) \tag{D.4.8}$$

enolično določa izomorfizem med $U \otimes V$ in $\mathcal{L}(V', U)$. ∎

Opomba. Trditev D.4.1 se da posplošiti na neskončnorazsežne prostore: če je V dualni prostor prostora V', je tenzorski produkt $U \otimes V'$ izomorfen prostoru vseh linearnih operatorjev končnega ranga iz V v U (glej npr. Defant in Floret [46], str. 20); prostor $U \otimes V$ pa je izomorfen nekemu podprostoru prostora linearnih operatorjev končnega ranga iz V' v U (vložitev konstruiramo s pomočjo vložitve prostora V v njegov drugi dual).

Elemente tenzorskega produkta dveh prostorov lahko torej identificiramo z linearnimi preslikavami. Splošneje, elemente tenzorskega produkta več prostorov lahko identificiramo z multilinearnimi funkcionali.

Trditev D.4.2. *Naj bodo $(U_1', U_1), \ldots (U_r', U_r)$ dualni pari končnorazsežnih vektorskih prostorov nad poljem $\mathbb{F}$. Tedaj je s predpisom:*

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \mapsto \Big((u_r', \ldots u_1') \mapsto \langle u_1'\,,\, u_1\rangle \ldots \langle u_r'\,,\, u_r\rangle\Big) \tag{D.4.9}$$

enolično določen izomorfizem iz $U_1 \otimes \cdots \otimes U_r$ v $\mathcal{M}(U_r', \ldots U_1'; \mathbb{F})$.

Posledica D.4.3. *S predpisom:*

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \mapsto \Big(u_r' \otimes \cdots \otimes u_1' \mapsto \langle u_1'\,,\, u_1\rangle \ldots \langle u_r'\,,\, u_r\rangle\Big) \tag{D.4.10}$$

je enolično določen izomorfizem iz $U_1 \otimes \cdots \otimes U_r$ v $\mathcal{L}(U_r' \otimes \cdots \otimes U_1'; \mathbb{F})$. Tenzorska produkta $U_1 \otimes \cdots \otimes U_r$ in $U_r' \otimes \cdots \otimes U_1'$ torej skupaj s predpisom:

$$\langle u_r' \otimes \cdots \otimes u_1'\,,\, u_1 \otimes \cdots \otimes u_r\rangle = \langle u_1'\,,\, u_1\rangle \ldots \langle u_r'\,,\, u_r\rangle \tag{D.4.11}$$

tvorita dualni par. ∎

Dokaz trditve D.4.2. Z večkratno uporabo trditve D.4.1 dobimo:

$$\begin{aligned} U_1 \otimes \cdots \otimes U_r &\cong \mathcal{L}(U_r', U_1 \otimes \cdots \otimes U_{r-1}) \cong \\ &\cong \mathcal{L}(U_r', \mathcal{L}(U_{r-1}', U_1 \otimes \cdots \otimes U_{r-2})) \cong \ldots \\ \ldots &\cong \mathcal{L}(U_r', \mathcal{L}(U_{r-1}', \ldots \mathcal{L}(U_2', U_1) \ldots)) \cong \\ &\cong \mathcal{L}(U_r', \mathcal{L}(U_{r-1}', \ldots \mathcal{L}(U_2', \mathcal{L}(U_1', \mathbb{F})) \ldots)) \end{aligned} \tag{D.4.12}$$

Iz posledice D.1.2 končno sledi, da je slednji prostor izomorfen $\mathcal{M}(U_r', \ldots, U_1'; \mathbb{F})$ in ni se težko prepričati, da s komponiranjem ustreznih izomorfizmov res dobimo izomorfizem (D.4.9). ∎

D.5 Skrčitve tenzorjev

Definicija. Naj bodo $U_1, U_2, \ldots U_r$ (končnorazsežni) vektorski prostori, pri čemer naj za za neka $i < j$ prostora V_i in V_j tvorita dualni par. *Skrčitev* tenzorskega produkta $U_1 \otimes \cdots \otimes U_r$ glede na indeksa i in j je preslikava:

$$\kappa\colon\ U_1 \otimes \cdots \otimes U_r \to U_1 \otimes \cdots \otimes U_{i-1} \otimes U_{i+1} \otimes \cdots \otimes U_{j-1} \otimes U_{j+1} \otimes \cdots \otimes U_r \tag{D.5.1}$$

ki deluje po predpisu:

$$u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \mapsto \langle u_i\,,\, u_j \rangle u_1 \otimes \cdots \otimes u_{i-1} \otimes u_{i+1} \otimes \cdots \otimes u_{j-1} \otimes u_{j+1} \otimes \cdots \otimes u_r \tag{D.5.2}$$

Zgled D.5.1. Oglejmo si, kaj pomeni skrčitev tenzorskega produkta $\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^n$, pri čemer je ustrezen bilinearni funkcional podan na standardni način, po komponentah (v primeru, ko je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, je to kar običajni skalarni produkt). Vsakemu tenzorju $\mathsf{u} \otimes \mathsf{v}$ po (D.4.6) pripada matrika $\mathsf{u}\mathsf{v}^\mathsf{T}$ (vektorje iz $\mathbb{F}^n$ identificiramo s stolpci iz $\mathbb{F}^{n\times 1}$) in le-ta se skrči v $\langle \mathtt{u}\,,\, \mathsf{v} \rangle$. Matrika:

$$\mathtt{A} = [\alpha_{ij}]_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, \mathsf{e}_i \mathsf{e}_j^\mathsf{T} \tag{D.5.3}$$

kjer so e_i vektorji standardne baze, se tako skrči v:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \langle \mathsf{e}_i\,,\, \mathsf{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = \mathtt{sl}\,\mathtt{A} \tag{D.5.4}$$

□

To nam da navdih za naslednjo definicijo.

Definicija. Naj bo (U', U) dualni par vektorskih prostorov. *Sled* sl $\mathbf{A}$ tenzorja $\mathbf{A} \in U \otimes U'$ je njegova skrčitev. Z drugimi besedami, sled je linearni funkcional, ki deluje po predpisu:

$$\mathrm{sl}(u \otimes u') = \langle u'\,,\, u \rangle \tag{D.5.5}$$

Zgled D.5.2. Vzemimo zdaj dvakratno skrčitev tenzorskega produkta $\mathbb{F}^m \otimes \mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^m \otimes \mathbb{F}^n$, pri čemer za ustrezna dualna para vzamemo prvi in tretji prostor ter drugi in četrti prostor. Naš tenzorski produkt lahko prek (D.4.6) identificiramo s tenzorskim produktom $\mathbb{F}^{m\times n} \otimes \mathbb{F}^{m\times n}$ in element $\mathtt{u}_1\mathtt{v}_1^\mathsf{T} \otimes \mathtt{u}_2\mathtt{v}_2^\mathsf{T}$ se skrči v $\langle \mathtt{u}_1 \,,\, \mathtt{u}_2\rangle\langle \mathtt{v}_1 \,,\, \mathtt{v}_2\rangle$. Če označimo $\mathtt{A} = [\alpha_{ij}]_{i,j}$ in $\mathtt{B} = [\beta_{ij}]_{i,j}$, se:

$$\mathtt{A} \otimes \mathtt{B} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{kl}\ \mathtt{e}_i\mathtt{e}_j^\mathsf{T} \otimes \mathtt{e}_k\mathtt{e}_l^\mathsf{T} \tag{D.5.6}$$

skrči v:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{kl}\,\langle \mathtt{e}_i \,,\, \mathtt{e}_k\rangle\langle \mathtt{e}_j \,,\, \mathtt{e}_l\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\beta_{ij} = \mathtt{sl}(\mathtt{A}\mathtt{B}^\mathsf{T}) \tag{D.5.7}$$

kar je standardni skalarni produkt dolgih vektorjev, ki pripadata matrikama $\mathtt{A}$ in $\mathtt{B}$. □

Zgled D.5.3. Vzemimo r-kratno skrčitev produkta:

$$U_r' \otimes \cdots \otimes U_1' \otimes U_1 \otimes \cdots \otimes U_r \tag{D.5.8}$$

glede na dualne pare (U_i', U_i), $i = 1, \ldots r$. Dobimo dualni par tenzorskih produktov $U_r' \otimes \cdots \otimes U_1'$ in $U_1 \otimes \cdots \otimes U_r$, pri čemer je ustrezni bilinearni funkcional podan tako kot v posledici D.4.3. □

V nadaljevanju bomo obravnavali tenzorske produkte prostorov, ki bodo razdeljeni v dve skupini: prvim, ki jih bomo označevali z $U_1, \ldots U_r$, bomo rekli *kovariantni*, drugim, ki jih bomo označevali z $U_{r'}', \ldots U_1'$, pa *kontravariantni*. Gledali bomo produkte oblike:

$$U_1 \otimes \cdots \otimes U_r \otimes U_{r'}' \otimes \cdots \otimes U_1' \tag{D.5.9}$$

Elementom zgornjega produkta bomo rekli *mešani tenzorji tipa* (r, r'). Tenzorje tipa $(0, 0)$ pa bomo identificirali s skalarji.

Tenzorske produkte kovariantnih tenzorjev bomo vedno šteli *navzgor*, tenzorske produkte kontravariantnih tenzorjev pa *navzdol*: tako bomo $u_1 \otimes \cdots \otimes u_2$ interpretirali kot $u_1 \otimes u_2$, $u_1' \otimes \cdots \otimes u_2'$ pa kot prazen tenzor, t. j. skalar 1.

Definicija. Naj bodo $U_1, \ldots U_r$ in $V_1, \ldots V_s$ kovariantni, $U_{r'}', \ldots U_1'$ in $V_{s'}', \ldots V_1'$ pa kontravariantni prostori. Za vsak $i = 1, \ldots \min\{r', s\}$ naj prostora U_i' in V_i tvorita dualni par. *Skrčitveni produkt* med prostoroma:

$$U = U_1 \otimes \cdots \otimes U_r \otimes U_{r'}' \otimes \cdots \otimes U_1' \tag{D.5.10}$$

$$V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_s \otimes V_{s'}' \otimes \cdots \otimes V_1' \tag{D.5.11}$$

je bilinearna operacija, pri kateri se par $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$, kjer je:

$$\mathbf{U} = u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes u_{r'}' \otimes \cdots \otimes u_1' \in U \tag{D.5.12}$$

$$\mathbf{V} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v_{s'}' \otimes \cdots \otimes v_1' \in V \tag{D.5.13}$$

preslika v element:

$$\mathbf{UV} := \begin{cases} \langle u_1', v_1\rangle \ldots \langle u_{r'}', v_{r'}\rangle u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes v_{r'+1} \otimes \cdots \otimes v_s \otimes v_{s'}' \otimes \cdots \otimes v_1' & ; r' \leq s \\ \langle u_1', v_1\rangle \ldots \langle u_s', v_s\rangle u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes u_{r'}' \otimes \cdots \otimes u_{s+1}' \otimes v_{s'}' \otimes \cdots \otimes v_1' & ; r' \geq s \end{cases} \tag{D.5.14}$$

To je torej skrčitev tenzorskega produkta $U \otimes V$, in sicer glede na dualne pare (U_i', V_i), $i = 1, \ldots \min\{r', s\}$.

Trditev D.5.1. *Skrčitveni produkt je asociativen. Natančneje, naj bosta dana nabora kovariantnih in kontravariantnih vektorskih prostorov,* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *in* $\mathbf{W}$ *pa naj bodo tenzorji iz tenzorskih produktov teh prostorov, pri čemer so vsi kovariantni prostori pred kontravariantnimi. Tedaj se dualni pari, ki jih potrebujejo za računanje skrčitvenih produktov* $\mathbf{UV}$ *in* $(\mathbf{UV})\mathbf{W}$, *ujemajo z dualnimi pari, potrebnimi za računanje skrčitvenih produktov* $\mathbf{VW}$ *in* $\mathbf{U}(\mathbf{VW})$. *Velja tudi* $(\mathbf{UV})\mathbf{W} = \mathbf{U}(\mathbf{VW})$.

Preden dokažemo trditev, si oglejmo nekaj zgledov, ki kažejo, kaj vse se da izraziti s skrčitvenim množenjem.

Zgled D.5.4. Če so prostori $U_1, \ldots U_r$ bodisi vsi kovariantni bodisi vsi kontravariantni in $u_i \in U_i$, velja:

$$u_1 u_2 \ldots u_r = u_1 \otimes u_2 \otimes \cdots \otimes u_r \tag{D.5.15}$$

□

Zgled D.5.5. Naj bosta (U', U) in (V', V) dualna para končnorazsežnih vektorskih prostorov, pri čemer prostora U in V proglasimo za kovariantna, U' in V' pa za kontravariantna. Če tenzorje iz $U \otimes V'$ prek zveze:

$$u \otimes v' \longleftrightarrow \Big(v \mapsto \langle v', v\rangle u \Big) \tag{D.5.16}$$

identificiramo z linearnimi preslikavami iz V v U in je na tak način tenzor $\mathbf{A}$ identificiran z linearno preslikavo A, imata zapisa $\mathbf{A}v$ in Av enak pomen, če je v prvem primeru mišljen skrčitveni produkt, v drugem primeru pa evaluacija. Podobno, če element $u' \in U'$ prek ustreznega bilinearnega funkcionala identificiramo z linearnim funkcionalom φ na prostoru U, se kontravariantni vektor, ki je podan kot skrčitveni produkt $u'\mathbf{A}$ identificira z linearnim funkcionalom, ki je podan kot kompozitum φA.

Podobno, če je podan še dualni par kontravariantnega prostora W' in kovariantnega prostora W ter če dan tenzor $\mathbf{B} \in V \otimes W'$ prek zveze (D.5.16) identificiramo z linearno preslikavo B iz W v V, se tenzor, ki je podan kot skrčitveni produkt $\mathbf{AB}$, identificira z linearno preslikavo, ki je podana kot kompozitum AB.

Zgornje ugotovitve lahko zapišemo tudi v jeziku matrik. Prek ustreznega sistema dualnih baz lahko kovariantne vektorje identificiramo s stolpci, kontravariantne z vrsticami, tenzorje tipa $(1, 1)$ pa z matrikami prek zveze:

$$[\alpha_{ij}]_{i,j} \longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, e_i \otimes f_j' \tag{D.5.17}$$

kjer sta $\{e_1, \dots e_m\}$ in $\{f'_1, \dots f'_n\}$ ustrezna kovariantna in kontravariantna baza. Če tako kovarianten vektor v identificiramo s stolpcem $\mathtt{v}$, kontravarianten vektor u' z vrstico $\mathtt{u}'$, tenzorja $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ pa z matrikama $\mathtt{A}$ in $\mathtt{B}$, zapisi $\mathbf{A}v$, $u'\mathbf{A}$ in $\mathbf{AB}$, izraženi s skrčitvenim množenjem, ustrezajo zapisom $\mathtt{Av}$, $\mathtt{u}'\mathtt{A}$ in $\mathtt{AB}$, izraženimi z običajnim matričnim množenjem.

Identiteti na danem kovariantnem prostoru, ki tvori dualni par z nekim kontravariantnim prostorom, v tem smislu pripada *identični mešani* $(1,1)$-*tenzor*:

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^{n} e_i e'_i \tag{D.5.18}$$

kjer sta $e_1, \dots e_n$ in $e'_1, \dots e'_n$ izbrani dualni bazi. Slednji je enota tudi v splošnem: za poljuben mešani tenzor $\mathbf{A}$ velja:

$$\mathbf{AI} = \mathbf{A} \quad \text{in} \quad \mathbf{IA} = \mathbf{A} \tag{D.5.19}$$

□

Zgled D.5.6. Če so $U_1, \dots U_r$ kovariantni, $U'_r, \dots U'_1$ pa kontravariantni prostori ter $u_i \in U_i$ in $u'_i \in U'_i$, velja:

$$u'_r \dots u'_2 u'_1 u_1 u_2 \dots u_{r-1} u_r = \langle u'_1\,,\, u_1\rangle\langle u'_2\,,\, u_2\rangle \dots \langle u'_r\,,\, u_r\rangle \tag{D.5.20}$$

Če je nadalje še $u' \in U'_r \otimes \cdots \otimes U'_2 \otimes U'_1$, ima zapis:

$$u' u_1 u_2 \dots u_r \tag{D.5.21}$$

enak pomen, če ga interpretiramo v smislu zgornje definicije ali pa u' v smislu trditev D.4.2 in D.1.2 interpretiramo kot element prostora $\mathcal{L}(U, \mathcal{L}(U, \dots \mathcal{L}(U, \mathbb{F}) \dots))$, pri čemer izraz (D.5.21) računamo tako kot v (D.1.4). □

Dokaz trditve D.5.1. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je:

$$\mathbf{U} = u \otimes u'_{r'} \otimes \cdots \otimes u'_1 \tag{D.5.22}$$
$$\mathbf{V} = v_1 \otimes \cdots \otimes v_s \otimes v'_{s'} \otimes \cdots \otimes v_1 \tag{D.5.23}$$
$$\mathbf{W} = w_1 \otimes \cdots \otimes w_t \otimes w' \tag{D.5.24}$$

kjer $u, v_1, \dots v_s$ in $w_1, \dots w_t$ pripadajo kovariantnim, $u'_{r'}, \dots u'_1, v'_{s'}, \dots v'_1$ in w' pa kontravariantnim prostorom. Ločimo pet primerov.

Prvi primer: $r' \le s, s' \ge t$. V tem primeru velja:

$$\begin{aligned}(\mathbf{UV})\mathbf{W} = \mathbf{U}(\mathbf{VW}) = \langle u'_1\,,\, v_1\rangle \dots \langle u'_{r'}\,,\, v_{r'}\rangle\langle v'_1\,,\, w_1\rangle \dots \langle v'_t\,,\, w_t\rangle \times \\ \times\, u \otimes v_{r'+1} \otimes \cdots \otimes v_s \otimes v'_{s'} \otimes \cdots \otimes v'_{t+1} \otimes w'\end{aligned} \tag{D.5.25}$$

Drugi primer: $r' \ge s, s' \ge t$. V tem primeru velja:

$$\begin{aligned}(\mathbf{UV})\mathbf{W} = \mathbf{U}(\mathbf{VW}) = \langle u'_1\,,\, v_1\rangle \dots \langle u'_s\,,\, v_s\rangle\langle v'_1\,,\, w_1\rangle \dots \langle v'_t\,,\, w_t\rangle \times \\ \times\, u \otimes u'_{r'} \otimes \cdots \otimes u'_{s+1} \otimes v'_{s'} \otimes \cdots \otimes v'_{t+1} \otimes w'\end{aligned} \tag{D.5.26}$$

Tretji primer: $r' \leq s, s' \leq t$. V tem primeru velja:

$$\begin{aligned}(\mathbf{UV})\mathbf{W} = \mathbf{U}(\mathbf{VW}) = \langle u'_1\,, v_1\rangle \dots \langle u'_{r'}\,, v_{r'}\rangle\langle v'_1\,, w_1\rangle \dots \langle v'_{s'}\,, w_{s'}\rangle \times \\ \times\, u \otimes v_{r'+1} \otimes \dots \otimes v_s \otimes w_{s'+1} \otimes \dots \otimes w_t \otimes w'\end{aligned} \tag{D.5.27}$$

Četrti primer: $r' \geq s, s' \leq t, r' + s' \leq s + t$. V tem primeru velja:

$$\begin{aligned}(\mathbf{UV})\mathbf{W} = \mathbf{U}(\mathbf{VW}) = \langle u'_1\,, v_1\rangle \dots \langle u'_s\,, v_s\rangle\langle v'_1\,, w_1\rangle \dots \langle v'_{s'}\,, w_{s'}\rangle \times \\ \times \langle u'_{s+1}\,, w_{s'+1}\rangle \dots \langle u'_{r'}\,, w_{r'+s'-s}\rangle u \otimes w_{r'+s'-s+1} \otimes \dots \otimes w_t \otimes w'\end{aligned} \tag{D.5.28}$$

Peti primer: $r' \geq s, s' \leq t, r' + s' \geq s + t$. V tem primeru velja:

$$\begin{aligned}(\mathbf{UV})\mathbf{W} = \mathbf{U}(\mathbf{VW}) = \langle u'_1\,, v_1\rangle \dots \langle u'_s\,, v_s\rangle\langle v'_1\,, w_1\rangle \dots \langle v'_{s'}\,, w_{s'}\rangle \times \\ \times \langle u'_{s+1}\,, w_{s'+1}\rangle \dots \langle u'_{s+t-s'}\,, w_t\rangle u \otimes u'_{r'} \otimes \dots \otimes u'_{s+t-s'+1} \otimes w'\end{aligned} \tag{D.5.29}$$

■

D.6 Tenzorski produkti evklidskih prostorov

Naj bosta U in V evklidska prostora. Zanima nas, ali se da smiselno uvesti skalarni produkt na tenzorski produkt $U \otimes V$. Skalarni produkt ni nič drugega kot neizrojen bilinearni funkcional, ki zadošča še določenim drugim lastnostim. Z drugimi besedami, evklidski prostor sam s seboj tvori dualni par. Tenzorske produkte dualnih parov pa smo že obravnavali v posledici D.4.3. Tako je skalarni produkt na tenzorskem produktu smiselno definirati na naslednji način.

Definicija. *Tenzorski produkt evklidskih prostorov U* in *V* je vektorski prostor $U \otimes V$, na katerega uvedemo bilinearni funkcional $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ po predpisu:

$$\langle u_1 \otimes v_1\,, u_2 \otimes v_2\rangle := \langle u_1\,, u_2\rangle\langle v_1\,, v_2\rangle \tag{D.6.1}$$

Trditev D.6.1. *Zgoraj definirana bilinearna operacija je tudi skalarni produkt. Z drugimi besedami, tenzorski produkt evklidskih prostorov je tudi evklidski prostor.*

Dokaz. Simetričnost podane bilinearne operacije je očitna. Preveriti moramo le še, da za poljuben $w \in U \otimes V$ velja $\langle w\,, w\rangle \geq 0$ in da enakost velja natanko tedaj, ko je $w = 0$. Naj bosta $\{e_1, \dots e_m\}$ in $\{f_1, \dots f_n\}$ ortonormirani bazi prostorov U in V. Po (D.4.1) lahko pišemo:

$$w = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, e_i \otimes f_j \tag{D.6.2}$$

Torej je:

$$\langle w\,, w\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha_{kl}\, \langle e_i\,, e_k\rangle\langle f_j\,, f_l\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 \geq 0 \tag{D.6.3}$$

in enakost velja natanko tedaj, ko je $\alpha_{ij} = 0$ za vse i in j, to pa je takrat, ko je $w = 0$. ■

D.7 Dviganje in spuščanje indeksov

Omenili smo že, da vsak evklidski prostor tvori dualni par sam s seboj. Včasih pa je vendarle ugodno, če sta prostora, ki tvorita dualni par, "fizično" ločena: v razdelku D.5 smo vektorske prostore razdelili na kovariantne in kontravariantne ter definirali skrčitveni produkt, ki je bil odvisen od tega, ali smo dani prostor proglasili za kovarianten ali kontravarianten. Tako bomo vzeli dve kopiji evklidskega prostora, enega bomo proglasili za kovariantnega, drugega pa za kontravariantnega, prostora pa bosta povezana z izomorfizmom. Če je $\Phi\colon U \to V$ izomorfizem *ločenih* evklidskih prostorov, bomo navadno označevali:

$$\Phi(u) = u^T, \quad \Phi^{-1}(v) = v^T \tag{D.7.1}$$

Zgornja notacija izhaja iz matričnega računa, ko za U vzamemo prostor vrstic $\mathbb{F}^{1\times n}$, za V pa prostor stolpcev $\mathbb{F}^{n\times 1}$. Tako je Φ kar transponiranje (v nadaljevanju bomo navedli še nekaj vzporednic z matričnim računom). Zgornja izvajanja povzamemo v naslednjo definicijo.

Definicija. *Dualni par evklidskih prostorov* je par ločenih evklidskih prostorov U in V, med katerima je podan izomorfizem. Če le-ta preslika $u \in U$ v $v \in V$, bomo pisali $u = v^T$ in $v = u^T$. Ustrezni bilinearni funkcional med prostoroma je določen s predpisom:

$$\langle u\,, v\rangle := \langle u\,, v^T\rangle = \langle u^T\,, v\rangle \tag{D.7.2}$$

Če prostor U proglasimo za kontravariantnega, V pa za kovariantnega, pravimo preslikavi $u \mapsto u^T$ *spust indeksa*, preslikavi $v \mapsto v^T$ pa *dvig indeksa*.

Opomba. Izraza dvig in spust indeksa izvirata iz tradicije zapisovanja baznih vektorjev, kjer se kovariantni se zapisujejo z indeksi spodaj, t. j. $e_1, e_2, \ldots$, kontravariantni pa z indeksi zgoraj, t. j. $e^1, e^2 \ldots$.

Opomba. Če je $\{e_1, \ldots e_n\}$ ortonormirana baza katerega od prostorov, je $\{e_1^T, \ldots e_n^T\}$ njej dualna baza.

Opomba. Zvezo (D.7.2) lahko zapišemo tudi s skrčitvenim produktom: če sta v_1 in v_2 kovariantna vektorja, velja:

$$\langle v_1\,, v_2\rangle = v_1^T v_2 \tag{D.7.3}$$

kar je enako kot pri matričnem računu.

Definicija. Naj bosta (U_1, V_1) in (U_2, V_2) dualna para evklidskih prostorov, pri čemer prostora U_1 in U_2 proglasimo za kontravariantna, prostora V_1 in V_2 pa za kovariantna. *Tenzorski produkt dualnih parov evklidskih prostorov* je dualni par evklidskih prostorov, ki ga sestavljajo kovariantni prostor $V_1 \otimes V_2$, kontravariantni prostor $U_2 \otimes U_1$ in izomorfizem:

$$(v_1 \otimes v_2)^T := v_2^T \otimes v_1^T \tag{D.7.4}$$

Vrstni red pri kontravariantnih faktorjih smo obrnili zato, ker se potem bilinearni funkcional na produktu prostorov $U_2 \otimes U_1$ in $V_1 \otimes V_2$ ujema s skrčitvenim množenjem, saj velja:

$$\begin{aligned}\langle u_2 \otimes u_1\,,\, v_1 \otimes v_2\rangle &= \langle (u_2 \otimes u_1)^T\,,\, v_1 \otimes v_2\rangle = \langle u_1^T \otimes u_2^T\,,\, v_1 \otimes v_2\rangle = \langle u_1^T\,,\, v_1\rangle\langle u_2^T\,,\, v_2\rangle = \\ &= \langle u_1\,,\, v_1\rangle\langle u_2\,,\, v_2\rangle = u_2u_1v_1v_2\end{aligned} \tag{D.7.5}$$

Poleg tega podobno kot pri matričnem računu velja formula:

$$(v_1v_2)^T = v_2^Tv_1^T \tag{D.7.6}$$

(to je le formula (D.7.4), zapisana s skrčitvenim produktom). Zgornja trditev velja še splošneje: z definicijo tenzorskega produkta dualnih parov evklidskih prostorv postane zapis $\mathbf{U}^T$ smiselno definiran za vsak tenzor $\mathbf{U}$; če je $\mathbf{U}$ tenzor tipa (r, s), je $\mathbf{U}^T$ tenzor tipa (s, r). V posebnem primeru, ko je $s = r = 0$ in je $\mathbf{U}$ skalar, postavimo kar $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}$. Brez težav dokažemo naslednjo trditev.

Trditev D.7.1. *Naj bosta* $\mathbf{U}$ *in* $\mathbf{V}$ *tenzorja, med katerima obstaja skrčitveni produkt* $\mathbf{UV}$. *Tedaj obstaja tudi skrčitveni produkt* $\mathbf{V}^T\mathbf{U}^T$ *in velja:*

$$(\mathbf{UV})^T = \mathbf{V}^T\mathbf{U}^T \tag{D.7.7}$$

■

Navedli bomo še eno pomembno vzporednico z matričnim računom.

Zgled D.7.1. Naj bosta (U, V) in (X, Y) dualna para evklidskih prostorov ter naj bosta $\{e_1, \dots e_m\}$ in $\{f_1, \dots f_n\}$ ortonormirani bazi prostorov V in Y. Tedaj sta $\{e_1^T, \dots e_m^T\}$ in $\{f_1^T, \dots f_n^T\}$ ortonormirani bazi prostorov U in X. Vzemimo poljuben tenzor:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, e_i \otimes f_j^T \in V \otimes X \tag{D.7.8}$$

Le-tega po zvezi (D.5.17) identificiramo z matriko:

$$\mathtt{A} = [\alpha_{ij}]_{i,j} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, \mathsf{e}_i\mathsf{e}_j^{\mathtt{T}} \in \mathbb{R}^{m\times n} \tag{D.7.9}$$

kjer so $\mathsf{e}_i \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ standardni bazni stolpci. Tenzor:

$$\mathbf{A}^T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, f_j \otimes e_i^T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji}\, f_i \otimes e_j^T \in Y \otimes U \tag{D.7.10}$$

pa se prav tako po zvezi (D.5.17) identificira z matriko:

$$[\alpha_{ji}]_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji}\, \mathsf{e}_i\mathsf{e}_j^{\mathtt{T}} = \mathtt{A}^{\mathtt{T}} \in \mathbb{R}^{n\times m} \tag{D.7.11}$$

Skratka, če tenzorje tipa $(1, 1)$ po zvezi (D.5.17) identificiramo z matrikami, tenzorsko transponiranje ustreza matričnemu. □

Zdaj, ko imamo definiran tenzorski produkt, lahko tudi oba skalarna produkta na kontravariantnem prostoru U in kovariantnem prostoru V, ki tvorita dualni par evklidskih prostorov, opišemo s tenzorjema: obstaja natanko en tenzor $\mathcal{J}$ tipa $(2,0)$, za katerega za poljubna $v_1, v_2 \in V$ velja:

$$\langle \mathcal{J}\,,\, v_1 \otimes v_2 \rangle = \mathcal{J} v_1 v_2 = \langle v_1\,,\, v_2 \rangle \tag{D.7.12}$$

Podobno obstaja natanko en tenzor $\mathcal{I}$ tipa $(0,2)$, za katerega za poljubna $u_1, u_2 \in U$ velja:

$$\langle u_1 \otimes u_2\,,\, \mathcal{I} \rangle = u_1 u_2 \mathcal{I} = \langle u_1\,,\, u_2 \rangle \tag{D.7.13}$$

Tenzorjema $\mathcal{I}$ in $\mathcal{J}$ pravimo *fundamentalna tenzorja* ali *fundamentalna funkcionala*.

Trditev D.7.2. *Naj bo (U, V) dualni par evklidskih prostorov in naj bo $\{e_1, \dots e_n\}$ ortonormirana baza prostora V. Tedaj se fundamentalna tenzorja izražata v obliki:*

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i\,, \quad \mathcal{J} = \sum_{i=1}^{n} e_i^T \otimes e_i^T = \mathcal{I}^T \tag{D.7.14}$$

Dokaz. Dovolj je dokazati, da, če $\mathcal{I}$ in $\mathcal{J}$ definiramo kot v (D.7.14), velja (D.7.12) in (D.7.13). Računajmo:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{J}\,,\, v_1 \otimes v_2 \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i^T \otimes e_i^T\,,\, v_1 \otimes v_2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \otimes e_i\,,\, v_1 \otimes v_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v_1\,,\, e_i \rangle \langle v_2\,,\, e_i \rangle = \\ &= \langle v_1\,,\, v_2 \rangle\end{aligned} \tag{D.7.15}$$

Podobno dobimo zahtevano zvezo tudi za $\mathcal{I}$. ■

Potrebovali bomo še nekaj zvez, ki povezujejo skrčitveni produkt, transponiranje in fundamentalni tenzor.

Trditev D.7.3. *Naj bo $\mathcal{I}$ fundamentalni kovariantni tenzor in v kovariantni vektor. Tedaj velja:*

$$\mathcal{I}^T v = v^T \tag{D.7.16}$$

$$v^T \mathcal{I} = v \tag{D.7.17}$$

Nadalje za vsak tenzor $\mathbf{A}$ *tipa* $(1,1)$ *velja:*

$$\mathcal{I}^T \mathbf{A} \mathcal{I} = \operatorname{sl} \mathbf{A} \tag{D.7.18}$$

Dokaz. Za poljuben kovarianten vektor w velja:

$$\langle \mathcal{I}^T v\,,\, w \rangle = \mathcal{I}^T v w = \langle v\,,\, w \rangle = \langle v^T\,,\, w \rangle \tag{D.7.19}$$

od koder sledi (D.7.16). Podobno za poljuben kontravarianten vektor u velja:

$$\langle u\,,\, v^T \mathcal{I} \rangle = u v^T \mathcal{I} = \langle u\,,\, v^T \rangle = \langle u\,,\, v \rangle \tag{D.7.20}$$

od koder sledi (D.7.17). Zvezo (D.7.18) pa je dovolj dokazati za primer, ko je $\mathbf{A} = vu$, kjer je v kovarianten, u pa kontravarianten vektor. Iz (D.7.16) in (D.7.17) sledi:

$$\mathcal{I}^T v u \mathcal{I} = v^T u^T = (uv)^T = uv = \operatorname{sl}(vu) \tag{D.7.21}$$

S tem je dokaz končan. ■

D.8 Norme tenzorjev

Definirali smo tenzorske produkte vektorskih prostorov. Pa recimo, da so ti prostori normirani. Nastane vprašanje, ali tudi na njihovem tenzorskem produktu obstaja kakšna norma, ki bi se računsko ujemala z normami na faktorjih. Obravnavali bomo dve normi: projektivno in njej dualno injektivno normo.

Definicija. Naj bo (U', U) dualni par končnorazsežnih vektorskih prostorov. Normi $|\cdot|'$ in $|\cdot|$ na U' in U sta *dualni* glede na dani bilinearni funkcional, če velja:

$$|u'|' = \sup\{|\langle u' , u\rangle| \; ; \; |u| \le 1\} \tag{D.8.1}$$

$$|u| = \sup\{|\langle u' , u\rangle| \; ; \; |u'|' \le 1\} \tag{D.8.2}$$

Dualni par vektorskih prostorov, opremljenih z dualnima normama, bomo imenovali *dualni par normiranih prostorov*.

Opomba. Zgornji enakosti sta si ekvivalentni, dovolj je, da dokažemo le eno izmed njih. To namreč sledi iz dejstva, da je naravna vložitev normiranega prostora v drugi dual izometrična.

Opomba. Norma na evklidskem prostoru je sama sebi dualna.

Injektivno normo motivira identifikacija tenzorjev z multilinearnimi funkcionali. Natančneje, če so $(U_1', U_1), \dots (U_r', U_r)$ dualni pari končnorazsežnih vektorskih prostorov, lahko po trditvi (D.4.10) tenzorje iz $U_r' \otimes \cdots \otimes U_1'$ identificiramo z linearnimi funkcionali na $U_1 \otimes \cdots \otimes U_r$, le-te pa z multilinearnimi funkcionali. Normo multilinearne preslikave Φ definiramo kot:

$$\|\Phi\| := \sup\{\Phi(u_1, \dots u_r) \; ; \; (\forall i)|u_i| \le 1\} \tag{D.8.3}$$

V skladu s tem definiramo injektivno normo na naslednji način.

Definicija. Naj bodo $(U_i', |\cdot|_i', U_i, |\cdot|_i)$, $i = 1, \dots r$ dualni pari normiranih prostorov. *Injektivna norma* na tenzorskem produktu $U_r' \otimes \cdots \otimes U_1'$ je definirana po predpisu:

$$|u'|_\vee := \sup\{\langle u' , u_1 \otimes \cdots \otimes u_r\rangle \; ; \; (\forall i)|u_i|_i \le 1\} \tag{D.8.4}$$

kjer je ustrezni bilinearni funkcional $\langle \cdot , \cdot \rangle$ definiran tako kot v (D.4.11).

Opomba. Definicija je neodvisna od izbire prostorov $U_1, \dots U_r$.

V razdelku D.4 (trditev D.4.1) smo spoznali, da je tenzorski produkt končnorazsežnih prostorov U in V izomorfen prostoru $\mathcal{L}(V', U)$, če prostora V in V' tvorita dualni par. Ustrezni izomorfizem vsak razcepni tenzor $w := u \otimes v$ preslika v linearno preslikavo W, ki deluje po predpisu $Wv' := \langle v' , v\rangle u$. Če dualni par tvorita tudi prostora U in U', velja tudi:

$$\langle u' , Wv'\rangle = \langle u' , u\rangle\langle v' , v\rangle = \langle u' \otimes v' , u \otimes v\rangle \tag{D.8.5}$$

Toda zaradi linearnosti se mora potem *vsak* tenzor $w \in U \otimes V$ preslikati v linearno preslikavo, ki deluje po predpisu:

$$\langle u' , Wv'\rangle = \langle u' \otimes v' , w\rangle \tag{D.8.6}$$

Od tod pa brž dobimo naslednji rezultat.

Trditev D.8.1. *Če elemente tenzorskega produkta $U \otimes V$ po trditvi D.4.1 identificiramo z linearnimi preslikavami iz V' v U, se injektivna norma tenzorja ujema z operatorsko normo ustrezne linearne preslikave.* ■

Omenimo naj še naslednjo posplošitev na neskončnorazsežne prostore (za dokaz glej npr. Konvalinka [72]).

Trditev D.8.2. *Če sta U in V Banachova prostora in V' prostor vseh omejenih linearnih funkcionalov nad V, pa je $U \otimes V$ z injektivno normo izometrično izomorfen prostoru vseh šibko $*$-zveznih linearnih operatorjev končnega ranga iz V' v U, ki ga opremimo z običajno operatorsko normo.* ■

Oglejmo si še projektivno normo.

Definicija. Naj bodo $U_1, \dots U_r$ normirani prostori z normami $|\cdot|_1, \dots |\cdot|_r$ in $U'_1, \dots U'_r$ njihovi dualni prostori, opremljeni z dualnimi normami $|\cdot|'_1, \dots |\cdot|'_r$. *Projektivna norma* $|\cdot|_\wedge$ na tenzorskem produktu $U_1 \otimes \cdots \otimes U_r$ je norma, ki je dualna injektivni normi na prostoru $U'_r \otimes \cdots \otimes U'_1$ glede na bilinearni funkcional iz (D.4.10).

Opomba. Tudi tu lahko za prostore U'_i vzamemo poljubne vektorske prostore, ki s posameznimi prostori U_i tvorijo dualne pare normiranih prostorov.

Trditev D.8.3. *Če tenzorski produkt $U_1 \otimes \cdots \otimes U_r$ opremimo s projektivno normo, se v diagramu* (D.3.2) *norma preslikave L ujema z normo preslikave Φ.*

Opomba. Navadno se trditev D.8.3 vzame prav za definicijo projektivne norme; v končnorazsežnih prostorih je oboje ekvivalentno, v neskončnorazsežnih pa ne nujno (glej Defant in Floret [46]).

Dokaz trditve D.8.3. Za $W = \mathbb{R}$ to sledi iz definicije projektivne norme ter ekvivalentnosti (D.8.1) in (D.8.2). Za splošen končnorazsežen prostor W to sledi iz dejstva, da za vsak $w \in W$ velja:

$$|w| = \sup\{w'w \; ; \; w' \in W', |w'| \leq 1\} \tag{D.8.7}$$

kjer je W' dualni prostor prostora W z normo $|\cdot|'$, dualno normi $|\cdot|$. Normi preslikav Φ in L pa se ujemata, tudi če je prostor W neskončnorazsežen, saj je zaloga vrednosti preslikav Φ in L vsebovana v nekem končnorazsežnem podprostoru. ■

Trditev D.8.4. *Normi $|\cdot|_\wedge$ in $|\cdot|_\vee$ sta* **križni**: *za poljubne končnorazsežne vektorske prostore $U_1, \dots U_r$ z normami $|\cdot|_1, \dots |\cdot|_r$ in poljubne vektorje $u_i \in U_i$ velja:*

$$|u_1 \otimes \cdots \otimes u_r|_\wedge = |u_1|_1 \dots |u_r|_r \tag{D.8.8}$$

Podobno za poljubne končnorazsežne vektorske prostore $U'_r, \dots U'_1$ z normami $|\cdot|'_1, \dots |\cdot|'_r$ in poljubne vektorje $u'_i \in U'_i$ velja:

$$|u'_r \otimes \cdots \otimes u'_1|_\vee = |u'_r|'_r \dots |u'_1|'_1 \tag{D.8.9}$$

Dokaz. Najprej pokažimo (D.8.9). Naj bodo $U_1, \dots U_r$ normirani prostori, dualni prostorom $U_1', \dots U_r'$. Če je $|u_i|_i \le 1$ za vsak i, velja tudi:

$$|\langle u_r' \otimes \cdots \otimes u_1', \, u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \rangle| = |\langle u_1', \, u_1 \rangle \dots \langle u_r', \, u_r \rangle| \le |u_1'|_1' \dots |u_r'|_r' \tag{D.8.10}$$

torej je $|u_r' \otimes \cdots \otimes u_1'|_\vee \le |u_1'|_1' \dots |u_r'|_r'$. Enakost pokažemo tako, da vzamemo take u_i, da je $\langle u_i', \, u_i \rangle = |u_i'|_i'$.

Podobno, če želimo pokazati (D.8.8), najprej vzamemo normirane prostore $U_1', \dots U_r'$, dualne prostorom $U_1, \dots U_r$. Če je $u' \in U_r' \otimes \cdots \otimes U_1'$ in $|u'|_\vee \le 1$, očitno velja tudi:

$$|\langle u', \, u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \rangle| \le |u_1|_1 \dots |u_r|_r \tag{D.8.11}$$

Enakost pa pokažemo tako, da vzamemo $u' = u_r' \otimes \cdots \otimes u_1'$, in sicer za take vektorje u_i', da je $\langle u_i', \, u_i \rangle = |u_i|_i$. Nato upoštevamo (D.8.9). ■

Projektivno normo je mogoče zapisati nekoliko bolj "konstruktivno". Znano je, da se da vsak vektor zapisati kot končna linearna kombinacija razcepnih tenzorjev. Po trikotniški neenakosti in (D.8.8) velja:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} u_{i1} \otimes \cdots \otimes u_{ir} \right|_\wedge \le \sum_{i=1}^{n} |u_{i1}| \dots |u_{ir}| \tag{D.8.12}$$

Trditev D.8.5. *Za vsak vektor $u \in U_1 \otimes \cdots \otimes U_r$ velja:*

$$|u|_\wedge = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} |u_1|_1 \dots |u_r|_r \, ; \, u = \sum_{i=1}^{n} u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \right\} \tag{D.8.13}$$

Dokaz. Ni težko preveriti, da je desna stran v (D.8.13) sama zase norma, označimo jo z $\|\cdot\|$. Iz definicije injektivne norme in trikotniške neenakosti sledi, da za vsak tenzor $u' \in U_r' \otimes \cdots \otimes U_1'$, kjer so $U_1', \dots U_r'$ dualni normirani prostori prostorov $U_1, \dots U_r$, velja:

$$|u'|_\vee = \sup\{|\langle u', \, u \rangle| \, ; \, \|u\| \le 1\} \tag{D.8.14}$$

Ker sta enakosti (D.8.1) in (D.8.2) ekvivalentni, velja tudi:

$$\|u\| = \sup\{|\langle u', \, u \rangle| \, ; \, |u'|_\vee \le 1\} \tag{D.8.15}$$

To pa po definiciji projektivne norme pomeni, da mora biti $\|u\| = |u|_\wedge$. ■

Zgled D.8.1. *Projektivna in injektivna norma fundamentalnih tenzorjev.* Naj bosta $\mathcal{I}$ in $\mathcal{I}^T$ fundamentalni ko- in kontravariantni tenzor v dualnem paru n-razsežnih evklidskih prostorov, definirana tako kot v prejšnjem razdelku. Ker je:

$$\left| \mathcal{I}^T uv \right| = \left| \langle u, \, v \rangle \right| \le |u| \, |v| \tag{D.8.16}$$

je $\left| \mathcal{I}^T \right|_\vee \le 1$. Ker pa je $\mathcal{I}^T u^2 = \langle u, \, u \rangle = |u|^2$, mora biti $\left| \mathcal{I}^T \right|_\vee = 1$.

Za izračun projektivne norme fundamentalnega kovariantnega tenzorja $\mathcal{I}$ pa se spomnimo, da je $\mathcal{I} = e_1^2 + \cdots + e_n^2$, kjer je $\{e_1, \dots e_n\}$ ortonormirana baza. Zaradi križnosti projektivne norme (trditev D.8.4) in trikotniške neenakosti je potem $|\mathcal{I}|_\wedge \le n$. Toda ker je $\mathcal{I}^T \mathcal{I} = n$, mora biti $|\mathcal{I}|_\wedge = n$. Dokazali smo:

$$\left| \mathcal{I}^T \right|_\vee = 1 \, , \qquad |\mathcal{I}|_\wedge = n \tag{D.8.17}$$

□

D.9 Norme na tenzorskih produktih evklidskih prostorov

Evklidski prostor je sam sebi dualen, torej to velja tudi za tenzorski produkt evklidskih prostorov. Tako lahko na slednjem definiramo injektivno, projektivno in seveda še evklidsko normo. Če sta torej U in V evklidska prostora in z $|\cdot|$ označimo običajno normo na njiju, za poljuben $w \in U \otimes V$ označimo:

$$|w|_\vee = \sup\Big\{|\langle w\,,\, u \otimes v\rangle|\;;\; |u|, |v| \leq 1\Big\} \tag{D.9.1}$$

$$|w|_\wedge = \sup\Big\{\langle w\,,\, z\rangle\;;\; |z|_\vee \leq 1\Big\} \tag{D.9.2}$$

$$|w| = \sqrt{\langle w\,,\, w\rangle} \tag{D.9.3}$$

Namen tega razdelka je primerjava zgornjih norm. Natančneje, dokazali bomo naslednji rezultat.

Trditev D.9.1. *Naj bosta U in V evklidska prostora dimenzij m in n. Tedaj za vsak $w \in U \otimes V$ velja:*

$$\frac{|w|}{\sqrt{\min\{m, n\}}} \leq |w|_\vee \leq |w| \leq |w|_\wedge \leq \sqrt{\min\{m, n\}}\,|w| \tag{D.9.4}$$

Opomba. Nobena od zgornjih ocen se ne da izboljšati. Najprej vidimo, da v primeru, ko je tenzor w razcepen, velja $|w|_\vee = |w| = |w|_\wedge$. Da sta doseženi tudi zunanji oceni, pa pokaže naslednji primer: naj bosta $\{e_1, \ldots e_m\}$ in $\{f_1, \ldots f_n\}$ ortonormirani bazi prostorov U in V. Denimo, da je $m \geq n$. Definirajmo $w := \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i$. Tedaj se podobno kot v zgledu D.8.1 prepričamo, da je $|w|_\vee = 1$ in $|w|_\wedge = n$, očitno pa je tudi $|w| = \sqrt{n}$.

Dokaz trditve D.9.1. Iz definicije injektivne in projektivne norme takoj sledi, da je $|w|_\vee \leq |w|_\wedge$. Nadalje velja:

$$\begin{aligned}|w| &= \sup\Big\{\langle w\,,\, z\rangle\;;\; |z| \leq 1\Big\} \geq \\ &\geq \sup\Big\{\langle w\,,\, u \otimes v\rangle\;;\; |u \otimes v| \leq 1\} = \\ &= \sup\Big\{\langle w\,,\, u \otimes v\rangle\;;\; |u|, |v| \leq 1\Big\} = \\ &= |w|_\vee\end{aligned} \tag{D.9.5}$$

Ni se težko prepričati, da dualnost obrne neenakosti med normami. Natančneje, če sta normi $|\cdot|_1'$ in $|\cdot|_2'$ dualni normama $|\cdot|_1$ in $|\cdot|_2$ in je $|\cdot|_1 \leq |\cdot|_2$, velja $|\cdot|_1' \geq |\cdot|_2'$. Tako dobimo še, da je $|w| \leq |w|_\wedge$.

Naj bosta $\{e_1, \ldots e_m\}$ in $\{f_1, \ldots f_n\}$ ortonormirani bazi prostorov U in V. V razdelku D.4 smo videli, da lahko vsak tenzor $w = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_i \otimes f_j$ identificiramo z matriko $\mathtt{W} := [\alpha_{ij}]_{i,j}$. Nadalje se po trditvi D.8.1 injektivna norma tenzorja W ujema z običajno matrično normo matrike $\mathtt{W}$. Sledi:

$$|w|_\vee^2 = \|\mathtt{W}\|^2 = \|\mathtt{W}^*\mathtt{W}\| \geq \frac{\mathtt{sl}(W^*W)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2 = \frac{|w|^2}{n} \tag{D.9.6}$$

in podobno:

$$|w|_\vee^2 = \|\mathtt{WW}^*\| \geq \frac{|w|^2}{m} \tag{D.9.7}$$

Tako smo dokazali, da je $|w|_\vee \geq |w|/\sqrt{\min\{m, n\}}$. Iz dualnosti projektivne in injektivne norme pa sledi še, da je $|w|_\wedge \leq \sqrt{\min\{m, n\}}\, |w|$. ■

D.10 Injektivna norma simetričnega tenzorja

V tem delu bomo imeli dosti opravka z injektivnimi normami simetričnih tenzorjev, ali ekvivalentno, normami simetričnih multilinearnih form. Na tem mestu bomo predstavili izrek, ki nekoliko olajša njihovo računanje.

Definicija. Multilinearna forma $\Phi \in \mathcal{M}(U, U, \ldots U; \mathbb{F})$ je *simetrična*, če za poljubna i in j ter vektorje $u_1, \ldots u_r \in U$ velja (če je $i < j$):

$$\begin{aligned} &\Phi(u_1, \ldots u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots u_j) = \\ &= \Phi(u_1, \ldots u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots u_j) \end{aligned} \tag{D.10.1}$$

Tenzor $u' \in (U')^{\otimes r}$ je *simetričen*, če za poljubno linearno preslikavo $L'_{ij}\colon\ (U')^{\otimes r} \to (U')^{\otimes r}$, definirano po predpisu:

$$\begin{aligned} &L'_{ij}(u'_1 \otimes \cdots \otimes u'_{i-1} \otimes u'_i \otimes u'_{i+1} \otimes \cdots \otimes u'_{j-1} \otimes u'_j \otimes u'_{j+1} \otimes \cdots \otimes u'_r) = \\ &= u'_1 \otimes \cdots \otimes u'_{i-1} \otimes u'_j \otimes u'_{i+1} \otimes \cdots \otimes u'_{j-1} \otimes u'_i \otimes u'_{j+1} \otimes \cdots \otimes u'_r \end{aligned} \tag{D.10.2}$$

velja $L'_{ij}u' = u'$.

Trditev D.10.1. *Naj bo (U', U) dualni par končnorazsežnih vektorskih prostorov. Tedaj za poljubno multilinearno formo $\Phi \in \mathcal{M}(U, U, \ldots U; \mathbb{F})$ in tenzor $u' \in (U')^{\otimes r}$, ki sta povezna prek izomorfizma:*

$$u'_1 \otimes \cdots \otimes u'_r \mapsto \Big((u_r, \ldots u_1) \mapsto \langle u'_1\,,\, u_1\rangle \ldots \langle u'_r\,,\, u_r\rangle \Big) \tag{D.10.3}$$

iz trditve D.4.2, velja, da je Φ simetrična natanko tedaj, ko je u' simetričen. ■

Dokaz. Naj bo $L_{ij}\colon\ U^{\otimes r} \to U^{\otimes r}$ linearna preslikava, definirana po predpisu:

$$\begin{aligned} &L_{ij}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_{i-1} \otimes u_i \otimes u_{i+1} \otimes \cdots \otimes u_{j-1} \otimes u_j \otimes u_{j+1} \otimes \cdots \otimes u_r) = \\ &= u_1 \otimes \cdots \otimes u_{i-1} \otimes u_j \otimes u_{i+1} \otimes \cdots \otimes u_{j-1} \otimes u_i \otimes u_{j+1} \otimes \cdots \otimes u_r \end{aligned} \tag{D.10.4}$$

Zahteva, da je forma Φ simetrična, je ekvivalentna zahtevi, da za poljubna $i < j$ in poljuben $u \in U^{\otimes r}$ velja $\langle u'\,,\, L_{ij}u\rangle = \langle u'\,,\, u\rangle$. Ker sta preslikavi L in L' dualni, je to ekvivalentno zahtevi $\langle L'_{ij}u'\,,\, u\rangle = \langle u'\,,\, u\rangle$. To pa je ekvivalentno zahtevi, da je tenzor u' simetričen. ■

Glavna ugotovitev tega razdelka je naslednji Banachov [6] izrek.

Izrek D.10.2. *Za vsako simetrično multilinearno formo Φ na evklidskem prostoru U velja:*

$$\sup\Big\{\Big|\Phi(u_1, u_2, \ldots u_r)\Big| \,;\, |u_1|, |u_2|, \ldots |u_r| \le 1\Big\} = \sup\Big\{\Big|\Phi(u, u, \ldots u)\Big| \,;\, |u| \le 1\Big\} \qquad \text{(D.10.5)}$$

Posledica D.10.3. *Vsaka simetrična multilinearna forma Φ je natančno določena že z vrednostmi $\Phi(u, u, \ldots u)$.* ■

Posledica D.10.4. *Naj bo U evklidski prostor in U' njegova kopija. Tedaj za vsak simetričen tenzor $u' \in (U')^{\otimes r}$ velja:*

$$|u'|_\vee = \sup\{|u' u^r| \,;\, |u| \le 1\} \qquad \text{(D.10.6)}$$

kjer je izraz na desni definiran tako kot v razdelku D.5, in sicer glede na bilinearni funkcional med U' in U, ki ga dobimo iz skalarnega produkta na U. ■

Dokaz izreka D.10.2, ki ga bomo predstavili tu, ni izvirni Banachov. Njegov avtor je S. Łojasiewicz, povzemamo pa ga iz Bochnakovega in Siciakovega članka [33]. Najprej bomo dokazali naslednjo lemo.

Lema D.10.5. *Naj bo Φ simetrična 2-forma na evklidskem prostoru U in naj za neka enotska vektorja u in v velja $|\Phi(u, v)| = \|\Phi\|$, kjer je norma $\|\Phi\|$ definirana tako kot v* (D.8.3). *Tedaj velja tudi:*

$$|\Phi(u + v, u + v)| = \|\Phi\|\, |u + v|^2 \qquad \text{(D.10.7)}$$

$$|\Phi(u - v, u - v)| = \|\Phi\|\, |u - v|^2 \qquad \text{(D.10.8)}$$

Opomba. Iz zgornje leme že sledi, da izrek D.10.2 velja za $r = 2$.

Dokaz leme D.10.5. Velja:

$$\begin{aligned} \|\Phi\| = |\Phi(u, v)| &= \tfrac{1}{4}\Big|\Phi(u + v, u + v) - \Phi(u - v, u - v)\Big| \le \\ &\le \tfrac{1}{4}\Big(|\Phi(u + v, u + v)| + |\Phi(u - v, u - v)|\Big) \le \\ &\le \tfrac{1}{4}\|\Phi\|\Big(|u + v|^2 + |u - v|^2\Big) = \\ &= \tfrac{1}{2}\|\Phi\|\Big(|u|^2 + |v|^2\Big) = \\ &= \|\Phi\| \end{aligned} \qquad \text{(D.10.9)}$$

To pa pomeni, da povsod velja enakost. Lema je s tem dokazana. ■

Dokaz izreka D.10.2. Obstajajo taki vektorji $\tilde{u}_1, \ldots \tilde{u}_r \in U$, da je $|\tilde{u}_i| = 1$ za vsak i in $|\Phi(\tilde{u}_1, \ldots \tilde{u}_r)| = \|\Phi\|$. Prav gotovo obstaja tudi tak vektor a, da je $\langle u_i\,, a\rangle \neq 0$ za vsak i. Od tod pa sledi, da obstaja tak $\delta > 0$, da množica:

$$A := \Big\{(u_1, \ldots u_r) \in U^r \,;\, |\Phi(u_1, \ldots u_r)| = \|\Phi\|, |u_i| = 1, \langle u_i\,, a\rangle \ge \delta \text{ za } i = 1, \ldots r\Big\} \qquad \text{(D.10.10)}$$

ni prazna. Ker je kompaktna, obstaja taka r-terica $(\hat{u}_1, \ldots \hat{u}_r) \in A$, da je:

$$\sum_{k=1}^{r} \langle \hat{u}_k\,, a\rangle = \max\left\{\sum_{k=1}^{r} \langle u_k\,, a\rangle \,;\, (u_1, \ldots u_r) \in A\right\} =: M \qquad \text{(D.10.11)}$$

Zdaj bomo pokazali, da so vsi vektorji $\hat{u}_1, \ldots \hat{u}_r$ enaki. Naj bo $i, j \in \{1, \ldots r\}$. Ker sta $\langle \hat{u}_i\,,\, a\rangle$ in $\langle \hat{u}_j\,,\, a\rangle$ strogo pozitivna, je gotovo $\hat{u}_i + \hat{u}_j \neq 0$. Definirajmo:

$$u'_k := \begin{cases} \dfrac{\hat{u}_i + \hat{u}_j}{|\hat{u}_i + \hat{u}_j|} & ;\ k = i, j \\ \hat{u}_k & ;\ \text{sicer} \end{cases} \tag{D.10.12}$$

Pa recimo, da je $\hat{u}_i \neq \hat{u}_j$. Ker je tudi $\hat{u}_i \neq -\hat{u}_j$, velja $|\hat{u}_i + \hat{u}_j| < 2$. Sledi:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\hat{u}_i + \hat{u}_j}{|\hat{u}_i + \hat{u}_j|}\,,\, a \right\rangle &= \frac{1}{|\hat{u}_i + \hat{u}_j|}\Big(\langle \hat{u}_i\,,\, a\rangle + \langle \hat{u}_j\,,\, a\rangle\Big) > \\ &> \tfrac{1}{2}\Big(\langle \hat{u}_i\,,\, a\rangle + \langle \hat{u}_j\,,\, a\rangle\Big) > \\ &> 0 \end{aligned} \tag{D.10.13}$$

Iz tega in leme D.10.5 sledi, da je $(u'_1, \ldots u'_r) \in A$, poleg tega pa še:

$$\sum_{k=1}^{r} \langle u'_k\,,\, a\rangle > \sum_{k=1}^{r} \langle \hat{u}_k\,,\, a\rangle = M \tag{D.10.14}$$

kar je protislovje. ∎

Dodatek E

Diferencialni račun v več spremenljivkah

E.1 Odvodi funkcij več spremenljivk

Definicija. Naj bo D odprta podmnožica realnega končnorazsežnega vektorskega prostora V. Preslikava $f\colon D \to W$, kjer je W tudi končnorazsežen vektorski prostor, je *diferenciabilna* oziroma *odvedljiva* v točki $x \in D$ *v klasičnem smislu*, če obstaja taka linearna preslikava $A\colon V \to W$, da velja:

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - Ah|}{|h|} = 0 \tag{E.1.1}$$

pri čemer prostora V in W opremimo z normama $|\cdot|$. Definicija je neodvisna od izbire norm, ker so vse norme na končnorazsežnih prostorih ekvivalentne. Preslikavi A pravimo *odvod* preslikave f v točki x in pišemo $A = f'(x)$.

Tako *smerni odvod* preslikave f v x v smeri vektorja v pišemo kar kot $f'(x)v$. Brez težav preverimo, da velja:

$$f'(x)v = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(x+tv) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big[f(x+tv) - f(x)\Big] \tag{E.1.2}$$

Če je $V = \mathbb{R}^d$, $W = \mathbb{R}$ in so $e_1, \dots e_n$ standardni bazni vektorji, je:

$$f'(x)e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{E.1.3}$$

parcialni odvod v i-ti spremenljivki.

Odvod f' je torej preslikava, ki slika v $\mathcal{L}(V, W)$. Če je f diferenciabilna na neki okolici točke x in je tudi f' diferenciabilna v x, lahko definiramo drugi odvod f'', ki slika v $\mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, W))$. Induktivno lahko definiramo, da je f *r-krat diferenciabilna* v točki x, če je $(r-1)$-krat diferenciabilna v okolici točke x in $f^{(r-1)}$ diferenciabilna v x. Tako je r-ti odvod $f^{(r)}(x) = \left(f^{(r-1)}\right)'(x)$ element prostora:

$$\mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, \dots \mathcal{L}(V, W) \dots)) \tag{E.1.4}$$

in v dani točki $x \in D$ lahko definiramo r-ti odvod v smereh $v_1, \dots v_r$ kot izraz:

$$f^{(r)}(x)v_1v_2 \dots v_{r-1}v_r \tag{E.1.5}$$

ki ga računamo tako kot v (D.1.4).

Če je $V = \mathbb{R}^n$ in $W = \mathbb{R}$, lahko višji smerni odvod izrazimo s parcialnimi odvodi. Če je $v_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}e_j$, kjer je $\{e_1, \dots e_n\}$ standardna baza, velja:

$$f^{(r)}(x)v_1 \dots v_n = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_r=1}^n \alpha_{1i_1} \dots \alpha_{ri_r} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}(x) \tag{E.1.6}$$

Izraz (E.1.5) pa lahko gledamo tudi kot skrčitev tenzorja. V primeru, ko je $W = \mathbb{R}$, namreč iz posledic D.1.2 in D.4.2 sledi, da lahko $f^{(r)}(x)$ identificiramo s tenzorjem iz $(V')^{\otimes r}$, kjer je V' dualni prostor prostora V. Tako lahko (E.1.5) gledamo kot skrčitveni produkt, kjer je V kovariantni, V' pa kontravariantni prostor. Podobno velja tudi v primeru, ko je W poljuben vektorski prostor. V tem primeru lahko $f^{(r)}(x)$ identificiramo s tenzorjem iz $W \otimes (V')^{\otimes r}$.

S pomočjo operacij na tenzorjih lahko definiramo nekaj znanih operacij, povezanih z odvodi.

Definicija. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, kjer je D odprta podmnožica končnorazsežnega vektorskega prostora V, diferenciabilna funkcija. Če V proglasimo za kovarianten prostor in je V' njegov dualni prostor, je odvod f' kontravariantno vektorsko polje, t. j. preslikava, ki slika iz D v V'. Če je V evklidski prostor, V' in V tvorita dualni par evklidskih prostorov in lahko definiramo še *gradient*:

$$\operatorname{grad} f := (f')^T \tag{E.1.7}$$

ki je kovariantno vektorsko polje.

Definicija. Naj bo $u\colon D \to V$ diferenciabilno kovariantno vektorsko polje. *Divergenco* polja u definiramo kot:

$$\operatorname{div} u := \operatorname{sl} u' \tag{E.1.8}$$

Definicija. Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$ dvakrat diferenciabilna funkcija. *Laplaceov operator* definiramo po predpisu:

$$\Delta f(x) := f''(x)\mathcal{I} \tag{E.1.9}$$

kjer je $\mathcal{I}$ fundamentalni kovariantni tenzor.

Opomba. Če je $V = \mathbb{R}^n$ z običajnim skalarnim produktom, se vse tri operacije ujemajo s klasično definiranim gradientom, divergenco in Laplaceovim operatorjem. Če so $e_1, \dots e_n$ standardni bazni vektorji, po (D.7.17), trditvi D.7.2 in (E.1.3) velja:

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(f'(x)\right)^T = f'(x)\mathcal{I} = \sum_{i=1}^n f'(x)e_i^2 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)e_i \tag{E.1.10}$$

Nadalje naj bo $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ kovariantno vektorsko polje. Po trditvah D.7.1, D.7.3 in D.7.2 ter (E.1.3) velja:

$$\operatorname{div} u = \operatorname{sl} u' = \mathcal{I}^T u' \mathcal{I} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(e_j^T\right)^2 u' e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(e_j^T\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} e_i = \sum_{i=1}^{n} e_i^T \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{E.1.11}$$

Za Laplaceov operator pa po trditvi D.7.2 in (E.1.3) dobimo:

$$\Delta f(x) = f''(x)\mathcal{I} = \sum_{i=1}^{n} f''(x) e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \tag{E.1.12}$$

in vse desne strani se ujemajo s klasičnimi definicijami ustreznih operatorjev.

Opomba. Velja:

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f \tag{E.1.13}$$

To lahko utemeljimo na dva načina. Prvič to velja zato, ker to velja za klasične operatorje na $\mathbb{R}^d$. Drugič pa to lahko utemeljimo z računom:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \operatorname{sl}\left[(f')^T\right] = \mathcal{I}^T\left[(f')^T\right]'\mathcal{I} = \left[\mathcal{I}^T (f')^T\right]'\mathcal{I} = \left[(f')^{TT}\right]'\mathcal{I} = f''\mathcal{I} = \Delta f \tag{E.1.14}$$

E.2 Taylorjeva formula

Zapis odvodov s tenzorji, kot smo ga podali v prejšnjem razdelku, nam omogoča pregleden zapis Taylorjeve formule za funkcije več spremenljivk: ugotovili bomo, da jo lahko zapišemo tako kot za funkcije ene spremenljivke. Najprej bomo izpeljali nekaj pomožnih rezultatov.

Trditev E.2.1. *Naj bosta U in V končnorazsežna vektorska prostora, $D \subseteq V$ odprta množica in funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$. Dani naj bosta še točka $y_0 \in V$ in linearna preslikava $A\colon U \to V$. Definirajmo $T(x) = y_0 + Ax$. Tedaj za poljuben $x \in U$, za katerega velja, da je f r-krat diferenciabilna v $T(x)$, in poljubne vektorje $u_1, \ldots u_r \in U$ velja:*

$$(f \circ T)^{(r)}(x) u_1 \ldots u_r = f^{(r)}\big(T(x)\big)(Au_1)\ldots(Au_r) \tag{E.2.1}$$

Dokaz. Trditev bomo dokazali s popolno indukcijo. Za $r = 1$ trditev sledi iz verižnega pravila. Naredimo indukcijski korak z $r - 1$ na r. Definirajmo funkciji:

$$g(x) := (f \circ T)^{(r-1)}(x) u_2 \ldots u_r \tag{E.2.2}$$

$$h(y) := f^{(r-1)}(y)(Au_2)\ldots(Au_r) \tag{E.2.3}$$

Po indukcijski predpostavki je $g(x) = h\big(T(x)\big)$. Po verižnem pravilu je potem $g'(x)u = h'\big(T(x)\big)(Au)$. Sledi:

$$(f \circ T)^{(r)}(x) u_1 \ldots u_r = g'(x) u_1 = h'\big(T(x)\big)(Au_1) = f^{(r)}\big(T(x)\big)(Au_1)\ldots(Au_r) \tag{E.2.4}$$

■

Trditev E.2.2. *Naj bo D odprta podmnožica končnorazsežnega vektorskega prostora V in $f\colon D \to \mathbb{R}$, funkcija, ki naj bo r-krat zvezno odvedljiva v neki točki $x_0 \in D$. Naj bo še $v \in V$. Definirajmo funkcijo realne spremenljivke φ po predpisu:*

$$\varphi(t) := f(x_0 + tv) \tag{E.2.5}$$

Tedaj velja:

$$\varphi^{(r)}(0) = f^{(r)}(x_0)v^r \tag{E.2.6}$$

Dokaz. V trditev E.2.1 vstavimo $T(t) := x_0 + tv$. ■

S pomočjo zgornje trditve lahko izpeljemo Taylorjevo formulo za funkcije več spremenljivk. V tem delu bomo potrebovali obliko z integralskim ostankom. Če je f $(r+1)$-krat zvezno odvedljiva funkcija *ene* spremenljivke, velja:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\,h + \cdots + \frac{f^{(r)}(x)}{r!}\,h^r + \int_0^1 (1-\theta)^r \frac{f^{(r+1)}(x+\theta h)}{r!}\,h^{r+1}\,\mathrm{d}\theta \tag{E.2.7}$$

Iz prejšnje trditve zdaj sledi naslednja ugotovitev.

Trditev E.2.3. *Zapis* (E.2.7) *velja tudi, če je f $(r+1)$-krat zvezno odvedljiva funkcija več spremenljivk, definirana na neki okolici daljice od x do $x+h$.* ■

E.3 Šibki odvodi

Določene vrste izpeljav pri diferencialnem računu, posebej pri funkcijah več spremenljivk, imajo smisel, če so funkcije primernokrat *zvezno* odvedljive. To je predvsem tedaj, ko zahtevamo veljavnost "po točkah", denimo pri Taylorjevi formuli (E.2.7). Včasih pa glede veljavnosti nismo tako zahtevni, zato pa želimo imeti nekoliko splošnejšo obliko rezultata. Tako denimo želimo poznati le vrednost kakšnega integrala, povezanega z odvodi, za katere pa ni nujno, da so zvezni ali pa celo sploh ni nujno, da je funkcija povsod diferenciabilna.

Tako bomo na tem mestu uvedli pojem *šibkega odvoda* in *funkcij Soboljeva*, ki temelji na tem, da za dano funkcijo $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gledamo integrale:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x \tag{E.3.1}$$

kjer je h poljubnokrat zvezno odvedljiva funkcija s kompaktnim nosilcem. Nanizali bomo le osnovne lastnosti, za splošno teorijo pa glej npr. Evans in Gariepy [56].

Najprej se bomo prepričali, da lahko funkcijo dovolj dobro opišemo z "otipavanjem" z neskončno gladkimi funkcijami s kompaktnim nosilcem. Seveda obstaja nekaj omejitev: najprej morajo biti integrali (E.3.1) sploh dobro definirani. To pa bodo, če bo funkcija f lokalno integrabilna.

V splošnem bomo gledali preslikave iz odprte podmnožice D prostora $\mathbb{R}^n$ v končnorazsežen vektorski prostor V. Definirajmo:

$$L^p(D;V) := \left\{f\colon\ D \to V\ ;\ f \text{ merljiva, } \int_D |f(x)|^p\,\mathrm{d}x < \infty\right\} \tag{E.3.2}$$

$$L^\infty(D;V) := \left\{f\colon\ D \to V\ ;\ f \text{ merljiva, } \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D} |f(x)| < \infty\right\} \tag{E.3.3}$$

pri čemer na V pač izberemo neko normo (vse so ekvivalentne). Nadalje označimo:

$$L^p_{\mathrm{loc}}(D;V) := \left\{f\colon\ D \to V\ ;\ f \in L^p(D';V), \text{ brž ko je } D' \text{ kompaktno vsebovana v } D\right\} \tag{E.3.4}$$

Če je kar $V = \mathbb{R}$, oznako V spustimo.

Opomba. Če je $p \le q$, je tudi $L^q(D;V) \subseteq L^q_{\mathrm{loc}}(D;V) \subseteq L^p_{\mathrm{loc}}(D;V)$.

Tako je integral (E.3.1) smiselno definiran za vse $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(D;V)$ in vse $h \in C_{\mathrm{c}}(D)$, kjer kot ponavadi označimo:

$$C(D) := \{\text{zvezne funkcije na } D\} \tag{E.3.5}$$

$$C_{\mathrm{c}}(D) := \{\text{zvezne funkcije na } D \text{ s kompaktnim nosilcem}\} \tag{E.3.6}$$

$$C^{(r)}(D) := \{r\text{-krat zvezno odvedljive funkcije na } D\} \tag{E.3.7}$$

$$C^{(r)}_{\mathrm{c}}(D) := \{r\text{-krat zvezno odvedljive funkcije na } D \text{ s kompaktnim nosilcem}\} \tag{E.3.8}$$

ter še $C^{(\infty)}(D) := \bigcap_{r=1}^\infty C^{(r)}(D)$ in $C^{(\infty)}_{\mathrm{c}}(D) := \bigcap_{r=1}^\infty C^{(r)}_{\mathrm{c}}(D)$.

Nastane vprašanje, ali je "otipavanje" z gladkimi funkcijami s kompaktnim nosilcem dovolj natančno. Odgovor na to nam da naslednja trditev, ki jo bomo dokazali na koncu razdelka.

Trditev E.3.1. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica in $f_1, f_2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(D;V)$, kjer je V končnorazsežen vektorski prostor. Če za vsako funkcijo $h \in C^{(\infty)}_{\mathrm{c}}(D)$ velja:*

$$\int_D f_1(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x = \int_D f_2(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x \tag{E.3.9}$$

je $f_1 = f_2$ skoraj povsod.

Če vemo, kako "otipati" dano funkcijo, kako potem "otipati" njen odvod? Odgovor na to nam da integracija per partes. Za začetek jo bomo potrebovali v obliki, kot je zapisana v spodnji trditvi, kasneje pa bomo to precej posplošili (glej trditvi E.5.6 in E.7.1). Trditev bomo dokazali kasneje.

Trditev E.3.2. *Naj bo D odprta množica v $\mathbb{R}^n$ in V končnorazsežen vektorski prostor. Tedaj za poljubna $f \in C^{(1)}(D;V)$ in $h \in C^{(1)}_{\mathrm{c}}(D)$ velja:*

$$\int_D f'(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x = -\int_D f(x)\,h'(x)\,\mathrm{d}x \tag{E.3.10}$$

Motivirani s to trditvijo zdaj lahko končno definiramo *šibki odvod* funkcije oz. preslikave.

Definicija. Naj bo D odprta množica v $\mathbb{R}^n$ in V končnorazsežen vektorski prostor. Preslikava $f\colon\ D \to V$ je *šibko odvedljiva*, če je $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(D; V)$ in če obstaja taka preslikava $g \in L^1_{\mathrm{loc}}\big(D; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, V)\big)$, da za vsak $h \in C^{(1)}_{\mathrm{c}}(D)$ velja:

$$\int_D g(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x = -\int_D f(x)\, h'(x)\, \mathrm{d}x \tag{E.3.11}$$

Funkciji g pravimo *šibki odvod* preslikave f.

Opomba. Za šibko odvedljivost je dovolj, da obstaja taka baza $\{u_1, \dots u_n\}$ in take preslikave g_i, da je:

$$\int_D g_i(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x = -\int_D f(x)\, h'(x) u_i\, \mathrm{d}x \tag{E.3.12}$$

(preslikavam g_i pravimo šibki smerni odvodi). Med drugim je torej za šibko odvedljivost dovolj, da obstajajo šibki *parcialni* odvodi.

Opomba. Zgoraj definirani pojem šibkega odvoda je poseben primer odvoda v distribucijskem smislu. Ideja je v osnovi ista kot pri distribucijah (ki so definirane kot funkcionali iz (E.3.1), tako da vsaka lokalno integrabilna funkcija določa distribucijo; za podrobnosti glej npr. Rudin [111]). Funkcija je šibko odvedljiva, če je njen odvod v distribucijskem smislu funkcija (in ne le distribucija).

Videli bomo, da šibki odvod v dobršni meri ustreza temu, kar pričakujemo od odvoda. Pokazali bomo, da določena računska pravila (odvod produkta, odvajanje pod integralskim znakom, integracija per partes) veljajo tako kot za klasični odvod, pogoji, pod katerimi veljajo, pa so šibkejši in bolj v skladu z intuicijo. Za še več rezultatov glej npr. Evans in Gariepy [56].

Najprej bomo podali dva zgleda.

Zgled E.3.1. Naj bo $f(x) := |x|$. Ker za poljubno funkcijo $h \in C^{(\infty)}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ velja:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, h'(x)\, \mathrm{d}x &= -\int_{-\infty}^{0} x\, h'(x)\, \mathrm{d}x + \int_0^{\infty} x\, h'(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{0} h(x)\, \mathrm{d}x - \int_0^{\infty} h(x)\, \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{E.3.13}$$

je funkcija sgn šibki odvod funkcije f.

Šibki odvod smo tu izračunali po definiciji in dobili tisto, kar smo pričakovali. Kasneje bomo videli, da to velja za dokaj velik razred funkcij (glej posledico E.5.7). □

Zgled E.3.2. Vzemimo zdaj funkcijo $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$. Videli bomo, da f ni šibko odvedljiva. Če bi bila, bi moralo za vsako funkcijo $h \in C_c^{(\infty)}(\mathbb{R})$ veljati:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,h'(x)\,\mathrm{d}x &= \\ = \int_{-\infty}^{0} h'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{\infty} h'(x)\,\mathrm{d}x &= \\ = -2h(0)&\end{aligned} \tag{E.3.14}$$

Torej bi za vsako funkcijo $h \in C_c^{(\infty)}\big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$ veljalo $\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Po trditvi E.3.1 bi potem veljalo $f'(x) = 0$ za skoraj vsak $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, torej za skoraj vsak $x \in \mathbb{R}$. Od to pa bi sledilo, da tudi za vsako funkcijo $h \in C_c^{(\infty)}(\mathbb{R})$ velja $\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x = 0$, kar je protislovje. □

Šibki odvod odlikujejo naslednje lastnosti:

- *Natančna določenost.* Iz trditve E.3.1 sledi, da je šibki odvod natančno določen do ujemanja skoraj povsod. Zato ga označujemo kar s f'. Če smo natančni, je f' pravzaprav ekvivalenčni razred funkcij.
- *Lokalnost.* Če je $D' \subseteq D$ in $f\colon D \to V$ šibko odvedljiva, je šibko odvedljiva tudi zožitev funkcije f na D' in šibki odvod zožitve se ujema z zožitvijo šibkega odvoda prvotne funkcije f.
- *Ujemanje s klasično zvezno odvedljivostjo.* Iz trditve E.3.2 sledi, da je funkcija, ki je zvezno odvedljiva na D, tam tudi šibko odvedljiva in oba odvoda se ujemata.

Zadnja lastnost ima tudi naslednji obrat, ki pa ga bomo spet dokazali malo kasneje.

Trditev E.3.3. *Naj bo f šibko odvedljiva in naj ima njen šibki odvod zvezno verzijo. Tedaj ima f zvezno odvedljivo verzijo.*

Seveda lahko definiramo tudi višje šibke odvode: funkcija f je r-krat šibko odvedljiva, če je $(r-1)$-krat šibko odvedljiva in $f^{(r-1)}$ šibko odvedljiva; njen šibki odvod je potem $f^{(r)}$, r-kratni šibki odvod funkcije f. Definicija je seveda neodvisna od verzije $f^{(r-1)}$. Višji šibki odvodi so karakterizirani s formulo:

$$\int_D f^{(r)}(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^r \int_D f(x)\,h^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x \tag{E.3.15}$$

ki spet velja za vse $h \in C_c^{(\infty)}(D)$.

Pomembno je, v kolikšni meri so šibki odvodi integrabilni. To opisujejo *prostori Soboljeva*:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{r,p}(D;V) := \{f\colon D \to V\ ;\ f \text{ je } r\text{-krat šibko odvedljiva}&\\ \text{in } f^{(s)} \in L^p(D;V) \text{ za vse } 0 \le s \le r\}&\end{aligned} \tag{E.3.16}$$

Podobno kot pri prostorih L^p lahko tudi tu definiramo lokalne različice:

$$\mathcal{W}^{r,p}_{\mathrm{loc}}(D;V) := \Big\{f\colon D \to V\ ;\ f \in \mathcal{W}^{r,p}(D';V), \text{ brž ko je } D' \text{ kompaktno vsebovana v } D\} \tag{E.3.17}$$

Opombi.

(1) Če je $p \le q$, je tudi $\mathcal{W}^{r,q}(D;V) \subseteq \mathcal{W}^{r,q}_{\mathrm{loc}}(D;V) \subseteq \mathcal{W}^{r,p}_{\mathrm{loc}}(D;W)$.

(2) Če je $s \le r$, je $\mathcal{W}^{r,p}(D;V) \subseteq \mathcal{W}^{s,p}(D;V)$ in $\mathcal{W}^{r,p}_{\mathrm{loc}}(D;V) \subseteq \mathcal{W}^{s,p}_{\mathrm{loc}}(D;V)$.

Šibki odvodi imajo dosti lepih lastnosti. Kljub temu pa moramo biti pri računanju z njimi malo previdnejši. Naslednji dve trditvi opisujeta Taylorjevo formulo za šibke odvode.

Trditev E.3.4. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica, $r \in \mathbb{N}_0$ in $f \in \mathcal{W}^{r+1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$. Tedaj za vsak $u \in \mathbb{R}^d$ velja, da za skoraj vsak $x \in \mathbb{R}^n$, za katerega je daljica od x do $x+u$ vsebovana v D, velja:*

$$f(x+u) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\,u + \cdots + \frac{f^{(r)}(x)}{r!}\,u^r + \int_0^1 (1-\theta)^r \frac{f^{(r+1)}(x+\theta u)}{r!}\,u^{r+1}\,\mathrm{d}\theta \tag{E.3.18}$$

Z drugimi besedami, množica točk $x \in \mathbb{R}^n$, za katere je daljica od x do $x+u$ vsebovana v D, formula (E.3.18) *pa ne velja, ima Lebesguovo mero nič.*

Dokaz. Naj bo U množica vseh točk x, za katere je daljica od x do $x+u$ vsebovana v D. Očitno je U odprta. Naj bo $h \in C^{(\infty)}_{\mathrm{c}}(U)$. Definirajmo:

$$J := \int_U \left(f(x+u) - \sum_{k=0}^{r} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\,u^k - \int_0^1 (1-\theta)^r \frac{f^{(r+1)}(x+\theta u)}{r!}\,u^{r+1}\,\mathrm{d}\theta \right) h(x)\,\mathrm{d}x \tag{E.3.19}$$

Če z ničlo razširimo funkciji f in h na ves $\mathbb{R}^n$, je zdaj $f \in \mathcal{W}^{r+1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ in $h \in C^{(\infty)}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$. Z zamenjavo vrstnega reda integracije in substitucijo $y = x + u$ oziroma $y = x + \theta u$ dobimo:

$$\begin{aligned} J = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \bigg(& f(y)\,h(y-u) - \sum_{k=0}^{r} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}\,u^k\,h(y) - \\ & - (1-\theta)^r \frac{f^{(r+1)}(y)}{r!}\,u^{r+1}\,h(y-\theta u) \bigg)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{E.3.20}$$

Nadalje iz (E.3.15) sledi:

$$\begin{aligned} J = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \bigg(& h(y-u) - \sum_{k=0}^{r} (-1)^r \frac{h^{(k)}(y)}{k!}\,u^k - \\ & - (-1)^{r+1} (1-\theta)^r \, \frac{f^{(r+1)}(y-\theta u)}{r!}\,u^{r+1} \bigg)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{E.3.21}$$

Če zdaj spet zamenjamo vrstni red integracije in uporabimo *klasično* Taylorjevo formulo (trditev E.2.3) za funkcijo h, dobimo, da je $J = 0$. Iz trditve E.3.1 zdaj sledi, da enakost (E.3.18) res velja za skoraj vsak $x \in U$. Naša trditev je tako dokazana. ■

Trditev E.3.5. *Naj bodo D, r in f tako kot v prejšnji trditvi. Tedaj za skoraj vsaka x in $y \in \mathbb{R}^n$, za katera je daljica od x do y vsebovana v D, velja:*

$$\begin{aligned} f(y) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(y-x) + \cdots + \frac{f^{(r)}(x)}{r!}(y-x)^r + \\ + \int_0^1 (1-\theta)^r \frac{f^{(r+1)}\big((1-\theta)x + \theta y\big)}{r!}(y-x)^{r+1}\,\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{E.3.22}$$

Dokaz. Trditev takoj sledi iz trditve E.3.4 in dejstva, da preslikava $(x,u) \mapsto (x, x+u)$ ohranja Lebesguovo mero na $\mathbb{R}^{2n}$. ■

Dolžni smo še dokazati nekaj trditev od prej. Najprej dokažimo naslednjo lemo, ki opisuje odvod konvolucije in ki jo bomo kasneje še posplošili (glej lemi E.5.8 in E.7.4).

Lema E.3.6. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica ter $f \in C^{(1)}(D)$ in $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$. Ena od funkcij naj ima kompakten nosilec. Definirajmo:*

$$F(w) := \int_{\substack{z\in D\\ w+z\in D}} f(w+z)\,g(z)\,\mathrm{d}z \tag{E.3.23}$$

Tedaj je F v neki okolici izhodišča v klasičnem smislu diferenciabilna in velja:

$$F'(w) = \int_{\substack{z\in D\\ w+z\in D}} f'(w+z)\,g(z)\,\mathrm{d}z \tag{E.3.24}$$

Dokaz. Naj bo $K \subseteq D$ kompaktni nosilec ene od funkcij. Obstajata tak $\rho > 0$ in taka kompaktna množica D', da za vsak w z $|w| < \rho$ velja:

$$\{z\,;\, z \in K \text{ ali } w+z \in K\} \cap \{z\,;\, z \in D \text{ in } w+z \in D\} \subseteq D' \subseteq \{z\,;\, z \in D \text{ in } w+z \in D\} \tag{E.3.25}$$

Za $|w| < \rho$ torej velja:

$$F(w) = \int_{D'} f(w+z)\,g(z)\,\mathrm{d}z \tag{E.3.26}$$

Naj bo $u \in \mathbb{R}^n$ in $|w| + |u| < \rho$. Definirajmo:

$$\begin{aligned} J(u) &:= \frac{1}{|u|}\left[F(w+u) - F(w) - \int_{D'} f'(w+z)u\,g(z)\,\mathrm{d}z\right] = \\ &= \frac{1}{|u|}\int_{D'}\Big[f(w+z+u) - f(w+z) - f'(w+z)u\Big]g(z)\,\mathrm{d}z = \\ &= \int_{D'}\int_0^1 \Big[f'(w+z+\theta u) - f'(w+z)\Big]\frac{u}{|u|}\,g(z)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{E.3.27}$$

Ker je f' zvezna in zato tudi omejena na kompaktnih množicah, po izreku o dominirani konvergenci velja $\lim_{u\to 0} J(u) = 0$, brž ko je $|w| < \rho$. To pa že pomeni, da je F diferenciabilna v w, njen odvod pa je enak:

$$\int_{D'} f'(w+z)\,g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\substack{z\in D\\ z+w\in D}} f'(w+z)\,g(z)\,\mathrm{d}z \tag{E.3.28}$$

■

Dokaz trditve E.3.2. Dovolj je dokazati za primer, ko je $V = \mathbb{R}$. Podobno kot v lemi E.3.6 definirajmo:

$$F(w) := \int_{\substack{z \in D \\ z+w \in D}} f(w+z)\, h(z)\, \mathrm{d}z \tag{E.3.29}$$

Po lemi E.3.6 velja:

$$F'(0) = \int_D f'(z)\, h(z)\, \mathrm{d}z \tag{E.3.30}$$

Toda F lahko zapišemo tudi v obliki:

$$F(w) = \int_{\substack{x \in D \\ x-w \in D}} f(x)\, h(x-w)\, \mathrm{d}z \tag{E.3.31}$$

in tokrat nam lema E.3.6 da:

$$F'(0) = -\int_D f(z)\, h(z)\, \mathrm{d}z \tag{E.3.32}$$

od koder že sledi zahtevani rezultat. ∎

Izrek E.3.7. *Naj bo μ Radonova mera na odprti množici $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $1 \le p < \infty$. Tedaj je prostor $C_c^{(\infty)}(D)$ gost v $L^p(\mu)$.*

Dokaz. Znano je, da je $C_c(D)$ gost v $L^p(\mu)$. Treba je le še pokazati, da je $C_c^{(\infty)}(D)$ gost v $C_c(D)$ v normi $\|\cdot\|_p$ prostora $L^p(\mu)$. Za ta namen bomo zvezne funkcije zgladili s konvolucijami z neskončno gladkimi funkcijami s kompaktnim nosilcem. Obstaja taka funkcija $h \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$, da je $h \ge 0$, $h(x) = 0$, brž ko je $|x| \ge 1$, in $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, \mathrm{d}x = 1$.

Naj bo zdaj $f \in C_c(D)$. Funkcijo lahko z ničlo razširimo na cel $\mathbb{R}^d$. Naj bo $K \subseteq D$ njen kompaktni nosilec. Označimo z δ razdaljo med K in D^c. Tedaj ima za vsak $\varepsilon < \delta$ funkcija:

$$f_\varepsilon(w) := \int_{\mathbb{R}^n} f(w + \varepsilon z)\, h(z)\, \mathrm{d}z = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, h\left(\frac{x-w}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}x \tag{E.3.33}$$

kompakten nosilec, vsebovan v D. Po lemi E.3.6 je funkcija f_ε neskončno gladka. Nadalje velja:

$$f_\varepsilon(w) - f(w) = \int_{|z| \le 1} \Big[f(w + \varepsilon z) - f(w)\Big] h(z)\, \mathrm{d}z \tag{E.3.34}$$

Ker je f enakomerno zvezna na $\mathbb{R}^n$, potem tudi funkcije f_ε enakomerno konvergirajo proti f, ko gre ε proti nič. Poleg tega imajo za dovolj majhen ε vse te funkcije skupen kompakten nosilec $K' \subseteq D$. Ker je mera μ Radonova, je $\mu(K') < \infty$. Ker je $\|g\|_p \le \mu(K')^{1/p} \|g\|_\infty$, enakomerna konvergenca implicira konvergenco v $L^p(\mu)$. ∎

Dokaz trditve E.3.1. Dovolj je dokazati za primer, ko je kar $V = \mathbb{R}$. Prav tako je trditev dovolj dokazati za primer, ko je D relativno kompaktna. Označimo $f := f_1 - f_2$. Tedaj je $\int_D f(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x = 0$ za vsak $h \in C_c^{(\infty)}(D)$. Za vsak $h \colon D \to \mathbb{R}$ z $\int_D |f(x)|\, |h(x)|\, \mathrm{d}x$ pišimo:

$$\Phi h := \int_D f(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x = \int_D \operatorname{sgn}\big(f(x)\big)\, h(x)\, |f(x)|\, \mathrm{d}x = \int_D \operatorname{sgn}\big(f(x)\big)\, h(x)\, \mu(\mathrm{d}x) \tag{E.3.35}$$

kjer je μ mera na D, definirana z $\mu(\mathrm{d}x) = |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Funkcional Φ je očitno omejen glede na normo prostora $L^1(\mu)$ in na $C_c^{(\infty)}(D)$ enak nič. Ker je μ Radonova mera, je po izreku E.3.7 prostor $C_c^{(\infty)}(D)$ gost v $L^1(\mu)$, Torej je Φ v resnici povsod enak nič. Med drugim to pomeni tudi, da je:

$$\Phi\,\mathrm{sgn}(f) = \int_D |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0 \tag{E.3.36}$$

To pa pomeni, da je funkcija f skoraj povsod na D enaka nič. S tem je dokaz končan. ■

Dokaz trditve E.3.3. Zaradi lokalnosti šibkega odvoda lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je definicijsko območje D funkcije f konveksna relativno kompaktna množica, šibki odvod pa ima verzijo f', ki se da zvezno razširiti na $\bar{D}$. Iz trditve E.3.5 sledi, da za skoraj vsak par $(x, y) \in D \times D$ velja *Newton–Leibnizeva formula*:

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 f'\big((1-\theta)x + \theta y\big)(y - x)\,\mathrm{d}\theta \tag{E.3.37}$$

Definirajmo:

$$A := \{x \in D\ ;\ \text{zveza (E.3.37) velja za skoraj vsak } y \in D\} \tag{E.3.38}$$

Pokažimo sedaj, da zveza (E.3.37) velja za poljubna $x, y \in A$. Obstaja zaporedje točk $y_k \in D$, ki konvergira proti y in za katere velja:

$$f(y_k) - f(x) = \int_0^1 f'\big((1-\theta)x + \theta y_k\big)(y_k - x)\,\mathrm{d}\theta \tag{E.3.39}$$

$$f(y) - f(y_k) = \int_0^1 f'\big((1-\theta)y_k + \theta y\big)(y - y_k)\,\mathrm{d}\theta \tag{E.3.40}$$

Zaradi enakomerne zveznosti funkcije f' integral v (E.3.39) konvergira proti integralu v (E.3.37), integral v (E.3.40) pa konvergira proti nič. Tako, če seštejemo (E.3.39) in (E.3.40) in pošljemo k proti neskončno, dobimo (E.3.37).

Po Fubinijevem izreku ima množica $D \setminus A$ mero nič, torej je med drugim tudi A gosta v D. Poleg tega je funkcija f enakomerno zvezna na A (celo Lipschitzeva), saj zaradi kompaktnosti velja $M := \sup_{x \in D} \|f'(x)\| < \infty$, torej iz (E.3.37) sledi $|f(x) - f(y)| \le M|x - y|$ (prostor V pač opremimo z neko normo). To pa pomeni, da se da zožitev funkcije f na množico A zvezno razširiti na D. Označimo jo z $\tilde{f}$. Očitno je $\tilde{f}$ verzija funkcije f. Ker je desna stran enačbe (E.3.37) zvezna funkcija spremenljivk x in y, zdaj za *poljubna* x in $y \in D$ velja:

$$\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) = \int_0^1 f'\big((1-\theta)x + \theta y\big)(y - x)\,\mathrm{d}\theta \tag{E.3.41}$$

Trditev bo dokazana, če pokažemo, da je f' *klasični* odvod funkcije f. Velja:

$$\frac{1}{|u|}\Big[\tilde{f}(x+u) - \tilde{f}(x) - f'(x)u\Big] = \int_0^1 \Big(f'(x+\theta u) - f'(x)\Big)\frac{u}{|u|}\,\mathrm{d}\theta \tag{E.3.42}$$

in ker je f' zvezna, gre desna stran proti 0. S tem je dokaz končan. ■

E.4 Šibka odvedljivost in absolutna zveznost

Klasična analiza pravi, da sta pri funkcijah ene spremenljivke odvajanje in integriranje inverzni operaciji, če je funkcija, ki jo integriramo, zvezna, funkcija, ki jo odvajamo, pa zvezno odvedljiva. To je možno posplošiti na primer, ko je funkcija, ki jo integriramo, lokalno integrabilna (t. j. pripada L^1_{loc}), funkcija, ki jo odvajamo, pa absolutno zvezna (ali, ekvivalentno, skoraj povsod odvedljiva v klasičnem smislu, odvod pa je lokalno integrabilen; za podrobnosti glej npr. Rudin [110]). V prejšnjem razdelku pa smo definirali še eno posplošitev, t. j. šibko odvedljivost. Izkaže se, da se obe posplošitvi v največji možni meri ujemata.

Trditev E.4.1. *Naj bo $a < b$, dana pa naj bo še funkcija $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$.*

(1) *Če je f absolutno zvezna na (a, b), je tam tudi šibko odvedljiva in klasični odvod funkcije f (natančneje, vsaka njegova razširitev iz množice, kjer obstaja) je tudi šibki odvod.*

(2) *Če je f šibko odvedljiva, ima absolutno zvezno verzijo.*

Dokaz.

(1): Če je f absolutno zvezna, je skoraj povsod odvedljiva in nedoločeni integral svojega odvoda f' (ki ga z množice, kjer obstaja, razširimo na celotni interval). Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $b < \infty$, f absolutno zvezna na $(a, b]$ in $f(b) = 0$. Tedaj velja $f(x) = -\int_x^b f'(t)\,\mathrm{d}t$. Vzemimo zdaj poljubno funkcijo $g \in C_c^{(1)}(a, b)$. Tedaj po Fubinijevem izreku velja:

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b f'(x)\int_a^x g'(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_a^b \int_t^b f'(x)\,\mathrm{d}x\,g'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= -\int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{E.4.1}$$

torej je f' res tudi šibki odvod funkcije f.

(2): Naj bo f šibko odvedljiva in f' njen šibki odvod. Tedaj iz trditve E.3.5 sledi, da za skoraj vsaka $c, x \in (a, b)$ velja $f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\,\mathrm{d}t$. Izberimo tak c, da prejšnja formula velja za skoraj vsak x, in postavimo $\bar{f}(x) := f(c) + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Tedaj je $\bar{f}$ absolutno zvezna funkcija, ki se skoraj povsod ujema z f. ■

E.5 Odvodi Lipschitzevih funkcij

Definicija. Naj bosta V in W metrična prostora. Preslikava $f\colon V \to W$ je *Lipschitzeva*, če obstaja taka konstanta M, da za poljubna $x, y \in V$ velja:

$$d\big(f(x), f(y)\big) \le M\, d(x, y) \tag{E.5.1}$$

Preslikava je *lokalno Lipschitzeva*, če za vsak $x \in V$ obstaja taka okolica U točke x, da je zožitev preslikave f na U Lipschitzeva.

Opomba. Če je preslikava lokalno Lipschitzeva, je vsaka njena zožitev na kompaktno množico Lipschitzeva. Če je prostor, iz katerega slika preslikava, lokalno kompakten, velja tudi obrat.

Če je podana *zvezno diferenciabilna* preslikava $f\colon D \to W$, kjer je $D \subseteq V$ konveksna odprta množica, V in W pa normirana prostora, in je $\|f'(x)\| \le M$ za vsak $x \in D$, iz Newton–Leibnizeve formule sledi, da je $|f(x) - f(y)| \le M|x - y|$, torej je f Lipschitzeva. Tako je med drugim vsaka zvezno diferenciabilna preslikava tudi lokalno Lipschitzeva. Ocena, ki smo jo izpeljali, pa velja tudi v obratni smeri.

Trditev E.5.1. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica, V končnorazsežen normiran prostor, $f\colon D \to V$ pa taka preslikava, da je $|f(x) - f(y)| \le M|x - y|$ za poljubna $x, y \in D$. Če je f diferenciabilna v x, je potem tudi $\|f'(x)\| \le M$, kjer je $\|\cdot\|$ standardna norma na $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, V)$, porojena iz norm na $\mathbb{R}^n$ in V.*

Dokaz. Uporabimo formulo (E.1.2). ∎

Posledica E.5.2. *Če je $f \in C^{(1)}(D; V)$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna odprta množica, je njen odvod omejen natanko tedaj, ko je f Lipschitzeva, in velja:*

$$\sup_{\substack{x,y\in D\\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \sup_{x\in D}\big\|f'(x)\big\| \tag{E.5.2}$$

∎

Presenetljivo pa je, da že iz predpostavke, da je f lokalno Lipschitzeva, sledi tudi diferenciabilnost.

Izrek E.5.3 (Rademacher). *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica, V končnorazsežen vektorski prostor in $f\colon D \to V$ lokalno Lipschitzeva preslikava. Tedaj je f skoraj povsod diferenciabilna v klasičnem smislu.*

Dokaz opuščamo, za dokaz glej npr. Evans in Gariepy [56], razdelek 3.1.2, izrek 2, stran 81. ∎

Opomba. Če je f zvezna preslikava, ni težko preveriti, da je množica točk, kjer je diferenciabilna, merljiva in da je njen odvod tam, kjer obstaja, merljiva preslikava.

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica in V končnorazsežen vektorski prostor. Označimo:

$$\flat^{(0)}(D; V) := \{f\colon\ D \to W\ ;\ f \text{ je omejena}\} \tag{E.5.3}$$

$$\flat^{(1)}(D; V) := \{f\colon\ D \to W\ ;\ f \text{ je Lipschitzeva}\} \tag{E.5.4}$$

$$\flat^{(r)}(D; V) := \{f \in C^{(r-1)}(D; V)\ ;\ f^{(r-1)} \text{ je Lipschitzeva}\} \tag{E.5.5}$$

Kot ponavadi, označimo še lokalne različice:

$$\flat^{(r)}_{\mathrm{loc}}(D; V) := \Big\{f\colon\ D \to V\ ;\ f \in \flat^{(r)}(D'; V), \text{brž ko je } D' \text{ kompaktno vsebovana v } D\} \tag{E.5.6}$$

Naj bo zdaj dana preslikava $f\colon\ D \to V$. Če je f omejena, označimo:

$$M_0(f) := \sup_{x \in D} |f(x)| \tag{E.5.7}$$

Če je f Lipschitzeva, označimo:

$$M_1(f) := \sup_{\substack{x,y \in D \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \tag{E.5.8}$$

Za $r > 1$ in $f \in \flat^{(r)}(D)$ pa označimo:

$$M_r(f) := M_1\Big(f^{(r-1)}\Big) = \sup_{\substack{x,y \in D \\ x \neq y}} \frac{\|f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(y)\|}{|x - y|} \tag{E.5.9}$$

pri čemer se spomnimo, da je $f^{(r)}(x)$ po definiciji element prostora:

$$\mathcal{L}(V, \mathcal{L}(V, \ldots \mathcal{L}(V, W) \ldots)) \tag{E.5.10}$$

in prostor $\mathcal{L}(V, W)$ opremimo s standardno normo, ki izhaja iz norm na V in W. Če je $W = \mathbb{R}$ in višje odvode identificiramo s tenzorji, tako definirana norma ustreza *injektivni* tenzorski normi.

Z zgoraj definiranimi oznakami lahko posledico E.5.2 zapišemo še za višje odvode.

Trditev E.5.4. *Če je $f \in C^{(r)}(D; V)$, kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna odprta množica, je njen r-ti odvod omejen natanko tedaj, ko je njen $(r-1)$-ti odvod Lipschitzev, in velja:*

$$M_r(f) = \sup_{x \in D} \left\| f^{(r)}(x) \right\| \tag{E.5.11}$$

■

Trditev E.5.5. *Za $0 \leq s \leq r$ velja $\flat^{(r)}(D; V) \subseteq \flat^{(r)}_{\mathrm{loc}}(D; V) \subseteq \flat^{(s)}_{\mathrm{loc}}(D; V)$.*

Dokaz. Prva inkluzija je očitna. Za drugo inkluzijo pa je dovolj dokazati, da za poljubno omejeno konveksno območje D velja $\flat^{(r+1)}(D;V) \subseteq \flat^{(r)}(D;V)$. Naj bo torej $f \in \flat^{(r+1)}(D;V)$. Izberimo neko točko $x_0 \in D$ in naj bo R diameter množice D. Tedaj po posledici E.5.4 velja:

$$M_r(f) = \sup_{x \in D} \left\| f^{(r)}(x) \right\| \leq \left\| f^{(r)}(x_0) \right\| + R\, M_{r+1}(f) < \infty \tag{E.5.12}$$

Torej je tudi $f \in \flat^{(r)}(D;V)$. ∎

V nadaljevanju bomo povezali teorijo Lipschitzevih funkcij in klasične diferenciabilnosti s teorijo prostorov Soboljeva. Naslednja trditev je posplošitev trditve E.3.2.

Trditev E.5.6. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica, V končnorazsežen vektorski prostor ter $f \in \flat^{(1)}_{\mathrm{loc}}(D;V)$ in $h \in C^{(1)}_{\mathrm{c}}(D)$. Tedaj velja formula:*

$$\int_D f'(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x = -\int_D f(x)\, h'(x)\, \mathrm{d}x \tag{E.5.13}$$

kjer je z f' in h' mišljen odvod v klasičnem smislu.

Posledica E.5.7. *Vsaka lokalno Lipschitzeva preslikava je tudi šibko odvedljiva in oba odvoda sovpadata.* ∎

Dokaz trditve E.5.6. Trditev sledi iz naslednje leme, podobno kot trditev E.3.2 sledi iz leme E.3.6. ∎

Lema E.5.8. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica ter $f \in \flat^{(1)}_{\mathrm{loc}}(D)$ in $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$. Ena od funkcij naj ima kompakten nosilec. Definirajmo:*

$$F(w) := \int_{\substack{z \in D \\ w+z \in D}} f(w+z)\, g(z)\, \mathrm{d}z \tag{E.5.14}$$

Tedaj je F v neki okolici izhodišča v klasičnem smislu diferenciabilna in velja:

$$F'(w) = \int_{\substack{z \in D \\ w+z \in D}} f'(w+z)\, g(z)\, \mathrm{d}z \tag{E.5.15}$$

Dokaz. Ravnamo podobno kot v dokazu leme E.3.6. Naj bodo D', ρ in u kot tam. Podobno za $|w| + |u| < \rho$ postavimo:

$$\begin{aligned} J(u) &:= \frac{1}{|u|} \left[F(w+u) - F(w) - \int_{D'} f'(w+z) u\, g(z)\, \mathrm{d}z \right] = \\ &= \frac{1}{|u|} \int_{D'} \Big[f(w+z+u) - f(w+z) - f'(w+z)u \Big] g(z)\, \mathrm{d}z \end{aligned} \tag{E.5.16}$$

Dokazati moramo, da je $\lim_{u \to 0} J(u) = 0$. To bo spet sledilo iz izreka o dominirani konvergenci. Po predpostavki izreka je namreč f na kompaktnih množicah Lipschitzeva in po trditvi E.5.1 je tudi njen odvod f' omejen, zato se da faktor pred $g(z)$ omejiti neodvisno od u. ∎

Trditev E.5.9. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna odprta množica in V končnorazsežen normiran prostor. Dana naj bo preslikava $f\colon D \to V$.*

(1) *Preslikava f pripada $\mathcal{W}^{1,\infty}(D;V)$ natanko tedaj, ko ima Lipschitzevo verzijo.*

(2) *Če je f Lipschitzeva, velja:*

$$M_1(f) = \operatorname{ess\,sup} \|f'\| = \sup\Big\{\|f'(x)\|\ ;\ f \text{ je klasično diferenciabilna v } x\Big\} \tag{E.5.17}$$

Tako dobimo naslednjo posplošitev trditve E.5.4.

Posledica E.5.10. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica in V končnorazsežen normiran prostor. Tedaj funkcija $f\colon D \to V$ pripada $\mathcal{W}^{r,\infty}_{\mathrm{loc}}(D;V)$ natanko tedaj, ko ima verzijo v $\flat^{(r)}_{\mathrm{loc}}(D;V)$. Če je D konveksna, pa velja še:*

$$M_r(f) = \operatorname{ess\,sup} \|f^{(r)}\| \tag{E.5.18}$$

■

Dokaz trditve E.5.9. Dovolj je dokazati, da so naslednje trditve ekvivalentne:

(A) Preslikava f ima tako verzijo $\tilde{f}$, da za poljubna $x, y \in D$ velja $|f(x)-f(y)| \le M|x-y|$.

(B) Preslikava f ima verzijo $\tilde{f}$, ki je lokalno Lipschitzeva in za vsak x, kjer je f klasično diferenciabilna, velja $\|\tilde{f}'(x)\| \le M$.

(C) Preslikava f ima verzijo $\tilde{f}$, ki je lokalno Lipschitzeva in za njen klasični odvod velja $\operatorname{ess\,sup} \|\tilde{f}'\| \le M$.

(D) Preslikava f pripada $\mathcal{W}^{1,\infty}(D)$ in za njen šibki odvod velja $\operatorname{ess\,sup} \|f'\| \le M$.

(A) $\Rightarrow$ (B): Sledi iz trditve E.5.1.

(B) $\Rightarrow$ (C): Očitno.

(C) $\Rightarrow$ (D): Sledi iz trditve E.5.7.

(D) $\Rightarrow$ (A): Ravnamo podobno kot pri dokazu trditve E.3.3. Iz trditve E.3.5 sledi, da za skoraj vsak par $(x, y) \in D \times D$ velja *Newton–Leibnizeva formula*:

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 f'\Big((1-\theta)x + \theta y\Big)(y-x)\,\mathrm{d}\theta \tag{E.5.19}$$

Definirajmo:

$$A := \{x \in D\ ;\ \text{zveza (E.5.19) velja za skoraj vsak } y \in D\} \tag{E.5.20}$$

Pokažimo sedaj, da za poljubna $x, y \in A$ velja, da je $|f(x) - f(y)| \le M|x-y|$. Obstaja zaporedje točk $y_k \in D$, ki konvergira proti y in za katere velja:

$$f(y_k) - f(x) = \int_0^1 f'\Big((1-\theta)x + \theta y_k\Big)(y_k - x)\,\mathrm{d}\theta \tag{E.5.21}$$

$$f(y) - f(y_k) = \int_0^1 f'\Big((1-\theta)y_k + \theta y\Big)(y - y_k)\,\mathrm{d}\theta \tag{E.5.22}$$

Sledi:

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(y_k)| + |f(y_k) - f(y)| \le M\big(|x - y_k| + |y_k - y|\big) \tag{E.5.23}$$

V limiti, ko gre k proti neskončno, potem res dobimo, da za poljubna $x, y \in A$ velja $|f(x) - f(y)| \le M|x - y|$.

Nadaljujemo spet podobno kot v dokazu trditve E.3.3. Po Fubinijevem izreku ima množica $D \setminus A$ mero nič, torej je A gosta v D. Ker je f na A enakomerno zvezna, se da njena zožitev na A zvezno razširiti na cel D. Ta razširitev je potem iskana verzija funkcije f. ∎

Za konec razdelka bomo podali majhno ilustracijo – oceno ostanka pri Taylorjevi formuli.

Trditev E.5.11. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta konveksna množica in $f \in \flat^{(r+1)}(D; V)$. Tedaj za poljubna $x \in D$ in tak $u \in \mathbb{R}^n$, da je tudi $x + u \in D$, velja:*

$$f(x + u) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\, u + \cdots + \frac{f^{(r)}(x)}{r!}\, u^r + R \tag{E.5.24}$$

kjer je:

$$|R| \le \frac{M_{r+1}(f)}{(r+1)!}\, |u|^{r+1} \tag{E.5.25}$$

Dokaz. Trditev bomo dokazali na dva načina.

Prvi način: z uporabo šibkih odvodov Lipschitzevih funkcij. Fiksirajmo u. Po trditvi E.3.4 za skoraj vsak $x \in D$, za katerega je tudi $x + u \in D$, velja:

$$R = \int_0^1 (1-\theta)^r\, \frac{f^{(r+1)}(x + \theta u)}{r!}\, u^{r+1}\, \mathrm{d}\theta \tag{E.5.26}$$

Toda ker je f zvezna, enakost velja za vsak x. Po trditvi E.5.9 lahko ocenimo:

$$|R| \le \frac{M_{r+1}(f)}{r!}\, |u|^{r+1} \int_0^1 (1-\theta)^r\, \mathrm{d}\theta = \frac{M_{r+1}(f)}{(r+1)!}\, |u|^{r+1} \tag{E.5.27}$$

∎

Drugi način: brez uporabe šibkih odvodov. Ker je f r-krat zvezno odvedljiva, lahko uporabimo trditev E.2.3, a za en člen manj. Dobimo:

$$\begin{aligned} R &= \int_0^1 (1-\theta)^{r-1}\, \frac{f^{(r)}(x + \theta u)}{(r-1)!} u^r\, \mathrm{d}\theta - \frac{f^{(r)}(x)}{r!}\, u^r = \\ &= \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (1-\theta)^{r-1} \Big[f^{(r)}(x + \theta u) - f^{(r)}(x)\Big] u^r\, \mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{E.5.28}$$

Ocenimo:

$$|R| \le \frac{M_{r+1}(f)}{(r-1)!}\, |u|^{r+1} \int_0^1 \theta(1-\theta)^{r-1}\, \mathrm{d}\theta = \frac{M_{r+1}(f)}{(r+1)!}\, |u|^{r+1} \tag{E.5.29}$$

∎

E.6 Odvajanje integralov

Naj bo Ω merljiv prostor s σ-končno pozitivno mero μ, D pa topološki prostor. Dana naj bo merljiva preslikava $f\colon D \times \Omega \to V$, kjer je V končnorazsežen vektorski prostor. Preučevali bomo zveznost in gladkost preslikave:

$$F(w) = \int_\Omega f(w,x)\,\mu(\mathrm{d}x) \tag{E.6.1}$$

Naslednja trditev takoj sledi iz izreka o dominirani konvergenci.

Trditev E.6.1. *Naj bo prostor D 1-števen, preslikava $w \mapsto f(w,x)$ naj bo zvezna za vsak x. Nadalje naj za vsak $w_0 \in W$ obstaja taka okolica U točke w_0, da za vsako končno ali števno neskončno podmnožico $C \subseteq U$ velja:*

$$\int_\Omega \sup_{w\in C} \bigl|f(w,x)\bigr|\,\mu(\mathrm{d}x) < \infty \tag{E.6.2}$$

Tedaj je tudi preslikava F zvezna. ∎

Opomba. Izraz $|\cdot|$ v tem razdelku označuje normo. Ker smo v končnorazsežnem prostoru, je vseeno, katero normo vzamemo.

V nadaljevanju se bomo posvetili diferenciabilnosti preslikave F. Od tod naprej naj bo D odprta podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$.

Trditev E.6.2. *Naj preslikava $w \mapsto f(w,x)$ za skoraj vsak $x \in \Omega$ pripada $\mathcal{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D;V)$. Označimo z $\frac{\partial f}{\partial w}$ njen šibki odvod. Poleg tega naj za vsako kompaktno množico $K \subseteq D$ velja:*

$$\int_K \int_\Omega \bigl|f(w,x)\bigr|\,\mu(\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}w < \infty \quad \text{in} \quad \int_K \int_\Omega \left|\frac{\partial f}{\partial w}(w,x)\right|\,\mu(\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}w < \infty \tag{E.6.3}$$

Tedaj je tudi $F \in \mathcal{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D;V)$ in velja:

$$F'(w) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial w}(w,x)\,\mu(\mathrm{d}x) \tag{E.6.4}$$

Opomba. Brž ko velja (E.6.3), avtomatično za skoraj vsak $x \in \Omega$ velja, da preslikavi $w \mapsto f(w,x)$ in $w \mapsto \frac{\partial f}{\partial w}(w,x)$ pripadata $L^1_{\mathrm{loc}}(D;V)$. To je zato, ker je D števna unija kompaktnih množic.

Dokaz trditve E.6.2. Naj bo $h \in C^{(\infty)}_{\mathrm{c}}(D;V)$. Iz Fubinijevega izreka in definicije šibkega odvoda dobimo:

$$\begin{aligned}\int_D \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial w}(w,x)\,\mu(\mathrm{d}x)\,h(w)\,\mathrm{d}w &= \int_\Omega \int_D \frac{\partial f}{\partial w}(w,x)\,h(w)\,\mathrm{d}w\,\mu(\mathrm{d}x) = \\ &= \int_\Omega \int_D f(w,x)\,h'(w)\,\mathrm{d}w\,\mu(\mathrm{d}x) = \\ &= \int_D \int_\Omega f(w,x)\,\mu(\mathrm{d}x)\,h'(w)\,\mathrm{d}w\end{aligned} \tag{E.6.5}$$

∎

Naslednji rezultat nam da *zvezno* odvedljivost integralov.

Trditev E.6.3. *Naj bo preslikava $w \mapsto f(w,x)$ za skoraj vsak $x \in \Omega$ zvezno diferenciabilna z odvodom $\frac{\partial f}{\partial w}$. Nadalje naj za vsako kompaktno množico $K \subseteq D$ velja:*

$$\int_\Omega \sup_{w\in K} \left| f(w,x) \right| \mu(\mathrm{d}x) < \infty \quad \text{in} \quad \int_\Omega \sup_{w\in K} \left| \frac{\partial f}{\partial w}(w,x) \right| \mu(\mathrm{d}x) < \infty \tag{E.6.6}$$

Tedaj je tudi F zvezno diferenciabilna in velja (E.6.4).

Opomba. Supremuma pod integraloma sta glede na napolnitev mere μ merljivi funkciji spremenljivke x, ker se lahko zaradi zveznosti za skoraj vsak x omejimo na supremum po točkah iz števne goste množice.

Dokaz trditve E.6.3. Najprej bomo uporabili trditev E.6.2. Ker je $w \mapsto f(w,x)$ zvezno odvedljiva (v klasičnem smislu), je tudi šibko odvedljiva. Nadalje iz ocene (E.6.6) sledi tudi ocena (E.6.3). Po trditvi E.6.2 potem (E.6.4) velja v *šibkem* smislu. Toda zaradi (E.6.6) in lokalne kompaktnosti so izpolnjeni tudi pogoji trditve E.6.1, torej sta preslikavi F in F' zvezni. Potem pa po trditvi E.3.3 zveza (E.6.4) res velja tudi v klasičnem smislu. ■

E.7 Integracija per partes, odvod produkta

V trditvah E.3.2 in E.5.6 smo opisali, pod kakšnimi pogoji lahko integriramo per partes, če gre za klasično diferenciabilne funkcije več spremenljivk. Formula se da lepo posplošiti tudi na šibko odvedljive funkcije, kot pove naslednja trditev, ki jo bomo dokazali na koncu razdelka.

Trditev E.7.1. *Naj bosta $1 \le p, q \le \infty$ konjugirana eksponenta, t. j. $1/p + 1/q = 1$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica ter $f \in \mathcal{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ in $g \in \mathcal{W}^{1,q}_{\mathrm{loc}}(D)$. Če ima vsaj ena od funkcij kompakten nosilec, velja:*

$$\int_D f'(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x = -\int_D f(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x \tag{E.7.1}$$

S pomočjo zgornje trditve se da izpeljati tudi pravilo za odvajanje produkta.

Trditev E.7.2. *Naj bosta $1 \le p, q \le \infty$ konjugirana eksponenta, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica ter $f \in \mathcal{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ in $g \in \mathcal{W}^{1,q}_{\mathrm{loc}}(D)$. Tedaj je $fg \in \mathcal{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(D)$ in velja:*

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{E.7.2}$$

Dokaz. Privzemimo najprej, da je $g \in C^{(\infty)}(D)$. Tedaj po definiciji šibkega odvoda za poljubno funkcijo $h \in C^{(\infty)}_{\mathrm{c}}(D)$ velja:

$$\begin{aligned} \int_D f'(x)\, g(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x &= -\int_D f(x)\, (gh)'(x)\, \mathrm{d}x = \\ &= -\int_D f(x)\, g'(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x - \int_D f(x)\, g(x)\, h'(x)\, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{E.7.3}$$

oziroma:

$$\int_D f(x)\,g(x)\,h'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_D f'(x)\,g(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x - \int_D f(x)\,g'(x)\,h(x)\,\mathrm{d}x \tag{E.7.4}$$

od koder po definiciji šibkega odvoda že sledi (E.7.2). V splošnem primeru pa prav tako naredimo račun (E.7.3), le da zdaj uporabimo formulo (E.7.1) in produktno pravilo za prej obravnavani primer. ∎

Za dokaz trditve E.7.1 bomo potrebovali nekaj pomožnih rezultatov.

Lema E.7.3. *Naj bosta $1 \le p, q \le \infty$ konjugirana eksponenta ter $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ in $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Tedaj je funkcija:*

$$F(w) = \int_{\mathbb{R}^n} f(w+z)\,g(z)\,\mathrm{d}z \tag{E.7.5}$$

zvezna.

Dokaz. Ker lahko pišemo tudi $F(w) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,g(x-w)\,\mathrm{d}x$, smemo brez škode za splošnost privzeti, da je $p < \infty$. Naj bo $w_0 \in \mathbb{R}^n$ in $\varepsilon > 0$. Ker so zvezne funkcije s kompaktnim nosilcem goste v $L^p(\mathbb{R}^n)$, obstaja taka funkcija $\bar{f} \in C_c(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, da je:

$$\|\bar{f} - f\|_p\,\|g\|_q < \frac{\varepsilon}{3} \tag{E.7.6}$$

Naj bo K kompaktni nosilec funkcije $\bar{f}$. Označimo:

$$K_1 := \{w + z\ ;\ z \in K, |w - w_0| \le 1\} \tag{E.7.7}$$

Tudi množica K_1 je kompaktna in ker je $g \in L^q(\mathbb{R}^n) \subseteq L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, je:

$$M := \int_{K_1} |g(x)|\,\mathrm{d}x < \infty \tag{E.7.8}$$

Ker ima $\bar{f}$ kompakten nosilec, je enakomerno zvezna, zato obstaja tak $0 < \delta \le 1$, da za poljuben w, za katerega je $|w - w_0| < \delta$, velja $M \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\bar{f}(w+z) - \bar{f}(w_0+z)| < \varepsilon/3$. Sledi:

$$\begin{aligned}
|F(w) - F(w_0)| \le{} & \left|\int_{\mathbb{R}^n} \Big(f(w+z) - \bar{f}(w+z)\Big) g(z)\,\mathrm{d}z\right| + \\
& + \left|\int_{K_1} \Big(\bar{f}(w+z) - \bar{f}(w_0+z)\Big) g(z)\,\mathrm{d}z\right| + \\
& + \left|\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\bar{f}(w_0+z) - f(w_0+z)\Big) g(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \\
\le{} & 2\|\bar{f} - f\|_p\,\|g\|_q + M \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |\bar{f}(w+z) - \bar{f}(w_0+z)| < \\
<{} & \varepsilon
\end{aligned} \tag{E.7.9}$$

Lema je s tem dokazana. ∎

Lema E.7.4. *Naj bosta $1 \le p, q \le \infty$ konjugirana eksponenta, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica ter $f \in \mathcal{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ in $g \in L^q_{\mathrm{loc}}(D)$. Ena od funkcij naj ima kompakten nosilec. Definirajmo:*

$$F(w) := \int_{\substack{z \in D \\ w+z \in D}} f(w+z)\, g(z)\, \mathrm{d}z \tag{E.7.10}$$

Tedaj je F v neki okolici izhodišča zvezno diferenciabilna in velja:

$$F'(w) = \int_{\substack{z \in D \\ w+z \in D}} f'(w+z)\, g(z)\, \mathrm{d}z \tag{E.7.11}$$

Dokaz. Podobno kot v dokazu trditve E.3.6 lahko za dovolj majhne w pišemo:

$$F(w) := \int_{D'} f(w+z)\, g(z)\, \mathrm{d}z \tag{E.7.12}$$

kjer je $D' \subseteq D$ primerna kompaktna množica. Rezultat zdaj sledi iz trditve E.6.2 in leme E.7.3 (funkciji f' in g z ničlo razširimo na cel $\mathbb{R}^n$). ∎

Dokaz trditve E.7.1. Trditev sledi iz leme E.7.4, podobno kot trditev E.3.2 sledi iz leme E.3.6. ∎

E.8 O odvodih Gaussove gostote

Cilj tega razdelka je obravnavati odvode gostote standardizirane n-razsežne normalne porazdelitve:

$$\phi_n(x) = (2\pi)^{-n/2}\, e^{-\frac{1}{2}|x|^2} \tag{E.8.1}$$

Če je $x = (x_1, \dots x_n)$ in so $e_1, \dots e_n$ standardni bazni vektorji (tako da je potem tudi $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$), velja:

$$\phi_n'(x) e_i = \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i}(x) = -\phi_n(x) x_i \tag{E.8.2}$$

Torej za vsak vektor $u \in \mathbb{R}^n$ velja:

$$\phi_n'(x) u = -\phi_n(x) \langle x\,,\, u \rangle = -\phi_n(x) x^T u \tag{E.8.3}$$

ali še drugače povedano:

$$\phi'(x) = -\phi_n(x) x^T \tag{E.8.4}$$

Zveza (E.8.4) ima naslednjo posplošitev na višje odvode.

Trditev E.8.1. *Za vsak $r \in \mathbb{N}_0$, vsak $x \in \mathbb{R}^n$ in vsak enotski vektor $u \in \mathbb{R}^n$ velja zveza:*

$$\phi_d^{(r)}(x) u^r = \phi_d(x)\, \frac{\phi_1^{(r)}\big(\langle x\,,\, u \rangle\big)}{\phi_1\big(\langle x\,,\, u \rangle\big)} \tag{E.8.5}$$

Opomba. Iz posledice D.10.3 sledi, da so odvodi funkcije ϕ s formulo (E.8.5) natančno določeni: brž ko za kontravariantni tenzor u' reda r velja, da je skrčitveni produkt $u'u^r$ za vsak u enak desni strani v (E.8.5), mora biti $u' = \phi_d^{(r)}(x)$.

Dokaz trditve E.8.1. Obstaja izometrična vložitev T, ki $\mathbb{R}^{n-1}$ preslika v ortogonalni komplement vektorja u. Poleg tega obstajata taka $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ in tak $t \in \mathbb{R}$, da je $x = tu + Ty$ (velja $t = \langle x\,,\, u\rangle$). Očitno je $\phi_d(x) = \phi_1(t)\,\phi_{d-1}(y)$. Iz trditve E.2.2 zdaj sledi:

$$\phi_d^{(r)}(x)u^r = \phi_1^{(r)}(t)\,\phi_{d-1}(y) = \phi_d(x)\,\frac{\phi_1^{(r)}\Big(\langle x\,,\, u\rangle\Big)}{\phi_1\Big(\langle x\,,\, u\rangle\Big)} \tag{E.8.6}$$

■

Posledica E.8.2. *Za vsak r obstaja taka konstanta C_r, neodvisna od dimenzije, da velja ocena:*

$$\Big|\phi_n^{(r)}(x)\Big|_\vee \leq C_r\Big(1 + |x|^r\Big)\phi_n(x) \tag{E.8.7}$$

Dokaz. Po posledici D.10.4 zadošča oceniti $\phi_n^{(r)}(x)u^r$, kjer je u enotski vektor. Toda po (E.8.5) je nadalje dovolj oceniti $\phi_1^{(r)}(\langle x\,,\, u\rangle)/\phi_1(\langle x\,,\, u\rangle)$. Funkcija $H_r(t) := \phi_1^{(r)}(t)/\phi_1(t)$ pa je polinom stopnje r (natančneje Hermitov polinom, pomnožen z $(-1)^r$). To pa pomeni, da lahko ocenimo $|H_r(t)| \leq C_r(1 + |t|^r)$ in ocena (E.8.7) je dokazana. ■

Dodatek F

O Hausdorffovi meri

Volumen množic v $\mathbb{R}^n$ lahko opišemo z Lebeguovo mero. Kako pa definirati dolžino ali površino? Za množice, vsebovane v kakšnem afinem podprostoru, lahko definiramo Lebesguovo mero ustrezne dimenzije. Kaj pa, če množica ni vsebovana v nobenem afinem podprostoru želene dimenzije (ali števni uniji takih podprostorov)? Na razmeroma preprost način se lahko "izmažemo", če je množica vsebovana v števni uniji gladkih podmnogoterosti. Včasih pa potrebujemo še splošnejši primer ali pa je s podmnogoterostmi nerodno delati. Ena izmed možnosti posplošitve je *Hausdorffova mera*, ki jo bomo definirali v razdelku F.2. S Hausdorffovo mero se izraža tudi precej močan izrek, ki je posplošitev tako Fubinijevega izreka kot tudi izreka o vpeljavi nove spremenljivke v Riemannov integral. To je *krivočrtni Fubinijev izrek* (angl. *coarea formula*), ki ga bomo formulirali v razdelku F.3.

F.1 O zunanjih merah

Osrednji pojem teorije mere je seveda *mera*, t. j. števno aditivna funkcija na σ-algebri. Večino zanimivih mer, prav gotovo pa vse, ki jih bomo v tem delu potrebovali, pa lahko konstruiramo z uporabo Carathéodoryjevega koncepta *zunanjih mer*, ki so števno subaditivne, zato pa jih lahko definiramo na vseh podmnožicah danega prostora.

Definicija. *Zunanja mera* μ na množici W je preslikava iz *vseh* podmnožic množice W v $[0, \infty]$, za katero velja:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) če je $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, je tudi:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \tag{F.1.1}$$

Pokazali bomo, da je v dovolj lepih primerih ekvivalentno, ali delamo s pravimi ali zunanjimi merami. Iz vsake zunanje mere μ dobimo mero na σ-algebri vseh množic, ki so *merljive* glede na μ.

Definicija. Množica A je *merljiva* glede na zunanjo mero μ, če za vsako množico E velja:

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A) \tag{F.1.2}$$

Trditev F.1.1. *Naj bo μ zunanja mera. Tedaj je družina vseh množic, ki so merljive glede na μ, σ-algebra, zožitev zunanje mere μ na to σ-algebro pa je mera.*

Dokaz. Glej Halmos [65], Federer [57] ali Evans in Gariepy [56]. ∎

Naredimo pa lahko tudi obratno: iz mere μ, definirane na σ-algebri $\mathcal{M}$, konstruiramo zunanjo mero $\bar{\mu}$ po predpisu:

$$\bar{\mu}(A) := \inf_{\substack{B \in \mathcal{M} \\ B \supseteq A}} \mu(B) \tag{F.1.3}$$

Opomba. Iz lastnosti σ-algeber sledi, da je infimum v (F.1.3) v resnici dosežen: za vsako množico A obstaja taka množica $B \in \mathcal{M}$, da je $B \supseteq A$ in $\bar{\mu}(A) = \mu(B)$.

Nastane vprašanje, ali sta prej opisana postopka inverzna. Dokaz naslednje trditve je prepuščen bralcu.

Trditev F.1.2. *Naj bo μ mera na σ-algebri $\mathcal{M}$ in naj bo $\bar{\mu}$ zunanja mera, definirana tako kot v* (F.1.3). *Tedaj je vsaka množica iz $\mathcal{M}$ tudi merljiva glede na $\bar{\mu}$. Če mero $\bar{\mu}$ zožimo na $\mathcal{M}$, dobimo μ.* ∎

Druga možnost pa je, da vzamemo zunanjo mero, jo zožimo na merljive množice in iz te mere v skladu z (F.1.3) znova naredimo zunanjo mero. V tem primeru pa ne dobimo vedno prvotne zunanje mere. Odgovor pa je pritrdilen za *regularne* zunanje mere.

Definicija.

(1) Zunanja mera μ je *regularna*, če za vsako množico A obstaja množica $B \supseteq A$, ki je merljiva glede na μ in za katero velja $\mu(B) = \mu(A)$.

(2) Zunanja mera na topološkem prostoru je *Borelova*, če so vse Borelove množice merljive glede na μ.

(3) Zunanja mera na topološkem prostoru je *Borelovo regularna*, če je Borelova in če za vsako množico A obstaja Borelova množica $B \supseteq A$, za katero je $\mu(B) = \mu(A)$.

Tudi naslednjo trditev dokažemo brez težav.

Trditev F.1.3.

(1) *Naj bo μ mera na neki σ-algebri. Tedaj je zunanja mera $\bar{\mu}$, konstruirana tako kot v* (F.1.3), *regularna.*

(2) *Naj bo μ regularna zunanja mera in naj bo $\bar{\mu}$ zunanja mera, konstruirana tako kot v* (F.1.3) *iz zožitve zunanje mere μ na merljive množice. Tedaj je $\bar{\mu} = \mu$.*

∎

Če povzamemo, iz trditev F.1.2 in F.1.3 sledi, da je ekvivalentno, ali delamo s pravimi ali z regularnimi zunanjimi merami. Včasih pa je s slednjimi lepše delati. Tako se npr. v Federerjevi [57] ter Evansovi in Gariepyjevi monografiji [56] v celoti dela z zunanjimi merami (za katere se uporablja kar izraz mera).

F.2 Definicija in osnovne lastnosti

Hausdorffova mera je posplošitev Lebesguove mere na $\mathbb{R}^n$ in jo lahko definiramo na poljubnem metričnem prostoru. Motivirana je z dejstvom, da lahko vsako Lebesguovo merljivo množico v $\mathbb{R}^n$ poljubno natančno (t. j. s poljubno malo prekrivanja in pokrivanja območja izven dane množice) pokrijemo s samimi kroglami. Drugače povedano, velja naslednji izrek (o dokazu bo beseda kasneje, ko bomo formulirali še nekoliko močnejšo različico, izrek F.2.8).

Izrek F.2.1. *Zunanja Lebesguova mera vsake množice $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je enaka:*

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\left\{v_n \sum_{i=1}^{\infty} r_i^n \; ; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i)\right\} \tag{F.2.1}$$

kjer je $B(x, r)$ zaprta krogla okoli točke x s polmerom r, v_n pa je Lebesguova mera enotske krogle v $\mathbb{R}^n$, t. j.:

$$v_n := \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \tag{F.2.2}$$

Opomba. Skozi vse poglavje se držimo dogovora $\inf \emptyset = \infty$.

Krogla pa je nekaj, kar poznamo tudi v metričnem prostoru. Osnovna ideja je torej, da krogli $B(x, r)$ okoli točke x in s polmerom r, ki se nahaja v metričnem prostoru (M, d), predpišemo tako mero, kot je Lebesguova mera enako "velike" krogle v $\mathbb{R}^n$. Tako bi lahko za vsako množico $A \subseteq M$ definirali njeno zunanjo mero tako kot v (F.2.1). Izrek F.2.1 nam zagotavlja, da za $M = \mathbb{R}^n$ res dobimo zunanjo Lebesguovo mero.

Ker dimenzija metričnega prostora ni nekaj vnaprej predpisanega, se moramo pri definiciji take mere najprej odločiti, kateri n bi vzeli. Tako dobimo celo družino mer. Poleg tega sploh ni nujno, da je n celo število. A kot bomo videli kasneje, metrika sama pove, kateri n je za posamezno množico smiselno vzeti. Pravimo mu *Hausdorffova dimenzija* (glej spodaj) in to res ni vedno nujno celo število.

Zunanja mera, definirana tako kot v (F.2.1), pa ima to pomanjkljivost, da ne upošteva lokalne geometrije.

ZGLED F.2.1. Oglejmo si zunanjo mero, opisano v (F.2.1), na "križu":

$$\Big([-1, 1] \times \{0\}\Big) \cup \Big(\{0\} \times [-1, 1]\Big) \tag{F.2.3}$$

pri čemer vzamemo $n = 1$ (kar je smiselno, ker gre za enodimenzionalen objekt). Očitno lahko cel prostor pokrijemo s kroglo polmera ena, torej je mera celega prostora enaka 1. Toda ker je diameter prostora enak 2, ga ne moremo pokriti z družino krogel, ki bi imele vsoto polmerov manjšo od 1. Zato je mera celega prostora enaka 1. Toda enako lahko sklepamo tudi za oba "kraka" $[-1, 1] \times \{0\}$ in $\{0\} \times [-1, 1]$. Ker je mera preseka krakov očitno enaka nič, to pomeni, da kraka ne moreta biti merljivi množici, kar ni smiselno. □

Pomanjkljivost zunanje mere iz (F.2.1) odpravimo tako, da se omejimo le na krogle z majhnimi polmeri. Izkaže pa se tudi, da je namesto krogel ugodneje vzeti množice z omejenimi diametri, ki so fleksibilnejše.

Definicija. Naj bo (M,d) metrični prostor ter $n \in \mathbb{R}$ in $n \geq 0$. Za $\delta > 0$ in $A \subseteq M$ definirajmo:

$$\mathcal{H}^n_\delta(A) := \inf\left\{ v_n \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam} A_i}{2}\right)^n ; A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \operatorname{diam} A_i \leq \delta \right\} \tag{F.2.4}$$

Očitno za $\delta_1 \geq \delta_2$ velja $\mathcal{H}^n_{\delta_1}(A) \leq \mathcal{H}^n_{\delta_2}(A)$. Definirajmo *n-dimenzionalno zunanjo Hausdorffovo mero* kot:

$$\mathcal{H}^n(A) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^n_\delta(A) \tag{F.2.5}$$

Opomba. Če je prostor M primerno "zavit", se čisto lahko zgodi, da je n-dimenzionalna zunanja Hausdorffova mera množice z diametrom δ večja od $(\delta/2)^n$.

Opomba. Konstrukcija Hausdorffove mere, opisana v (F.2.4) in (F.2.5), je poseben primer *Carathéodoryjeve konstrukcije*, pri kateri množice pokrivamo z množicami iz vnaprej predpisane družine (npr. kroglami), ki imajo omejene diametre, seštevamo pa poljubne nenegativne funkcije na teh množicah. Zunanja mera, ki jo na ta način dobimo iz pokritij s kroglami (pri čemer seštevamo ustrezne potence njihovih diametrov, pomnožene s primernim faktorjem), se imenuje *zunanja sferična mera*. Za podrobnosti glej Federer [57], razdelek 2.10.

Zunanja Hausdorffova mera ima vrsto lepih lastnosti.

Trditev F.2.2. *Zunanja Hausdorffova mera je Borelovo regularna.*

Dokaz. Glej Evans in Gariepy [56], razdelek 2.1, izrek 1. ■

Dokaz naslednjih dveh trditev je prepuščen bralcu.

Trditev F.2.3. *Zunanja Hausdorffova mera $\mathcal{H}^0$ je kar mera, ki šteje (vse množice so merljive).* ■

Trditev F.2.4. *Naj bosta (M,d) in (M',d') metrična prostora. Dana naj bo preslikava $g\colon M \to M'$.*

(1) *Če za poljubna $x, y \in M$ velja $d'\big(g(x), g(y)\big) \leq c\, d(x,y)$ (t. j. g je Lipschitzeva s konstanto c), za poljubno množico $A \subseteq M$ velja:*

$$\mathcal{H}^n\big(g(A)\big) \leq c^n\, \mathcal{H}^n(A) \tag{F.2.6}$$

(2) *Če za poljubna $x, y \in M$ velja $d'\big(g(x), g(y)\big) \geq c\, d(x,y)$, kjer je $c > 0$, za poljubno množico $A \subseteq M$ velja:*

$$\mathcal{H}^n\big(g(A)\big) \geq c^{-n}\, \mathcal{H}^n(A) \tag{F.2.7}$$

in za poljubno množico $B \subseteq M'$ velja:

$$\mathcal{H}^n\big(g^{-1}(B)\big) \leq c^n\, \mathcal{H}^n(B) \tag{F.2.8}$$

■

Opomba. Prav zaradi lastnosti (2) je ugodno, da smo s krogel prešli na množice z omejenimi diametri. Trditev F.2.4 je eden izmed pomembnih korakov pri dokazu osrednjega rezultata, krivočrtnega Fubinijevega izreka (izrek F.3.2) (potrebujemo jo, ko diferenciabilne preslikave aproksimiramo z linearnimi).

Posledica F.2.5. *Če za poljubna x, y velja $d'\big(g(x), g(y)\big) = c\,d(x, y)$, tudi za poljubno množico A velja $\mathcal{H}^n\big(g(A)\big) = c^n\mathcal{H}^n(A)$.* ∎

Posledica F.2.6. *Naj bosta (M, d) in (M', d') metrična prostora. Dani naj bosta merljivi preslikavi $f\colon M' \to [0, \infty]$ in $g\colon M \to M'$.*

(1) *Če je g surjektivna in za poljubna x, y velja $d'\big(g(x), g(y)\big) \le c\,d(x, y)$, velja tudi:*

$$\int_{M'} f(y)\,\mathcal{H}^n(\mathrm{d}y) \le c^n \int_M f\big(g(x)\big)\,\mathcal{H}^n(\mathrm{d}x) \tag{F.2.9}$$

(2) *Če za poljubna x, y velja $d'\big(g(x), g(y)\big) \ge c\,d(x, y)$, velja tudi:*

$$\int_{M'} f(y)\,\mathcal{H}^n(\mathrm{d}y) \ge c^n \int_M f\big(g(x)\big)\,\mathcal{H}^n(\mathrm{d}x) \tag{F.2.10}$$

DOKAZ.

(1): Naj bo najprej $B \subseteq M'$ merljiva množica in $f = \mathbf{1}_B$, t. j. indikator množice B. Ker je g surjektivna, je $g\big(g^{-1}(B)\big) = B$. Iz (F.2.6) dobimo:

$$\int_{M'} f(y)\,\mathcal{H}^n(\mathrm{d}y) = \mathcal{H}^n(B) = \mathcal{H}^n\Big(g\big(g^{-1}(B)\big)\Big) \le c^n\mathcal{H}^n\big(g^{-1}(B)\big) = c^n \int_M f\big(g(x)\big)\,\mathcal{H}^n(\mathrm{d}x) \tag{F.2.11}$$

Iz linearnosti sledi, da neenakost (F.2.9) velja tudi za primer, ko je f stopničasta funkcija, iz izreka o monotoni konvergenci pa, da velja tudi za splošni primer.

(2): Dokažemo tako kot točko (1), le da namesto neenakosti (F.2.6) uporabimo neenakost (F.2.8). ∎

Pri Hausdorffovi meri moramo določiti dimenzijo, glede na katero merimo. Omenili pa smo že, da je za posamezno množico smiselno vzeti le eno dimenzijo. To sledi iz naslednje trditve, katere dokaz je prav tako prepuščen bralcu.

Trditev F.2.7. *Naj bo A podmnožica metričnega prostora.*

(1) *Če je $\mathcal{H}^n(A) < \infty$ in $m > n$, je $\mathcal{H}^m(A) = 0$.*

(2) *Če je $\mathcal{H}^n(A) > 0$ in $m < n$, je $\mathcal{H}^m(A) = \infty$.*

∎

Definicija. *Hausdorffova dimenzija* dane podmnožice A metričnega prostora je število:

$$\dim_H(A) := \inf\{n \geq 0 \,;\, \mathcal{H}^n(A) = 0\} = \sup\{n \geq 0 \,;\, \mathcal{H}^n(A) = \infty\} \tag{F.2.12}$$

Mera, definirana v (F.2.1), ki je služila kot motivacija za Hausdorffovo mero, se po izreku F.2.1 na $\mathbb{R}^n$ ujema z zunanjo Lebesguovo mero. Hausdorffovo mero pa smo definirali nekoliko drugače in nastane vprašanje, ali je to še vedno posplošitev zunanje Lebesguove mere. Prehod na pokritje z majhnimi množicami ne predstavlja težav, saj velja naslednja močnejša različica izreka F.2.1 (za dokaz glej npr. Evans in Gariepy [56], razdelka 1.5 in 2.2).

Izrek F.2.8. *Za vsak $\delta > 0$ je zunanja Lebesguova mera vsake množice $A \subseteq \mathbb{R}^n$ enaka:*

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\left\{ v_n \sum_{i=1}^{\infty} r_i^n \,;\, A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i), (\forall i) r_i \leq \delta \right\} \tag{F.2.13}$$

■

Da lahko s krogel preidemo na množice z omejenimi diametri, pa sledi iz naslednjega geometrijskega dejstva.

Izrek F.2.9 (izodiametrična neenakost). *Za vsako množico $A \subseteq \mathbb{R}^n$ velja:*

$$\mathcal{L}^n(A) \leq v_n \left(\frac{\operatorname{diam} A}{2}\right)^n \tag{F.2.14}$$

Opomba. Izrek pove, da ima med vsemi množicami z danim diametrom krogla največji volumen. Rezultat je posebej zanimiv zato, ker ni vsaka množica $A \subseteq \mathbb{R}^d$ vsebovana v krogli s premerom, enakim $\operatorname{diam} A$.

Ideja dokaza izreka F.2.9. Izrek dokažemo z geometrijsko konstrukcijo, imenovano *Steinerjeva simetrizacija*, pri kateri merljivi množici A z diametrom δ priredimo množico, ki ima enako zunanjo Lebesguovo mero kot A in je vsebovana v krogli s premerom δ (brez škode za splošnost lahko izrek dokažemo le za zaprte množice, ki so merljive). Za podrobnosti glej Evans in Gariepy [56]. ■

Posledica F.2.10. *Za vsak $A \subseteq \mathbb{R}^n$ velja $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$.*

Dokaz. Vzemimo poljubno pokritje množice A s števno mnogo kroglami, katerih premer ne presega δ. To je tudi pokritje množice A z množicami, katerih diameter ne presega δ. Ker se za tako pokritje vsoti iz (F.2.4) in (F.2.13) ujemata, po izreku F.2.8 velja $\mathcal{H}_\delta^n(A) \leq \mathcal{L}^n(A)$. Ker to velja za vsak $\delta > 0$, je tudi $\mathcal{H}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(A)$.

Naj bo zdaj $A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, A_i zaprte in $\operatorname{diam} A_i \leq 1$. Po izreku F.2.9 velja:

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_i) \leq v_n \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\operatorname{diam} A_i}{2}\right)^n \tag{F.2.15}$$

Če vzamemo infimum po vseh pokritjih, dobimo $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}_1^n(A)$ (desna stran (F.2.4) ostane nespremenjena, če se omejimo le na zaprta pokritja). Torej je tudi $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n(A)$.
■

F.3 Krivočrtni Fubinijev izrek

Krivočrtni Fubinijev izrek je posplošitev tako Fubinijevega izreka (v okviru Hausdorffovih mer na $\mathbb{R}^n$) kot tudi izreka o uvedbi nove spremenljivke v Riemannov integral, ki pravi, da pod določenimi pogoji velja formula:

$$\int_A f\Big(g(x)\Big)\, Jg(x)\, \mathrm{d}x = \int_{g(A)} f(y)\mathrm{d}y \tag{F.3.1}$$

kjer je Jg absolutna vrednost Jacobijeve determinante ali krajše *jacobiana*:

$$Jg(x) := |\det g'(x)| \tag{F.3.2}$$

Tu preslikava g slika iz $\mathbb{R}^n$ spet v $\mathbb{R}^n$, pri posplošitvi pa to ne bo nujno res: preslikava g bo v splošnem slikala iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$, pri čemer pa tudi v $\mathbb{R}^m$ ne bomo nujno gledali Lebesguove, temveč Hausdorffovo mero. Za ta namen bomo definirali *r-dimenzionalno jacobiano*, ki bo pripadala $(0, \infty)$ za vse linearne preslikave ranga r (oz. preslikave, katerih odvod v dani točki ima rang r).

Definicija.

(1) Naj bosta U in V evklidska prostora, $A\colon\ U \to V$ linearna preslikava in $r \in \mathbb{N}_0$. Definirajmo *r-dimenzionalno jacobiano* preslikave A na naslednji način:

$$[\![A]\!]_r := \begin{cases} 0 & ;\ \operatorname{rang} A < r \\ \infty & ;\ \operatorname{rang} A > r \\ |\det B| & ;\ \operatorname{rang} A = r, A = \Phi B P \end{cases} \tag{F.3.3}$$

kjer je $P\colon\ U \to \mathbb{R}^r$ ortogonalna projekcija, $\Phi\colon\ \mathbb{R}^r \to V$ pa izometrična vložitev.

(2) Naj bo $f\colon\ U \to V$ preslikava, diferenciabilna v x. Tedaj definiramo r-dimenzionalno jacobiano preslikave f v x kar kot:

$$J_r f(x) = [\![f'(x)]\!]_r \tag{F.3.4}$$

Opomba. Jacobiano bi lahko definirali tudi s pomočjo *singularnega razcepa* matrike A (angl. *singular value decomposition* ali krajše SVD), ki je take oblike kot v (F.3.3), le da za matriko B zahtevamo, da je diagonalna z nenegativnimi lastnimi vrednostmi (za podrobnosti glej npr. Demmel [48]).

Opomba. Zgornja definicija je dobra. Z drugimi besedami, jacobiana je neodvisna od izbire preslikav P, B in Φ. Naj bo $A = \Phi_1 B_1 P_1 = \Phi_2 B_2 P_2$. Ker je $\ker P_1 = \ker A = \ker P_2$, obstaja taka izometrija $R\colon\ \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$, da je $P_2 = RP_1$. Podobno, ker je $\operatorname{im} \Phi_1 = \operatorname{im} A = \operatorname{im} \Phi_2$, obstaja taka izometrija $S\colon\ \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$, da je $\Phi_2 = \Phi_1 S$. Torej v diagramu:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^r \arrow[r, "B_1"] \arrow[dd, "R"'] & \mathbb{R}^r \arrow[dr, "\Phi_1"] & \\ U \arrow[ur, "P_1"] \arrow[dr, "P_2"'] & & & V \\ & \mathbb{R}^r \arrow[r, "B_2"'] & \mathbb{R}^r \arrow[uu, "S"'] \arrow[ur, "\Phi_2"'] & \end{tikzcd} \tag{F.3.5}$$

komutirata levi in desni trikotnik, komutira pa tudi diagram, ki mu odstranimo puščici z R in S. Od tod pa že sledi, da komutira tudi osrednji kvadrat in z njim celoten diagram. Velja namreč:

$$SB_2R = \Phi_1^*\Phi_1 SB_2RP_1P_1^* = \Phi_1^*\Phi_2B_2P_2P_1^* = \Phi_1^*AP_1^* = \Phi_1^*\Phi_1B_1P_1P_1^* = B_1 \tag{F.3.6}$$

Ker sta R in S izometriji, mora potem veljati tudi $|\det B_1| = |\det B_2|$.

Trditev F.3.1.

(1) *Velja* $[\![A]\!]_r \leq \|A\|^r$, *kjer je* $\|\cdot\|$ *evklidska norma.*

(2) *Če ima A rang* 0 *ali* 1, *velja* $[\![A]\!]_1 = \|A\|$.

(3) *Za vsak* $c \in \mathbb{R}$ *velja* $[\![cA]\!]_r = |c|^r[\![A]\!]_r$.

(4) *Velja* $[\![A_1A_2]\!]_r \leq [\![A_1]\!]_r[\![A_2]\!]_r$.

(5) *Če je P ortogonalna projekcija, velja* $[\![AP]\!]_r = [\![A]\!]_r$.

(6) *Če je Φ izometrična vložitev, velja* $[\![\Phi A]\!]_r = [\![A]\!]_r$.

(7) *Če A slika iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$, velja* $[\![A]\!]_m = \det(AA^*)^{1/2}$ *in* $[\![A]\!]_n = \det(A^*A)^{1/2}$.

Dokaz.

(1): Naj bo $A = \Phi BP$, kjer je P ortogonalna projekcija, B avtomorfizem, Φ pa izometrična vložitev. Tedaj velja $\|A\| = \|B\|$, torej je tudi $[\![A]\!]_r = |\det B| \leq \|B\|^r = \|A\|^r$.

(2): Za primer, ko je $\operatorname{rang} A = 0$, je trditev očitna. Naj bo $\operatorname{rang} A = 1$ in B tako kot v dokazu prejšnje točke. Toda B je sedaj linearna preslikava $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se pravi preprosto množenje z določenim številom, torej je $|\det B| = \|B\|$.

(3): Če je $A = \Phi BP$, je $cA = \Phi(cB)P$, torej je $[\![cA]\!]_r = |\det(cB)| = |c|^r|\det B| = |c|^r[\![A]\!]_r$.

(4): Brez škode za splošnost smemo privzeti, da je $\operatorname{rang} A_1 = \operatorname{rang} A_2 = \operatorname{rang}(A_1A_2) = r$. Pišimo $A_1 = \Phi_1B_1P_1$ in $A_2 = \Phi_2B_2P_2$. Ker ima preslikava $A_1A_2 = \Phi_1B_1P_1\Phi_2B_2P_2$ rang r, to velja tudi za preslikavo $C := B_1P_1\Phi_2B_2$, torej je ta preslikava avtomorfizem. Dobili smo torej razcep preslikave A_1A_2, se pravi, da je $[\![A_1A_2]\!] = |\det C|$. Toda ker je $\|P_1\Phi_2\| \leq 1$, je $|\det C| \leq |\det B_1||\det B_2|$.

(5) in (6): Očitno.

(7): Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da ima preslikava A rang m oziroma n. Naj bo torej $A = \Phi BP$, kjer je P ortogonalna projekcija, Φ pa izometrična vložitev. Če računamo $[\![A]\!]_m$, velja:

$$AA^* = \Phi BPP^*B^*\Phi^* = \Phi BB^*\Phi^* \tag{F.3.7}$$

in ker je Φ^* ortogonalna projekcija (v resnici sta Φ in Φ^* kar izometriji), velja:

$$\det(AA^*) = [\![AA^*]\!]_m = \det(BB^*) = (\det B)^2 = [\![A]\!]_m^2 \tag{F.3.8}$$

Podobno, če računamo $[\![A]\!]_n$, velja:

$$A^*A = P^*B^*B\Phi^*\Phi BP = P^*B^*BP \tag{F.3.9}$$

in ker je P^* izometrična vložitev (v resnici sta P in P^* kar izometriji), od tod sledi:

$$\det(A^*A) = [\![A^*A]\!]_m = \det(B^*B) = (\det B)^2 = [\![A]\!]_n^2 \tag{F.3.10}$$

■

Zdaj lahko formuliramo glavni rezultat tega poglavja.

Izrek F.3.2 (krivočrtni Fubinijev izrek). *Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ merljiva množica, $f\colon A \to \mathbb{R}$ integrabilna glede na $\mathcal{L}^n$, $g\colon A \to \mathbb{R}^m$ pa lokalno Lipschitzeva preslikava. Naj bo še $r \in \mathbb{N}_0$ in $r \le n$. Tedaj za skoraj vsak y glede na $\mathcal{H}^r$ velja, da je $f\big|_{g^{-1}(y)}$ integrabilna glede na $\mathcal{H}^{n-r}$, funkcija $y \mapsto \int_{g^{-1}(\{y\})} f \, d\mathcal{H}^{n-r}$ je merljiva, velja pa še formula:*

$$\int_{\{x\in A;\mathcal{H}^{n-r}(g^{-1}(\{g(x)\}))>0\}} f(x)\, J_r g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{g^{-1}(\{y\})} f \, d\mathcal{H}^{n-r}\, \mathcal{H}^r(dy) \tag{F.3.11}$$

Dokaz. Glej Federer [57], posledica 3.2.32. ■

Opomba. Integrand na levi je definiran za skoraj vsak $x \in A$, ker je po Rademacherjevem izreku (izrek E.5.3) funkcija g skoraj povsod diferenciabilna.

Opomba. Pogoj, da je:

$$\mathcal{H}^{n-r}\Big(f^{-1}(\{f(x)\})\Big) > 0 \tag{F.3.12}$$

izključi množenje ničle z neštevno neskončnostjo, ki nastopa npr. v primeru, ko je $m = n$, $r < n$, za g pa vzamemo kar identiteto.

Posebna primera izreka F.3.2 sta t. i. *area formula* (za $n = r \le m$) in *coarea formula* (za $n \ge r = m$). Za ta dva primera je formulacija nekoliko enostavnejša.

Posledica F.3.3. *Naj bodo A, f in g tako kot v izreku F.3.2.*

(1) *Če je $n \le m$, velja:*

$$\int_A f(x)\, J_n g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{x;g(x)=y} f(x)\, \mathcal{H}^n(dy) \tag{F.3.13}$$

(2) *Če je $n \ge m$, velja:*

$$\int_A f(x)\, J_m g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{g^{-1}(\{y\})} f \, d\mathcal{H}^{n-m}\, dy \tag{F.3.14}$$

Dokaz. Treba je le še dokazati, da lahko izključimo pogoj (F.3.12). Če je $n = r$, je ta pogoj avtomatično izpolnjen – leva stran v (F.3.12) je vedno enaka ena. S tem je formula (F.3.13) dokazana. V primeru, ko je $n \ge r = m$, pa velja, da je pogoj (F.3.12) izpolnjen ali pa je $J_m g(x) = 0$. V primeru, ko je $J_m g(x) > 0$ (t. j. $g'(x)$ ima poln rang), namreč (F.3.12) sledi iz izreka o implicitni funkciji. ■

Zgled F.3.1. *Površina sfere.* Izračunajmo:

$$s_n := \mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1}) \tag{F.3.15}$$

kjer je $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, |x| = 1\}$ enotska sfera. To bomo izračunali s pomočjo volumna v_n enotske krogle $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, |x| \le 1\}$ (glej F.2.2). Definirajmo preslikavo $g\colon B^n \to \mathbb{R}$ po predpisu:

$$g(x) := |x| \tag{F.3.16}$$

Očitno je $g'(x) = x^T/|x|$. Po točki (2) trditve F.3.1 je potem $J_1 g(x) = 1$, brž ko je $x \neq 0$. Formula (F.3.11) za $f(x) := 1$, nam da:

$$v_n = \mathcal{L}^n(B^n) = \mathcal{L}^n\Big(B^n \setminus \{0\}\Big) = \int_0^1 \mathcal{H}^{n-1}\Big(g^{-1}(\{y\})\Big)\,\mathrm{d}y \tag{F.3.17}$$

Po posledici F.2.5 velja $\mathcal{H}^{n-1}\Big(g^{-1}(\{y\})\Big) = \mathcal{H}^{n-1}(y\, S^{n-1}) = y^{n-1} s_n$. Po integraciji dobimo:

$$s_n = n\, v_n = 2\, \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \tag{F.3.18}$$

□

Zgled F.3.2. Naj bo $B \subseteq \mathbb{R}^n$ merljiva množica in naj bo dana preslikava $g\colon B \to \mathbb{R}^m$. V formulo (F.3.11) vstavimo $f(x) = 1$ in:

$$A := \Big\{x \in B \,;\, g \text{ ni diferenciabilna v } x \text{ ali } J_r g(x) = 0\Big\} \tag{F.3.19}$$

Po Rademacherjevem izreku je leva stran v (F.3.11) enaka nič. Od tod dobimo:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-r}\Big(A \cap g^{-1}(\{y\})\Big)\, \mathcal{H}^r(\mathrm{d}y) = 0 \tag{F.3.20}$$

od koder sledi tudi:

$$\mathcal{H}^r\Big\{y \in \mathbb{R}^m \,;\, \mathcal{H}^{n-r}\Big(A \cap g^{-1}(\{y\})\Big) > 0\Big\} = 0 \tag{F.3.21}$$

To je nekakšna šibka različica *Morse–Sardovega izreka*, ki pravi, da za vsako preslikavo $g \in C^{(n-m+1)}(B; \mathbb{R}^m)$, kjer je $B \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica in $m \le n$, velja:

$$\mathcal{L}^m\Big\{y \in \mathbb{R}^m \,;\, (\exists x \in B)\Big[g(x) = y \text{ in } J_m g(x) = 0\Big]\Big\} = 0 \tag{F.3.22}$$

(glej npr. Sternberg [127], stran 47). Formula (F.3.21) je sicer res šibkejši rezultat od (F.3.22), zato pa velja ob šibkejših predpostavkah. □

Dodatek G

O konveksnih množicah

Namen tega dodatka je izpeljati nekaj osnovnih dejstev o konveksnih množicah v $\mathbb{R}^n$, ki jih bomo potrebovali v naslednjem dodatku.

G.1 Definicija in osnovne lastnosti

Definicija. Naj bo A podmnožica realnega vektorskega prostora.

(1) Množica A je *afin podprostor*, če za poljubna $x, y \in A$ in poljuben $t \in \mathbb{R}$ velja $(1-t)x + ty \in A$.

(2) Množica A je *konveksna*, če za poljubna $x, y \in A$ in poljuben $t \in [0,1]$ velja $(1-t)x + ty \in A$.

V nadaljevanju se bomo omejili le na prostore $\mathbb{R}^n$.

Zgled G.1.1. Poljuben afin podprostor je konveksna množica. □

Zgled G.1.2. Polprostor je konveksna množica, ni pa afin podprostor. Polprostori v $\mathbb{R}^n$ bodo za nas množice oblike $\{x \; ; \; \langle x \, , \, u\rangle < a\}$ (*odprti polprostori*) ali $\{x \; ; \; \langle x \, , \, u\rangle \leq a\}$ (*zaprti polprostori*), pri čemer v obeh primerih zahtevamo, da je $u \neq 0$. Vektor u bomo imenovali *normalni vektor* polprostora. □

Naslednja trditev je bolj ali manj očitna.

Trditev G.1.1. *Presek poljubne družine konveksnih množic je konveksen.* ■

Iz zgleda G.1.2 in G.1.1 sledi, da je presek poljubne družine polprostorov konveksen. V naslednjem razdelku bomo dokazali, da za zaprte konveksne množice velja tudi obrat (glej trditev G.3.4).

Definicija. *Afina (konveksna) ogrinjača* $\operatorname{Aff} A$ ($\operatorname{Conv} A$) dane množice A je najmanjši afin podprostor (najmanjša konveksna množica), ki vsebuje A. Ekvivalentno, to je presek vseh afinih podprostorov (konveksnih množic), ki vsebujejo A.

Afine (konveksne) ogrinjače se da zelo opisati tudi na bolj konstruktiven način.

Definicija. Naj bodo $x_0, \ldots x_m$ točke (vektorji), $\alpha_0, \ldots \alpha_m$ pa skalarji. Izraz:

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i x_i \tag{G.1.1}$$

je *afina kombinacija* točk $x_0, \ldots x_m$, če je $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1$. Afina kombinacija točk je *konveksna kombinacija*, če je še $\alpha_i \geq 0$ za vse i.

Dokaz naslednje trditve prepuščamo bralcu.

Trditev G.1.2.

(1) *Množica A je afin podprostor (konveksna) natanko tedaj, ko vsaka afina (konveksna) kombinacija poljubnih točk iz A tudi pripada A.*

(2) *Afina (konveksna) ogrinjača množice A je množica vseh afinih (konveksnih) kombinacij končno mnogo točk iz A.*

■

Definicija.

(1) Točke $x_0, \ldots x_m$ so *afino neodvisne*, če se poljubna točka iz njihove afine ogrinjače da izraziti kot njihova afina kombinacija na en sam način. Če je $x = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x_i$ taka afina kombinacija, skalarjem $\alpha_0 \ldots \alpha_m$ pravimo *baricentrične koordinate* točke x glede na $x_1 \ldots x_m$.

(2) *Simpleks* je konveksna ogrinjača afino neodvisnih točk.

Opomba. Afini podprostori in simpleksi so zaprte množice. To pa ne velja za vse konveksne množice.

Tudi dokaz naslednje trditve je prepuščen bralcu.

Trditev G.1.3. *Če za $x = (\xi_1, \ldots \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ označimo $\tilde{x} := (1, \xi_1, \ldots \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, velja:*

(1) *Izraz $x = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x_i$ je afina kombinacija točk x_i natanko tedaj, ko je $\tilde{x} = \sum_{i=0}^{m} \tilde{x}_i$.*

(2) *Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je afin podprostor natanko tedaj, ko je množica:*

$$\Big\{(\xi, \xi_1, \ldots \xi_n) \; ; \; \xi \in \mathbb{R}, (\xi_1, \ldots \xi_n) \in A\Big\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \tag{G.1.2}$$

linearni podprostor.

(3) *Točke $x_0, \ldots x_m$ so afino neodvisne natanko tedaj, ko so vektorji $\tilde{x}_0, \ldots \tilde{x}_m$ linearno neodvisni.*

■

Posledica G.1.4.

(1) *Vsak afin podprostor prostora $\mathbb{R}^n$ je afina ogrinjača največ $n + 1$ točk.*

(2) *Afina ogrinjača poljubnih $n + 1$ afino neodvisnih točk iz $\mathbb{R}^n$ je cel prostor $\mathbb{R}^n$.*

■

Trditev G.1.5.

(1) *Množica vseh $(n + 1)$-teric $(x_0, \dots x_n) \in (\mathbb{R}^n)^{n+1}$, ki so afino neodvisne, je odprta.*

(2) *Preslikava, ki $(n + 2)$-terici $(x, x_0, \dots x_n) \in (\mathbb{R}^n)^{n+2}$ priredi baricentrične koordinate točke x glede na $(x_0, \dots x_n)$, je zvezna.*

■

Dokaz. Rezultat sledi iz trditve G.1.3 in zveznosti preslikave $(\mathbf{A}, x) \mapsto \mathbf{A}^{-1}x$. ■

Definicija. *Dimenzija* konveksne množice C je maksimalno število afino neodvisnih točk iz C, zmanjšano za ena.

Opomba. Definicijo bi sicer lahko posplošili na poljubne podmnožice prostora $\mathbb{R}^n$, vendar pa ne bi dobili tega, kar navadno razumemo s pojmom dimenzija.

Brez težav dokažemo naslednjo trditev.

Trditev G.1.6.

(1) *Dimenzija afinega podprostora L je enaka za ena zmanjšanemu minimalnemu številu točk iz L, katerih afina ogrinjača je cel L.*

(2) *Dimenzija konveksne množice se ujema z dimenzijo njene afine ogrinjače.*

■

G.2 Notranjost in rob konveksne množice

Pri notranjosti in robu konveksne množice v $\mathbb{R}^n$ ločimo dve vrsti notranjosti in roba: glede na cel prostor $\mathbb{R}^n$ in glede na afino ogrinjačo množice. Notranjost množice C glede na cel prostor bomo označevali z $\operatorname{Int} C$, glede na afino ogrinjačo pa z $\operatorname{int} C$. Podobno bomo njen rob (mejo) glede na cel prostor označevali s $\operatorname{Fr} C$, glede na njeno afino ogrinjačo pa z ∂C. Zaprtje $\overline{C}$ množice C pa je v obeh primerih enako, saj je afin podprostor zaprta množica.

Trditev G.2.1.

(1) *Notranjost konveksne množice (tako glede na njeno afino ogrinjačo kot tudi glede na cel prostor) je konveksna množica. Še več, če je C konveksna množica, $x \in C$, $y \in \operatorname{Int} C$ $(\operatorname{int} C)$ in $0 < t \leq 1$, je tudi $(1-t)x + ty \in \operatorname{Int} C$ $(\operatorname{int} C)$.*

(2) *Zaprtje konveksne množice je konveksna množica.*

Dokaz.

(1): Dovolj je dokazati za notranjost glede na cel prostor. Obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak u z $|u| < \varepsilon$ velja $y + u \in C$. Označimo $z := (1-t)x + ty$. Ker je C konveksna, je tudi $z + tu = (1-t)x + t(y+u) \in C$, torej je res $z \in \operatorname{Int} C$.

(2): Naj bo $x, y \in \overline{C}$ in $t \in [0,1]$. Dokazati moramo, da je tudi $z := (1-t)x + ty \in \overline{C}$, se pravi, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak w z $|w| < \varepsilon$, da je $z + w \in C$. Prav gotovo obstajata taka u in v z $|u|, |v| < \varepsilon$, da je $x + u \in C$ in $y + v \in C$. Postavimo $w := (1-t)u + tv$. Tedaj je gotovo $|w| < \varepsilon$ in ker je C konveksna, je tudi $z + w = (1-t)(x+u) + t(y+v) \in C$. ■

Trditev G.2.2. *Dan naj bo simpleks $\Delta = \operatorname{Conv}\{x_0, \dots x_m\}$, kjer so $x_1, \dots x_m$ afino neodvisne točke v $\mathbb{R}^n$. Tedaj velja:*

$$\operatorname{int} \Delta = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \; ; \; (\forall i) \alpha_i > 0, \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1 \right\} \tag{G.2.1}$$

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $m = n$. Tedaj je $\operatorname{int} \Delta = \operatorname{Int} \Delta$, rezultat pa sledi iz točke (2) trditve G.1.5. ■

Posledica G.2.3. *Za poljuben simpleks Δ je $\operatorname{int} \Delta \neq \emptyset$.* ■

Trditev G.2.4. *Za poljubno konveksno množico C je $\operatorname{int} C \neq \emptyset$.*

Dokaz. Naj bo Δ simpleks, ki je konveksna ogrinjača največjega možnega števila afino neodvisnih točk iz C. Zaradi konveksnosti je $\Delta \subseteq C$. Ker se po trditvi G.1.6 afina ogrinjača oglišč simpleksa Δ ujema z afino ogrinjačo množice C, je $\operatorname{int} \Delta \subseteq \operatorname{int} C$. Ker $\operatorname{int} \Delta$ ni prazna množica, to ne velja tudi za $\operatorname{int} C$. ■

Pri preučevanju roba in notranjosti konveksne množice se je dovolj omejiti na zaprte množice.

Trditev G.2.5. *Naj bo $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica. Tedaj velja:*

$$\operatorname{Int} \overline{C} = \operatorname{Int} C \tag{G.2.2}$$

$$\operatorname{Fr} \overline{C} = \operatorname{Fr} C \tag{G.2.3}$$

Če je $\operatorname{Int} C \neq \emptyset$, pa velja še:

$$\overline{\operatorname{Int} C} = \overline{C} \tag{G.2.4}$$

Dokaz.

(G.2.2): Dovolj je dokazati, da je $\operatorname{Int}\overline{C} \subseteq C$. Naj bo $x \in \operatorname{Int}\overline{C}$. Obstaja tak n-dimenzionalen simpleks $\Delta = \operatorname{Conv}\{x_0, \ldots x_n\}$, da je $x \in \operatorname{Int}\Delta \subset \Delta \subseteq \overline{C}$. Ker točke $x_0, \ldots x_n$ pripadajo $\overline{C}$, obstajajo taka zaporedja točk $x_{ij} \in C$, da za vsak $i = 0, \ldots n$ velja $\lim_{j\to\infty} x_{ij} = x_i$. Iz točke (1) trditve G.1.5 sledi, da za dovolj velike j velja, da so točke x_{ij} ; $i = 0, \ldots n$ afino neodvisne, torej ima x glede na njih baricentrične koordinate. Natančneje, za dovolj velike j obstajajo taki skalarji α_{ij}, da je $x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} x_{ij}$ in $\sum_{i=0}^{n} \alpha_{ij} = 1$. Po točki (2) za vsak i velja $\lim_{j\to\infty} \alpha_{ij} = \alpha_i$, kjer so $(\alpha_0, \ldots \alpha_n)$ baricentrične koordinate točke x glede na $(x_0, \ldots x_n)$. Toda ker je $x \in \operatorname{Int}\Delta$, je $\alpha_i > 0$ za vse i, torej za vse i in vse dovolj velike j velja tudi $\alpha_{ij} \geq 0$. To pa pomeni, da je x konveksna kombinacija točk $x_{ij} \in C$, se pravi, da mora biti tudi $x \in C$. Enakost je s tem dokazana.

(G.2.3): Sledi iz (G.2.2).

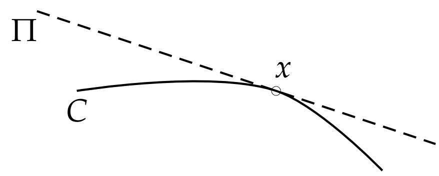
(G.2.2): Spet je dovolj dokazati, da je $\overline{C} \subseteq \overline{\operatorname{Int} C}$. Naj bo torej $x \in \overline{C}$. Dokazati moramo, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $y \in \operatorname{Int} C$, da je $|x - y| < \varepsilon$. Obstaja tak $z \in C$, da je $|x - z| < \varepsilon/2$. Vzemimo zdaj neko točko $w \in \operatorname{Int} C$. Če je kar $w = z$, postavimo $y := w$ in trditev je dokazana. Sicer pa postavimo $y := (1-t)z + tw$, kjer je $t := \min\Big\{1, \varepsilon/(2|z-w|)\Big\}$. Po točki (1) trditve G.2.1 je $y \in \operatorname{Int} C$ in ni se težko prepričati, da je tudi $|x - y| < \varepsilon$, torej točka y res izpolnjuje naše zahteve. ■

G.3 Oporni polprostori in pravokotna projekcija

Definicija.

(1) Zaprt polprostor $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ je *oporni polprostor* konveksne množice C, če je $C \subseteq \Pi$ in $\overline{C} \cap \operatorname{Fr}\Pi \neq \emptyset$.

(2) *Oporni polprostor konveksne množice C v točki $x \in \operatorname{Fr} C$* je oporni polprostor Π, za katerega je $x \in \operatorname{Fr}\Pi$.



Slika G.3.1

Zgornja definicija je bolj geometrijska, naslednja tudi precej očitna trditev pa nam da računsko karakterizacijo.

Trditev G.3.1. *Naj bo $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica in naj bo dan polprostor $\Pi = \{y\ ;\ \langle y\,,\,u\rangle \leq a\}$, kjer je $u \neq 0$.*

(1) *Polprostor Π je oporni polprostor množice C natanko tedaj, ko je $\sup_{y \in C}\langle y\,,\,u\rangle = a$.*

(2) *Polprostor Π je oporni polprostor množice C v točki $x \in \operatorname{Fr} C$ natanko tedaj, ko je $\langle y\,,\,u\rangle \leq a$ za vsak $y \in C$ in še $\langle x\,,\,u\rangle = a$.*

■

Na komplementu notranjosti konveksne množice lahko dobro definiramo pravokotno projekcijo. Da lahko to res storimo, sledi iz naslednjih nekaj pomožnih rezultatov.

Lema G.3.2. *Naj bo $C \subset \mathbb{R}^d$ poljubna množica, $x \notin C$ in $y \in \overline{C}$ točka, ki je najbližje x.*

(1) *Velja $y \in \operatorname{Fr} C$.*

(2) *Če označimo:*

$$\delta := \operatorname{dist}(x, C) := \inf_{z \in C} |x - z| \tag{G.3.1}$$

za vsak $t \in [0, 1]$ velja:

$$\operatorname{dist}\big((1-t)y + tx, C\big) = t\delta \tag{G.3.2}$$

Opombi.

(1) Točka $y \in \overline{C}$, ki je najbližje x, vedno obstaja.

(2) Velja $\operatorname{dist}(x, C) = \operatorname{dist}(x, \overline{C})$.

Dokaz leme G.3.2.

(2): Označimo $z := (1-t)y + tx$. Očitno je $|z - y| = t\delta$, torej je $\operatorname{dist}(z, C) \leq t\delta$. Toda če bi obstajala kaka točka $w \in C$, ki bi bila točki z še bližje kot $t\delta$, bi bila ta točka po trikotniški neenakosti tudi točki x bližje kot δ, to pa ni res. Zato mora biti $\operatorname{dist}(z, C) = t\delta$.

(1): Sledi iz dejstva, da po (G.3.2) za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka točka z, da je $0 < |z - y| = \operatorname{dist}(z, C) < \varepsilon$. ■

Lema G.3.3. *Naj bo $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica in $x \in \mathbb{R}^n$.*

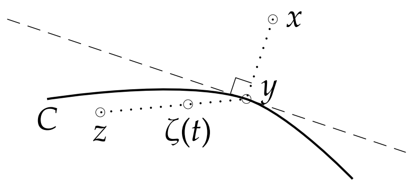
(1) *Obstaja natanko ena točka $y \in \overline{C}$, ki je najbližje x.*

(2) *Za vsak $z \in \overline{C}$ je $\langle x - y\,, z - y\rangle \le 0$.*

(3) *Če je $x \notin \overline{C}$, je polprostor $\{z\ ;\ \langle x - y\,, z - y\rangle \le 0\}$ oporni polprostor množice C v točki y.*

Dokaz. Naj bo $y \in \overline{C}$ kaka točka, ki je najbližje x.

(2) *in* (3): Za poljuben $t \in [0, 1]$ označimo $\zeta(t) := (1 - t)y + tz$.



Slika G.3.2

Ker je C konveksna, je $\zeta(t) \in C$ za vsak $t \in [0, 1]$. Velja:

$$|x - \zeta(t)|^2 = \left|x - y - t(z - y)\right|^2 = |x - y|^2 - 2t\langle x - y\,, z - y\rangle + t^2|z - y|^2 \qquad \text{(G.3.3)}$$

Če bi veljalo $\langle x - y\,, z - y\rangle > 0$, bi za dovolj majhne t veljalo $|x - \zeta(t)|^2 < |x - y|^2$, kar bi pomenilo, da je $\zeta(t)$ točka iz C, ki je še bližje točki x kot točka y. Torej res velja $\langle x - y\,, z - y\rangle \le 0$. Za $z = y$ je ta skalarni produkt enak nič, torej po točki (2) trditve G.3.1 res dobimo oporni polprostor.

(1): Pa recimo, da je $z \in \overline{C}$ še ena točka, ki je najbližje x. Velja:

$$0 = |x - z|^2 - |x - y|^2 = |z - y|^2 - 2\langle x - y\,, z - y\rangle \qquad \text{(G.3.4)}$$

Toda po prejšnjem je $\langle x - y\,, z - y\rangle \le 0$, torej je tudi $|z - y|^2 \le 0$. To pa pomeni, da mora biti $z = y$. ■

Definicija. *Pravokotna projekcija* na konveksno množico $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je preslikava $p_C\colon \mathbb{R}^n \to C$, ki dano točko x preslika v edino točko $p(x) \in \overline{C}$, ki je najbližje x.

Opomba. Izraz "pravokotna projekcija" je upravičen zaradi točke (3) leme G.3.3.

Opomba. Če je $x \in \overline{C}$, je $p_C(x) = x$. Za vsak $x \in \mathbb{R}^n$ torej velja $p_C\big(p_C(x)\big) = p_C(x)$.

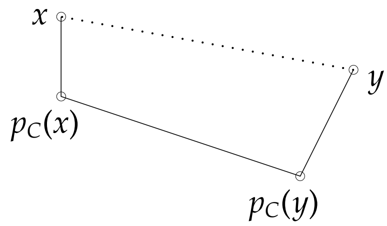
Opomba. Brž ko je $x \notin \operatorname{Int} C$, je $p_C(x) \in \operatorname{Fr} C$.

Trditev G.3.4. *Vsaka zaprta konveksna podmnožica je presek zaprtih polprostorov.*

Dokaz. Naj bo C zaprta konveksna množica in D presek vseh njenih opornih polprostorov. Očitno je $C \subseteq D$. Naj bo $x \notin C$. Po točki (3) leme G.3.3 je polprostor $\{z\,;\,\langle x - p_C(x)\,,\,z - p_C(x)\rangle \le 0\}$ oporni polprostor množice C. Temu polprostoru pa x ne pripada, torej je tudi $x \notin D$. Iz vsega tega pa sledi, da mora biti tudi $C \supseteq D$. ∎

Trditev G.3.5. *Pravokotna projekcija na konveksno množico je neraztezna, t. j. za poljubna $x, y \in \mathbb{R}^n$ velja $|p_C(x) - p_C(y)| \le |x - y|$.*

Dokaz. Brez škode za splošnost smemo privzeti, da je $p_C(x) \neq p_C(y)$. Po točki (2) leme G.3.3 velja $\langle x - p_C(x)\,,\,p_C(y) - p_C(x)\rangle \le 0$ in $\langle y - p_C(y)\,,\,p_C(x) - p_C(y)\rangle \le 0$:



Slika G.3.3

Iz Cauchy–Schwarzeve neenačbe in zgoraj opaženega sklepamo:

$$\begin{aligned}|x - y| &\ge \frac{\langle x - y\,,\,p_C(x) - p_C(y)\rangle}{|p_C(x) - p_C(y)|} = \\ &= |p_C(x) - p_C(y)| + \frac{\langle x - p_C(x)\,,\,p_C(x) - p_C(y)\rangle + \langle p_C(y) - y\,,\,p_C(x) - p_C(y)\rangle}{|p_C(x) - p_C(y)|} \ge \\ &\ge |p_C(x) - p_C(y)|\end{aligned} \tag{G.3.5}$$

∎

Izrek G.3.6. *V vsaki robni točki konveksne množice v $\mathbb{R}^n$ obstaja oporni polprostor.*

Dokaz. Naj bo $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica in $x \in \operatorname{Fr} C$. Po (G.2.3) lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je množica C zaprta. Ker je $x \in \operatorname{Fr} C$, obstaja zaporedje točk $x_i \notin C$, ki konvergira proti x. Označimo $y_i := p_C(x_i)$. Ker je $x_i \notin C$, je $y_i \neq x_i$, torej lahko definiramo še:

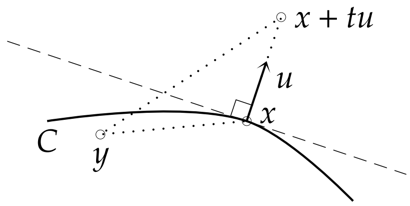
$$u_i := \frac{x_i - y_i}{|x_i - y_i|} \tag{G.3.6}$$

Vektorji u_i pripadajo enotski sferi, ki je kompakten prostor, zato obstaja konvergentno podzaporedje u_{i_j} z limito u. Nadalje po točki (2) trditve G.3.3 za vsak $z \in C$ velja $\langle z - y_{i_j}\,,\,u_{i_j}\rangle \le 0$.

Ker je projekcija p_C po trditvi G.3.5 neraztezna in zato zvezna, zaporedje y_i konvergira proti $p_C(x) = x$. Torej mora za vsak $z \in C$ veljati tudi $\langle z - x\,,\,u\rangle \le 0$. Od tod pa po točki (2) trditve G.3.1 že sledi, da je $\{z\,;\,\langle z - x\,,\,u\rangle \le 0\}$ iskani oporni polprostor. ∎

Trditev G.3.7. *Naj bo C konveksna množica, $x \in \operatorname{Fr} C$ in u zunanji normalni vektor opornega polprostora. Tedaj za vsak $t \geq 0$ velja $p_C(x + tu) = x$.*

Dokaz. Dokazati moramo, da za vsako točko $y \in C$ velja $|x + tu - y| \leq t|u|$.



Slika G.3.4

Iz točke (2) leme G.3.3 sledi:

$$|x + tu - y|^2 = t^2|u|^2 + 2t\langle u\,,\, x - y\rangle + |x - y|^2 \geq t^2|u|^2 \tag{G.3.7}$$

■

Posledica G.3.8. *Naj bosta $C \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^d$ omejeni konveksni množici. Tedaj velja $p_C(\operatorname{Fr} D) = \operatorname{Fr} C$.*

Dokaz. Ker je $\operatorname{Fr} D \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int} D \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{Int} C$, je $p_C(\operatorname{Fr} D) \subseteq \operatorname{Fr} C$. Preostane nam le še dokazati, da za vsak $y \in \operatorname{Fr} C$ obstaja tak $x \in \operatorname{Fr} D$, da je $p_C(x) = y$. Naj bo u zunanji normalni vektor kakega opornega polprostora, ki vsebuje točko y. Ker je množica D omejena, je tudi $t_0 := \sup\{t \geq 0\ ;\ y + tu \in C\} < \infty$. Če postavimo $x := y + t_0 u$, je očitno $x \in \operatorname{Fr} C$, po prejšnji trditvi pa je $p_C(x) = y$, torej je x iskana točka. ■

G.4 Radialna projekcija

Naj bo C konveksna množica. Pri radialni projekciji gre za to, da dano točko x projiciramo na $\operatorname{Fr} C$ vzdolž poltraka, ki se začne v neki točki $x_0 \in \operatorname{Int} C$ in gre skozi x. Definirana je za vse točke $x \neq x_0$. Brez škode za splošnost bomo privzeli, da je kar $x_0 = 0$.

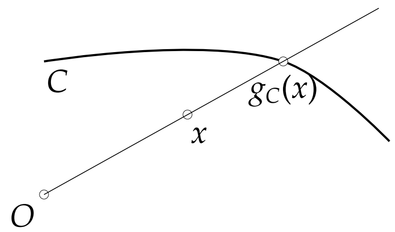
Definicija. Naj bo $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica in $0 \in \operatorname{Int} C$.

(1) S pojmom *radialna funkcija* bomo razumeli funkcijo $\rho_C\colon\ \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0, \infty]$, definirano po predpisu:

$$\rho_C(x) := \sup\left\{r > 0\ ;\ r\,\frac{x}{|x|} \in C\right\} = \inf\left\{r > 0\ ;\ r\,\frac{x}{|x|} \notin C\right\} \tag{G.4.1}$$

(2) S pojmom *radialna projekcija* bomo razumeli preslikavo $g_C\colon\ \{x\ ;\ \rho_C(x) < \infty\} \to \mathbb{R}^n$, definirano po predpisu:

$$g_C(x) := \rho_C(x)\,\frac{x}{|x|} \tag{G.4.2}$$



Slika G.4.1

Opombe.

(1) Za vsak $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ velja $g_C(x) \in \operatorname{Fr} C$.

(2) Če je $x \in \operatorname{Fr} C$, je $\rho_C(x) = |x|$ in $g_C(x) = x$.

(3) Za vsak $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ in vsak $\alpha > 0$ velja $\rho_C(\alpha x) = \rho_C(x)$ in $g_C(\alpha x) = g_C(x)$.

(4) Če je $x \in \operatorname{Fr} C$, je $g_C^{-1}\big(\{x\}\big) = \{\alpha x \,;\, \alpha > 0\}$.

(5) Če je $C \subseteq D$, je tudi $\rho_C \leq \rho_D$.

Zgled G.4.1. Dan naj bo polprostor:

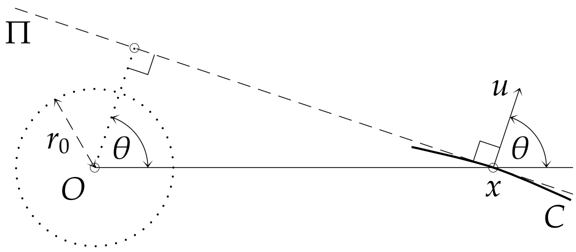
$$\Pi := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \langle x\,,\,u\rangle \leq a\} \tag{G.4.3}$$

kjer je $u \neq 0$ in $a > 0$. Tedaj ni težko preveriti, da velja:

$$\rho_\Pi(x) = \begin{cases} \dfrac{a|x|}{\langle x\,,\,u\rangle} & ;\ \langle x\,,\,u\rangle > 0 \\ \infty & ;\ \text{sicer} \end{cases} \tag{G.4.4}$$

□

Trditev G.4.1. *Naj bo C konveksna množica, ki vsebuje odprto kroglo okoli izhodišča z radijem $r_0 > 0$. Nadalje naj bo $x \in \operatorname{Fr} C$ in naj bo u normalni vektor opornega polprostora množice C. Če s θ označimo kot med vektorjema x in u, velja* $\cos\theta \geq r_0/|x|$.



Slika G.4.2

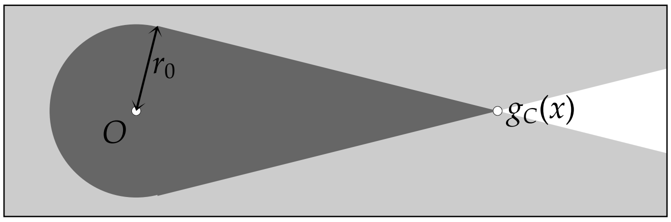
Dokaz. Po točki (2) trditve G.3.1 lahko oporni polprostor zapišemo v obliki $\Pi = \{y \,;\, \langle y\,,\,u\rangle \le \langle x\,,\,u\rangle\}$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $|u| = 1$. Tedaj je gotovo $r_0 u \in \overline{C} \subseteq \Pi$, torej je $r_0 = \langle r_0 u\,,\,u\rangle \le \langle x\,,\,u\rangle$. Od tod pa že sledi naš rezultat. ■

Lema G.4.2. *Naj bo C konveksna množica, ki vsebuje odprto kroglo okoli izhodišča z radijem $r_0 > 0$. Dana naj bo še točka $x \in C \setminus \{0\}$.*

(1) *Če je $|x| \le \rho_C(x)$ in $|y| \le r_0\left(1 - \frac{|x|}{\rho_C(x)}\right)$, velja $x + y \in \overline{C}$. V primeru, ko je $\rho_C(x) = \infty$, za vsak y z $|y| \le r_0$ velja $x + y \in \overline{C}$.*

(2) *Če je $|x| < \rho_C(x)$ in $|y| < r_0\left(1 - \frac{|x|}{\rho_C(x)}\right)$, velja $x+y \in \operatorname{Int} C$. V primeru, ko je $\rho_C(x) = \infty$, za vsak y z $|y| < r_0$ velja $x + y \in \operatorname{Int} C$.*

(3) *Če je $|x| > \rho_C(x)$ in $|y| < r_0\left(\frac{|x|}{\rho_C(x)} - 1\right)$, velja $x + y \notin \overline{C}$.*



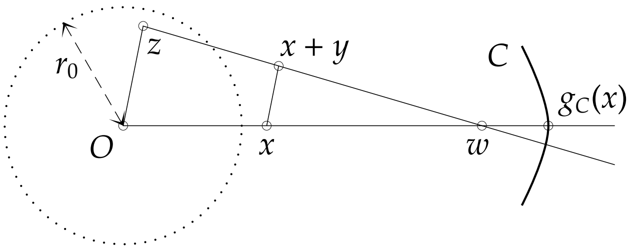
Slika G.4.3:
Temnosivo območje zagotovo pripada C, belo pa zagotovo ne.

Trditev G.4.3. *Za vsako konveksno množico C velja $\rho_{\overline{C}} = \rho_C$.*

Dokaz točk (1) in (2) leme G.4.2.

(1): Za $|x| = \rho_C(x)$ je trditev očitna. Naj bo $|x| < r \le \rho_C(x)$, $r < \infty$ in $|y| \le r_0(1 - |x|/r)$. Definirajmo:

$$z := \frac{y}{1 - \frac{|x|}{r}}\,, \quad w := \frac{rx}{|x|} \tag{G.4.5}$$



Slika G.4.4

Ker je $|z| \le r_0$, je $z \in \overline{C}$. Ker w leži na istem poltraku kot x in je $|w| \le \rho_C(x)$, je tudi $w \in \overline{C}$. Ker je $\overline{C}$ konveksna, je tudi:

$$x + y = \frac{|x|}{r} w + \left(1 - \frac{|x|}{r}\right) z \in \overline{C} \tag{G.4.6}$$

Če je $\rho_C(x) < \infty$, lahko vzamemo kar $r = \rho_C(x)$. V nasprotnem primeru pa gledamo limito, ko gre $r \to \infty$.

(2): Iz prejšnje točke po kratkem premisleku sledi, da velja $x + y \in \operatorname{Int} \overline{C}$. Po (G.2.2) pa je $\operatorname{Int} \overline{C} = \operatorname{Int} C$. ■

Dokaz trditve G.4.3. Ker je $\overline{C} \supseteq C$, je tudi $\rho_{\overline{C}} \ge \rho_C$. Pa recimo, da v neki točki x velja $\rho_{\overline{C}}(x) > \rho_C(x)$. Tedaj je tudi:

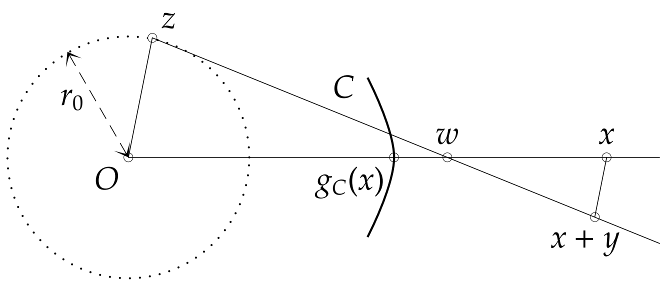
$$\left| \rho_C(x) \frac{x}{|x|} \right| = \rho_C(x) < \rho_{\overline{C}}(x) = \rho_{\overline{C}}\left(\rho_C(x) \frac{x}{|x|} \right) \tag{G.4.7}$$

torej po točki (2) leme G.4.2 velja $g_C(x) = \rho_C(x) \frac{x}{|x|} + 0 \in \operatorname{Int} \overline{C} = \operatorname{Int} C$, kar je protislovje. ■

Dokaz točke (3) leme G.4.2. Za $y = 0$ rezultat sledi iz trditve G.4.3 in definicije radialne funkcije. Privzemimo sedaj, da je $y \neq 0$ in $x + y \in \overline{C}$. Postavimo:

$$z := -r_0 \frac{y}{|y|} \tag{G.4.8}$$

$$\begin{aligned} w &:= \frac{r_0}{r_0 + |y|} = \\ &= \frac{r_0}{r_0 + |y|}(x + y) + \frac{|y|}{r_0 + |y|} z \end{aligned} \tag{G.4.9}$$



Slika G.4.5

Očitno je $z \in \overline{C}$. Ker je w konveksna kombinacija točk $x + y$ in z, je tudi $w \in \overline{C}$. Toda w leži na istem poltraku kot x in velja:

$$|w| > \frac{r_0}{r_0 + r_0\left(\frac{|x|}{\rho_C(x)} - 1\right)} |x| = \rho_C(x) = \rho_{\overline{C}}(x) \tag{G.4.10}$$

To pa bi pomenilo, da je $w \notin \overline{C}$, kar je protislovje. ∎

Trditev G.4.4.

(1) *Množica točk, kjer je radialna funkcija končna, je odprta.*

(2) *Radialna funkcija je lokalno Lipschitzeva povsod tam, kjer je končna.*

Iz Rademacherjevega izreka (izrek E.5.3) dobimo še naslednji rezultat.

Posledica G.4.5. *Radialna funkcija je odvedljiva skoraj povsod tam, kjer je končna, pri čemer je skoraj povsod mišljeno glede na Lebesguovo mero.* ∎

Dokaz trditve G.4.4. Naj bo $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Tedaj zagotovo velja:

$$g_C(x + y) = \rho_C(x + y)\,\frac{x + y}{|x + y|} \in \operatorname{Fr} C = \overline{C} \setminus \operatorname{Int} C \tag{G.4.11}$$

Iz dejstva, da je $g_C(x + y) \notin \operatorname{Int} C$, in točke (2) leme G.4.2 sledi, da velja ena izmed naslednjih neenakosti:

$$\rho_C(x + y)\,\frac{|x|}{|x + y|} \geq \rho_C(x) \tag{G.4.12}$$

$$\rho_C(x + y)\,\frac{|y|}{|x + y|} \geq r_0\left(1 - \frac{\rho_C(x + y)}{\rho_C(x)}\,\frac{|x|}{|x + y|}\right) \tag{G.4.13}$$

Če velja (G.4.12), velja:

$$\rho_C(x + y) \geq \rho_C(x)\,\frac{|x + y|}{|x|} \geq \rho_C(x)\left(1 - \frac{|y|}{|x|}\right) \tag{G.4.14}$$

oziroma:

$$\rho_C(x+y) - \rho_C(x) \geq -\rho_C(x)\,\frac{|y|}{|x|} \tag{G.4.15}$$

Če velja (G.4.13), pa z razrešitvijo neenačbe na $\rho_C(x+y)$ dobimo:

$$\rho_C(x+y) \geq \frac{r_0\,\rho_C(x)\,|x+y|}{r_0\,|x| + \rho_C(x)\,|y|} \tag{G.4.16}$$

Sledi:

$$\rho_C(x+y) - \rho_C(x) \geq \frac{r_0\,\rho_C(x)\,|x+y| - \rho_C(x)^2\,|y| - r_0\,\rho_C(x)\,|x|}{r_0\,|x| + \rho_C(x)\,|y|} \tag{G.4.17}$$

Z upoštevanjem neenakosti $|x+y| \geq |x| - |y|$ po nekaj računanja dobimo:

$$\rho_C(x+y) - \rho_C(x) \geq -\frac{\rho_C(x) + r_0}{r_0\,|x| + \rho_C(x)\,|y|}\,\rho_C(x)\,|y| \tag{G.4.18}$$

od koder sledi tudi:

$$\rho_C(x+y) - \rho_C(x) \geq -\frac{\rho_C(x) + r_0}{r_0\,|x|}\,\rho_C(x)\,|x| \tag{G.4.19}$$

Ker je $\rho_C(x) \geq r_0$, pa ta neenakost sledi tudi iz (G.4.15), torej (G.4.19) zagotovo velja.

Iz dejstva, da je $g_C(x+y) \in \overline{C}$, in točke (1) leme G.4.2 pa sledi, da velja ena izmed naslednjih neenakosti:

$$\rho_C(x+y)\,\frac{|x|}{|x+y|} \leq \rho_C(x) \tag{G.4.20}$$

$$\rho_C(x+y)\,\frac{|y|}{|x+y|} \geq r_0\left(\frac{\rho_C(x+y)}{\rho_C(x)}\,\frac{|x|}{|x+y|} - 1\right) \tag{G.4.21}$$

Če velja (G.4.20), velja:

$$\rho_C(x+y) \leq \rho_C(x)\,\frac{|x+y|}{|x|} \leq \rho_C(x)\left(1 + \frac{|y|}{|x|}\right) \tag{G.4.22}$$

oziroma:

$$\rho_C(x+y) - \rho_C(x) \leq \rho_C(x)\,\frac{|y|}{|x|} \tag{G.4.23}$$

Če velja (G.4.21), pa velja:

$$\rho_C(x+y)\left(\frac{r_0}{\rho_C(x)}\,\frac{|x|}{|x+y|} - \frac{|y|}{|x+y|}\right) \leq r_0 \tag{G.4.24}$$

Privzemimo sedaj, da je:

$$|y| < \frac{r_0}{\rho_C(x)}\,|x| \tag{G.4.25}$$

Tedaj velja:

$$\rho_C(x+y) \le \frac{r_0\,\rho_C(x)\,|x+y|}{r_0\,|x| - \rho_C(x)\,|y|} \tag{G.4.26}$$

Sledi:

$$\rho_C(x+y) - \rho_C(x) \le \frac{r_0\,\rho_C(x)\,|x+y| + \rho_C(x)^2\,|y| - r_0\,\rho_C(x)\,|x|}{r_0\,|x| - \rho_C(x)\,|y|} \tag{G.4.27}$$

Z upoštevanjem neenakosti $|x+y| \le |x| + |y|$ spet po nekaj računanja dobimo:

$$\rho_C(x+y) - \rho_C(x) \le \frac{\rho_C(x) + r_0}{r_0\,|x| - \rho_C(x)\,|y|}\,\rho_C(x)\,|y| \tag{G.4.28}$$

Spet ker je $\rho_C(x) \ge r_0$, ta neenakost sledi tudi iz (G.4.23), torej (G.4.19) zagotovo velja, če je le izpolnjen pogoj (G.4.25). Naš rezultat zdaj sledi iz (G.4.19) in (G.4.28). ∎

Trditev G.4.6. *Naj bosta $C \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksni množici, $x \in \operatorname{Fr} C \cap \operatorname{Fr} D$ ter naj bosta radialni funkciji ρ_C in ρ_D obe odvedljivi v x. Tedaj velja $\rho'_C(x) = \rho'_D(x)$.*

Dokaz. Ker je $x \in \operatorname{Fr} C \cap \operatorname{Fr} D$, je $\rho_C(x) = \rho_D(x)$. Ker je $C \subseteq D$, za vsak $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ velja $\rho_C(y) \le \rho_D(y)$. Neposredno iz definicije smernega odvoda sledi, da potem za vsak $u \in \mathbb{R}^n$ velja $\rho'_C(x)u \le \rho'_D(x)u$. Potem pa mora biti res $\rho'_C(x) = \rho'_D(x)$. ∎

Trditev G.4.7. *Naj bo $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica, $0 \in \operatorname{Int} C$ in $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Če je radialna funkcija diferenciabilna v x, v točki $g_C(x)$ obstaja natanko en oporni polprostor.*

Dokaz. Po izreku G.3.6 obstaja v $g_C(x)$ vsaj en oporni polprostor. Po točki (2) trditve G.3.1 ga lahko zapišemo v obliki $\Pi := \{y \in \mathbb{R}^n \,;\, \langle y\,,\,u\rangle \le \langle g_C(x)\,,\,u\rangle\}$, kjer je $|u| = 1$. Dokazati moramo le še, da je lahko vektor u le en sam. Iz trditve G.4.6 ter zvez (G.4.2) in (G.4.4) dobimo:

$$\operatorname{grad} \rho_C(x) = \operatorname{grad} \rho_\Pi(x) = a\,\frac{\langle x\,,\,u\rangle x - \langle x\,,\,x\rangle u}{|x|\langle x\,,\,u\rangle^2} = \rho_C(x)\left(\frac{x}{|x|^2} - \frac{u}{\langle x\,,\,u\rangle}\right) \tag{G.4.29}$$

(ker je $0 \in \operatorname{Int} C$, po trditvi G.4.1 velja $\langle x\,,\,u\rangle > 0$). Od tod najprej sledi, da mora biti u kolinearen z $\operatorname{grad} \rho_C(x) - \rho_C(x)\,x/|x|^2$. Ker je vektor u enotski in $\langle x\,,\,u\rangle > 0$, je potem res lahko le en sam. ∎

Posledica G.4.8. *Če je $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna množica z neprazno notranjostjo, v skoraj vsaki točki $x \in \operatorname{Fr} C$ glede na Hausdorffovo mero $\mathcal{H}^{n-1}$ obstaja natanko en oporni polprostor.*

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $0 \in \operatorname{Int} C$. Naj bo $y \in \operatorname{Fr} C$ točka, v kateri obstaja več kot en oporni polprostor. Iz trditve G.4.7 sledi, da potem ρ_C ni odvedljiva v nobeni točki oblike x, za katero je $g_C(x) = y$. Po (G.4.2) v teh točkah tudi preslikava g_C ni odvedljiva. Ker je $\{x \,;\, g_C(x) = y\} = \{\alpha y \,;\, \alpha > 0\}$, to pomeni tudi, da je:

$$\mathcal{H}^1\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \,;\, g_C(x) = y \text{ in } g_C \text{ ni odvedljiva v } x\big\}\Big) = \infty \tag{G.4.30}$$

Po formuli (F.3.21) pa je $(n-1)$-dimenzionalna Hausdorffova mera množice točk y, za katere velja (G.4.30), enaka nič. ∎

Dodatek H

Gaussovi perimetri konveksnih množic

H.1 Formulacija in zgodovina problema

Pri večrazsežni normalni aproksimaciji, natančneje, ocenjevanju količin tipa:

$$\Big|\mathbb{P}[W \in C] - \mathrm{N}(0, \mathbf{I}_d)(C)\Big| \tag{H.1.1}$$

kjer je $C \subseteq \mathbb{R}^d$ merljiva množica (glej razdelek 4.3), je treba oceniti količine:

$$\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{N}(0, \mathbf{I}_d)\{C^\varepsilon \setminus C\}, \quad \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{N}(0, \mathbf{I}_d)\{C \setminus C^{-\varepsilon}\} \tag{H.1.2}$$

in sicer enakomerno po ε. Tu za $\varepsilon > 0$ definiramo:

$$C^\varepsilon := \Big\{x \in \mathbb{R}^d \,;\, \mathrm{dist}(x, C) \le \varepsilon\Big\}, \quad C^{-\varepsilon} := \Big\{x \in \mathbb{R}^d \,;\, \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus C) \ge \varepsilon\Big\} \tag{H.1.3}$$

kjer dist pomeni oddaljenost točke od množice, t. j.:

$$\mathrm{dist}(x, A) := \inf_{y \in A} |x - y| \tag{H.1.4}$$

V splošnem sta lahko količini v (H.1.2) enaki $1/\varepsilon$, brž ko je $\varepsilon > 0$ (to se npr. zgodi, če je množica C povsod gosta, npr. množica vseh točk z racionalnimi koordinatami). A za take množice normalna aproksimacija sploh ni smiselna, zato se je treba omejiti na kakšen manjši razred bolj "krotkih" množic, ki pa mora biti zaprt za afine transformacije in preslikave $C \mapsto C^\varepsilon$.

Eden takih razredov so tudi *konveksne* množice. Velja namreč naslednja trditev, ki jo bomo dokazali na koncu razdelka.

Trditev H.1.1. *Za vsako konveksno množico $C \subseteq \mathbb{R}^d$ in vsak $\varepsilon > 0$ sta tudi množici C^ε in $C^{-\varepsilon}$ konveksni.*

Označimo:

$$\gamma_d := \sup\left\{\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{N}(0, \mathbf{I}_d)\{C^\varepsilon \setminus C\}, \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{N}(0, \mathbf{I}_d)\{C \setminus C^{-\varepsilon}\} \,;\, C \subseteq \mathbb{R}^d \text{ konveksna množica}, \varepsilon > 0\right\} \tag{H.1.5}$$

Količinam γ_d pravimo *Gaussovi perimetri* (glej naslednji razdelek).

Prvo vprašanje, ki se porodi, je, ali je sploh $\gamma_d < \infty$. Da to velja za vse $d \in \mathbb{N}$, je dokazal že Ranga Rao [98]. Naslednje vprašanje pa je, kako hitro γ_d raste z d (očitno je $\gamma_{d+1} \geq \gamma_d$). Von Bahr [3] dokaže naslednjo oceno (ki je poseben primer ocene perimetrov konveksnih množic glede na še splošnejše mere).

Izrek H.1.2 (von Bahr). *Za vsak $d \in \mathbb{N}$ velja ocena:*

$$\gamma_d \leq \frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \tag{H.1.6}$$

Opomba. Ker je logaritem funkcije gama konveksen in $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, velja tudi $\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq \sqrt{x}\,\Gamma(x)$. Sledi:

$$\gamma_d \leq \sqrt{d} \tag{H.1.7}$$

Iz Stirlingovega obrazca sledi, da se desni strani ocen (H.1.6) in (H.1.7) asimptotično ujemata, t. j. limita kvocienta desnih strani, ko gre d proti neskončno, je enaka ena.

Opomba. Zlahka se prepričamo, da je:

$$\gamma_1 = \sqrt{2/\pi} < 0{,}798 \tag{H.1.8}$$

torej za $d = 1$ v (H.1.6) velja enakost.

Opomba. Ocena (H.1.6) se da lepo posplošiti tudi na druge radialno simetrične mere (glej von Bahr [3] ter Bhattacharya in Ranga Rao [29], str. 24, izrek 3.1).

Dolgo časa je veljalo splošno prepričanje, da von Bahrova ocena (H.1.7) ne da pravega velikostnega reda rasti γ_d in da so konstante γ_d omejene ali pa zelo počasi rastejo z d. Delen odgovor na to je dal Ball [5], ki je izpeljal presenetljivo zgornjo oceno, ki raste počasneje kot desna stran (H.1.7), prav tako pa je izpeljal tudi spodnjo oceno:

$$\frac{\sqrt{\log d}}{e} \leq \gamma_d \leq 4d^{1/4} \tag{H.1.9}$$

Spet je veljalo splošno prepričanje, da je prava rast konstant γ_d bližje spodnji kot zgornji oceni. Tokrat se je izkazalo nasprotno: Nazarov [87] je izpeljal, da Ballova zgornja meja v resnici da pravi velikostni red rasti konstant γ_d. Velja namreč ocena:

$$\liminf_{d\to\infty} \frac{\gamma_d}{d^{1/4}} \geq e^{-5/4} > 0{,}28 \tag{H.1.10}$$

Poleg tega Nazarov vsaj za velike d izboljša tudi konstanto pri Ballovi zgornji oceni, saj izpelje:

$$\limsup_{d\to\infty} \frac{\gamma_d}{d^{1/4}} \leq \pi^{-1/4} < 0{,}76 \tag{H.1.11}$$

Nazarov trdi tudi, da je:

$$\limsup_{d\to\infty} \frac{\gamma_d}{d^{1/4}} \leq (2\pi)^{-1/4} < 0{,}64 \tag{H.1.12}$$

vendar za to oceno ne poda natančnega dokaza.

Tudi ocena (H.1.9) oz. (H.1.11) se da posplošiti tudi na druge mere. Tako Bentkus, Juozulynas in Paulauskas [24] izpeljejo oceno, pri kateri namesto Gaussove mere nastopa primerna stabilna porazdelitev.

Nazarov torej za velike d izboljša konstanto v Ballovi oceni (H.1.9), ne poda pa eksplicitne ocene. Tu bomo podali naslednjo oceno, ki da še nekoliko boljšo konstanto kot v (H.1.12) in je povsem eksplicitna.

Izrek H.1.3. *Naj bo γ_d tako kot v* (H.1.5). *Tedaj za vsak $d \in \mathbb{N}$ velja:*

$$\gamma_d \le 0{,}64 + 0{,}59\, d^{1/4} \tag{H.1.13}$$

Izrek bomo dokazali v razdelkih H.3 in H.4; podali bomo tudi določene izboljšave za majhne dimenzije (glej tabelo H.4.1).

Dokaz trditve H.1.1. Naj bo najprej $x, y \in C^\varepsilon$. Dokazati moramo, da za vsak $t \in [0,1]$ velja $z := (1-t)x + ty \in C^\varepsilon$. Obstajata taki točki $\xi, \eta \in \overline{C}$, da je $|x-\xi| \le \varepsilon$ in $|y-\eta| \le \varepsilon$. Ker je po točki (2) trditve G.2.1 množica $\overline{C}$ konveksna, je tudi $\zeta := (1-t)\xi + t\eta \in \overline{C}$ in ni težko preveriti, da je $|z-\zeta| \le \varepsilon$. Torej je res $z \in C^\varepsilon$.

Naj bo zdaj $x, y \in C^{-\varepsilon}$, $t \in [0,1]$ in $z = (1-t)x + ty$. Pa recimo, da je $z \notin C^{-\varepsilon}$. To pomeni, da je $\operatorname{dist}(z, \mathbb{R}^d \setminus C) < \varepsilon$, se pravi, da obstaja tak u z $|u| < \varepsilon$, da je $z + u \notin C$. Toda ker je $x, y \in C^{-\varepsilon}$, je $x + u \in C$ in $y + u \in C$, torej bi zaradi konveksnosti moralo biti tudi $z + u = (1-t)(x+u) + t(y+u) \in C$, kar je protislovje. ■

H.2 Izražava s Hausdorffovo mero

Prvi korak pri ocenjevanju Gaussove mere okolic robov konveksnih množic (t. j. količin (H.1.2)) bo prevedba na ocenjevanje *Gaussovih perimetrov* množic, t. j. količin:

$$\int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(x)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x) \tag{H.2.1}$$

kjer je ϕ_d standardna Gaussova gostota:

$$\phi_d(x) = (2\pi)^{-d/2}\, e^{-\frac{1}{2}|x|^2} \tag{H.2.2}$$

Izkaže se namreč, da je ocenjevanje Gaussovih perimetrov preglednejše od ocenjevanja Gaussovih mer okolic robov. Ekvivalenca prvega in drugega je formulirana v naslednji trditvi, ki je glavni rezultat razdelka.

Trditev H.2.1. *Za vsak $d \in \mathbb{N}$ velja:*

$$\gamma_d = \sup \left\{ \int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(x)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x)\ ;\ C \subseteq \mathbb{R}^d \text{ konveksna množica} \right\} \tag{H.2.3}$$

Za dokaz zgornje trditve bomo potrebovali še nekaj pomožnih rezultatov. Najprej opazimo, da je množice C^ε in $C^{-\varepsilon}$ ugodno izraziti z *razdaljno funkcijo*.

Definicija. Naj bo C poljubna podmnožica metričnega prostora M. Definirajmo *razdaljno funkcijo* δ_C po predpisu:

$$\delta_C(x) := \begin{cases} -\operatorname{dist}(x, M \setminus C) & ;\ x \in C \\ \operatorname{dist}(x, C) & ;\ x \notin C \end{cases} \tag{H.2.4}$$

Opomba. Če je $x \in \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{Int} C$, je $\delta_C(x) = |x - p_C(x)|$, kjer je p_C pravokotna projekcija na C (glej razdelek G.3).

Lema H.2.2. *Naj bo $C \subseteq \mathbb{R}^d$ konveksna množica. Tedaj za vsak $x \in \mathbb{R}^d$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak y, da je $0 < \delta_C(y) - \delta_C(x) = |y - x| < \varepsilon$.*

Dokaz. Za $x \in \operatorname{Int} C$ in $x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{C}$ rezultat sledi iz točke (2) leme G.3.2. Naj bo zdaj $x \in \operatorname{Fr} C$ in naj bo u enotski zunanji normalni vektor kakega opornega polprostora množice C v točki x. Za $t \geq 0$ postavimo $y(t) := x + tu$. Po trditvi G.3.7 velja $\delta_C(y(t)) = \big|y(t) - p_C(y(t))\big| = |y(t) - x| = t$. Za $0 < t < \varepsilon$ je torej $y(t)$ iskana točka. ∎

Trditev H.2.3. *Razdaljna funkcija δ_C poljubne množice $C \subseteq \mathbb{R}^d$ je neraztezna. Nadalje za vsako točko $x \in \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{Fr} C$, kjer je δ_C diferenciabilna, velja $|\delta_C'(x)| = 1$. Če je C konveksna, to velja tudi na* $\operatorname{Fr} C$.

Dokaz. Dokažimo najprej nerazteznost. Naj bo $x, y \in \mathbb{R}^d$. Če točki x in y bodisi obe pripadata C bodisi nobena od njiju ne pripada C, iz trikotniške neenakosti takoj sledi, da mora veljati $|\delta_C(x) - \delta_C(y)| \leq |x - y|$. Naj bo zdaj še $x \in C$ in $y \notin C$. Označimo $t_0 := \sup\{t \in [0,1]\ ;\ (1-t)x + ty \in C\}$ in $z := (1-t_0)x + t_0 y$. Tedaj je gotovo $z \in \operatorname{Fr} C = \operatorname{Fr}(\mathbb{R}^d \setminus C)$, zato je $\delta_C(x) \geq -|x - z|$ in $\delta_C(y) \leq |y - z|$. Sledi:

$$0 \leq \delta_C(y) - \delta_C(x) \leq |x - z| + |y - z| = |z - y| \tag{H.2.5}$$

torej je δ_C res neraztezna. Po (E.1.2) torej povsod, kjer je diferenciabilna, velja $|\delta_C'(x)| \geq 1$.
Dokazati moramo še, da za ustrezne x velja $|\delta_C'(x)| \geq 1$. Po (E.1.2) zadošča pokazati, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak y, da je $|y - x| < \varepsilon$ in $|\delta_C(y) - \delta_C(x)| \geq |y - x|$. Če je $x \in \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{Fr} C$, to sledi iz točke (2) leme G.3.2, če je C konveksna, pa iz leme H.2.2. ∎

Posledica H.2.4. *Za vsako konveksno množico $C \subseteq \mathbb{R}^d$ velja:*

$$\mathcal{L}^d(\operatorname{Fr} C) = 0 \tag{H.2.6}$$

Dokaz. Iz trditve H.2.3 sledi, da absolutna vrednost $|\delta_C|$ razdaljne funkcije nikjer, kjer je enaka nič, torej nikjer na $\operatorname{Fr} C$ ne more biti diferenciabilna. Toda po drugi strani iz trditve (H.2.3) sledi, da je $|\delta_C|$ neraztezna, torej po Rademacherjevem izreku (izrek E.5.3) skoraj povsod diferenciabilna. To pa pomeni, da mora res veljati $\mathcal{L}^d(\operatorname{Fr} C) = 0$. ∎

Trditev H.2.5. *Če definiramo še $C^0 := \overline{C}$, za poljubno množico $C \subseteq \mathbb{R}^d$ in vsak $\eta \in \mathbb{R}$ velja:*

$$C^\eta = \{x\ ;\ \delta_C(x) \leq \eta\} \tag{H.2.7}$$

Če je bodisi $\eta < 0$ bodisi C konveksna, pa velja še:

$$\operatorname{Fr} C^\eta = \{x\ ;\ \delta_C(x) = \eta\} \tag{H.2.8}$$

Dokaz. Zveza (H.2.7) sledi neposredno iz (H.1.3) in (H.2.4). Dokažimo še (H.2.8). Da je $\operatorname{Fr} C^\eta \subseteq \{x \,;\, \delta_C(x) = \eta\}$, takoj sledi iz (H.2.7) in zveznosti razdaljne funkcije (ki sledi iz trditve H.2.3). Naj bo zdaj $\delta_C(x) = \eta$. Tedaj je očitno $x \in C^\eta$. Nadalje za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak y, da je $|y - x| < \varepsilon$ in $\delta_C(y) > \delta_C(x)$: za $\eta < 0$ to sledi iz (2) leme G.3.2, če je C konveksna, pa iz leme H.2.2. Očitno je $y \notin C^\eta$. To pa pomeni, da mora biti $x \in \operatorname{Fr} C^\eta$. ∎

Naslednji rezultat je modifikacija posledice G.3.8.

Lema H.2.6. *Naj bo $C \subseteq \mathbb{R}^d$ konveksna množica in $\varepsilon \geq 0$. Tedaj pravokotna projekcija p_C surjektivno preslika $\operatorname{Fr} C^\varepsilon$ na $\operatorname{Fr} C$.*

Dokaz. Ker je $C \subseteq C^\varepsilon$, je tudi $\operatorname{Fr} C^\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{Int} C^\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{Int} C$, torej je $p_C\big(\operatorname{Fr} C^\varepsilon\big) \subseteq \operatorname{Fr} C$. Preostane nam le še dokazati, da za vsak $y \in \operatorname{Fr} C$ obstaja tak $x \in \operatorname{Fr} C^\varepsilon$, da je $p_C(x) = y$. Naj bo u enotski zunanji normalni vektor kakega opornega polprostora množice C v točki y. Definirajmo $x := y + \varepsilon u$. Po trditvi G.3.7 je $p_C(x) = y$, velja pa še $\delta_C(x) = \operatorname{dist}(x, C) = |x - p_C(x)| = |x - y| = \varepsilon$, torej po (H.2.8) velja tudi $x \in \operatorname{Fr} C^\varepsilon$. ∎

Dokaz trditve H.2.1. Označimo:

$$\gamma'_d := \sup\left\{\int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(x)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x) \,;\, C \subseteq \mathbb{R}^d \text{ konveksna množica}\right\} \tag{H.2.9}$$

Dokazati moramo torej, da je $\gamma_d = \gamma'_d$. Iz trditve H.2.3, različice (F.3.14) krivočrtnega Fubinijevega izreka, točke (2) trditve F.3.1 in zveze (H.2.8) dobimo:

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(0, \mathbf{I})(C^\varepsilon \setminus C) &= \int_{C^\varepsilon \setminus C} \phi_d(x)\, J_1\delta_C(x)\, \mathrm{d}x = \\ &= \int_0^\varepsilon \int_{\delta_C^{-1}(\{t\})} \phi_d(x)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x)\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\varepsilon \int_{\operatorname{Fr} C^t} \phi_d(x)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x)\, \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{H.2.10}$$

Podobno velja tudi:

$$\mathrm{N}(0, \mathbf{I})(C \setminus C^{-\varepsilon}) = \int_{-\varepsilon}^0 \int_{\operatorname{Fr} C^t} \phi_d(x)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x)\, \mathrm{d}t \tag{H.2.11}$$

Iz (H.2.10) in (H.2.11) najprej sledi, da je:

$$\mathrm{N}(0, \mathbf{I})(C^\varepsilon \setminus C) \leq \varepsilon\gamma'_d \qquad \text{in} \qquad \mathrm{N}(0, \mathbf{I})(C \setminus C^{-\varepsilon}) \leq \varepsilon\gamma'_d \tag{H.2.12}$$

Če pogledamo supremum po vseh konveksnih množicah in vseh $\varepsilon > 0$, dobimo, da je $\gamma_d \leq \gamma'_d$.

Za dokaz neenakosti v nasprotno smer najprej označimo:

$$\Upsilon_\varepsilon^- \phi_d(x) := \inf_{|y| \leq \varepsilon} \phi_d(x + y) \tag{H.2.13}$$

Naj bo $x \in \operatorname{Fr} C^t$, kjer je $0 \le t \le \varepsilon$. Ker po (H.2.8) velja $|x - p_C(x)| = \operatorname{dist}(x, C) = \delta_C(x) = t$, je očitno $\phi_d(x) \ge \Upsilon_\varepsilon^- \phi_d\big(p_C(x)\big)$. Iz (H.2.10), leme H.2.6, trditve G.3.5 in točke (1) posledice F.2.6 dobimo:

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(0, \mathbf{I})(C^\varepsilon \setminus C) &\ge \int_0^\varepsilon \int_{\operatorname{Fr} C^t} \Upsilon_\varepsilon^- \phi_d\big(p_C(x)\big)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x)\, \mathrm{d}t \ge \\ &\ge \int_0^\varepsilon \int_{p_C(\operatorname{Fr} C^t)} \Upsilon_\varepsilon^- \phi_d(y)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y)\, \mathrm{d}t = \\ &= \varepsilon \int_{\operatorname{Fr} C} \Upsilon_\varepsilon^- \phi_d(y)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \end{aligned} \tag{H.2.14}$$

Torej za vsak $\varepsilon > 0$ velja:

$$\int_{\operatorname{Fr} C} \Upsilon_\varepsilon^- \phi_d(y)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \le \gamma_d \tag{H.2.15}$$

Ker je ϕ_d zvezna, za vsak $x \in \mathbb{R}^d$ velja $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Upsilon_\varepsilon^- \phi_d(x) = \phi_d(x)$. Torej po izreku o monotoni konvergenci velja:

$$\int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(y)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \le \gamma_d \tag{H.2.16}$$

Ker to velja za vse konveksne množice, je tudi $\gamma'_d \le \gamma_d$. ∎

H.3 Eksplicitna različica ocene Nazarova

Kot prvi korak pri dokazu ocene (H.1.13) bomo najprej izpeljali nekoliko slabšo oceno.

Trditev H.3.1. *Za vsak $d \in \mathbb{N}$ velja ocena:*

$$\gamma_d \le \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt[4]{\frac{d}{\pi}} < 1{,}26 + 0{,}76\, d^{1/4} \tag{H.3.1}$$

Dokaz te ocene bo služil kot osnova za dokaz izboljšane ocene (H.1.13). V dokazu trditve H.3.1, ki ga bomo izpeljali spodaj, so že zajete vse glavne ideje izpeljave ocene (H.1.13). Z drugimi besedami, ločnica med izpeljavama ocen (H.3.1) in (H.1.13) so zgolj tehnične izboljšave, ki jih bomo podali v naslednjem razdelku.

Preden gremo dokazovat trditev H.3.1, formulirajmo še tri pomožne rezultate. Prvega bomo dokazali na koncu razdelka.

Lema H.3.2. *Naj bo $C \subseteq \mathbb{R}^d$ konveksna množica in $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Nadalje naj bo radialna projekcija g_C (glej razdelek G.4) diferenciabilna v x. Tedaj velja:*

$$J_{d-1} g_C(x) = \left(\frac{\rho_C(x)}{|x|}\right)^{d-1} \frac{1}{\cos\theta} \tag{H.3.2}$$

kjer je θ kot med krajevnim vektorjem točke x in zunanjim normalnim vektorjem opornega polprostora množice C v točki $g_C(x)$, J_{d-1} pa je jacobiana (glej razdelek F.3).

Opomba. Če je g_C diferenciabilna v x, po trditvi G.4.7 v točki $g_C(x)$ obstaja en sam oporni polprostor.

Naslednji rezultat, ki ga bomo prav tako dokazali na koncu razdelka, je neenakostna različica Stirlingovega obrazca.

Trditev H.3.3. *Za vsak $x > 0$ velja ocena:*

$$\Gamma(x+1) \geq \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} \tag{H.3.3}$$

Naslednji rezultat pa je v resnici prvi korak v dokazu trditve H.3.1. Pove, da se je dovolj omejiti na množice, ki imajo v notranjosti izhodišče.

Lema H.3.4. *Za vsak $d \in \mathbb{N}$ velja:*

$$\gamma_d = \sup\left\{\int_{\mathrm{Fr}\,C} \phi_d(x)\,\mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x)\ ;\ C \subseteq \mathbb{R}^d \text{ konveksna množica}, 0 \in \mathrm{Int}\,C\right\} \tag{H.3.4}$$

Dokaz.

Prvi korak. Velja:

$$\gamma_d = \sup\left\{\int_{\mathrm{Fr}\,C} \phi_d(x)\,\mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x)\ ;\ C \subseteq \mathbb{R}^d \text{ konveksna množica}, \mathrm{Int}\,C \neq \emptyset\right\} \tag{H.3.5}$$

Upoštevali bomo trditev H.2.1. Dovolj je dokazati, da za vsako konveksno množico C s prazno notranjostjo obstaja taka konveksna množica D z neprazno notranjostjo, da je $\int_{\mathrm{Fr}\,C} \phi_d(x)\,\mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x) \leq \int_{\mathrm{Fr}\,D} \phi_d(x)\,\mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x)$, kar bo zagotovo veljalo, če bo veljalo $\mathrm{Fr}\,C \subseteq \mathrm{Fr}\,D$. Taka množica D pa vedno obstaja: če je namreč $\mathrm{Int}\,C = \emptyset$, je po trditvi G.2.4 množica C vsebovana v nekem *pravem* afinem podprostoru, ta pa je prav gotovo vsebovan v robu nekega polprostora, ki ga proglasimo za D.

Drugi korak. Velja:

$$\gamma_d = \sup\left\{\int_{\mathrm{Fr}\,C} \phi_d(x)\,\mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x)\ ;\ C \subseteq \mathbb{R}^d \text{ konveksna množica}, \mathrm{Int}\,C \neq \emptyset, 0 \in \overline{C}\right\} \tag{H.3.6}$$

Naj bo C konveksna množica z neprazno notranjostjo. Označimo $z := g_C(0)$. Tedaj je očitno $0 \in \overline{C - z}$. Pišimo:

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{Fr}\,C} \phi_d(x)\,\mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x) &= \int_{\mathrm{Fr}(C-z)} \phi_d(y+z)\,\mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) = \\ &= \int_{\mathrm{Fr}(C-z)} \phi_d(y)\, \exp\Big(-\langle y\,,\,z\rangle - \tfrac{1}{2}|z|^2\Big)\,\mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y)\end{aligned} \tag{H.3.7}$$

Ker po točki (2) leme G.3.3 za vsak $x \in C$ velja $\langle x - z\,,\,z\rangle \geq 0$, tudi za vsak $y \in C - z$ velja $\langle y\,,\,z\rangle \geq 0$. Sledi:

$$\int_{\mathrm{Fr}\,C} \phi_d(x)\,\mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathrm{Fr}(C-z)} \phi_d(y)\,\mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \tag{H.3.8}$$

Enakost (H.3.6) je s tem dokazana.

Tretji korak. Velja (H.3.4). Naj bo C konveksna množica z nepraznoo notranjostjo in $0 \in \overline{C}$. Po (G.2.4) obstaja zaporedje točk $z_n \in \operatorname{Int} C$, ki konvergira k izhodišču. Tedaj za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $0 \in \operatorname{Int}(C - z_n)$, poleg tega pa po izreku o dominirani konvergenci velja:

$$\begin{aligned} \int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(x)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(x - z_n)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\operatorname{Fr}(C-z_n)} \phi_d(y)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \end{aligned} \tag{H.3.9}$$

Naš rezultat je s tem dokazan. ■

Dokaz trditve H.3.1. Uporabili bomo lemo H.3.4, torej bomo morali za vsako konveksno množico $C \subseteq \mathbb{R}^d$, za katero je $0 \in \operatorname{Int} C$, omejiti integral:

$$\int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(x)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}x) \tag{H.3.10}$$

Glavna ideja je, da konstruiramo primerno lokalno Lipschitzevo preslikavo $g\colon A \to \operatorname{Fr} C$, kjer je $A \subseteq \mathbb{R}^d$ primerna množica, nakar uporabimo krivočrtni Fubinijev izrek (izrek F.3.2). Privzemimo še, da za skoraj vsak $x \in A$ (glede na Lebesguovo mero) velja:

$$\mathcal{H}^1\Big(g^{-1}(\{g(x)\})\Big) > 0 \tag{H.3.11}$$

in še, da je $J_{d-1}g(x) \le j(x)$, kjer je $j(x) > 0$. Tedaj velja:

$$1 = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_d(x)\, \mathrm{d}x \ge \int_A \frac{\phi_d(x)}{j(x)}\, J_{d-1}g(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\operatorname{Fr} C} \int_{g^{-1}(\{y\})} \frac{\phi_d(x)}{j(x)}\, \mathcal{H}^1(\mathrm{d}x)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \tag{H.3.12}$$

Če uspemo oceniti:

$$\int_{g^{-1}(\{y\})} \frac{\phi_d(x)}{j(x)}\, \mathcal{H}^1(\mathrm{d}x) \ge c\, \phi_d(y) \tag{H.3.13}$$

(kar med drugim avtomatično pomeni, da je pogoj (H.3.11) izpolnjen), torej velja:

$$\int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(y)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \le \frac{1}{c} \tag{H.3.14}$$

Z drugimi besedami, velja:

$$\int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(y)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \le \sup_{y \in \operatorname{Fr} C} \frac{\phi_d(y)}{\displaystyle\int_{g^{-1}(\{y\})} \frac{\phi_d(x)}{j(x)}\, \mathcal{H}^1(\mathrm{d}x)} \tag{H.3.15}$$

Ena možnost je, da za preslikavo g izberemo radialno projekcijo $g_C\colon \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \operatorname{Fr} C$. V tem primeru velja $g_C^{-1}(\{y\}) = \{sy/|y| \; ; \; s \ge 0\}$. Če slednji zapis izberemo za parametrizacijo praslike $g^{-1}(\{y\})$ (ki ima jacobiano enako 1) in uporabimo formulo (F.3.13), dobimo:

$$\int_{g^{-1}(\{y\})} \frac{\phi_d(x)}{j(x)} \, \mathcal{H}^1(\mathrm{d}x) = (2\pi)^{-d/2} \int_0^\infty \frac{e^{-s^2/2}}{j\left(s \, \dfrac{y}{|y|}\right)} \, \mathrm{d}s \tag{H.3.16}$$

Za $j(x)$ lahko postavimo kar desno stran v (H.3.2). Sledi:

$$\begin{aligned} \int_{g^{-1}(\{y\})} \frac{\phi_d(x)}{j(x)} \, \mathcal{H}^1(\mathrm{d}x) &= \frac{c(y)}{(2\pi)^{d/2} |y|^{d-1}} \int_0^\infty s^{d-1} \, e^{-s^2/2} \, \mathrm{d}s = \\ &= \frac{c(y) \, \phi_d(y)}{|y|^{d-1} \, e^{-|y|^2/2}} \int_0^\infty s^{d-1} \, e^{-s^2/2} \, \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{H.3.17}$$

kjer je $c(y)$ kosinus kota med y in zunanjim normalnim vektorjem opornega polprostora v točki y. Tako iz (H.3.15) dobimo:

$$\int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(y) \, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \le \sup_{y \in \operatorname{Fr} C} \frac{|y|^{d-1} e^{-|y|^2/2}}{c(y) \displaystyle\int_0^\infty s^{d-1} \, e^{-s^2/2} \, \mathrm{d}s} \tag{H.3.18}$$

Pomanjkljivost zgornje ocene je, da nimamo nobenega nadzora nad kosinusom $c(y)$, ki je lahko poljubno blizu nič (po trditvi G.4.1 ga sicer lahko navzdol omejimo z razmerjem med oddaljenostjo izhodišča do roba množice C in oddaljenostjo točke y od izhodišča, a kaj, ko je to razmerje lahko poljubno majhno).

Druga možnost pa je, da za preslikavo g izberemo pravokotno projekcijo $p_C\colon \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{Int} C \to \operatorname{Fr} C$. V tem primeru lahko zaradi nerazteznosti projekcije postavimo $j(x) = 1$ (glej trditev G.3.5 in točko (1) trditve F.3.1). Sledi:

$$\int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(y) \, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \le \sup_{y \in \operatorname{Fr} C} \frac{\phi_d(y)}{\displaystyle\int_{p_C^{-1}(\{y\})} \phi_d(x) \, \mathcal{H}^1(\mathrm{d}x)} \tag{H.3.19}$$

Po trditvi G.3.7 velja $p_C^{-1}(\{y\}) \supseteq \{y + su \; ; \; s \ge 0\}$, kjer je u zunanji enotski normalni vektor kakega opornega polprostora v točki y. Če prejšnji zapis spet uporabimo kot parametrizacijo, dobimo:

$$\begin{aligned} \int_{p_C^{-1}(\{y\})} \phi_d(x) \, \mathcal{H}^1(\mathrm{d}x) &\ge \int_0^\infty \phi_d(y + su) \, \mathrm{d}s = \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_0^\infty \exp\Bigl(-\tfrac{1}{2}|y|^2 - s \, c(y) \, |y| - \tfrac{1}{2}s^2\Bigr) \, \mathrm{d}s = \\ &= (2\pi)^{-d/2} \exp\Bigl(-\tfrac{1}{2}(1 - c^2(y)) \, |y|^2\Bigr) \int_0^\infty \exp\Bigl(-\tfrac{1}{2}(c(y) \, |y| + s)^2\Bigr) \, \mathrm{d}s = \\ &= \phi_d(y) \, \psi\Bigl(-c(y) \, |y|\Bigr) \end{aligned} \tag{H.3.20}$$

kjer je ψ *Millsovo razmerje* (glej dodatek C). Iz (H.3.15) zdaj dobimo:

$$\int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(y)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \le \sup_{y \in \operatorname{Fr} C} \frac{1}{\psi\big(-c(y)\,|y|\big)} \tag{H.3.21}$$

Millsovo razmerje pa je majhno pri zelo negativnih argumentih (glej trditev C.2.3). Tako je, površno povedano, ocena (H.3.18) uporabna pri velikih, ocena (H.3.21) pa pri majhnih vrednostih kosinusa $c(y)$. Smiselno bi bilo torej obe oceni kombinirati.

Če imamo podani dve preslikavi $g_1\colon A_1 \to \operatorname{Fr} C$ in $g_2\colon A_2 \to \operatorname{Fr} C$, ki zadoščata (H.3.11) ter za kateri je še $J_{d-1}g_1(x) \le j_1(x)$ in $J_{d-1}g_2(x) \le j_2(x)$, lahko za poljuben $p \in [0,1]$ zapišemo:

$$\begin{aligned} 1 &\ge (1-p) \int_{A_1} \frac{\phi_d(x)}{j_1(x)}\, J_{d-1}g_1(x)\,\mathrm{d}x + p \int_{A_2} \frac{\phi_d(x)}{j_2(x)}\, J_{d-1}g_2(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{\operatorname{Fr} C} \left[(1-p) \int_{g_1^{-1}(\{y\})} \frac{\phi_d(x)}{j_1(x)}\, \mathcal{H}^1(\mathrm{d}x) + p \int_{g_2^{-1}(\{y\})} \frac{\phi_d(x)}{j_2(x)}\, \mathcal{H}^1(\mathrm{d}x) \right] \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \end{aligned} \tag{H.3.22}$$

Sledi:

$$\int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(y)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \le \sup_{y \in \operatorname{Fr} C} \left(\frac{\phi_d(y)}{(1-p) \displaystyle\int_{g_1^{-1}(\{y\})} \frac{\phi_d(x)}{j_1(x)}\, \mathcal{H}^1(\mathrm{d}x) + p \int_{g_2^{-1}(\{y\})} \frac{\phi_d(x)}{j_2(x)}\, \mathcal{H}^1(\mathrm{d}x)} \right) \tag{H.3.23}$$

Če za g_1 postavimo radialno, za g_2 pa pravokotno projekcijo ter v zgornjo oceno vstavimo (H.3.17) in (H.3.20), dobimo:

$$\int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(y)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \le \sup_{y \in \operatorname{Fr} C} \left(\frac{1}{(1-p)\, c(y)\, |y|^{-(d-1)}\, e^{|y|^2/2} \displaystyle\int_0^\infty s^{d-1}\, e^{-s^2/2}\,\mathrm{d}s + p\, \psi(-c(y)|y|)} \right) \tag{H.3.24}$$

Če označimo $r := |y|$ in $t := |y|\, c(y)$, pa lahko to zapišemo tudi v obliki:

$$\int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(y)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \le \frac{1}{p} \sup_{t \ge 0} \frac{1}{t\, H(d,p) + \psi(-t)} \tag{H.3.25}$$

kjer je:

$$H(d,p) := \frac{1-p}{p} \inf_{r \ge 0} r^{-d}\, e^{r^2/2} \int_0^\infty s^{d-1}\, e^{-s^2/2}\,\mathrm{d}s \tag{H.3.26}$$

Če postavimo $\rho := r^2/2$ in integral izrazimo s funkcijo gama, dobimo:

$$H(d,p) = \frac{1-p}{2p} \inf_{\rho \ge 0} \rho^{-d/2}\, e^{\rho}\, \Gamma\!\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{1-p}{2p} \left(\frac{d}{2e}\right)^{-d/2} \Gamma\!\left(\frac{d}{2}\right) \tag{H.3.27}$$

Po trditvi H.3.3 lahko ocenimo:

$$\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{2}{d}\,\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right) \geq 2\sqrt{\frac{\pi}{d}}\left(\frac{d}{2e}\right)^{d/2} \tag{H.3.28}$$

Sledi:

$$H(d,p) \geq \frac{1-p}{p}\sqrt{\frac{\pi}{d}} \tag{H.3.29}$$

Oceniti moramo še desno stran v (H.3.25). Iz trditve C.2.3 po nekaj računanja dobimo, da za vsak $x > 0$ velja:

$$\sup_{t\geq 0} \frac{1}{tx + \psi(-t)} \leq F(x) \tag{H.3.30}$$

kjer je:

$$F(x) := \frac{1}{\inf\limits_{t\geq 0}\left(tx + \cfrac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} + t}\right)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\left(\sqrt{2\pi} - \sqrt{x}\right)} & ;\ x \leq \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} & ;\ x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{H.3.31}$$

Ni se težko prepričati, da velja ocena:

$$F(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{H.3.32}$$

Iz (H.3.25), (H.3.29), (H.3.30) in (H.3.32) zdaj lahko povzamemo:

$$\int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(y)\,\mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \leq \frac{1}{p\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{p(1-p)}}\sqrt[4]{\frac{d}{\pi}} \tag{H.3.33}$$

V primeru, ko gre d proti neskončno, je najugodneje vzeti $p = 1/2$. Za ta primer z uporabo leme H.3.4 dejansko dobimo želeni rezultat. ■

Dokaz leme H.3.2. Iz (G.4.2) in (G.4.29) po nekaj računanja dobimo:

$$g_C'(x)v = \frac{\rho_C(x)}{|x|}\left(v - \frac{\langle u\,,\,v\rangle}{\langle u\,,\,x\rangle}\,x\right) \tag{H.3.34}$$

Če je v pravokoten na u, velja $g_C'(x)v = \big(\rho_C(x)/|x|\big)v$. Nadalje je $\langle g_C'(x)u\,,\,u\rangle = 0$. Dopolnimo vektor u do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}^d$. V tej bazi ima $g_C'(x)$ matrični zapis:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0\ \cdots\ 0 \\ \hline \xi & \dfrac{\rho_C(x)}{|x|}\,\mathbf{I} \end{array}\right] \tag{H.3.35}$$

kjer je ξ ustrezni matrični zapis vektorja $g_C'(x)u$ v ortogonalnem komplementu vektorja u. Po točki (6) potem velja $[\![\mathbf{A}]\!]_{d-1} = [\![\mathbf{B}]\!]_{d-1}$, kjer je:

$$\mathbf{B} = \left[\xi \;\vdots\; \frac{\rho_C(x)}{|x|} \right] \tag{H.3.36}$$

Po točki (7) trditve F.3.1 nadalje velja:

$$\begin{aligned}
[\![\mathbf{A}]\!]_{d-1}^2 &= \det\!\left(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\right) = \\
&= \det\left(\xi\xi^T + \left(\frac{\rho_C(x)}{|x|}\right)^2\right) = \\
&= \left[|\xi|^2 + \left(\frac{\rho_C(x)}{|x|}\right)^2\right]\left(\frac{\rho_C(x)}{|x|}\right)^{2(d-2)} = \\
&= \left(\frac{\rho_C(x)}{|x|}\right)^{2(d-1)}\left(\frac{|x|^2}{\langle u\,,\,x\rangle}\right)^2 = \\
&= \left(\frac{\rho_C(x)}{|x|}\right)^{2(d-1)}\frac{1}{\cos^2\theta}
\end{aligned} \tag{H.3.37}$$

Lema je tako dokazana. ■

Dokazati moramo še trditev H.3.3. Preden se lotimo dokazovanja, formulirajmo še naslednji tehnični rezultat.

Lema H.3.5. *Za vsak $x > 0$ velja:*

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \geq e \tag{H.3.38}$$

Dokaz. Ekvivalentno je dokazati, da velja:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \geq 1 \tag{H.3.39}$$

ali tudi, da za vsak $t > 0$ velja:

$$\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\right)\ln(1 + t) \geq 1 \tag{H.3.40}$$

ali tudi, da velja:

$$f(t) := \left(1 + \frac{t}{2}\right)\ln(1 + t) - t \geq 0 \tag{H.3.41}$$

Velja $f(0) = 0$. Po odvajanju dobimo:

$$f'(t) = \frac{\ln(1+t)}{2} - \frac{t}{2(1+t)} \tag{H.3.42}$$

Spet je $f'(0) = 0$ in po ponovnem odvajanju dobimo:

$$f''(t) = \frac{t}{2(1+t)^2} \geq 0 \tag{H.3.43}$$

Torej je res $f(t) \geq 0$ za vse $t \geq 0$ in neenakost je dokazana. ■

DOKAZ TRDITVE H.3.3. Definirajmo:

$$f(x) := \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} \tag{H.3.44}$$

Po običajnem Stirlingovem obrazcu je $\lim_{x\to\infty} \Gamma(x+1)/f(x) = 1$. Ker za vsak $k \in \mathbb{N}_0$ velja:

$$\Gamma(x+1) = \frac{\Gamma(x+k+1)}{(x+1)(x+2)\dots(x+k)} \tag{H.3.45}$$

iz Stirlingovega obrazca sledi tudi:

$$\Gamma(x+1) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x+k)}{(x+1)(x+2)\dots(x+k)} \tag{H.3.46}$$

(zgornja formula spominja na znameniti Eulerjev zapis funkcije gama z limito). Toda po lemi H.3.5 velja:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \frac{n+1}{e} \geq n+1 \tag{H.3.47}$$

zato je tudi:

$$\frac{f(x+k)}{(x+1)(x+2)\dots(x+k)} \geq f(x) \tag{H.3.48}$$

Od tod pa že sledi naš rezultat. ■

H.4 Izboljšava ocene

Cilj tega razdelka je dokazati oceno (H.1.13), ki je izboljšava že dokazane ocene (H.3.1). Preden se lotimo dokazovanja, bomo potrebovali še nekaj pomožnih rezultatov, ki jih bomo dokazali na koncu razdelka.

Lema H.4.1. *Za vsak $x \geq 0$ in vsak $\alpha > 0$ veljata oceni:*

$$\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha^2} e^{-\alpha x} \geq e^{x^2/2} \tag{H.4.1}$$

$$\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha^2-1} e^{\alpha x} \geq e^{-x^2/2}\left(1-\frac{x^3}{\alpha}\right) \tag{H.4.2}$$

Lema H.4.2. *Brž ko je $\alpha \geq 1$ in $\beta \geq 1/\sqrt{e}$, za funkcijo:*

$$G(x,\alpha,\beta) := \left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha^2} e^{-\alpha x}\left[\beta + \int_x^\alpha \left(1-\frac{y}{\alpha}\right)^{\alpha^2-1} e^{\alpha y}\,\mathrm{d}y\right] \tag{H.4.3}$$

velja:

$$\inf_{x<\alpha} G(x,\alpha,\beta) = \inf_{0\leq x\leq 1} G(x,\alpha,\beta) \tag{H.4.4}$$

Dokaz izreka H.1.3. Da ocena (H.3.1) ni optimalna, se vidi že pri $d = 1$ (ocena (H.1.8)). Tudi za večje d se da ocena (H.3.1) izboljšati že, če izpustimo določene poenostavitve pri njeni izpeljavi. Natančneje, iz (H.3.25), (H.3.27) in leme H.3.4, dobimo oceno:

$$\gamma_d \le \gamma_{d,1} := \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} & ; d = 1 \\ \inf\limits_{0<p<1} \dfrac{1}{p} \sup\limits_{t \ge 0} \left(\dfrac{1}{t^{\frac{1-p}{2p}} \left(\frac{d}{2e}\right)^{-d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) + \psi(-t)} \right) & ; d \ge 2 \end{cases} \tag{H.4.5}$$

A tudi zgornja ocena se da vsaj za velike d še izboljšati. Podobno kot pri dokazu trditve H.3.1 bomo tudi tu izhajali iz ocene H.3.15. Pri dokazu trditve H.3.1 smo za g_1 vstavili radialno, za g_2 pa pravokotno projekcijo. Pri slednjem pa smo dobršen del prostora pustili neizkoriščen, saj pravokotna projekcija slika na $\operatorname{Fr} C$ le iz $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{Int} C$. Vrzel bomo zapolnili tako, da bomo iz notranjosti množice C spet slikali z radialno projekcijo. Z drugimi besedami, definirali bomo:

$$g_2(x) := \begin{cases} g_C(x) & ; x \in \operatorname{Int} C \\ p_C(x) & ; \text{sicer} \end{cases} \tag{H.4.6}$$

Po krajšem premisleku ugotovimo, da v tem primeru prav tako velja (H.3.25), t. j.:

$$\int_{\operatorname{Fr} C} \phi_d(y)\, \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}y) \le \frac{1}{p} \sup_{t \ge 0} \frac{1}{t\, H(d,p) + \psi(-t)} \tag{H.4.7}$$

toda s:

$$H(d,p) := \frac{1}{p} \inf_{r \ge 0} r^{-d} e^{r^2/2} \left[(1-p) \int_0^\infty s^{d-1} e^{-s^2/2}\, \mathrm{d}s + p \int_0^r s^{d-1} e^{-s^2/2}\, \mathrm{d}s \right] \tag{H.4.8}$$

Podobno kot v (H.3.27) z uvedbo novih spremenljivk $\rho := r^2/2$ in $t := s^2/2$ dobimo:

$$H(d,p) = \frac{1}{2p} \inf_{\rho \ge 0} \left[(1-p)\, \rho^{-d/2} e^{\rho}\, \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) + \frac{p}{\rho} \int_0^\rho \left(\frac{t}{\rho}\right)^{d/2-1} e^{\rho - t}\, \mathrm{d}t \right] \tag{H.4.9}$$

Podobno kot v prejšnjem razdelku iz (H.3.28) sledi:

$$H(d,p) \ge \inf_{\rho \ge 0} \left[\frac{1-p}{p} \sqrt{\frac{\pi}{d}} \left(\frac{d}{2e}\right)^{d/2} \rho^{-d/2} e^{\rho} + \frac{1}{2\rho} \int_0^\rho \left(\frac{t}{\rho}\right)^{d/2-1} e^{\rho - t}\, \mathrm{d}t \right] \tag{H.4.10}$$

V integralu, ki ostane, pa je integrand večkratnik verjetnostne gostote porazdelitve gama z matematičnim upanjem $d/2$ in varianco prav tako $d/2$. Zato je smiselno uvesti nadaljnje nove spremenljivke:

$$\alpha := \sqrt{\frac{d}{2}}, \quad x := \alpha - \frac{\rho}{\alpha}, \quad y := \alpha - \frac{t}{\alpha} \tag{H.4.11}$$

Dobimo:

$$H(d,p) \geq \frac{1}{2\alpha} \inf_{x<\alpha} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha^2} e^{-\alpha x} \left[\frac{1-p}{p}\sqrt{2\pi} + \int_x^\alpha \left(1 - \frac{y}{\alpha}\right)^{\alpha^2-1} e^{\alpha y}\,\mathrm{d}y\right] \tag{H.4.12}$$

Parameter p lahko zaenkrat še poljubno izbiramo. Omejili pa se bomo na primer, ko je $p \leq 0{,}8$. V tem primeru je namreč $\sqrt{2\pi}\,(1-p)/p > 1/\sqrt{e}$ in na desni strani ocene (H.4.12) lahko uporabimo lemo H.4.2. Nato uporabimo še lemo H.4.1 in dobimo:

$$H(d,p) \geq \frac{1}{2\alpha} \inf_{0\leq x\leq 1} e^{x^2/2} \left[\frac{1-p}{p}\sqrt{2\pi} + \int_x^\alpha \left(1 - \frac{y^3}{\alpha}\right) e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\right] \tag{H.4.13}$$

Ker je $1 - y^3/\alpha \geq 0$, brž ko je $y \geq \alpha$, je tudi:

$$\begin{aligned} H(d,p) &\geq \frac{1}{2\alpha} \inf_{0\leq x\leq 1} e^{x^2/2} \left[\frac{1-p}{p}\sqrt{2\pi} + \int_x^\infty \left(1 - \frac{y^3}{\alpha}\right) e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y\right] = \\ &= \frac{1}{2\alpha} \inf_{0\leq x\leq 1} \left[\frac{1-p}{p}\sqrt{2\pi}\,e^{x^2/2} + \psi(-x) - \frac{x^2+2}{\alpha}\right] \geq \\ &\geq \frac{1}{2\alpha}\left(J(p) - \frac{3}{\alpha}\right) \end{aligned} \tag{H.4.14}$$

kjer je:

$$J(p) := \inf_x \left[\frac{1-p}{p}\sqrt{2\pi}\,e^{x^2/2} + \psi(-x)\right] \tag{H.4.15}$$

Iz (H.4.7), (H.3.30), (H.4.12) in leme H.3.4 zdaj dobimo, da velja:

$$\gamma_d \leq \frac{1}{p} F\left(\frac{1}{2\alpha}\left(J(p) - \frac{3}{\alpha}\right)\right) = \frac{1}{p} F\left(\frac{1}{\sqrt{2d}}\left(J(p) - 3\sqrt{\frac{2}{d}}\right)\right) \tag{H.4.16}$$

kjer je F tako kot v (H.3.31).

Spomnimo se, da v limiti, ko gre $t \downarrow 0$, velja $F(t) \sim 1/(2\sqrt{t})$. V limiti, ko gre $d \to \infty$, je torej desna stran zgornje ocene približno (t. j. z relativno napako, ki gre proti nič) enaka $K(p)\,d^{1/4}$, kjer je:

$$K(p) := \frac{1}{2^{3/4} p \sqrt{J(p)}} = \sup_x \left(\frac{1}{2^{3/4}\sqrt{p(1-p)\sqrt{2\pi}\,e^{x^2/2} + p^2\,\psi(-x)}}\right) \tag{H.4.17}$$

Parameter p lahko še poljubno izbiramo v okviru intervala $(0,\ 0{,}8]$. Numerični izračuni pokažejo, da $K(p)$ doseže minimum pri 0,72 (če se omejimo na primer, ko je $100p$ celo število) in v tem primeru je $K(p) < 0{,}59$. Ocenili bomo torej:

$$\gamma_d \leq \gamma_{d,2} := \frac{1}{0{,}72} F\left(\frac{1}{\sqrt{2d}}\left(J(0{,}72) - 3\sqrt{\frac{2}{d}}\right)\right) \tag{H.4.18}$$

Desna stran je smiselno definirana za $d \geq 5$, saj je v tem primeru $J(0{,}72) - 3\sqrt{2/d} > 0$. Oceniti moramo še razliko med $\gamma_{d,2}$ in $0{,}59\, d^{1/4}$. Pokazali bomo, da je $\gamma_{d,2} - 0{,}59\, d^{1/4}$ padajoča funkcija dimenzije d.

Označimo $x := 1/\sqrt{2d}$. Po krajšem računu dobimo:

$$
\begin{aligned}
&F\left(\frac{1}{\sqrt{2d}}\left(J(p) - 3\sqrt{\frac{2}{d}}\right)\right) - p\,K(p)\,d^{1/4} = \\
&\qquad = F\Big(J(p)x - 6x^2\Big) - \frac{1}{2\sqrt{J(p)x}} = \\
&\qquad = F\Big(J(p)x - 6x^2\Big) - \frac{1}{2\sqrt{J(p)x - 6x^2}} + \\
&\qquad\quad + \frac{6\sqrt{x}}{2\sqrt{J^2(p) - 6J(p)x}\Big(\sqrt{J(p)} + \sqrt{J(p) - 6x}\Big)}
\end{aligned}
\tag{H.4.19}
$$

Člen na desni je očitno naraščajoča funkcija spremenljivke x. Če je $x \leq 3/J(p)$, to velja tudi za $J(p)x - 6x^2$. Nadalje se ni težko prepričati, da je tudi $F(t) - 1/(2\sqrt{t})$ naraščajoča funkcija spremenljivke t. Torej je celoten izraz v (H.4.19) naraščajoča funkcija spremenljivke x oziroma padajoča funkcija spremenljivke d, brž ko je $x \leq 3/J(p)$. Ni se težko prepričati, da pri $p = 0{,}72$ to velja za vse d. Torej je $\gamma_{d,2} - K(0{,}72)\, d^{1/4}$ padajoča funkcija spremenljivke d, se pravi, da to velja tudi za $\gamma_{d,2} - 0{,}59\, d^{1/4}$.

Primerjajmo zdaj ocene količin γ_d, ki smo jih izpeljali v (H.4.5) in (H.4.18). V naslednji tabeli so podane *navzgor zaokrožene* vrednosti količin $\gamma_{d,i}$ in $\Delta_{d,i} := \gamma_{d,i} - 0{,}59\, d^{1/4}$ za $i = 1, 2$ in $d \leq 50$:

d	$\gamma_{d,1}$	$\gamma_{d,2}$	$\Delta_{d,1}$	$\Delta_{d,2}$
1	0,798	–	0,208	–
2	1,219	–	0,517	–
3	1,300	–	0,524	–
4	1,364	–	0,529	–
5	1,416	4,569	0,534	3,686
6	1,462	2,902	0,538	1,978
7	1,502	2,504	0,543	1,545
8	1,539	2,325	0,546	1,333
9	1,572	2,225	0,550	1,203
10	1,603	2,163	0,553	1,114
11	1,631	2,123	0,557	1,049
12	1,658	2,097	0,560	0,998
13	1,683	2,078	0,563	0,958
14	1,707	2,066	0,565	0,925
15	1,729	2,058	0,568	0,896
16	1,751	2,052	0,571	0,872
17	1,771	2,049	0,573	0,851
18	1,791	2,048	0,576	0,833
19	1,810	2,048	0,578	0,817
20	1,829	2,050	0,581	0,802
21	1,846	2,052	0,583	0,789
22	1,863	2,054	0,585	0,777
23	1,880	2,058	0,587	0,766
24	1,896	2,061	0,590	0,756
25	1,911	2,065	0,592	0,746

d	$\gamma_{d,1}$	$\gamma_{d,2}$	$\Delta_{d,1}$	$\Delta_{d,2}$
26	1,926	2,070	0,594	0,738
27	1,941	2,074	0,596	0,729
28	1,955	2,079	0,598	0,722
29	1,969	2,084	0,600	0,715
30	1,982	2,089	0,602	0,708
31	1,996	2,094	0,603	0,702
32	2,009	2,099	0,605	0,696
33	2,021	2,105	0,607	0,690
34	2,034	2,110	0,609	0,685
35	2,046	2,115	0,611	0,680
36	2,057	2,121	0,612	0,675
37	2,069	2,126	0,614	0,671
38	2,080	2,131	0,616	0,666
39	2,092	2,137	0,617	0,662
40	2,103	2,142	0,619	0,658
41	2,113	2,147	0,620	0,654
42	2,124	2,153	0,622	0,651
43	2,134	2,158	0,624	0,647
44	2,145	2,163	0,625	0,644
45	2,155	2,169	0,627	0,640
46	2,165	2,174	0,628	0,637
47	2,174	2,179	0,630	0,634
48	2,184	2,184	0,631	0,631
49	2,193	2,189	0,632	0,628
50	2,203	2,195	0,634	0,626

Tabela H.4.1

Iz tabele je razvidno, da je za $d \leq 48$ ugodnejša ocena z $\gamma_{d,1}$, za večje d pa je bržkone ugodnejša ocena z $\gamma_{d,2}$. Prav tako ugotovimo, da za $d \leq 48$ velja $\Delta_{d,1} < 0{,}64$. Ker je $\Delta_{d,2}$ padajoča funkcija spremenljivke d, tudi za $d \geq 48$ velja $\Delta_{d,2} < 0{,}64$. Ocena (H.1.13) je tako dokazana. ■

Dokaz leme H.4.1.

(H.4.1): Velja:

$$\begin{aligned}\ln\left[\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha^2} e^{-\alpha x}\right] &= -\alpha x - \alpha^2\left(-\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} - \frac{x^3}{3\alpha^3} - \dots\right) = \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\alpha} + \frac{x^4}{4\alpha^2} + \dots \geq \\ &\geq \frac{x^2}{2}\end{aligned} \tag{H.4.20}$$

(H.4.2): Velja:

$$
\begin{aligned}
A &:= \ln \frac{\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha^2-1} e^{\alpha x}}{e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(1-\frac{x^3}{\alpha}\right)} = \\
&= \alpha x + (\alpha^2-1)\left(-\frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{2\alpha^2} - \frac{x^3}{3\alpha^3} - \dots\right) + \\
&\qquad + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{\alpha} + \frac{x^6}{2\alpha^2} + \frac{x^9}{3\alpha^3} + \dots
\end{aligned}
\tag{H.4.21}
$$

Po ureditvi členov dobimo:

$$
\begin{aligned}
A = &-\frac{x^3}{3\alpha} - \frac{x^4}{4\alpha^2} - \frac{x^5}{5\alpha^3} - \dots + \\
&+ \frac{x}{\alpha} + \frac{x^2}{2\alpha^2} + \frac{x^3}{3\alpha^3} + \dots + \\
&+ \frac{x^3}{\alpha} + \frac{x^6}{2\alpha^2} + \frac{x^9}{3\alpha^3} + \dots
\end{aligned}
\tag{H.4.22}
$$

V prvem nizu členov ocenimo $-x^{k+2}/((k+2)\alpha^k) \geq -x^{k+2}/(k\alpha^k)$. Po ureditvi členov dobimo:

$$
\begin{aligned}
A &\geq \frac{1}{\alpha}\left(-x^3 + x + x^3\right) + \frac{1}{2\alpha^2}\left(-x^4 + x^2 + x^6\right) + \frac{1}{3\alpha^3}\left(-x^5 + x^3 + x^9\right) + \dots = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\alpha^k}\left(-x^{k+2} + x^k + x^{3k}\right)
\end{aligned}
\tag{H.4.23}
$$

Za $0 \leq x \leq 1$ velja $x^{k+2} \leq x^k$, za $x \geq 1$ pa velja $x^{k+2} \leq x^{3k}$. Sledi $A \geq 0$ in neenakost je dokazana. ■

Dokaz leme H.4.2. Funkcijo G odvajajmo parcialno po x. Po krajšem računu dobimo:

$$
\frac{\partial G}{\partial x}(x,\alpha,\beta) = x\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha^2-1} e^{-\alpha x}\left[\beta + \int_x^{\alpha}\left(1-\frac{y}{\alpha}\right)^{\alpha^2-1} e^{\alpha y}\,\mathrm{d}y\right] - \left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{-1}
\tag{H.4.24}
$$

Za $x \leq 0$ torej očitno velja $\frac{\partial G}{\partial x}(x,\alpha,\beta) \leq 0$. Pri $x \geq 1$ pa ocenimo:

$$
\frac{\partial G}{\partial x}(x,\alpha,\beta) \geq \left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{-1}\left[\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha^2} e^{-\alpha x}\beta - 1\right]
\tag{H.4.25}
$$

Po (H.4.1) je $\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha^2} e^{-\alpha x} \geq e^{x^2/2} \geq \sqrt{e}$. Če je torej $\beta \geq 1/\sqrt{e}$, za $x \geq 1$ velja $\frac{\partial G}{\partial x}(x,\alpha,\beta) \geq 0$ in rezultat je dokazan. ■

Sklep

Videli smo, da Steinova metoda nudi oceno napake pri normalni aproksimaciji za vrsto zanimivih primerov, kjer igra vlogo odvisnost. Vendar pa njeni potenciali še zdaleč niso izčrpani. Dosti bi se dalo še storiti pri ocenah Berry–Esseenovega tipa in njihovih večrazsežnih posplošitvah, posebej za primer, ko slučajne spremenljivke niso omejene. Doslej najsplošnejša rezultata sta izpeljala Chen in Shao za lokalno odvisnost [41] in določene vrste statistik [42]. Vendar pa sta njuna rezultata omejena le na enorazsežni primer in tudi odvisnost konstante od maksimalne stopnje v grafu odvisnosti ni vedno optimalna. Včasih je ta odvisnost ključnega pomena, npr. pri U-statistikah. Zanimivo bi bilo izpeljati tudi splošnejši rezultat, ki ni omejen le na lokalno odvisnost.

Velika hiba Steinove metode so konstante. Res je sicer, da bi se veliko konstant, ki nastopajo v tem delu, dalo s pazljivejšim računanjem zlahka izboljšati, še vedno pa so konstante za vsote neodvisnih slučajnih spremenljivk kar nekajkrat slabše od tistih, ki so bile dobljene z drugimi metodami. Pri izboljšavi konstant se je doslej za najobetavnejšega izkazal pristop s koncentracijsko neenakostjo (glej Chen in Shao [40]).

Že v uvodu smo omenili, da smo izpustili neenakomerne ocene. Pomembne pa so tudi ocene velikih odklonov, t. j. take, pri katerih verjetnosti $\mathbb{P}(W \leq x)$ ocenimo z majhno *relativno* napako. Določen napredek pri tem je dosegel avtor tega dela [94], še vedno pa ostaja pri tem dosti manevrskega prostora. Verjetnosti velikih odklonov bi bilo zanimivo izpeljati tudi za večrazsežni primer.

Prav tako zanimivo področje pa je tudi Edgeworthov razvoj. Pri tem so bili sicer tudi že doseženi določeni rezultati (glej Barbour [9], Schneller [117] ter Rinott in Rotar [107]), a je še dosti odprtega. Matematike torej v bodoče tudi na tem področju čaka še veliko dela.

Literatura

[1] A. K. Aleškevičienė: *Verojatnosti bol'ših uklonjenij dlja U-statistik i funkcionalov Misesa*, Teor. verojatnost. i primenjen. **35** (1990), 3–14.

[2] E. L. Allgower, K. Georg: *Numerical Continuation Methods*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 13, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[3] B. von Bahr: *Multi-dimensional integral limit theorems*, Ark. Mat. **7** (1967), 71–88.

[4] P. Baldi, Y. Rinott, C. Stein: *A normal approximation for the number of local maxima of a random function on a graph*, Probability, statistics, and mathematics, Academic Press, Boston, MA, 1989, str. 59–81.

[5] K. Ball: *The reverse isoperimetric problem for Gaussian measure*, Discrete Comput. Geom. **10** (1993), 411–420.

[6] S. Banach: *Über homogene Polynome in* L^2, Studia Math. **7** (1938), 36–44.

[7] A. D. Barbour, M. Karoński, A. Ruciński: *A central limit theorem for decomposable random variables with applications to random graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **47** (1989), 125–145.

[8] A. D. Barbour: *Poisson convergence and random graphs*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **92** (1982), 349–359.

[9] ———: *Asymptotic expansions based on smooth functions in the central limit theorem*, Probab. Theory Relat. Fields **72** (1986), 289–303.

[10] ———: *Stein's method for diffusion approximations*, Probab. Theory Related Fields **84** (1990), 297–322.

[11] ———: *Stein's method*, Encyclopaedia of Statistical Sciences, vol. 1, Wiley, New York, 1997, str. 513–521.

[12] A. D. Barbour, L. H. Y. Chen: *An Introduction to Stein's Method*, Lecture Notes Series, vol. 4, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, 2005.

[13] ———: *Stein's Method and Applications*, Lecture Notes Series, vol. 5, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, 2005.

[14] A. D. Barbour, L. H. Y. Chen, W.-L. Loh: *Compound Poisson approximation for nonnegative random variables via Stein's method*, Ann. Probab. **20** (1992), 1843–1866.

[15] A. D. Barbour, O. Chryssaphinou: *Compound Poisson approximation: a user's guide*, Ann. Appl. Probab. **11** (2001), 964–1002.

[16] A. D. Barbour, V. Čekanavičius: *Total variation asymptotics for sums of independent integer random variables*, Ann. Probab. **30** (2002), 509–545.

[17] A. D. Barbour, L. Holst, S. Janson: *Poisson Approximation*, Oxford Studies in Probability, vol. 2, Oxford University Press, New York, 1992.

[18] A. D. Barbour, S. Utev: *Solving the Stein equation in compound Poisson approximation*, Adv. in Appl. Probab. **30** (1998), 449–475.

[19] ______: *Compound Poisson approximation in total variation*, Stochastic Process. Appl. **82** (1999), 89–125.

[20] A. D. Barbour, A. Xia: *Estimating Stein's constants for compound Poisson approximation*, Bernoulli **6** (2000), 581–590.

[21] V. Bentkus: *O zavisnosti ocenki Berry-Esseena ot razmernosti*, Lietuvos Matematikos Rinkinys **26** (1986), 205–210.

[22] ______: *On the dependence of the Berry-Esseen bound on dimension*, J. Statist. Plann. Inference **113** (2003), 385–402.

[23] V. Bentkus, F. Götze, A. Tikhomirov: *Berry-Esseen bounds for statistics of weakly dependent samples*, Bernoulli **3** (1997), 329–349.

[24] V. Bentkus, A. Juozulynas, V. Paulauskas: *Bounds for stable measures of convex shells and stable approximations*, Ann. Probab. **28** (2000), 1280–1300.

[25] H. Bergström: *On the central limit theorem*, Skand. Aktuarietidskr. **27** (1944), 139–153.

[26] ______: *On the central limit theorem in the space $R_k, k > 1$*, Skand. Aktuarietidskr. **28** (1945), 106–127.

[27] A. C. Berry: *The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates*, Trans. Amer. Math. Soc. **49** (1941), 122–136.

[28] R. N. Bhattacharya: *On errors of normal approximation*, Ann. Probab. **3** (1975), 815–828.

[29] R. N. Bhattacharya, R. Ranga Rao: *Normal Approximation and Asymptotic Expansions*, Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Melbourne, FL, 1986.

[30] M. Bloznelis, F. Götze: *Orthogonal decomposition of finite population statistics and its applications to distributional asymptotics*, Ann. Statist. **29** (2001), 899–917.

[31] M. Bloznelis, F. Götze: *An Edgeworth expansion for symmetric finite population statistics*, Ann. Probab. **30** (2002), 1238–1265.

[32] T. S. Blyth: *Module Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1977.

[33] J. Bochnak, J. Siciak: *Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces*, Studia Math. **39** (1971), 59–76.

[34] E. Bolthausen: *An estimate of the remainder in a combinatorial central limit theorem*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete **66** (1984), 379–386.

[35] E. Bolthausen, F. Götze: *The rate of convergence for multivariate sampling statistics*, Ann. Statist. **21** (1993), 1692–1710.

[36] H. Callaert, P. Janssen: *The Berry-Esseen theorem for U-statistics*, Ann. Statist. **6** (1978), 417–421.

[37] L. Le Cam: *An approximation theorem for the Poisson binomial distribution*, Pacific J. Math. **10** (1960), 1181–1197.

[38] L. H. Y. Chen: *Poisson approximation for dependent trials*, Ann. Probab. **3** (1975), 534–545.

[39] ______: *Stein's method: some perspectives with applications*, Probability towards 2000 (New York, 1995), Lecture Notes in Statist., vol. 128, Springer, New York, 1998, str. 97–122.

[40] L. H. Y. Chen, Q.-M. Shao: *A non-uniform Berry-Esseen bound via Stein's method*, Probab. Theory Related Fields **120** (2001), 236–254.

[41] ______: *Normal approximation under local dependence*, Ann. Probab. **32** (2004), 1985–2028.

[42] ______: *Normal approximation for nonlinear statistics using a concentration inequality approach*, Bernoulli **13** (2007), 581–599.

[43] P. L. Čebišev: *Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités*, Acta Math. **14** (1890), 305–315.

[44] M. Černe: *Ravnotežje*, Obz. mat. fiz. **49** (2002), 49–52.

[45] G. Dall'Aglio: *Sugli estremi dei momenti delle funzioni di ripartizione doppia*, Ann. Scuoloa Norm. Sup. Pisa (3) **10** (1956), 35–74.

[46] A. Defant, K. Floret: *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 176, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.

[47] A. Dembo, Y. Rinott: *Some examples of normal approximations by Stein's method*, Random discrete structures (Minneapolis, MN, 1993), IMA Vol. Math. Appl., vol. 76, Springer, New York, 1996, str. 25–44.

[48] J. W. Demmel: *Uporabna numerična linearna algebra*, DMFA, Ljubljana, 2000.

[49] P. Diaconis: *The distribution of leading digits and uniform distribution* mod 1, Ann. Probab. **5** (1977), 72–81.

[50] ______: *An example for Stein's method*, Technical report. Stats Dept, Stanford, 1989.

[51] ______: *Stein's method for Markov chains: first examples*, Stein's method: expository lectures and applications, IMS Lecture Notes Monogr. Ser., vol. 46, Inst. Math. Statist., Beachwood, OH, 2004, str. 27–43.

[52] J. Dugundji: *Topology*, Allyn and Bacon Inc., Boston, Mass., 1966.

[53] C.-G. Esseen: *On the Liapounoff limit of error in the theory of probability*, Ark. Mat. Astr. Fys. **28A** (1942), 19.

[54] ______: *Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law*, Acta Math. **77** (1945), 1–125.

[55] S. N. Ethier, T. G. Kurtz: *Markov Processes*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons Inc., New York, 1986.

[56] L. C. Evans, R. F. Gariepy: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[57] H. Federer: *Geometric Measure Theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[58] W. Feller: *Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Z. **40** (1935), 521–559.

[59] ______: *On the Berry-Esseen theorem*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete **10** (1968), 261–268.

[60] L. Goldstein: *Normal approximation for hierarchical structures*, Ann. Appl. Probab. **14** (2004), 1950–1969.

[61] ______: *Berry-Esseen bounds for combinatorial central limit theorems and pattern occurrences, using zero and size biasing*, J. Appl. Probab. **42** (2005), 661–683.

[62] L. Goldstein, G. Reinert: *Stein's method and the zero bias transformation with application to simple random sampling*, Ann. Appl. Probab. **7** (1997), 935–952.

[63] L. Goldstein, Y. Rinott: *Multivariate normal approximations by Stein's method and size bias couplings*, J. Appl. Probab. **33** (1996), 1–17.

[64] F. Götze: *On the rate of convergence in the multivariate CLT*, Ann. Probab. **19** (1991), 724–739.

[65] P. R. Halmos: *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1950.

[66] S.-T. Ho, L. H. Y. Chen: *An L_p bound for the remainder in a combinatorial central limit theorem*, Ann. Probab. **6** (1978), 231–249.

[67] W. Hoeffding: *A class of statistics with asymptotically normal distribution*, Ann. Math. Statisitcs **19** (1948), 293–325.

[68] M. L. Katz: *Note on the Berry-Esseen theorem*, Ann. Math. Statist. **34** (1963), 1107–1108.

[69] P. N. Kokic, N. C. Weber: *An Edgeworth expansion for U-statistics based on samples from finite populations*, Ann. Probab. **18** (1990), 390–404.

[70] ______: *Large deviation probabilities for U-statistics based on samples from finite populations*, Exploring stochastic laws, VSP, Utrecht, 1995, str. 175–181.

[71] U. Konieczna: *Asymptotic normality of the vertex degree in random subgraphs of the n-cube*, Math. Nachr. **154** (1991), 217–224.

[72] M. Konvalinka: *Aproksimacijska lastnost*, Magistrsko delo, Univerza v Ljubljani, 2004.

[73] P. Lévy: *Calcul des probabilités*, Paris, 1925.

[74] J. W. Lindeberg: *Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Z. **15** (1922), 211–225.

[75] A. M. Ljapunov: *Sur une proposition de la théorie des probabilités*, Bull. Acad. Imp. Sci. St. Petersb. **13** (1900), 359–386.

[76] ______: *Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité*, Mem. Acad. Sci. St. Petersb. **12** (1901), 1–24.

[77] W.-L. Loh: *Stein's method and multinomial approximation*, Ann. Appl. Probab. **2** (1992), 536–554.

[78] H. M. Luk: *Stein's method for the gamma distribution and related statistical applications*, Doktorska disertacija, Univ. Southern California, 1994.

[79] C. T. McMullen: *Lipschitz maps and nets in Euclidean space*, Geom. Funct. Anal. **8** (1998), 304–314.

[80] V. G. Mikhailov: *Estimation of the accuracy of compound Poisson approximation for the distribution of the number of coinciding chains*, Theory Probab. Appl. **46** (2003), 667–675.

[81] R. von Mises: *On the asymptotic distribution of differentiable statistical functions*, Ann. Math. Statistics **18** (1947), 309–348.

[82] A. de Moivre: *The Doctrine of Chances: A method of calculating the probability of events in play*, London, 1718.

[83] S. V. Nagaev: *An estimate of the remainder term in the multidimensional central limit theorem*, Proceedings of the Third Japan-USSR Symposium on Probability Theory (Tashkent, 1975) (Berlin), Springer, 1976, str. 419–438. Lecture Notes in Math., Vol. 550.

[84] H. K. Nandi, P. K. Sen: *On the properties of U-statistics when the observations are not independent. II. Unbiased estimation of the parameters of a finite population*, Calcutta Statist. Assoc. Bull. **12** (1963), 124–148.

[85] J. F. Nash, Jr.: *Equilibrium points in n-person games*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **36** (1950), 48–49.

[86] ______: *Non-cooperative games*, Ann. of Math. (2) **54** (1951), 286–295.

[87] F. Nazarov: *On the maximal perimeter of a convex set in $\mathbb{R}^n$ with respect to a Gaussian measure*, Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math., vol. 1807, Springer, Berlin, 2003, str. 169–187.

[88] É. Pardoux, A. Y. Veretennikov: *On the Poisson equation and diffusion approximation. I*, Ann. Probab. **29** (2001), 1061–1085.

[89] ______: *On Poisson equation and diffusion approximation. II*, Ann. Probab. **31** (2003), 1166–1192.

[90] ______: *On the Poisson equation and diffusion approximation 3*, Ann. Probab. **33** (2005), 1111–1133.

[91] V. Paulauskas: *O mnogomernoj central′noj predel′noj teoreme*, Lietuvos Matematikos Rinkinys **10** (1970), 783–789.

[92] V. V. Petrov: *Odna ocenka otklonjenija raspredeljenija summy nezavismyh slučajnyh veličin ot normal′nogo zakona*, Dokl. akad. nauk SSSR **160** (1965), 1013–1015.

[93] S. T. Račev: *Zadača Monža-Kantoroviča o peremeščeniji mass i jeje primenjenija v stohastike*, Teor. verojatnost. i primenen. **29** (1984), 625–653.

[94] M. Raič: *CLT-related large deviation bounds based on Stein's method*, Adv. in Appl. Probab. **39** (2007), 731–752.

[95] ______: *Chen–Steinova metoda*, Magistrsko delo, Univerza v Ljubljani, 1998.

[96] ______: *Normal approximation by Stein's method*, Metodološki zvezki, vol. 21, FDV, Ljubljana, 2003, str. 71–97.

[97] ______: *A multivariate CLT for decomposable random vectors with finite second moments*, J. Theoret. Probab. **17** (2004), 573–603.

[98] R. Ranga Rao: *Some problems in probability theory*, Doktorska disertacija, Calcutta University, 1960.

[99] ______: *On the central limit theorem in R_k*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 359–361.

[100] G. Reinert: *The asymptotic evolution of the general stochastic epidemic*, Ann. Appl. Probab. **5** (1995), 1061–1086.

[101] ______: *A weak law of large numbers for empirical measures via Stein's method*, Ann. Probab. **23** (1995), 334–354.

[102] ______: *Stein's method for epidemic processes*, Complex stochastic systems (Eindhoven, 1999), Monogr. Statist. Appl. Probab., vol. 87, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001, str. 235–275.

[103] Y. Rinott: *On normal approximation rates for certain sums of dependent random variables*, J. Comput. Appl. Math. **55** (1994), 135–143.

[104] Y. Rinott, V. Rotar: *A multivariate CLT for local dependence with $n^{-1/2} \log n$ rate and applications to multivariate graph related statistics*, J. Multivariate Anal. **56** (1996), 333–350.

[105] ______: *On coupling constructions and rates in the CLT for dependent summands with applications to the antivoter model and weighted U-statistics*, Ann. Appl. Probab. **7** (1997), 1080–1105.

[106] ______: *Normal approximations by Stein's method*, Decis. Econ. Finance **23** (2000), 15–29.

[107] ______: *On Edgeworth expansions for dependency-neighborhoods chain structures and Stein's method*, Probab. Theory Related Fields **126** (2003), 528–570.

[108] Y. Rinott, M. Scarsini: *On the number of pure strategy Nash equilibria in random games*, Games Econom. Behav. **33** (2000), 274–293.

[109] L. C. G. Rogers, D. Williams: *Diffusions, Markov Processes, and Martingales. Vol. 1*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[110] W. Rudin: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[111] ______: *Functional Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc., New York, 1991.

[112] T. Salvemini: *Sul calcolo degli indici di concordanza tra due caratteri quantitativi*, Atti della VI Riunione Soc. Ital. di Statistica (Roma), 1943.

[113] V. V. Sazonov: *On the multi-dimensional central limit theorem*, Sankhyā Ser. A **30** (1968), 181–204.

[114] ______: *On a bound for the rate of convergence in the multidimensional central limit theorem*, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. II: Probability theory (Berkeley, Calif.), Univ. California Press, 1972, str. 563–581.

[115] ______: *Normal Approximation — Some Recent Advances*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 879, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[116] W. Schneller: *A short proof of Motoo's combinatorial central limit theorem using Stein's method*, Probab. Theory Related Fields **78** (1988), 249–252.

[117] ______: *Edgeworth expansions for linear rank statistics*, Ann. Statist. **17** (1989), 1103–1123.

[118] W. Schoutens: *Orthogonal polynomials in Stein's method*, J. Math. Anal. Appl. **253** (2001), 515–531.

[119] V. V. Senatov: *Several estimates of the rate of convergence in the multidimensional central limit theorem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **254** (1980), 809–812.

[120] R. J. Serfling: *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1980.

[121] I. G. Ševcova: *Utočnjenje ocenok skorosti shodimosti v teoreme Ljapunova*, Dokl. Akad. Nauk **435** (2010), 26–28.

[122] A. N. Shiryaev: *Probability*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 95, Springer-Verlag, New York, 1996.

[123] R. L. Smith: *Extreme value theory for dependent sequences via the Stein-Chen method of Poisson approximation*, Stochastic Process. Appl. **30** (1988), 317–327.

[124] C. Stein: *A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables*, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. II: Probability theory (Berkeley, Calif.), Univ. California Press, 1972, str. 583–602.

[125] ______: *Approximate Computation of Expectations*, Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes—Monograph Series, 7, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1986.

[126] C. Stein, P. Diaconis, S. Holmes, G. Reinert: *Use of exchangeable pairs in the analysis of simulations*, Stein's method: expository lectures and applications, IMS Lecture Notes Monogr. Ser., vol. 46, Inst. Math. Statist., Beachwood, OH, 2004, str. 1–26.

[127] S. Sternberg: *Lectures on differential geometry*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[128] J. A. Tawn: *Estimating probabilities of extreme sea-levels*, J. Royal Statist. Soc. Ser. C **41** (1992), 77–93.

[129] L. C. Zhao, X. R. Chen: *Berry-Esseen bounds for finite-population U-statistics*, Sci. Sinica Ser. A **30** (1987), 113–127.

[130] ———: *Normal approximation for finite-population U-statistics*, Acta Math. Appl. Sinica (English Ser.) **6** (1990), 263–272.

[131] L. Zhao, Z. Bai, C.-C. Chao, W.-Q. Liang: *Error bound in a central limit theorem of double-indexed permutation statistics*, Ann. Statist. **25** (1997), 2210–2227.

[132] V. M. Zolotarjev: *Absoljutnaja ocenka ostatnočnogo člena v central′noj predel′noj teoreme*, Teor. verojatnost. i primenjen. **11** (1966), 108–119.

[133] ———: *A sharpening of the inequality of Berry-Esseen*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete **8** (1967), 332–342.

Notacija

1. Množice, logika

A^c	komplement množice oz. dogodka
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbf{1}$(izjava)	1, če je izjava resnična, sicer pa 0
$\mathbf{1}_A$	indikator množice: $\mathbf{1}_A(x) = 1$, če je $x \in A$, in $\mathbf{1}_A(x) = 0$, če $x \notin A$.

2. Števila

x_+	$\max\{x, 0\}$
x_-	$\max\{-x, 0\}$

3. Vektorji in tenzorji

$\|x\|$	dolžina vektorja
$u_1 u_2 \ldots u_r$	če so u_i vektorji ali tenzorji: skrčitveni produkt (glej razdelek D.5)
$\mathbf{I}$	identična matrika oz. identični mešani $(1, 1)$-tenzor (glej razdelek D.5)
$\mathcal{I}$	fundamentalni kovariantni tenzor (glej razdelek D.7)
$\mathcal{I}^T$	fundamentalni kontravariantni tenzor (glej razdelek D.7)
$\operatorname{sl} A$	sled tenzorja (glej razdelek D.5)
$\|\mathbf{U}\|_\wedge$	projektivna norma (glej razdelek D.8)
$\|\mathbf{U}\|_\vee$	injektivna norma (glej razdelek D.8)

4. Funkcije

ϕ	standardizirana Gaussova gostota, t. j. $\phi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}x^2}$.
ϕ_d	standardizirana Gaussova gostota v $\mathbb{R}^d$, t. j. $\phi_d(x) = (2\pi)^{-d/2} e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$.
Φ	Gaussov verjetnostni integral, t. j. $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(z)\,dz$.
ψ	Millsovo razmerje, t. j. $\psi(x) = \Phi(x)/\phi(x)$ (glej dodatek C).

5. Operacije s funkcijami

$f'(x)v$	odvod funkcije f pri x v smeri vektorja v (glej razdelek E.1)
$f^{(r)}(x)v_1 \dots v_r$	odvod funkcije f reda r pri x v smereh $v_1, \dots v_r$ (glej razdelek E.1)
$M_0(f)$	$\sup_x \lvert f(x) \rvert$ (glej razdelek E.5)
$M_r(f)$	za $r \in \mathbb{N}$: $\sup\limits_{x \neq y} \dfrac{\left\lVert f^{(r-1)}(x) - f^{(r-1)}(y) \right\rVert_V}{\lvert x - y \rvert}$ (glej razdelek E.5)
$V(f)$	totalna variacija funkcije f (glej razdelek 4.1)
$\operatorname{grad} f$	gradient (glej razdelek E.1)
$\operatorname{div} u$	divergenca (glej razdelek E.1)
Δf	Laplaceov operator (glej razdelek E.1)

6. Funkcijski prostori (za vse podrobnosti glej razdelka E.3 in E.5)

$\mathcal{C}(D)$	prostor zveznih funkcij iz D v $\mathbb{R}$
$\mathcal{C}_c(D)$	prostor zveznih funkcij iz D v $\mathbb{R}$ s kompaktnim nosilcem
$\mathcal{C}^{(r)}(D)$	prostor r-krat zvezno odvedljivih funkcij iz D v $\mathbb{R}$
$\mathcal{C}_c^{(r)}(D)$	prostor r-krat zvezno odvedljivih funkcij iz D v $\mathbb{R}$ s kompaktnim nosilcem
$\mathfrak{b}(D), \mathfrak{b}^{(0)}(D)$	prostor Lebesguovo merljivih omejenih funkcij iz D v $\mathbb{R}$
$\mathfrak{b}_{\mathrm{loc}}(D), \mathfrak{b}_{\mathrm{loc}}^{(0)}(D)$	prostor Lebesguovo merljivih lokalno omejenih funkcij
$\mathfrak{b}^{(r)}(D), \mathfrak{b}_{\mathrm{loc}}^{(r)}(D)$	$r \geq 1$: prostor *zveznih* r-krat šibko odvedljivih funkcij z (lokalno) omejenim r-tim šibkim odvodom
$L^p(D)$	prostor funkcij z integrabilno p-to absolutno potenco (oz. končnim absolutnim bistvenim supremumom pri $p = \infty$)
$L_{\mathrm{loc}}^p(D)$	prostor funkcij, ki so lokalno v L^p
$\mathcal{W}^{r,p}(D), \mathcal{W}_{\mathrm{loc}}^{r,p}(D)$	prostori Soboljeva
$\mathcal{C}^{(r)}(D; V), \mathcal{W}^{r,p}(D; V), \dots$	prostori ustreznih preslikav iz D v vektorski prostor V

7. Slučajne spremenljivke, porazdelitve

$\mathbb{E}\, X$	matematično upanje slučajne spremenljivke ali slučajnega vektorja X. Privzeli bomo, da ima množenje prednost pred matematičnim upanjem, tako da $\mathbb{E}\, XY$ pomeni $\mathbb{E}(XY)$.
$\mathrm{var}(X)$	v enorazsežnem primeru varianca, v večrazsežnem kovariantni 2-tenzor, ki ustreza kovariančni matriki: $\mathrm{var}(X) := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}\, X)^2$
$\mathrm{Var}(X)$	kovariančna matrika oz. ustrezni mešani $(1,1)$-tenzor: $\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}\, X)(X - \mathbb{E}\, X)^T$
$\mathrm{cov}(X, Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$	kovariančni različici var in Var
Z	standardizirana normalna slučajna spremenljivka ali vektor
$\mathcal{L}(X)$	porazdelitev slučajne spremenljivke X
δ_x	Diracova mera v točki x
$\mathrm{Po}(\lambda)$	Poissonova porazdelitev
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	enorazsežna normalna porazdelitev z matematičnim upanjem μ in varianco σ^2
$\mathrm{N}(\mu, \Sigma)$	večrazsežna normalna porazdelitev z matematičnim upanjem μ in kovariančno matriko Σ

8. Funkcije, ki se razlikujejo skoraj povsod. Nekatere operacije na funkcijah oz. slučajnih spremenljivkah (npr. pogojno matematično upanje ali šibki odvod) nam ne dajo enoličnega rezultata, temveč cel razred funkcij, ki imajo to lastnost, da se poljubni dve izmed njih skoraj povsod ujemata. Natančneje, dobljeni razredi imajo obliko $f + \eta$, kjer η teče po vseh $\mathcal{N}$-merljivih funkcijah, $\mathcal{N}$ pa je *izrojena* σ-algebra, t. j. taka, da za vsak $A \in \mathcal{N}$ velja, da ima bodisi A bodisi A^c mero nič. Z drugimi besedami, vsak tak razred funkcij je določen z izrojeno σ-algebro in predstavnikom (*verzijo*).
Ker se funkcije znotraj posameznega razreda skoraj povsod ujemajo, jih bomo, kot je to navada, v pisavi kar enačili s funkcijami samimi v skladu z naslednjimi dogovori:

$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})$	Za σ-algebro vzamemo množico vseh dogodkov iz $\mathcal{F}$, ki imajo verjetnost nič ali ena (ni pomembno, ali je slučajna spremenljivka X natančno določena ali je v resnici ekvivalenčni razred).
$f_1 = f_2$, $f_1 < f_2$ itd.	Če je f_i določen s predstavnikom $\tilde{f}_i$ in izrojeno σ-algebro $\mathcal{N}_i$, npr. zapis $f_1 = f_2$ pomeni, da obstaja taka $\sigma(\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2)$-merljiva funkcija η, da je $f_1 = f_2 + \eta$. Tako, če je Y strogo določena slučajna spremenljivka, zapis $Y = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})$ po definiciji pomeni tudi, da je Y merljiva glede na $\mathcal{F}$.

$f_1 = f_2$ p.p., $Y_1 \leq Y_2$ s.g. Podobno kot prej, le da namesto $\sigma(\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2)$ vzamemo σ-algebro vseh množic, ki so vsebovani v množicah z mero nič ali pa to velja za njihove komplemente.

$f_1 + f_2$ itd. Če je f_i določen s predstavnikom $\tilde{f}_i$ in izrojeno σ-algebro $\mathcal{N}_i$, je razred $f_1 + f_2$ po definiciji določen s predstavnikom $\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ in σ-algebro $\sigma(\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2)$.

$f \in \mathcal{A}$ Obstaja vsaj ena verzija, ki pripada $\mathcal{A}$.

f ima določeno lastnost. Obstaja vsaj ena verzija, ki ima to lastnost.

$p(f)$ če je p seminorma: infimum seminorme po vseh predstavnikih

$f(x)$ Če f ni natančno določena, tudi x ne more biti spremenljivka s točno določeno vrednostjo, lahko pa je pomožna spremenljivka (npr. v integralu).

9. Metrike na prostorih porazdelitev

d_{TV} Metrika totalne variacije: $d_{\mathrm{TV}}(\mu, \nu) = \sup_A |\mu(A) - \nu(A)|$; glej razdelek A.2.

d_{W} Wassersteinova metrika: $d_{\mathrm{W}}(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| \,;\, M_1(f) \leq 1\}$; glej razdelek A.8.

d_{K} Metrika Kolmogorova: $d_{\mathrm{K}}(\mu, \nu) = \sup_x \left|\mu\big((-\infty, x]\big) - \mu\big((-\infty, x]\big)\right|$; glej razdelek A.10.

Stvarno kazalo

Izjava

Podpisani Martin Raič izjavljam, da je pričujoča disertacija plod lastnega raziskovalnega dela.

V Ljubljani, 22. marca 2006

Martin Raič