ZAPISKI IZ TEORIJE MERE

Martin Raič

11. november 2019

Kazalo

1.

Aritmetika na razširjeni realni osi in seštevanje po splošnih množicah

1.1 Končna aritmetika na razširjeni realni osi

V teoriji mere operiramo tudi z neskončnostjo, pri čemer pri slednji ločimo predznak. Računamo torej na *razširjeni realni osi* $[-\infty, \infty]$, dostikrat pa se omejimo samo na *razširjeno pozitivno polos* $[0, \infty]$.

Vsota $a+b$ je definirana za vse pare (a, b) razen za $a = \infty, b = -\infty$ in $a = -\infty, b = \infty$. Seveda je:

$$a + \infty = \infty + a = \infty\,, \quad a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty\,.$$

Tako seštevanje ostane komutativno in asociativno. Razlika je standardno definirana kot $a - b := a + (-b)$. Opazimo, da je $-b = 0 - b$.

Produkt ab je definiran za vse pare (a, b). Za $a > 0$ definiramo $\infty \cdot a := a \cdot \infty := \infty$ in $(-\infty) \cdot a := a \cdot (-\infty) := -\infty$, za $a < 0$ pa $\infty \cdot a := a \cdot \infty := -\infty$ in $(-\infty) \cdot a := a \cdot (-\infty) := \infty$. Nadalje definiramo:

$$0 \cdot \infty := \infty \cdot 0 := 0 \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot 0 := 0\,. \tag{1.1.1}$$

Tako je množenje komutativno in asociativno, med seštevanjem in množenjem pa velja tudi distributivnost.

Opomba 1.1.1. Izbira $0 \cdot \infty = 0$ ni edina možnost, pri kateri veljajo zgoraj omenjene lastnosti. Toda pri teoriji mere je zelo pomembna *monotona konvergenca* na intervalu $[0, \infty]$, ki je v resnici konvergenca *naraščajočih zaporedij*. Če je $a \in [0, \infty]$ in $b_1, b_2, \ldots$ naraščajoče zaporedje števil iz $[0, \infty]$, ki konvergira proti b, z izbiro (1.1.1) zaporedje produktov $ab_1, ab_2, \ldots$ vedno konvergira proti produktu ab.

Količnik a/b je definiran za vse $a \in [-\infty, \infty]$, število b pa ne sme biti niti neskončno niti nič, torej $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Standardno za $b > 0$ definiramo $\infty/b := \infty$ in $(-\infty)/b := -\infty$, za $b < 0$ pa definiramo $\infty/b := -\infty$ in $(-\infty)/b := \infty$. Tako je količnik a/a, brž ko je definiran, enak 1, ohrani pa se tudi standardna identiteta $(ab)/c = a(b/c)$.

DEFINICIJA 1.1.1. Če je $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ končna množica, pri čemer so elementi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vsi različni, definiramo:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda := a_{\lambda_1} + a_{\lambda_2} + \cdots + a_{\lambda_n} .$$

Pri tem sme množica $\{a_\lambda \,;\, \lambda \in \Lambda\}$ vsebovati največ eno izmed števil ∞ in $-\infty$.

Opomba 1.1.2. Zaradi komutativnosti seštevanja je definicija neodvisna od naštetja elementov množice Λ.

Opomba 1.1.3. Za končno zaporedje $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se vsota po definiciji 1.1.1 ujema z običajno definicijo vsote – velja:

$$\sum_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n .$$

Opažanje 1.1.4. *Velja ocena:*

$$\left| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \right| \le \sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda| , \tag{1.1.2}$$

Opažanje 1.1.5. *Če števila a_λ, $\lambda \in \Lambda$, pripadajo množici $[0, \infty]$ in je $\Lambda' \subseteq \Lambda$, velja:*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda'} a_\lambda \le \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda .$$

Opažanje 1.1.6. *Če za vse $\lambda \in \Lambda$ velja $a_\lambda \le b_\lambda$, velja tudi $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \le \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$.*

Opažanje 1.1.7. *Iz distributivnosti z indukcijo sledi formula:*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (c a_\lambda) = c \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda ,$$

Opažanje 1.1.8. *Iz komutativnosti in asociativnosti sledi še formula:*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda + b_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda + \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda ,$$

ki jo lahko z indukcijo posplošimo na:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\mu \in M} a_{\lambda\mu} = \sum_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M} a_{\lambda\mu} = \sum_{\mu \in M} \sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda\mu} .$$

Še splošneje, če so Λ_μ, $\mu \in M$, disjunktne množice z unijo Λ, velja:

$$\sum_{\mu \in M} \sum_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda . \tag{1.1.3}$$

Pri vseh zgornjih opažanjih privzamemo, da sta Λ in M končni množici, množica $\{a_\lambda \,;\, \lambda \in \Lambda\}$ oz. $\{a_{\lambda\mu} \,;\, \lambda \in \Lambda, \mu \in M\}$ pa vsebuje največ eno izmed števil $-\infty$ in ∞.

1.2 O supremumu in infimumu

DEFINICIJA 1.2.1. Naj bo $(X, \leq)$ linearno urejena množica in $A \subseteq X$ njena neprazna podmnožica. *Supremum* množice A (v okviru množice X) je njena natančna zgornja meja, torej tisti element $s \in X$, ki izpolnjuje naslednja dva pogoja:

(1) $a \leq s$ za vse $a \in A$;

(2) Brž ko je $t \in X$ in $t < s$, obstaja tak $a \in A$, da je $a > t$.

Trditev 1.2.1. *Vsaka množica ima v okviru določene množice največ en supremum.*

DOKAZ. Pa recimo, da ima množica A dva supremuma, s_1 in s_2. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je $s_1 < s_2$. Toda potem bi moral bi moral po točki (2) definicije 1.2.1 za s_2 obstajati tak $a \in A$, da je $a > s_1$, to pa je v nasprotju s točko (1) omenjene definicije za s_1. ∎

Supremum množice A, če obstaja, označimo s $\sup A$ (oznaka je smiselna zaradi enoličnosti). Če je Λ neprazna množica in a_λ, $\lambda \in \Lambda$, elementi množice X, označimo:

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda := \sup\{a_\lambda \, ; \, \lambda \in \Lambda\} \, .$$

Opomba 1.2.2. Supremum nabora a_λ, $\lambda \in \Lambda$, je torej najmanjši tak element a, da je $a_\lambda \leq a$ za vse $\lambda \in \Lambda$.

Opomba 1.2.3. Element s je supremum množice A natanko tedaj, ko veljata naslednji trditvi:

(1) Za vsak $b > s$ je množica $\{a \in A \, ; \, a \geq b\}$ prazna.

(2) Za vsak $b < s$ je množica $\{a \in A \, ; \, a > b\}$ neprazna.

DEFINICIJA 1.2.2. Naj bodo $(X, \leq)$ in A kot prej. *Infimum* množice A (v okviru množice X) je njena natančna spodnja meja, torej tisti element $m \in X$, ki izpolnjuje naslednja dva pogoja:

(1) $a \geq m$ za vse $a \in A$;

(2) Brž ko je $t \in X$ in $t > s$, obstaja tak $a \in A$, da je $a < m$.

Opomba 1.2.4. Infimum je supremum za nasprotno relacijo urejenosti, zato ima vsak rezultat za supremum ustrezno različico za infimum.

Tako kot ima vsaka množica največ en supremum, ima tudi največ en infimum. Infimum množice A, če obstaja, označimo z $\inf A$. Če je Λ neprazna množica in a_λ, $\lambda \in \Lambda$, elementi množice X, označimo:

$$\inf_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda := \inf\{a_\lambda \, ; \, \lambda \in \Lambda\} \, .$$

Trditev 1.2.5. *Brž ko je množica A neprazna in ima v okviru linearno urejene množice $(X, \leq)$ supremum in infimum, velja* $\inf A \leq \sup A$.

Dokaz. Vzamemo $a \in A$ in opazimo, da po točki (1) definicije 1.2.1 in točki (1) definicije 1.2.2 velja $\inf A \leq a \leq \sup A$. ∎

V nadaljevanju tega razdelka bomo navedli samo rezultate za supremum, saj ustrezne različice za infimum preprosto dobimo tako, da obrnemo relacijo urejenosti.

Pri oznaki za supremum je prikrita univerzalna množica, torej množica, v okviru katere se supremum gleda. A v splošnem je supremum zelo odvisen od univerzalne množice:

Zgled 1.2.3. Naj bo $A = \left\{\frac{n}{n+1} \,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$. V okviru množice $(0,1)$ množica A nima supremuma, saj za vsak $a \in (0,1)$ obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $\frac{n}{n+1} > a$. V okviru množice $[0,1]$ pa je supremum enak 1, prav tako v okviru množice realnih števil. Supremum obstaja tudi v okviru množice $A \cup \{2\}$, vendar je enak 2. V okviru množice $A \cup \left\{\frac{n+1}{n} \,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$ pa supremum spet ne obstaja. □

Zgled 1.2.4. Prazna množica A ima v okviru množice X supremum natanko tedaj, ko ima X najmanjši element, torej tak element m, da je $x \geq m$ za vse $x \in X$. V okviru razširjene realne osi $[-\infty, \infty]$ je torej $\sup \emptyset = -\infty$ in $\inf \emptyset = \infty$. □

Opomba 1.2.6. V skladu s trditvijo 1.2.5 je prazna množica edini primer, ko se lahko zgodi, da je $\inf A > \sup A$.

Kot smo videli v zgledu 1.2.3, moramo pri supremumu paziti, v okviru katere množice ga gledamo. V določenih primerih pa na univerzalno množico le ni treba toliko paziti.

Trditev 1.2.7. *Naj bo $(X, \leq)$ linearno urejena množica in naj bo $A \subseteq X' \subseteq X$. Če je s supremum množice A v okviru množice X in je $s \in X'$, je s tudi supremum množice A v okviru množice X'.*

Dokaz. Ker je $s \in X'$, je treba le še preveriti točki (1) in (2) definicije 1.2.1. Točka (1) je neodvisna od univerzalne množice, točka (2) pa, če velja za večjo univerzalno množico X, velja tudi za manjšo univerzalno množico X'. ∎

Trditev 1.2.8. *Naj bo $A \subseteq I \subseteq J \subseteq [-\infty, \infty]$, pri čemer naj bo A neprazna, I pa naj bo interval. Tedaj je število $s \in I$ supremum množice A v okviru intervala I natanko tedaj, ko je supremum v okviru množice J.*

Dokaz. Če je število $s \in I$ supremum množice A v okviru množice J, je po trditvi 1.2.7 tudi supremum v okviru intervala I. Privzemimo sedaj, da je s supremum v okviru intervala I. Da dokažemo, da je s tudi supremum v okviru množice J, je treba preveriti le točko (2) definicije 1.2.1, torej da, brž ko je $t \in J$ in $t < s$, obstaja tak $a \in A$, da je $a > t$. Če je $t \in I$, je to res po definiciji supremuma. Iz predpostavk, da je $t \notin I$, $t < s$ in $s \in I$, pa sledi, da morajo biti vsi elementi intervala I strogo večji od t, torej mora to veljati tudi za vse elemente množice A. Ker A ni prazna, obstaja tak $a \in A$, da je $a > t$, torej je točka (2) definicije 1.2.1 tudi v tem primeru izpolnjena. ∎

Obstoj supremuma velikokrat sledi iz konstrukcije realnih števil, ki zadoščajo naslednji znameniti predpostavki:

Dedekindov aksiom. V okviru množice realnih števil ima vsaka neprazna navzgor omejena množica supremum.

Trditev 1.2.9. *Naj bo $-\infty \le u \le v \le \infty$. Tedaj ima vsaka neprazna množica $A \subseteq [u, v]$ v okviru tega intervala svoj supremum.*

Dokaz. Če je $-\infty < u \le v < \infty$ in $A \subseteq [u, v]$, je A navzgor omejena, torej ima supremum v okviru množice realnih števil. Označimo ga z s. Ker A ni prazna, iz točke (1) definicije 1.2.1 sledi $s \ge u$. Iz točke (2) te definicije pa sledi, da je $s \le v$, saj bi v nasprotnem veljalo $v < s$, ne bi pa obstajal noben element $a \in A$, za katerega bi bilo $a > v$. Torej je $s \in [u, v]$ in po trditvi 1.2.7 je s tudi supremum v okviru intervala $[u, v]$.

Tudi če je $u = v$, ima množica A v okviru intervala $[u, v]$ supremum, saj so vsi njeni elementi enaki u oz. v in ker ni prazna, je supremum enak kar u oz. v. To je nova ugotovitev v primeru, ko je bodisi $u = v = -\infty$ bodisi $u = v = \infty$.

Obravnavati je treba le še primer, ko je bodisi $u = -\infty$ ali $v = \infty$ in še $u < v$. V tem primeru bomo dokazali, da je interval $[u, v]$ izomorfen kateremu od že obravnavanih intervalov, od koder sledi obstoj supremuma v okviru tega intervala. Konstruirali bomo ekspliciten izomorfizem, vsi pa bodo temeljili na funkciji:

$$f(x) := \frac{x}{1 - x^2}\,,$$

ki je na intervalu $(-1, 1)$ strogo naraščajoča in ga preslika v $\mathbb{R}$, torej je izomorfizem med linearno urejenima množicama $(-1, 1)$ in $\mathbb{R}$.

- Če je $-\infty < u < v = \infty$, je iskani izomorfizem funkcija $g\colon [0, 1] \to [u, \infty]$, definirana po predpisu $g(x) := f(x) + u$ za $x \in [0, 1)$ in $g(1) := \infty$.
- Če je $-\infty = u < v < \infty$, je iskani izomorfizem funkcija $f\colon [-1, 0] \to [-\infty, v]$, definirana po predpisu $g(x) := f(x) + v$ za $x \in (-1, 0]$ in $f(-1) := -\infty$.
- Če pa je $u = -\infty$ in $v = \infty$, je iskani izomorfizem funkcija $f\colon [-1, 1] \to [-\infty, \infty]$, definirana po predpisu $g(x) := f(x)$ za $x \in (-1, 1)$ ter $f(-1) := -\infty$ in $f(1) := \infty$.

■

V nadaljevanju tega razdelka bomo v okviru iste trditve vse supremume gledali v okviru iste množice; supremume števil bomo gledali v okviru razširjene realne osi $[-\infty, \infty]$.

Trditev 1.2.10. *Naj bosta A in B neprazni množici in naj za vsak $a \in A$ obstaja tak $b \in B$, da je $a \le b$. Če imata obe množici supremum, velja* $\sup A \le \sup B$.

Dokaz. Označimo $s := \sup A$ in $t := \sup B$. Če bi bilo $t < s$, bi po točki (2) definicije 1.2.1 za množico A obstajal tak $a \in A$, da bi bilo $a > t$, potem pa bi po predpostavki obstajal tudi tak $b \in B$, da bi bilo $a \le b$. Sledilo bi $b > t$, kar je v nasprotju s točko (1) definicije 1.2.1 za množico B. ■

Posledica 1.2.11. *Če je $A \subseteq B$ in imata obe množici supremum, velja* $\sup A \le \sup B$.

Posledica 1.2.12. *Če za vse $\lambda \in \Lambda$ velja $a_\lambda \le b_\lambda$, velja $\sup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \le \sup_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$, pod pogojem seveda, da oba supremuma obstajata.*

Opomba 1.2.13. Pogosto bomo potrebovali naslednji očitni primer prejšnje posledice: če za vse $\lambda \in \Lambda$ velja $a_\lambda \le b$ in obstaja $\sup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$, velja $\sup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \le b$.

Naslednji rezultat je simetrična različica trditve 1.2.10, ki pa ne sledi povsem iz nje, saj dodatno zagotavlja še ekvivalenco obstojev supremumov.

Trditev 1.2.14. *Naj bosta A in B neprazni množici. Za vsak $a \in A$ naj obstaja tak $b \in B$, da je $a \le b$, prav tako pa naj tudi za vsak $b \in B$ obstaja tak $a \in A$, da je $b \le a$. Tedaj $\sup A$ obstaja natanko tedaj, ko obstaja $\sup B$; če supremuma obstajata, sta enaka.*

Dokaz. Zaradi simetrije je dovolj dokazati, da, če je $s = \sup A$, velja tudi $s = \sup B$. Po predpostavki za vsak $b \in B$ obstaja tak $a \in A$, da je $b \le a$. Ker je $s = \sup A$, po točki (1) definicije 1.2.1 za množico A velja $b \le a \le s$. Potem pa omenjena točka velja tudi za množico B. Nadalje po točki (2) definicije 1.2.1 za množico A za vsak $t < s$ obstaja tak $a \in A$, da je $a > t$. Po predpostavki obstaja tak $b \in B$, da je $a \le b$. Torej je $b \ge a > t$, kar pomeni, da je točka (2) definicije 1.2.1 izpolnjena tudi za množico B. ■

Trditev 1.2.15. *Naj bodo Λ_μ, $\mu \in M$, neprazne množice z unijo Λ. Privzemimo, da za vsak $\mu \in M$ obstaja $\sup_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda$. Tedaj $\sup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ obstaja natanko tedaj, ko obstaja $\sup_{\mu\in M} \sup_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda$, in če omenjena supremuma obstajata, sta enaka.*

Dokaz. Označimo $s_\mu := \sup_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda$. Privzemimo najprej, da obstaja $s = \sup_{\mu\in M} s_\mu$. Dokazati moramo, da je tudi $s = \sup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$.

Za vsak $\lambda \in \Lambda$ obstaja tak $\mu \in M$, da je $\lambda \in \Lambda_\mu$. Tedaj je $a_\lambda \le s_\mu \le s$, torej s zadošča točki (1) definicije 1.2.1 za množico $\{a_\lambda \,;\, \lambda \in \Lambda\}$.

Naj bo zdaj $t < s$. Tedaj obstaja tak $\mu \in M$, da je $s_\mu > t$. Potem pa obstaja tudi tak $\lambda \in \Lambda_\mu$, da je $a_\lambda > t$. Torej s zadošča tudi točki (2) definicije 1.2.1 za množico $\{a_\lambda \,;\, \lambda \in \Lambda\}$.

Privzemimo zdaj, da obstaja $a = \sup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$. Dokazati moramo, da je tudi $a = \sup_{\mu\in M} s_\mu$.

Za vsak $\mu \in M$ in vsak $\lambda \in \Lambda_\mu$ je $a_\lambda \le a$. Po posledici 1.2.11 je tudi $s_\mu \le a$, torej a zadošča točki (1) definicije 1.2.1 za množico $\{s_\mu \,;\, \mu \in M\}$.

Naj bo zdaj $t < a$. Tedaj obstaja tak $\lambda \in \Lambda$, da je $a_\lambda > t$. Obstaja pa tudi tak $\mu \in M$, da je $\lambda \in \Lambda_\mu$. Torej je $a_\lambda \le s_\mu$ in sledi $s_\mu > t$. Torej a zadošča tudi točki (2) definicije 1.2.1 za množico $\{s_\mu \,;\, \mu \in M\}$. ■

Trditev 1.2.16. *Za poljubna števila c in a_λ, $\lambda \in \Lambda$, ki pripadajo intervalu $[0, \infty]$, velja:*

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}(c a_\lambda) = c \sup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \,.$$

Dokaz. Če je $c = 0$, sta obe strani enaki nič. Če je $c = \infty$, sta v primeru, ko so vsa števila a_λ enaka nič, obe strani prav tako enaki nič, sicer pa sta obe strani enaki neskončno. Privzemimo sedaj, da je $0 < c < \infty$. Označimo $s := \sup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$. Za vsak λ je $a_\lambda \le s$, torej tudi $c a_\lambda \le cs$, zato cs zadošča točki (1) definicije 1.2.1. Če pa je $t < cs$, je $t/c < s$, torej obstaja tak $\lambda \in \Lambda$, da je $a_\lambda > t/c$, torej $c a_\lambda > t$, zato cs zadošča tudi točki (2) definicije 1.2.1. ■

Trditev 1.2.17. *Naj bo M neprazna končna množica, naj bodo Λ_μ, $\mu \in M$, neprazne množice z unijo Λ in a_λ, $\lambda \in \Lambda$, poljubna števila iz $[0, \infty]$. Tedaj velja:*

$$\sum_{\mu \in M} \sup_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda = \sup_{\phi \in \Phi} \sum_{\mu \in M} a_{\phi(\mu)} \,,$$

kjer je Φ množica takih preslikav $\phi \colon M \to \Lambda$, da za vsak $\mu \in M$ velja $\phi(\mu) \in \Lambda_\mu$.

Dokaz. Označimo $s_\mu := \sup_{\lambda \in \Lambda_\mu} a_\lambda$. Vzemimo poljubno preslikavo $\phi \in \Phi$. Ker za vsak $\mu \in M$ velja $a_{\phi(\mu)} \le s_\mu$, velja tudi $\sum_{\mu \in M} a_{\phi(\mu)} \le \sum_{\mu \in M} s_\mu$. Zato $\sum_{\mu \in M} s_\mu$ zadošča točki (1) definicije 1.2.1 za množico $\left\{\sum_{\mu \in M} a_{\phi(\mu)} \,;\, \phi \in \Phi\right\}$.

Naj bo zdaj $t < \sum_{\mu \in M} s_\mu$. Tedaj obstajajo tudi taka števila $t_\mu < s_\mu$, da je $t = \sum_{\mu \in M} t_\mu$. Za vsak μ torej obstaja tak $\phi(\mu) \in \Lambda_\mu$, da je $a_{\phi(\mu)} > t_\mu$. Tako smo definirali preslikavo $\phi \in \Phi$ in velja $\sum_{\mu \in M} a_{\phi(\mu)} > \sum_{\mu \in M} t_\mu = t > \sum_{\mu \in M} s_\mu$. Dobili smo, da $\sum_{\mu \in M} s_\mu$ zadošča tudi točki (2) definicije 1.2.1. ∎

1.3 Limite v linearno urejenih množicah

Iz osnovne analize poznamo definicijo limite zaporedja:

Definicija 1.3.1. Število a je *limita* zaporedja realnih števil $a_1, a_2, \ldots$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \ge m$ velja $|a_n - a| < \varepsilon$. Pišemo $a = \lim_{n \to \infty} a_n$.

Ta definicija se da zlahka posplošiti na linearno urejene množice (ni težko preveriti, da je nova definicija res posplošitev stare):

Definicija 1.3.2. Število a je limita zaporedja števil $a_1, a_2, \ldots$ iz linearno urejene množice $(X, \le)$, če za poljuben $b < a$ obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \ge m$ velja $a_n > b$, in za poljuben $c > a$ obstaja tak $p \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \ge p$ velja $a_n < c$. Če ima zaporedje limito, pravimo, da je *konvergentno*, sicer pravimo, da je *divergentno*.

Opomba 1.3.1. Če je število a največji ali najmanjši element množice X, je eden od zgornjih pogojev izpolnjen na prazno. Zaporedje števil iz $[-\infty, \infty]$ ima po zgornji definiciji limito ∞, če za vsak $b \in \mathbb{R}$ obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \ge m$ velja $a_n > b$. Med drugim ima vsako zaporedje realnih števil, ki je naraščajoče in v okviru realnih števil navzgor neomejeno zaporedje, v okviru množice $[-\infty, \infty]$ limito ∞.

Definicija 1.3.2 še vedno privzema urejenost naravnih števil. Vendar pa le-ta sploh ni pomembna. Če je namreč P enomestni predikat, definiran na naravnih številih, je namreč izjava, da obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da je izjava $P(n)$ resnična za vse $n \le m$, ekvivalentna izjavi, da je izjava $P(n)$ neresnična za končno mnogo n-jev. Tako dobi definicija 1.3.2 naslednjo ekvivalentno obliko:

Opažanje 1.3.2. *Število a je limita zaporedja števil $a_1, a_2, \ldots$ iz linearno urejene množice natanko tedaj, ko je za poljuben $b < a$ množica $\{n \in \mathbb{N} \,;\, a_n \le b\}$ končna in je tudi za poljuben $c > a$ množica $\{n \in \mathbb{N} \,;\, a_n \ge c\}$ končna.*

Pojem limite torej ni prav nič odvisen od urejenosti indeksne množice, pomembno je le, da je neskončna. Tako naj bo v celotnem nadaljevanju razdelka Λ neskončna množica. Na množici vrednosti pa je pomembna le urejenost, ni pa treba imeti seštevanja in odštevanja. To nam da navdih za naslednjo definicijo.

Definicija 1.3.3. Naj bo $(X, \leq)$ linearno urejena množica. Število $a \in X$ je *limita* nabora elementov a_λ, $\lambda \in \Lambda$, množice X, če je za poljuben $b < a$ množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \leq b\}$ končna in je tudi za poljuben $c > a$ množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \geq c\}$ končna. Če ima nabor limito, pravimo, da je *konvergenten*, sicer pravimo, da je *divergenten*.

Trditev 1.3.3. *Vsak nabor elementov a_λ, $\lambda \in \Lambda$, ima največ eno limito.*

Dokaz. Pa recimo, da sta b in c dve različni limiti omenjenega nabora. Privzamemo lahko, da je $b < c$. Ločimo dve možnosti. Prva možnost je, da obstaja tak a, da je $b < a < c$. Tedaj iz definicije 1.3.3 za limito b sledi končnost množice $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \geq a\}$, iz iste definicije za limito c pa sledi končnost množice $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \leq a\}$. Toda potem bi morala biti končna tudi množica Λ, kar pa je v nasprotju s predpostavko. Druga možnost pa je, da ne obstaja noben a, za katerega je $b < a < c$. Tedaj pa je $\Lambda = \{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \leq b\} \cup \{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \geq c\}$ in po definiciji 1.3.3 sta spet obe množici končni, kar spet ne gre. ■

Glede na to, da je limita, če obstaja, enolično določena, je zanjo spet smiselno vpeljati oznako. Če je a limita nabora a_λ, $\lambda \in \Lambda$, pišemo:

$$a = \lim_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \,.$$

Iz opažanja 1.3.2 in definicije 1.3.3 sledi, da za zaporedje realnih števil a_n, $n \in \mathbb{N}$, oznaka $\lim_{n\to\infty} a_n$ pomeni isto kot oznaka $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n$. To razširimo tudi na zaporedje elementov splošne linearno urejene množice: dogovorimo se, da oznaka $\lim_{n\to\infty} a_n$ *po definiciji* pomeni isto kot oznaka $\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Podobno kot supremumu sta tudi obstoj in vrednost limite odvisna od tega, v okviru katere množice jo gledamo. Prav tako pa obstajata ekvivalenta trditev 1.2.7 in 1.2.8:

Trditev 1.3.4. *Naj bo $(X, \leq)$ linearno urejena množica in naj bo $A \subseteq X' \subseteq X$. Če je a limita nabora a_λ, $\lambda \in \Lambda$, v okviru množice X in je $a \in X'$, je a tudi limita omenjenega nabora v okviru množice X'.*

Dokaz. Trditev sledi iz dejstva, da, če zahteve iz definicije 1.3.3 veljajo za večjo množico X, veljajo tudi za manjšo množico X'. ■

Trditev 1.3.5. *Naj bo $I \subseteq J \subseteq [-\infty, \infty]$, pri čemer naj bo I interval. Tedaj je število $a \in I$ limita nabora a_λ, $\lambda \in \Lambda$, v okviru intervala I natanko tedaj, ko je limita v okviru množice J.*

Dokaz. Če je število $a \in I$ limita nabora a_λ, $\lambda \in \Lambda$, v okviru množice J, je po trditvi 1.3.4 tudi limita v okviru intervala I.

Privzemimo sedaj, da je a limita v okviru intervala I. Naj bo $b \in J$ in $b < a$. Preveriti je treba, da je množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \leq b\}$ končna. Če je $b \in I$, je to res po predpostavki in definiciji 1.3.3. Če pa je $b \notin I$, je množica $\{x \in I \,;\, x \leq b\}$ prazna, potem pa je prazna tudi množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \leq b\}$. Podobno preverimo tudi, da je za $c \in J$, za katerega je in $c > a$, končna množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \geq c\}$. ■

1.4 Zgornja in spodnja limita

Poleg limite pa je iz osnovne analize znan tudi pojem zgornje in spodnje limite – limes superior in limes inferior. Eden od načinov, kako ju definiramo, je:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{m\ge n} a_m\,, \tag{1.4.1}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{m\ge n} a_m\,. \tag{1.4.2}$$

Za omejeno zaporedje pa je zgornja limita tudi največje, spodnja pa najmanjše stekališče tega zaporedja. Za nabore elementov pa bomo zgornjo in spodnjo limito definirali v duhu opombe 1.2.2, po kateri je supremum nabora a_λ, $\lambda \in \Lambda$, najmanjše število a, za katerega je množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda > a\}$ prazna. Če prazno množico zamenjamo s končno, dobimo zgornjo limito:

Definicija 1.4.1. Naj bo $(X, \le)$ linearno urejena množica, a_λ, $\lambda \in \Lambda$, pa nabor elementov množice X. *Zgornja in spodnja limita* nabora v okviru množice X sta definirani kot:

$$\limsup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda := \inf\bigl\{a \in X \,;\, \text{množica } \{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda > a\} \text{ je končna}\bigr\}\,,$$

$$\liminf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda := \sup\bigl\{a \in X \,;\, \text{množica } \{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda < a\} \text{ je končna}\bigr\}\,.$$

Tudi v tem razdelku bomo vselej privzeli, da je množica Λ neskončna.

Opomba 1.4.1. Definicija 1.4.1 je precej različna od formul (1.4.1) in (1.4.2). Ekvivalenco bomo pokazali na koncu razdelka, v trditvi 1.4.10.

Opomba 1.4.2. Iz trditve 1.2.9 sledi, da ima vsak neskončen nabor števil iz razširjene realne osi $[-\infty, \infty]$ svojo zgornjo in spodnjo limito.

Naslednji rezultat nudi karakterizacijo zgornje in spodnje limite v duhu opombe 1.2.3:

Trditev 1.4.3. *Element v je zgornja limita nabora a_λ, $\lambda \in \Lambda$, natanko tedaj, ko veljata naslednji trditvi:*

(1) *Za vsak $c > v$ je množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \ge c\}$ končna.*

(2) *Za vsak $b < v$ je množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda > b\}$ neskončna.*

Element u pa je spodnja limita omenjenega nabora natanko tedaj, ko veljata naslednji trditvi:

(3) *Za vsak $b < u$ je množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \le b\}$ končna.*

(4) *Za vsak $c > u$ je množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda < c\}$ neskončna.*

Dokaz. Dovolj je dokazati za zgornjo limito, saj lahko pri spodnji zgolj obrnemo relacijo urejenosti.

Privzemimo najprej, da je $v = \limsup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$. Če je $c > v$, po točki (2) definicije 1.2.2 obstaja tak $a < c$, da je množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda > a\}$ končna. Množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda > a\}$

je podmnožica slednje množice, torej je prav tako končna. Če pa je $b < v$, iz točke (1) definicije 1.2.2 sledi, da je množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda > b\}$ neskončna.

Privzemimo zdaj točki (1) in (2) pričujoče trditve. Označimo:

$$M := \bigl\{a \in X \,;\, \text{množica } \{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda > a\} \text{ je končna}\bigr\}$$

in pokažimo, da je $u = \inf M$. Če je $c \in M$, iz točke (2) sledi, da je $c \ge v$, torej je izpolnjena točka (1) definicije 1.2.2 za množico M. Vzemimo zdaj $c > v$ in ločimo dve možnosti. Če obstaja element a, za katerega je $v < a < c$, je po točki (1) množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \ge a\}$ končna, torej je končna tudi množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda > a\}$, to pa pomeni, da je $a \in M$, potem pa je izpolnjena točka (2) definicije 1.2.2 za množico M. Če pa ne obstaja tak a, da je $v < a < c$, velja $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda > v\} = \{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \ge c\}$, ta množica pa je spet po točki (1) končna. Torej je v tem primeru $v \in M$ in spet je izpolnjena točka (2) definicije 1.2.2 za množico M. ∎

Trditev 1.4.4. *Element a je limita nabora a_λ, $\lambda \in \Lambda$, natanko tedaj, ko je hkrati njegova zgornja in spodnja limita.*

Dokaz. Uporabili bomo karakterizacijo zgornje in spodnje limite s trditvijo 1.4.3. Da je element a, ki je hkrati zgornja in spodnja limita, tudi limita, takoj sledi iz točk (1) in (3) omenjene trditve. Privzemimo sedaj, da je a limita. Neposredno iz definicije 1.3.3 sledi, da je izpolnjena točka (1) trditve 1.4.3. Če pa je $b < v$, je po definiciji 1.3.3 množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \le b\}$ končna. Ker je množica Λ po predpostavki neskončna, mora biti neskončna tudi množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda > b\}$. Tako je izpolnjena tudi točka (2). Podobno preverimo še točki (3) in (4). ∎

Trditev 1.4.5 (Izrek o sendviču). *Naj bodo $a_\lambda \le b_\lambda \le c_\lambda$ nabori elementov in naj bo $\limsup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = \liminf_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda = b$ (t. j. ustrezna zgornja in spodnja limita obstajata in sta enaki b). Tedaj je nabor b_λ, $\lambda \in \Lambda$, konvergenten in velja $\lim_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda = b$.*

Dokaz. Za vsak $a < b$ velja $\{\lambda \in \Lambda \,;\, b_\lambda \le a\} \subseteq \{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \le a\}$, slednja množica pa je po predpostavki in trditvi 1.4.3 končna. Podobno za vsak $c > b$ velja $\{\lambda \in \Lambda \,;\, b_\lambda \ge c\} \subseteq \{\lambda \in \Lambda \,;\, c_\lambda \ge c\}$, kar je prav tako končna množica. S tem so izpolnjene zahteve definicije 1.3.3. ∎

Trditev 1.4.6. *Za vsak nabor vrednosti a_λ, $\lambda \in \Lambda$, velja:*

$$\inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \le \liminf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \le \limsup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \le \sup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\,. \tag{1.4.3}$$

Če obstajajo le določene izmed teh količin, velja ustrezna okrnjena veriga neenakosti.

Dokaz. Najprej dokažimo vse neenakosti med zaporednimi količinami v (1.4.3). Zadnja enakost sledi iz opombe 1.2.2, dejstva, da je $\bigl\{a \in X \,;\, \{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda < a\} = \emptyset\bigr\} \subseteq \bigl\{a \in X \,;\, |\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda < a\}| < \infty\bigr\}$, in različice posledice 1.2.11 za infimum. Če obrnemo relacijo urejenosti, dobimo še prvo neenakost. Srednjo neenakost dokažemo s protislovjem: naj bo $u = \liminf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ in $v = \limsup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$. Pa recimo, da je $u > v$. Če obstaja kakšen element c, za katerega je $v < c < u$, sta po točkah (1) in (3) trditve 1.4.3 množici $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \ge c\}$

in $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \le c\}$ končni, to pa v protislovju z dejstvom, da je Λ unija teh dveh množic, in predpostavko, da je Λ neskončna. Če pa ni nobenega elementa c, za katerega je $v < c < u$, enak sklep velja za množici $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \ge u\}$ in $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \le v\}$.

Zgornje sklepanje je dovolj za primer, ko količine iz (1.4.3), ki obstajajo, v tej verigi nastopajo zaporedno. Če obstajata le infimum in supremum, ustrezna okrnjena neenakost sledi iz trditve 1.2.5. Pokazati je treba le še, da velja $\inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \le \limsup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$, če ti dve količini obstajata: neenakost $\liminf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \le \sup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ lahko namreč spet izpeljemo z obratom relacije urejenosti.

Neenakost $\inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \le \limsup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ pa izpeljemo podobno kot srednjo neenakost: naj bo $u := \inf_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ in $v := \limsup_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$. Če bi bilo $u > v$, bi bila množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \ge u\}$ po točki (1) trditve 1.4.3 končna, množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda < u\}$ pa bi bila po točki (1) definicije 1.2.2 prazna, kar je spet v protislovju z dejstvom, da je Λ unija teh dveh množic, in predpostavko, da je Λ neskončna. ■

Podobno kot supremumu in limiti sta tudi obstoj in vrednost zgornje in spodnje limite odvisna od tega, v okviru katere množice ju gledamo. Prav tako tudi obstajata ekvivalenta trditev 1.2.7 in 1.2.8, ki ju bomo formulirali le za zgornjo limito: za spodnjo le obrnemo relacijo urejenosti:

Trditev 1.4.7. *Naj bo $(X, \le)$ linearno urejena množica in naj bo $A \subseteq X' \subseteq X$. Če je v zgornja limita nabora a_λ, $\lambda \in \Lambda$, v okviru množice X in je $v \in X'$, je v tudi zgornja limita omenjenega nabora v okviru množice X'.*

Dokaz. Uporabimo karakterizacijo iz trditve 1.4.3. Želeni rezultat sledi iz dejstva, da, če točki (1) in (2) te trditve veljata za večjo množico X, veljata tudi za manjšo množico X'. ■

Trditev 1.4.8. *Naj bo $I \subseteq J \subseteq [-\infty, \infty]$, pri čemer naj bo I interval. Tedaj je število $a \in I$ zgornja limita nabora a_λ, $\lambda \in \Lambda$, v okviru intervala I natanko tedaj, ko je zgornja limita v okviru množice J.*

Dokaz. Če je število $a \in I$ zgornja limita nabora a_λ, $\lambda \in \Lambda$, v okviru množice J, je po trditvi 1.3.4 tudi zgornja limita v okviru intervala I.

Privzemimo sedaj, da je a zgornja limita v okviru intervala I. Uporabili bomo karakterizacijo zgornje limite s trditvijo 1.4.3. Po predpostavki točki (1) in (2) veljata za $c \in I$, preveriti je treba še za $c \in J \setminus I$. Če je $c \in J \setminus I$ in $c > v$, je množica $\{x \in I \,;\, x \ge c\}$ prazna, torej je prazna tudi množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \ge c\}$. Točka (1) je tako izpolnjena. Če pa je $c \in J \setminus I$ in $c < v$, za vsak $x \in I$ velja $x \ge c$, torej je $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \ge c\} = \Lambda$, kar je po predpostavki neskončna množica. Tako je izpolnjena tudi točka (2). ■

Vrnimo se sedaj k zaporedjem, ki so služila kot motivacija na začetku razdelka.

Trditev 1.4.9. *Naj bo $a_1, a_2, \ldots$ zaporedje elementov iz linearno urejene množice. Oglejmo si naslednje izjave:*

(1) $a = \lim_{n\in\mathbb{N}} a_n$

(2) $a = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$

(3) $a = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

(4) $a = \limsup_{n \in \mathbb{N}} a_n$

(5) $a = \liminf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

Če je $a_1 \le a_2 \le \ldots$, so si ekvivalentne izjave (1), (2), (4) in (5).
Če pa je $a_1 \ge a_2 \ge \ldots$, so si ekvivalentne izjave (1), (3), (4) in (5).

Dokaz. Dovolj je dokazati za primer, ko je $a_1 \le a_2 \le \ldots$, saj za drugega le obrnemo urejenost. Za izpeljavo ekvivalence izjav (1), (4) in (5) sta ključni opažanji, da je izjava, da je množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda < c\}$ neskončna, ekvivalentna izjavi, da je množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \ge c\}$ končna, in podobno, da je izjava, da je množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda > b\}$, neskončna, ekvivalentna izjavi, da je množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \le b\}$ končna. Obe opažanji sledita iz monotonosti zaporedja. Ekvivalenca zdaj sledi iz trditve 1.4.3.

Za ekvivalenco izjav (2) in (4) pa opazimo, da iz monotonosti sledi, da je izjava, da je množica $\{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda > b\}$, neskončna, ekvivalentna izjavi, da je neprazna. Ekvivalenca zdaj sledi iz opombe 1.2.3 in spet trditve 1.4.3. ∎

Naslednji rezultat pa pokaže ekvivalenco med klasičnima definicijama zgornje in spodnje limite po formulah (1.4.1) in (1.4.2) ter definicije 1.4.1.

Trditev 1.4.10. *Naj bo $a_1, a_2, \ldots$ zaporedje elementov linearno urejene množice.*

(1) *Privzemimo, da obstajajo vsi supremumi $\sup_{m;m \ge n} a_m$. Tedaj je izjava $a = \limsup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ ekvivalentna izjavi $a = \lim_{n \to \infty} \sup_{m;m \ge n} a_m$;*

(2) *Privzemimo, da obstajajo vsi infimumi $\inf_{m;m \ge n} a_m$. Tedaj je izjava $a = \liminf_{n \in \mathbb{N}} a_n$ ekvivalentna izjavi $a = \lim_{n \to \infty} \inf_{m;m \ge n} a_m$.*

Tako se je tudi za zaporedje elementov iz splošne linearno urejene množice smiselno dogovoriti, da oznaka $\limsup_{n \to \infty} a_n$ po definiciji pomeni isto kot oznaka $\limsup_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Opomba 1.4.11. Brž ko ima vsaka navzgor omejena množica supremum in obstaja $\limsup_{n \in \mathbb{N}} a_n$, obstajajo tudi vsi supremumi $\sup_{m;m \ge n} a_m$. Podobno, brž ko ima vsaka navzdol omejena množica infimum in obstaja $\liminf_{n \in \mathbb{N}} a_n$, obstajajo tudi vsi infimumi $\inf_{m;m \ge n} a_m$.

Dokaz trditve 1.4.10. Dovolj je dokazati točko (1), saj za točko (2) samo obrnemo urejenost. Označimo:

$$A := \bigl\{a \,;\, \text{množica } \{m \in \mathbb{N} \,;\, a_m > a\} \text{ je končna}\bigr\}$$
$$s_n := \sup_{m;m \ge n} a_m \,, \qquad S := \{s_1, s_2, \ldots\} \,.$$

Po opombi 1.2.2 in trditvi 1.4.9 želena trditev trdi, da je $\inf A = \inf S$. Za ta namen je po različici trditve 1.2.14 za infimum dovolj dokazati, da za vsak $a \in A$ obstaja tak $s \in S$, da je $s \le a$, in da za vsak $s \in S$ obstaja tak $a \in A$, da je $a \le s$.

Naj bo $a \in A$. Ker je množica $\{m \in \mathbb{N} ; a_m > a\}$ končna, obstaja tak n, da za vse m, za katere je $a_m > a$, velja $m < n$. Brž ko je torej $m \geq n$, velja $a_m \leq a$. Po opombi 1.2.13 je tedaj tudi $s_n \leq a$. Iskani $s \in S$ je torej s_n.

Če pa je $s \in S$, torej $s = s_n$ za neki n, je $a_m \leq s$ za vse $m \geq n$. Če je torej $a_m > s$, je $m < n$, torej je množica $\{m \in \mathbb{N} ; a_m > s\}$ končna, se pravi, da je $s \in A$. Dokaz je s tem zaključen. ■

1.5 Limita in osnovne računske operacije

Trditev 1.5.1. *Če je a_λ, $\lambda \in \Lambda$, nabor števil iz $[-\infty, \infty]$ z limito a, ima nabor $-a_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, limito $-a$.*

Dokaz. Za vsak $u < -a$ je $-u > a$, zato je množica $\{\lambda \in \Lambda ; -a_\lambda \leq u\} = \{\lambda \in \Lambda ; a_\lambda \geq -u\}$ končna. Podobno za vsak $v > -a$ velja $-v < a$, zato je tudi množica $\{\lambda \in \Lambda ; -a_\lambda \geq v\} = \{\lambda \in \Lambda ; a_\lambda \leq -v\}$ končna. Tako so predpostavke definicije 1.3.3 izpolnjene tudi za nabor $-a_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. ■

Trditev 1.5.2. *Naj bosta a_λ, b_λ, $\lambda \in \Lambda$, nabora števil iz $[-\infty, \infty]$ z limitama a in b. Če za vsak λ obstaja vsota $a_\lambda + b_\lambda$ in obstaja tudi vsota $a + b$, ima nabor $a_\lambda + b_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, limito $a + b$.*

Dokaz. Privzemimo najprej, da sta števili a in b končni. Naj bo $v > a+b$ in $\varepsilon := v-a-b$. Opazimo, da je $\{\lambda ; a_\lambda + b_\lambda \geq v\} = \{\lambda ; a_\lambda + b_\lambda \geq a + b + \varepsilon\} \subseteq \{\lambda ; a_\lambda \geq a + \varepsilon/2\} \cup \{\lambda ; b_\lambda \geq b + \varepsilon/2\}$, slednji množici pa sta po predpostavki in definiciji 1.3.3 končni. Podobno dobimo tudi, da je za vsak $u < a + b$ množica $\{\lambda ; a_\lambda + b_\lambda \leq u\}$ končna. Tako so predpostavke definicije 1.3.3 izpolnjene tudi za nabor $a_\lambda + b_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$.

Privzemimo zdaj, da je število $-\infty < a < b = \infty$. V tem primeru je $a + b = \infty$. Naj bo $u < \infty$. Opazimo, da je $\{\lambda ; a_\lambda + b_\lambda \leq u\} \subseteq \{\lambda ; a_\lambda \leq u - 1\} \cup \{\lambda ; b_\lambda \leq u + 1\}$, slednji množici pa sta spet obe končni. Tako so spet izpolnjene predpostavke definicije 1.3.3.

Privzemimo zdaj, da je $a = b = \infty$. Tedaj za poljuben $u < \infty$ opazimo, da je $\{\lambda ; a_\lambda + b_\lambda \leq u\} \subseteq \{\lambda ; a_\lambda \leq u/2\} \cup \{\lambda ; b_\lambda \leq u/2\}$, slednji množici pa sta spet obe končni. Tako so tudi v tem primeru izpolnjene predpostavke definicije 1.3.3.

Preostale primere: $-\infty < b < a = \infty$, $-\infty = a < b < \infty$, $-\infty = b < a < \infty$ in $a = b = -\infty$ prevedemo na prejšnje z uporabo komutativnosti seštevanja in trditve 1.5.1. Dana trditev je tako dokazana. ■

Posledica 1.5.3. *Naj bosta a_λ, b_λ, $\lambda \in \Lambda$, nabora števil iz $[-\infty, \infty]$ z limitama a in b. Če za vsak λ obstaja razlika $a_\lambda - b_\lambda$ in obstaja tudi razlika $a - b$, ima nabor $a_\lambda - b_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, limito $a - b$.*

Trditev 1.5.4. *Naj bosta a_λ, b_λ, $\lambda \in \Lambda$, nabora števil iz $[-\infty, \infty]$ z limitama a in b. Naj ne bo $a = 0, b = \pm\infty$ ali pa $a = \pm\infty, b = 0$. Tedaj ima nabor $a_\lambda b_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, limito ab.*

Dokaz. Privzemimo najprej, da je $0 < a, b < \infty$. V tem primeru je tudi $0 < ab < \infty$. Dovolj je dokazati, da je množica $\{\lambda ; a_\lambda b_\lambda \geq v\}$ končna za vse $ab < v < \infty$, množica $\{\lambda ; a_\lambda b_\lambda \leq u\}$ pa končna za vse $0 < u < ab$. Za $ab < v < \infty$ postavimo $k := v/(ab)$ in opazimo, da je $\{\lambda\,;\,a_\lambda b_\lambda \ge v\} = \{\lambda\,;\,a_\lambda b_\lambda \ge kab\} \subseteq \{\lambda\,;\,a_\lambda \ge a\sqrt{k}\} \cup \{\lambda\,;\,b_\lambda \ge b\sqrt{k}\}$, slednji množici pa sta po predpostavki in definiciji 1.3.3 končni. Za $0 < u < ab$ pa postavimo $q := u/(ab)$ in opazimo, da je $\{\lambda\,;\,a_\lambda b_\lambda \le u\} = \{\lambda\,;\,a_\lambda b_\lambda \le qab\} \subseteq \{\lambda\,;\,a_\lambda \le a\sqrt{q}\} \cup \{\lambda\,;\,b_\lambda \le b\sqrt{q}\}$, slednji množici pa sta spet po predpostavki in definiciji 1.3.3 končni. Tako so predpostavke definicije 1.3.3 izpolnjene tudi za nabor $a_\lambda b_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$.

Privzemimo zdaj, da je $a = 0$. Tedaj za $v > 0$ opazimo, da je $\{\lambda\,;\,|a_\lambda b_\lambda| \ge v\} \subseteq \{\lambda\,;\,|a_\lambda| \ge v/(|b|+1)\} \cup \{\lambda\,;\,|b_\lambda| \ge |b|+1\}$, slednji množici pa sta po predpostavki in definiciji 1.3.3 končni. S tem so že izpolnjene predpostavke definicije 1.3.3 $a_\lambda b_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$.

Privzemimo zdaj, da je $a = \infty$ in $0 < b < \infty$. Tedaj je $ab = \infty$. Zdaj za $u < \infty$ opazimo, da je $\{\lambda\,;\,a_\lambda b_\lambda \le u\} \subseteq \{\lambda\,;\,a_\lambda \le 2u/b\} \cup \{\lambda\,;\,b_\lambda \le b/2\}$, slednji množici pa sta spet po predpostavki in definiciji 1.3.3 končni. Tako so predpostavke definicije 1.3.3 tudi tokrat za nabor $a_\lambda b_\lambda$ izpolnjene.

Privzemimo zdaj še, da je $a = b = \infty$. Tudi tedaj je $ab = \infty$. Dovolj je dokazati, da je množica $\{\lambda\,;\,a_\lambda b_\lambda \le u\}$ končna za vse $0 < u < \infty$. To pa je res, ker je $\{\lambda\,;\,a_\lambda b_\lambda \le u\} \subseteq \{\lambda\,;\,a_\lambda \le \sqrt{u}\} \cup \{\lambda\,;\,b_\lambda \le \sqrt{u}\}$, slednji množici pa sta spet po predpostavki in definiciji 1.3.3 končni. Tako so predpostavke definicije 1.3.3 tudi tokrat za nabor $a_\lambda b_\lambda$ izpolnjene.

Preostale primere: $-\infty < a < 0 < a < \infty$; $-\infty < b < 0 < a < \infty$; $-\infty < a, b < 0$; $b = 0$; $a = \infty, -\infty < b < 0$; $a = -\infty, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b = \pm\infty$; $a \in \pm\infty, b = \pm\infty$ prevedemo na prejšnje z uporabo komutativnosti množenja in trditve 1.5.1. Dana trditev je tako dokazana. ■

Trditev 1.5.5. *Če je a_λ, $\lambda \in \Lambda$, nabor števil iz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ z limito $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ima nabor a_λ, $\lambda \in \Lambda$, limito $1/a$.*

Dokaz. Privzemimo najprej, da je $a > 0$. Dovolj bo dokazati končnost množic $\{\lambda \in \Lambda\,;\, 1/a_\lambda \ge v\}$ za vse $1/a < v < \infty$ in množic $\{\lambda \in \Lambda\,;\,1/a_\lambda \le u\}$ za vse $0 < u < 1/a$. To pa sledi iz dejstva, da je $0 < 1/v < a < 1/u < \infty$ ter $\{\lambda \in \Lambda\,;\,1/a_\lambda \ge v\} \subseteq \{\lambda \in \Lambda\,;\,a_\lambda \le 1/v\}$ in $\{\lambda \in \Lambda\,;\,1/a_\lambda \le u\} \subseteq \{\lambda \in \Lambda\,;\,a_\lambda \ge 1/u\} \cup \{\lambda \in \Lambda\,;\,a_\lambda \le 0\}$. Za $a > 0$ je dokaz podoben. ■

Posledica 1.5.6. *Naj bo a_λ, $\lambda \in \Lambda$ nabor števil iz $[-\infty, \infty]$ z limito a, b_λ, $\lambda \in \Lambda$, pa naj bo nabor števil iz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ z limito $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedaj ima nabor a_λ/b_λ, $\lambda \in \Lambda$, limito a/b.*

1.6 Seštevanje števil iz $[0, \infty]$ po splošnih množicah

Iz osnovne analize poznamo definicijo vrednosti vrste, ki jo lahko razširimo na števila iz $[-\infty, \infty]$:

Definicija 1.6.1. *Vrednost* ali *vsota* neskončne vrste $\sum_{k=1}^\infty a_k$ števil iz $[-\infty, \infty]$ je limita njenih delnih vsot: $\sum_{k=1}^\infty a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k$. Vrsta ima vrednost, če obstajajo vse njene delne vsote in če obstaja tudi limita. V tem primeru pravimo, da je vrsta *konvergentna.*

Opomba 1.6.1. Če so $a_1, a_2, \ldots$ realna števila, je vrsta $\sum_{k=1}^\infty a_k$ v klasičnem smislu konvergentna natanko tedaj, ko njena vrednost obstaja po definiciji 1.6.1 in pripada realnim številom. To sledi iz trditve 1.3.5.

Seštevanje vrst bomo zdaj posplošili na seštevanje po poljubnih množicah, in sicer v tem razdelku za števila iz $[0, \infty]$, v razdelku 1.7 pa za realna števila. V celotnem razdelku bomo privzeli, da je Λ množica (lahko tudi prazna), a_λ in b_λ, $\lambda \in \Lambda$, pa števila iz intervala $[0, \infty]$.

DEFINICIJA 1.6.2. Vsoto števil iz $[0, \infty]$ po množici Λ definiramo po predpisu:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda := \sup_{\substack{K \subseteq \Lambda \\ K \text{ končna}}} \sum_{\lambda \in K}^{\mathrm{k}} a_\lambda \,,$$

kjer $\sum^{\mathrm{k}}$ označuje vsoto po končni množici iz definicije 1.1.1.

Opažanje 1.6.2. *Če je množica Λ končna, je $\sum_{\lambda \in K} a_\lambda = \sum_{\lambda \in K}^{\mathrm{k}} a_\lambda$. Iz opažanja 1.1.5 namreč sledi, da je supremum dosežen pri $K = \Lambda$. Tako oznaka $\sum^{\mathrm{k}}$ ni več potrebna.*

Opažanje 1.6.3. *Vsota $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ je enaka nič natanko tedaj, ko so vsa števila a_λ enaka nič.*

Opažanje 1.6.4. *Če je $\Lambda' \subseteq \Lambda$, je tudi $\sum_{\lambda \in \Lambda'} a_\lambda \le \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$.*

Opažanje 1.6.5. *Če je $a_\lambda \le b_\lambda$, je tudi $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \le \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$ (sledi iz opažanja 1.1.6 in trditve 1.2.10).*

Trditev 1.6.6. *Za zaporedje $a_1, a_2, \ldots$ števil iz $[0, \infty]$ se vsota po definiciji 1.6.2 ujema z vrednostjo vrste po definiciji 1.6.1: velja $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k = \sum_{k=1}^\infty a_k$.*

DOKAZ. Označimo $\mathbb{N}_n := \{1, 2, \ldots, n\}$. Delne vsote $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k \in \mathbb{N}_n} a_k$ (glej opombo 1.1.3) tvorijo naraščajoče zaporedje, zato po trditvi 1.4.9 velja $\sum_{k=1}^\infty a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}_n} a_k$. Če označimo $\mathscr{N} := \{\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \ldots\}$ in s $\mathscr{K}$ označimo družino vsek končnih podmnožic množice $\mathbb{N}$, torej velja $S_1 := \sum_{k=1}^\infty a_k = \sup_{K \in \mathscr{N}} \sum_{k \in K} a_k$ in $S_2 := \sum_{k \in \mathbb{N}}^\infty a_k = \sup_{K \in \mathscr{K}} \sum_{k \in K} a_k$. Ker je $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{K}$, po posledici 1.2.11 velja $S_1 \le S_2$. Toda vsaka množica $K \in \mathscr{K}$ je navzgor omejena, torej obstaja tak n, da je $K \subseteq \mathbb{N}_n$, potem pa po opažanju 1.1.5 velja $\sum_{k \in K} a_k \le \sum_{k \in \mathbb{N}_n} a_k$. Po trditvi 1.2.10 je zato tudi $S_2 \le S_1$. ■

Trditev 1.6.7. *Če je $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda < \infty$, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka končna množica $K \subseteq \Lambda$, da je $\sum_{\Lambda \setminus K} a_\lambda < \varepsilon$.*

DOKAZ. Očitno je $a_\lambda < \infty$ za vse $\lambda \in \Lambda$. Označimo $s := \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$. Po definiciji 1.6.2 obstaja taka končna množica $K \subseteq \Lambda$, da je $s' := \sum_{\lambda \in K} a_\lambda > s - \varepsilon$. Če je $L \subseteq \Lambda \setminus K$ spet končna množica, velja $s' \le \sum_{\lambda \in K \cup L} a_\lambda \le s$. Iz običajnih lastnosti seštevanja za končne množice (formula (1.1.3), uporabljena za dve množici) zdaj sledi:

$$\sum_{\lambda \in L} a_\lambda \le \sum_{\lambda \in K \cup L} a_\lambda - \sum_{\lambda \in K} a_\lambda \le s - s' \,.$$

Naredimo supremum po vseh L in po definiciji 1.6.2 je $\sum_{\lambda \in \Lambda \setminus K} a_\lambda \le s - s' < \varepsilon$. ■

Trditev 1.6.8. *Če je $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda < \infty$, je množica indeksov λ, za katere je $a_\lambda > 0$, števna.*

Dokaz. Označimo $s := \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ in $\Lambda_+ := \{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda > 0\}$. Slednja množica je unija množic $\Lambda_n := \{\lambda \in \Lambda \,;\, a_\lambda \geq 1/n\}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$. Po opažanjih 1.6.4 in 1.6.5 velja:

$$s \geq \sum_{\lambda\in\Lambda_n} a_n \geq \sum_{\lambda\in\Lambda_n} \frac{1}{n} = \frac{|\Lambda_n|}{n}\,,$$

kjer $|\Lambda_n|$ označuje moč množice Λ_n. Sledi, da so vse množice Λ_n končne. Ker je Λ_+ njihova števna unija, mora biti števna množica. ∎

Trditev 1.6.9. *Za poljuben $c \in [0,\infty]$ velja:*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(ca_\lambda) = c\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\,.$$

Dokaz. Po trditvi 1.2.16 in opažanju (1.1.7) je:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(ca_\lambda) = \sup_{\substack{K\subseteq\Lambda\\ K \text{ končna}}} \sum_{\lambda\in K}(ca_\lambda) = \sup_{\substack{K\subseteq\Lambda\\ K \text{ končna}}} c\sum_{\lambda\in K} a_\lambda = c \sup_{\substack{K\subseteq\Lambda\\ K \text{ končna}}} \sum_{\lambda\in K} a_\lambda = c\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\,.$$

∎

Trditev 1.6.10. *Če so Λ_μ, $\mu \in M$, disjunktne množice z unijo Λ, velja:*

$$\sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\,. \tag{1.6.1}$$

Dokaz. Po definiciji 1.6.2 je:

$$\sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda = \sup_{\substack{M'\subseteq M\\ M' \text{ končna}}} \sum_{\mu\in M'} \sup_{\substack{\Lambda'\subseteq\Lambda_\mu\\ \Lambda' \text{ končna}}} \sum_{\Lambda\in\Lambda'} a_\lambda\,.$$

Po trditvi 1.2.17 pa je:

$$\sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda = \sup_{\substack{M'\subseteq M\\ M' \text{ končna}}} \sup_{\phi\in\Phi_{M'}} \sum_{\mu\in M'}\sum_{\lambda\in\phi(\mu)} a_\lambda\,,$$

kjer je $\Phi_{M'}$ množica vseh takih preslikav ϕ iz M' v družino končnih podmnožic množice Λ, da za vsak $\mu \in M'$ velja $\phi(\mu) \subseteq \Lambda_\mu$. Po različici formule (1.6.1) za končne množice (formula (1.1.3)) velja:

$$\sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda = \sup_{\substack{M'\subseteq M\\ M' \text{ končna}}} \sup_{\phi\in\Phi_{M'}} \sum_{\lambda\in\bigcup_{\mu\in M'}\phi(\mu)} a_\lambda$$

in po trditvi 1.2.15 velja:

$$\sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda = \sup_{\phi\in\bigcup_{\substack{M'\subseteq M\\ M' \text{ končna}}}\Phi_{M'}} \sum_{\lambda\in\bigcup_{\mu\in M'}\phi(\mu)} a_\lambda\,.$$

Vsak element unije $\bigcup_{\substack{M' \subseteq M \\ M' \text{ končna}}} \Phi_{M'}$ pomeni, da najprej izberemo končno podmnožico M' množice M, nakar za vsak $\mu \in M'$ iz množice Λ_μ izberemo končno podmnožico $\phi(\mu)$. To pa natančno ustreza vsem končnim podmnožicam množice Λ. Pri tem funkcija ϕ ustreza množici $\bigcup_{\mu \in M'} \phi(\mu)$. Zato smemo na desni strani zadnje enačbe supremum zamenjati s supremumom po končnih podmnožicah $\Lambda' \subseteq \Lambda$, vsoto pa z vsoto po $\lambda \in \Lambda'$. Rezultat zdaj sledi po definiciji 1.6.2. ■

Posledica 1.6.11. *Za poljubna števila iz* $[0, \infty]$ *velja:*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda + b_\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda + \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$$

in

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{\mu \in M} a_{\lambda\mu} = \sum_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M} a_{\lambda\mu} = \sum_{\mu \in M} \sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda\mu} \,.$$

1.7 Seštevanje realnih števil po splošnih množicah

V tem razdelku bomo privzeli, da je Λ množica, a_λ, $\lambda \in \Lambda$, pa je nabor realnih števil.

Definicija 1.7.1. Realno število s je vsota nabora a_λ, $\lambda \in \Lambda$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka končna množica $K \subseteq \Lambda$, da za vsako končno množico K', za katero je $K \subseteq K' \subseteq \Lambda$, velja:

$$\left| \sum_{\lambda \in K'} a_\lambda - s \right| < \varepsilon \,.$$

Opomba 1.7.1. Če je množica Λ končna, je s vsota nabora a_λ, $\lambda \in \Lambda$, natanko tedaj, ko je $s = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ po definiciji 1.1.1.

Opomba 1.7.2. Če je $a_1, a_2, \ldots$ zaporedje realnih števil in obstaja vsota $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ po definiciji 1.7.1, je tudi vrsta $\sum_{k=1}^\infty a_k$ po definiciji 1.6.1 konvergentna v okviru realnih števil in obe vrednosti se ujemata: velja $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k = \sum_{k=1}^\infty a_k$. Konvergenca vrste $\sum_{k=1}^\infty a_k$ pa seveda ni dovolj za obstoj vsote $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$: za to potrebujemo absolutno konvergenco – glej trditev 1.7.6.

Trditev 1.7.3. *Če za vse* $\lambda \in \Lambda$ *velja* $a_\lambda \le b_\lambda$ *in če je* s *vsota nabora* a_λ, $\lambda \in \Lambda$, t *pa je vsota nabora* b_λ, $\lambda \in \Lambda$, *velja* $s \le t$.

Dokaz. Po definiciji 1.7.1 za vsak $\varepsilon > 0$ obstajata taki končni množici $K, L \subseteq \Lambda$, da za za vsako končno množico K', za katero je $K \subseteq K' \subseteq \Lambda$, velja $\left|\sum_{\lambda \in K'} a_\lambda - s\right| < \varepsilon$, in za vsako končno množico L', za katero je $L \subseteq L' \subseteq \Lambda$, velja $\left|\sum_{\lambda \in L'} b_\lambda - t\right| < \varepsilon$. Še z uporabo opažanja 1.1.6 sledi:

$$s \le \sum_{\lambda \in K \cup L} a_\lambda + \varepsilon \le \sum_{\lambda \in K \cup L} b_\lambda + \varepsilon \le t + 2\varepsilon \,.$$

Ker to velja za vse $\varepsilon > 0$, mora biti $s \le t$. ■

Posledica 1.7.4. *Vsota števil po definiciji 1.7.1 je enolično določena. Zato je trditev, da je s nabora a_λ, $\lambda \in \Lambda$, smiselno zapisati s formulo:*

$$s = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$$

in po opombi 1.7.1 se to ne razlikuje od vsote po definiciji 1.1.1.

Trditev 1.7.5. *Naj za vse $\lambda \in \Lambda$ velja $a_\lambda \geq 0$ in naj bo $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda < \infty$, kjer je mišljena vsota po definiciji 1.6.2. Tedaj obstaja tudi vsota $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ po definiciji 1.7.1 in obe vsoti sta enaki.*

Dokaz. Naj bo $s = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ po definiciji 1.6.2. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka končna množica $K \subseteq \Lambda$, da je $\sum_{\lambda \in K} a_\lambda > s - \varepsilon$. Potem pa po opažanju 1.6.4 za vsako končno množico K', za katero je $K \subseteq K' \subseteq \Lambda$, velja:

$$s - \varepsilon < \sum_{\lambda \in K} a_\lambda \leq \sum_{\lambda \in K'} a_\lambda \leq s$$

(po opombi 1.6.2 lahko vsoti po K in K' gledamo po definiciji 1.1.1 ali definiciji 1.6.2). Sledi $\left|\sum_{\lambda \in K'} a_\lambda - s\right| < \varepsilon$, kar pomeni, da je s tudi vsota po definiciji 1.7.1. ∎

Trditev 1.7.6. *Vsota $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ obstaja natanko tedaj, ko je $\sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda| < \infty$.*

Dokaz. Najprej privzemimo, da je $M := \sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda| < \infty$. Tedaj po trditvi 1.6.7 obstajajo take končne množice $K_1, K_2, \ldots$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $\sum_{\lambda \in \Lambda \setminus K_n} |a_\lambda| < 1/n$. Definirajmo $s_n := \sum_{\lambda \in K_n} a_\lambda$ in pokažimo, da je to zaporedje Cauchyjevo. Za ta namen najprej opazimo, da za poljubno končno množico K', za katero je $K_n \subseteq K' \subseteq \Lambda$, iz lastnosti končnih vsot (formuli (1.1.2) in (1.1.3)) sledi:

$$\left|\sum_{\lambda \in K'} a_\lambda - s_n\right| = \left|\sum_{\lambda \in K' \setminus K_n} a_\lambda\right| \leq \sum_{\lambda \in K' \setminus K_n} |a_\lambda| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus K_n} |a_\lambda| < \frac{1}{n}\,.$$

Naj bo zdaj $\varepsilon > 0$, $N \geq 2/\varepsilon$ in $m, n \geq N$. Po prejšnjem ocenimo:

$$|s_m - s_n| \leq \left|\sum_{\lambda \in K_m \cup K_n} a_\lambda - s_m\right| + \left|\sum_{\lambda \in K_m \cup K_n} a_\lambda - s_n\right| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon\,.$$

Sledi, da je zaporedje $s_1, s_2, \ldots$ res Cauchyjevo, kar pomeni, da ima limito s.

Pokažimo, da je v resnici $s = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$. Spet naj bo $\varepsilon > 0$. Naj bo $m, n \in \mathbb{N}$ in $m, n \geq 3/\varepsilon$ ter naj bo K' taka končna množica, da je $K_n \subseteq K' \subseteq \Lambda$. Po prejšnjem ocenimo:

$$\left|\sum_{\lambda \in K'} a_\lambda - s_m\right| \leq \left|\sum_{\lambda \in K'} a_\lambda - s_n\right| + |s_m - s_n| < \frac{2}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{n} + \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Ker to velja za vse dovolj velike m, je tudi $\left|\sum_{\lambda \in K'} a_\lambda - s\right| \leq 2/n + \varepsilon/3 < \varepsilon$. Tako smo dokazali, da je res $s = \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$.

Zdaj pa dokažimo še v obratno smer: privzemimo, da obstaja $s = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$. Torej obstaja taka končna množica $K_1 \subseteq \Lambda$, da za poljubno končno množico K', za katero je $K_1 \subseteq K' \subseteq \Lambda$, velja $\left|\sum_{\lambda\in K'} a_\lambda - s\right| < 1$. Ekvivalentno, za poljubno končno množico $L \subseteq \Lambda \setminus K_1$ velja $\left|\sum_{\lambda\in K_1\cup L} a_\lambda - s\right| < 1$. Če označimo $s_1 := \sum_{\lambda\in K_1} a_\lambda$, se to prevede na $\left|\sum_{\lambda\in L} a_\lambda + s_1 - s\right| < 1$, od koder sledi:

$$s - s_1 - 1 < \sum_{\lambda\in L} a_\lambda < s - s_1 + 1\,.$$

Naj bo $K \subseteq \Lambda$ poljubna končna množica. Definirajmo $L_+ := \{\lambda \in K \setminus K_1\,;\, a_\lambda \ge 0\}$ in $L_- := \{\lambda \in K \setminus K_1\,;\, a_\lambda < 0\}$. Tako je $K \cup K_1$ disjunktna unija množic K_1, L_+ in L_-. Iz formule (1.1.3) sledi:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in K} |a_\lambda| \le \sum_{\lambda\in K\cup K_1} |a_\lambda| &= \\ &= \sum_{\lambda\in K_1} |a_\lambda| + \sum_{\lambda\in L_+} |a_\lambda| + \sum_{\lambda\in L_-} |a_\lambda| \le \\ &\le \sum_{\lambda\in K_1} |a_\lambda| + \sum_{\lambda\in L_+} a_\lambda - \sum_{\lambda\in L_-} a_\lambda \le \\ &\le \sum_{\lambda\in K_1} |a_\lambda| + 2\end{aligned}$$

in po definiciji 1.6.2 je $\sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| \le \sum_{\lambda\in K_1} |a_\lambda| + 2 < \infty$, saj je množica K_1 končna. ∎

Posledica 1.7.7. *Če obstaja vsota $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ in je $\Lambda' \subseteq \Lambda$, obstaja tudi vsota $\sum_{\lambda\in\Lambda'} a_\lambda$.*

Trditev 1.7.8. *Naj obstaja vsota $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ ter naj bodo dani še množica M in realna števila a_λ, $\lambda \in M$. Če je $\sum_{\lambda\in M\setminus\Lambda} |a_\lambda| < \infty$, obstaja tudi vsota $\sum_{\lambda\in M} a_\lambda$ in velja ocena:*

$$\left|\sum_{\lambda\in M} a_\lambda - \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\right| \le \sum_{\lambda\in(M\setminus\Lambda)\cup(\Lambda\setminus M)} |a_\lambda|\,.$$

Dokaz. Po trditvi 1.7.6 je $\sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| < \infty$. Po opažanju 1.6.4 in trditvi 1.6.10 je tedaj tudi $\sum_{\lambda\in M} |a_\lambda| \le \sum_{\lambda\in\Lambda\cup M} |a_\lambda| = \sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| + \sum_{\lambda\in M\setminus\Lambda} |a_\lambda| < \infty$, torej spet po trditvi 1.7.6 obstaja tudi $\sum_{\lambda\in M} a_\lambda$.

Označimo $s := \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ in $t := \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Iz definicije 1.7.1 sledi, da obstajata taki končni množici $K \subseteq \Lambda$ in $L \subseteq M$, da je:

$$\left|\sum_{\lambda\in K} a_\lambda - s\right| < \varepsilon \quad \text{in} \quad \left|\sum_{\lambda\in L} a_\lambda - t\right| < \varepsilon\,. \tag{1.7.1}$$

Iz običajnih lastnosti vsot po končnih množicah (formula (1.1.3) za dve množici) sledi:

$$\sum_{\lambda\in K} a_\lambda = \sum_{\lambda\in K\cap L} a_\lambda + \sum_{\lambda\in K\setminus L} a_\lambda \quad \text{in} \quad \sum_{\lambda\in L} a_\lambda = \sum_{\lambda\in K\cap L} a_\lambda + \sum_{\lambda\in L\setminus K} a_\lambda\,.$$

Spet z uporabo formule (1.1.3) ter še formule 1.1.2 in opažanja 1.6.4 dobimo:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\lambda\in L} a_\lambda - \sum_{\lambda\in K} a_\lambda\right| &= \left|\sum_{\lambda\in K\setminus L} a_\lambda + \sum_{\lambda\in L\setminus K} a_\lambda\right| = \\ &= \left|\sum_{\lambda\in(K\setminus L)\cup(L\setminus K)} a_\lambda\right| \le \\ &\le \sum_{\lambda\in(K\setminus L)\cup(L\setminus K)} |a_\lambda| \le \\ &\le \sum_{\lambda\in(\Lambda\setminus M)\cup(M\setminus\Lambda)} |a_\lambda| \,.\end{aligned}$$

Ob upoštevanju tega in še ocene (1.7.1) dobimo:

$$\left|\sum_{\lambda\in M} a_\lambda - \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\right| \le \sum_{\lambda\in(\Lambda\setminus M)\cup(M\setminus\Lambda)} |a_\lambda| + 2\varepsilon \,.$$

Ker to velja za vsak $\varepsilon > 0$, je zahtevana ocena dokazana. ■

Posledica 1.7.9. *Če obstaja vsota $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$, velja neenakost:*

$$\left|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\right| \le \sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| \,.$$

Trditev 1.7.10. *Če obstaja vsota $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$, za vsak $c \in \mathbb{R}$ obstaja tudi vsota $\sum_{\lambda\in\Lambda}(ca_\lambda)$ in velja:*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(ca_\lambda) = c\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \,.$$

Dokaz. Za $c = 0$ je trditev očitna, zato smemo privzeti, da je $c > 0$. Označimo $s := \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ in naj bo $\varepsilon > 0$. Iz definicije 1.7.1 sledi, da obstaja taka končna množica $K \subseteq \Lambda$, da za vsako končno množico K', za katero je $K \subseteq K' \subseteq \Lambda$, velja $\left|\sum_{\lambda\in K'} a_\lambda - s\right| < \varepsilon/c$. Po opažanju 1.1.7 sledi $\left|\sum_{\lambda\in K'}(ca_\lambda) - cs\right| < \varepsilon$, od koder sledi zahtevano. ■

Trditev 1.7.11. *Naj bodo Λ_μ, $\mu \in M$, disjunktne množice z unijo Λ. Privzemimo, da obstaja vsota $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$. Tedaj obstajajo tudi vse vsote $\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda$, obstaja dvojna vsota $\sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda$ in velja:*

$$\sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda \,. \tag{1.7.2}$$

Dokaz. Če obstaja vsota $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$, po posledici 1.7.7 obstajajo tudi vsote $\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda$ in po trditvi 1.7.6 je $\sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| < \infty$. Poleg tega iz trditve 1.6.10 in posledice 1.7.9 sledi:

$$\sum_{\mu\in M}\left|\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda\right| \le \sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} |a_\lambda| = \sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| < \infty \,.$$

Spet iz trditve 1.7.6 sledi, da obstaja tudi dvojna vsota $\sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda$.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Po trditvi 1.6.7 obstaja taka končna množica $K \subseteq \Lambda$, da je $\sum_{\lambda\in\Lambda\setminus K} |a_\lambda| < \varepsilon$. Množica K je disjunktna unija končnih množic $K_\mu = K \cap \Lambda_\mu$, zato po formuli 1.1.3 velja:

$$\sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in K_\mu} a_\lambda = \sum_{\lambda\in K} a_\lambda \,. \tag{1.7.3}$$

Po trditvi 1.7.8 je:

$$\left|\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda - \sum_{\lambda\in K} a_\lambda\right| \le \sum_{\lambda\in\Lambda\setminus K} |a_\lambda| < \varepsilon \,, \tag{1.7.4}$$

poleg tega pa za vsak $\mu \in M$ tudi:

$$\left|\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda - \sum_{\lambda\in K_\mu} a_\lambda\right| \le \sum_{\lambda\in\Lambda_\mu\setminus K_\mu} |a_\lambda| \,.$$

Spet po trditvi 1.7.8 in nadalje po trditvi 1.6.10 je:

$$\left|\sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda - \sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in K_\mu} a_\lambda\right| \le \sum_{\mu\in M}\left|\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda - \sum_{\lambda\in K_\mu} a_\lambda\right| \le \sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu\setminus K_\mu} |a_\lambda| \le \sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| < \varepsilon \,. \tag{1.7.5}$$

Iz enakosti (1.7.3) ter ocen (1.7.4) in (1.7.5) zdaj dobimo:

$$\left|\sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda_\mu} a_\lambda - \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\right| < 2\varepsilon \,.$$

Ker to velja za vsak $\varepsilon > 0$, je zahtevana enakost dokazana. ■

Posledica 1.7.12. *Brž ko obstajata vsoti $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ in $\sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$, obstaja tudi vsota $\sum_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda + b_\lambda)$ in velja:*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda + b_\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda + \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda \,.$$

Nadalje, brž ko obstaja vsota $\sum_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} a_{\lambda\mu}$, velja:

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\mu\in M} a_{\lambda\mu} = \sum_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} a_{\lambda\mu} = \sum_{\mu\in M}\sum_{\lambda\in\Lambda} a_{\lambda\mu} \,,$$

pri čemer vse navedene vsote obstajajo.

2.

Merljivost

2.1 σ-algebre

Definicija 2.1.1. *σ-algebra* na množici Ω je družina množic $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, za katero velja:

(1) $\emptyset \in \mathscr{F}$;

(2) če je $A \in \mathscr{F}$, je tudi $A^c := \Omega \setminus A \in \mathscr{F}$;

(3) za poljubno zaporedje množic $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ je tudi $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \in \mathscr{F}$.

Množicam, ki pripadajo izbrani σ-algebri, pravimo, da so *merljive*. Množici skupaj s σ-algebro na njej pravimo *merljivi prostor*.

Opomba 2.1.1. Če je $\mathscr{F}$ σ-algebra in je $A_1, A_2, \ldots A_n$ končno zaporedje množic iz $\mathscr{F}$, je prav tako $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}$, saj je $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$.

Opomba 2.1.2. Če je $\mathscr{F}$ σ-algebra, je za poljubne $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ tudi $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}$, saj je $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right)^c$. Seveda tudi za končno zaporedje velja $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}$.

Opomba 2.1.3. Če je $\mathscr{F}$ σ-algebra, je za poljubna $A, B \in \mathscr{F}$ tudi $A \setminus B \in \mathscr{F}$, saj je $A \setminus B = A \cap B^c$.

Zgled 2.1.2. $\mathscr{P}(\Omega)$ je največja možna σ-algebra na Ω. □

Zgled 2.1.3. $\{\emptyset, \Omega\}$ je najmanjša možna σ-algebra na Ω. □

Zgled 2.1.4. Za $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ je $\mathscr{F} = \big\{\emptyset, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}\big\}$ σ-algebra na Ω. □

Zgled 2.1.5. Družina končnih podmnožic ni σ-algebra na $\mathbb{R}$. Prav tako to ni družina končnih podmnožic in njihovih komplementov. Tudi družina števnih podmnožic ni σ-algebra. Pač pa je družina števnih podmnožic in njihovih komplementov σ-algebra na poljubni množici. □

Opomba 2.1.4. Če je $\mathscr{F}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, neprazna družina σ-algeber na neki množici Ω, je tudi njihov presek $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{F}_\lambda$ σ-algebra na Ω.

Definicija 2.1.6. Naj bo Ω množica in $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$. σ-algebra na Ω, *generirana z* $\mathscr{A}$, je presek vseh σ-algeber, ki so nadmnožice družine $\mathscr{U}$. To je hkrati tudi najmanjša σ-algebra, ki je nadmnožica družine $\mathscr{U}$. To σ-algebro označimo s $\sigma_\Omega(\mathscr{U})$. Indeks Ω često izpustimo.

Zgled 2.1.7. Za $\mathscr{U} = \big\{\{1,2\},\{2,3\}\big\}$ je $\sigma_{\{1,2,3\}}(\mathscr{U}) = \mathscr{P}(\{1,2,3\})$ in $\sigma_{\{1,2,3,4,5,6\}}(\mathscr{U}) = \big\{A, A\cup\{4,5,6\}\ ;\ A \subseteq \{1,2,3\}\big\}$. □

Opomba 2.1.5. Velja $\sigma_\Omega(\sigma_\Omega(\mathscr{U})) = \sigma_\Omega(\mathscr{U})$.

Opomba 2.1.6. Če sta $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{V}$ družini množic na Ω, je $\sigma_\Omega(\mathscr{U}) \subseteq \sigma_\Omega(\mathscr{V})$. Če je $\mathscr{V}$ že σ-algebra, je torej $\sigma_\Omega(\mathscr{U}) \subseteq \mathscr{V}$.

Posledica 2.1.7. *Če so $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{V} \subseteq \mathscr{W}$ družine množic na Ω in je $\sigma_\Omega(\mathscr{U}) = \sigma_\Omega(\mathscr{W})$, je $\sigma_\Omega(\mathscr{U}) = \sigma_\Omega(\mathscr{V}) = \sigma_\Omega(W)$.*

Iz opomb 2.1.5 in 2.1.6 pa sledi še:

Posledica 2.1.8. *Če sta $\mathscr{U}$ in $\mathscr{V}$ družini množic na Ω in je $\mathscr{U} \subseteq \sigma_\Omega(\mathscr{V})$, je $\sigma_\Omega(\mathscr{U}) \subseteq \sigma_\Omega(\mathscr{V})$. Če je $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U} \subseteq \sigma_\Omega(\mathscr{V})$, je $\sigma_\Omega(\mathscr{U}) = \sigma_\Omega(\mathscr{V})$.*

Definicija 2.1.8. *Borelova σ-algebra* na $[-\infty,\infty]$ je σ-algebra na $[-\infty,\infty]$, generirana z vsemi možnimi intervali na $[-\infty,\infty]$ (vključno z izrojenimi, t. j. enoelementnimi množicami). Elementom Borelove σ-algebre pravimo *Borelove množice.*

Borelova σ-algebra se da karakterizirati na veliko načinov. Nekaj jih je navedeno v spodnji trditvi, iz posledice 2.1.7 pa dobimo še "vmesne" karakterizacije.

Trditev 2.1.9. *Naj bo $Q \subseteq \mathbb{R}$ povsod gosta množica. Tedaj je Borelova σ-algebra na $[-\infty,\infty]$ tudi:*

- *σ-algebra, generirana z vsemi poltraki $[-\infty,q]$, kjer je $q \in Q$;*
- *σ-algebra, generirana z vsemi poltraki $[-\infty,q)$, kjer je $q \in Q$;*
- *σ-algebra, generirana z vsemi poltraki $[q,\infty]$, kjer je $q \in Q$;*
- *σ-algebra, generirana z vsemi poltraki $(q,\infty]$, kjer je $q \in Q$.*

Poleg tega pa je Borelova σ-algebra na $[-\infty,\infty]$ tudi:

- *σ-algebra, generirana z odprtimi množicami;*
- *σ-algebra, generirana z zaprtimi množicami.*

Dokaz. Naj bo:

- $\mathscr{I}$ družina vseh intervalov na $[-\infty,\infty]$ (vključno z izrojenimi);
- $\mathscr{Z}_Q^-$ družina vseh poltrakov $[-\infty,q]$, kjer je $q \in Q$;
- $\mathscr{O}_Q^-$ družina vseh poltrakov $[-\infty,q)$, kjer je $q \in Q$;
- $\mathscr{Z}_Q^+$ družina vseh poltrakov $[q,\infty]$, kjer je $q \in Q$;

- $\mathscr{O}_Q^+$ družina vseh poltrakov $(q, \infty]$, kjer je $q \in Q$;
- $\mathscr{V}$ družina vseh poltrakov $[-\infty, x]$, $[-\infty, x)$, $[x, \infty]$ in $(x, \infty]$, kjer je $x \in \mathbb{R}$;
- $\mathscr{I}_\mathrm{O}$ družina vseh poltrakov $[-\infty, b)$ in $(a, \infty]$ ter intervalov (a, b), kjer je $a, b \in \mathbb{R}$ in $a < b$;
- $\mathscr{O}$ družina vseh odprtih množic v $[-\infty, \infty]$;
- $\mathscr{Z}$ družina vseh zaprtih množic v $[-\infty, \infty]$.

Pokazali bomo, da vse omenjene družine generirajo isto σ-algebro, ki je po definiciji Borelova σ-algebra na $[-\infty, \infty]$.

Prvi korak: pokažimo, da je $\sigma(\mathscr{Z}_Q^-) = \sigma(\mathscr{Z}_Q^+) = \sigma(\mathscr{O}_Q^-) = \sigma(\mathscr{O}_Q^+) = \sigma(\mathscr{V})$ (indeks $[-\infty, \infty]$ pri črki σ opustimo). Očitno je $\mathscr{Z}_Q^-, \mathscr{Z}_Q^+, \mathscr{O}_Q^-, \mathscr{O}_Q^+ \subseteq \mathscr{V}$. Zdaj pa opazimo, da $\sigma(\mathscr{Z}_Q^-)$ vsebuje:

- vse poltrake $[-\infty, x]$, kjer je $x \in \mathbb{R}$, saj za vsak x obstaja padajoče zaporedje števil $q_1, q_2, \ldots$ iz Q, ki konvergira k x, velja $[-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^\infty [-\infty, q_n]$;
- vse poltrake $[-\infty, x)$, kjer je $x \in \mathbb{R}$, saj za vsak x obstaja naraščajoče zaporedje števil $q_1, q_2, \ldots$ iz Q, ki konvergira k x, velja $[-\infty, x) = \bigcup_{n=1}^\infty [-\infty, q_n]$;
- vse poltrake $[x, \infty]$, kjer je $x \in \mathbb{R}$, saj je $[x, \infty] = [-\infty, x)^\mathrm{c}$;
- vse poltrake $(x, \infty]$, kjer je $x \in \mathbb{R}$, saj je $(x, \infty) = [-\infty, x]^\mathrm{c}$.

Torej je $\sigma(\mathscr{Z}_Q^-) \supseteq \mathscr{V}$, se pravi $\mathscr{Z}_Q^- \subseteq \mathscr{V} \subseteq \sigma(\mathscr{Z}_Q^-)$ in po posledici 2.1.8 je $\sigma(\mathscr{Z}_Q^-) = \sigma(\mathscr{V})$. Podobno dobimo tudi $\sigma(\mathscr{Z}_Q^+) = \sigma(\mathscr{V})$, $\sigma(\mathscr{O}_Q^-) = \sigma(\mathscr{V})$ in $\sigma(\mathscr{O}_Q^+) = \sigma(\mathscr{V})$.

Drugi korak: pokažimo, da je $\sigma(\mathscr{V}) = \sigma(\mathscr{I})$. Očitno je $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{I}$. Toda σ-algebra $\sigma(\mathscr{V})$ mora vsebovati:

- vse intervale $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ in (a, b), kjer je $a, b \in \mathbb{R}$ in $a \le b$, saj je $[a, b] = [-\infty, b] \cap [a, \infty]$ in podobno tudi za ostale oblike intervalov;
- vse enoelementne množice $\{x\}$, kjer je $x \in \mathbb{R}$, saj je $\{x\} = [x, x]$;
- enoelementni množici $\{-\infty\}$ in $\{\infty\}$, saj je $\{-\infty\} = \bigcap_{n=1}^\infty [-\infty, n]$ in $\{\infty\} = \bigcap_{n=1}^\infty [n, \infty]$;
- vse intervale $(-\infty, x]$ in $(-\infty, x)$, kjer je $x \in \mathbb{R}$, saj je $(-\infty, x] = [-\infty, x] \setminus \{-\infty\}$ in $(-\infty, x) = [-\infty, x) \setminus \{-\infty\}$;
- vse intervale $[x, \infty)$ in (x, ∞), kjer je $x \in \mathbb{R}$, saj je $[x, \infty) = [x, \infty] \setminus \{\infty\}$ in $(x, \infty) = (x, \infty] \setminus \{\infty\}$.

Dobili smo, da je $\sigma(\mathscr{V}) \supseteq \mathscr{I}$, se pravi $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{I} \subseteq \sigma(\mathscr{V})$. Spet po posledici 2.1.8 dobimo $\sigma(\mathscr{V}) = \sigma(\mathscr{I})$.

Tretji korak: opazimo, da je $\sigma(\mathscr{I}_\mathrm{O}) = \sigma(\mathscr{I})$. Velja namreč $\mathscr{O}_\mathbb{R}^- \subseteq \mathscr{I}_\mathrm{O} \subseteq \mathscr{I}$ in $\sigma(\mathscr{O}_\mathbb{R}^-) = \sigma(\mathscr{V}) = \sigma(\mathscr{I})$, od koder po posledici 2.1.7 dobimo $\sigma(\mathscr{O}_\mathbb{R}^-) = \sigma(\mathscr{I}_\mathrm{O}) = \sigma(\mathscr{I})$.

Četrti korak: pokažimo, da je $\sigma(\mathscr{I}_\mathrm{O}) = \sigma(\mathscr{O})$. Vsaka množica iz družine $\mathscr{I}_\mathrm{O}$ je odprta v $[-\infty, \infty]$, torej je $\mathscr{I}_\mathrm{O} \subseteq \mathscr{O}$. Toda vsaka odprta množica v $[-\infty, \infty]$ je števna unija elementov družine $\mathscr{I}_\mathrm{O}$, zato je $\sigma(\mathscr{I}_\mathrm{O}) \supseteq \mathscr{O}$, se pravi $\mathscr{I}_\mathrm{O} \subseteq \mathscr{O} \subseteq \sigma(\mathscr{I}_\mathrm{O})$, torej je po posledici 2.1.8 res $\sigma(\mathscr{I}_\mathrm{O}) = \sigma(\mathscr{O})$.

Peti korak: pokažimo, da je $\sigma(\mathscr{O}) = \sigma(\mathscr{Z})$. Ker je vsaka zaprta množica komplement odprte, je namreč $\mathscr{Z} \subseteq \sigma(\mathscr{O})$ in po posledici 2.1.8 tudi $\sigma(\mathscr{Z}) \subseteq \sigma(\mathscr{O})$. Obratno, ker je vsaka odprta množica komplement zaprte, je $\mathscr{O} \subseteq \sigma(\mathscr{Z})$ in po posledici 2.1.8 tudi $\sigma(\mathscr{O}) \subseteq \sigma(\mathscr{Z})$. Torej je res $\sigma(\mathscr{O}) = \sigma(\mathscr{Z})$. ■

Opomba 2.1.10. Borelova σ-algebra torej vsebuje veliko množic. A če privzamemo aksiom izbire, se da dokazati, da niso vse podmnožice intervala $[-\infty, \infty]$ Borelove.

2.2 Operacije s σ-algebrami

DEFINICIJA 2.2.1. Naj bo $\mathscr{U}$ družina množic Ω in naj bo $\Omega' \subseteq \Omega$. *Sled* družine $\mathscr{U}$ na podmnožici Ω' ali *zožitev* družine $\mathscr{U}$ na podmnožico Ω' je družina $\{A \cap \Omega' \,;\, A \in \mathscr{U}\}$.

Opomba 2.2.1. Sled σ-algebre je spet σ-algebra.

ZGLED 2.2.2. Če je $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ in $\mathscr{F} = \big\{A, A \cup \{4,5,6\} \,;\, A \subseteq \{1,2,3\}\big\}$, je sled σ-algebre $\mathscr{F}$ na množici $\{3,4,5,6\}$ enaka $\big\{\emptyset, \{3\}, \{4,5,6\}, \{3,4,5,6\}\big\}$. □

Trditev 2.2.2. *Če je $\mathscr{F}$ σ-algebra na Ω in $\Omega' \in \mathscr{F}$, je sled σ-algebre $\mathscr{F}$ na Ω' kar družina vseh podmnožic množice Ω', ki so v $\mathscr{F}$.*

DOKAZ. Po definiciji je vsaka množica, ki pripada sledi σ-algebre $\mathscr{F}$ na Ω', oblike $A \cap \Omega'$. Ker je $\Omega' \in \mathscr{F}$, je tudi $A \cap \Omega'$ in očitno je $A \cap \Omega' \subseteq \Omega'$. Obratno, če je $A \in \mathscr{F}$ in $A \subseteq \Omega'$, je $A = A \cap \Omega'$, torej A po definiciji pripada sledi σ-algebre $\mathscr{F}$ na Ω'. ■

DEFINICIJA 2.2.3. Naj bo $h\colon\ \Omega' \to \Omega$ preslikava in $\mathscr{F}$ družina množic na Ω. *Povlek* družine $\mathscr{F}$ prek preslikave h je družina $h^{-1}\mathscr{F} = \{h^{-1}(A) \,;\, A \in \mathscr{F}\}$.

Opomba 2.2.3. Povlek σ-algebre je spet σ-algebra.

Opomba 2.2.4. Za preslikavi $k\colon\ \Omega'' \to \Omega'$ in $h\colon\ \Omega' \to \Omega$ ter družino množic $\mathscr{F}$ na Ω je $(h \circ k)^{-1}\mathscr{F} = k^{-1}h^{-1}\mathscr{F}$.

ZGLED 2.2.4. Naj bo $\Omega' = \{1,2,3,4\}$, $\Omega = \{5,6,7\}$, $\mathscr{F} = \big\{\emptyset, \{5\}, \{6,7\}, \{5,6,7\}\big\}$ ter $h(1) = h(2) = 7$, $h(3) = 5$ in $h(4) = 6$. Tedaj je $h^{-1}\mathscr{F} = \big\{\emptyset, \{3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}\big\}$. □

ZGLED 2.2.5. Naj bo $(\Omega, \mathscr{F})$ merljiv prostor, $A \subseteq \Omega$ in $h\colon\ A \to \Omega$ inkluzija. Tedaj je $h^{-1}\mathscr{F}$ sled σ-algebre $\mathscr{F}$ na množici A. □

ZGLED 2.2.6. Naj bosta M in N množici, $\mathscr{F}$ družina množic na M in $\pi\colon\ M \times N \to M$ naravna projekcija. Tedaj je $\pi^{-1}\mathscr{F} = \{A \times N \,;\, A \in \mathscr{F}\}$. □

Trditev 2.2.5. *Naj bo $h\colon\ \Omega' \to \Omega$ preslikava in naj bo $\mathscr{U}$ družina podmnožic množice Ω. Tedaj je $h^{-1}\sigma_\Omega(\mathscr{U}) = \sigma_{\Omega'}\big(h^{-1}\mathscr{U}\big)$.*

DOKAZ. Ker je $h^{-1}\mathscr{U} \subseteq h^{-1}\sigma_\Omega(\mathscr{U})$, je po opombi 2.1.6 tudi $\sigma_{\Omega'}\big(h^{-1}\mathscr{U}\big) \subseteq h^{-1}\sigma_\Omega(\mathscr{U})$.

Naj bo zdaj $\mathscr{G}$ družina vseh podmnožic A množice Ω, za katere je $h^{-1}(A) \in \sigma_{\Omega'}\big(h^{-1}\mathscr{U}\big)$. Očitno je $\mathscr{G} \supseteq \mathscr{U}$. Ni težko preveriti, da je $\mathscr{G}$ σ-algebra in po opombi 2.1.6 je tudi $\mathscr{G} \supseteq \sigma(\mathscr{U})$. To pa pomeni, da je $\sigma_{\Omega'}\big(h^{-1}\mathscr{U}\big) \supseteq h^{-1}\sigma(\mathscr{U})$. Rezultat sledi. ■

Posledica 2.2.6. *Naj bosta $\Omega' \subseteq \Omega$ množici in naj bo $\mathscr{U}$ družina podmnožic množice Ω. Tedaj se sled σ-algebre $\sigma_\Omega(\mathscr{U})$ na množici A ujema s σ-algebro $\sigma_{\Omega'}(\mathscr{U}')$, kjer je $\mathscr{U}'$ sled družine $\mathscr{U}$ na Ω'.*

Definicija 2.2.7. Borelova σ-algebra na množici $A \subseteq [-\infty, \infty]$ je sled Borelove σ-algebre na $\mathbb{R}$ na množici A. Borelovo σ-algebro na A označimo z $\mathscr{B}(A)$.

Trditev 2.2.7. *Za $A \subseteq [-\infty, \infty]$ je Borelova σ-algebra $\mathscr{B}(A)$ tudi:*

- *σ-algebra, generirana z vsemi množicami oblike $I \cap A$, kjer je I interval v $[-\infty, \infty]$;*
- *σ-algebra, generirana z množicami, odprtimi v A;*
- *σ-algebra, generirana z množicami, zaprtimi v A.*

Pri tem seveda na A vzamemo inducirano topologijo. Nadalje je, če je $Q \subseteq \mathbb{R}$ povsod gosta množica, $\mathscr{B}(A)$ tudi:

- *σ-algebra, generirana z vsemi poltraki $[-\infty, q] \cap A$, kjer je $q \in Q$;*
- *σ-algebra, generirana z vsemi poltraki $[-\infty, q) \cap A$, kjer je $q \in Q$;*
- *σ-algebra, generirana z vsemi poltraki $[q, \infty] \cap A$, kjer je $q \in Q$;*
- *σ-algebra, generirana z vsemi poltraki $(q, \infty] \cap A$, kjer je $q \in Q$.*

Dokaz. Rezultat je neposredna posledica trditve 2.1.9 in posledice 2.2.6. ■

Definicija 2.2.8. Borelova σ-algebra na topološkem prostoru X je σ-algebra, generirana z odprtimi množicami. To σ-algebro prav tako označimo z $\mathscr{B}(X)$.

Opomba 2.2.8. Na podmnožicah razširjene realne osi imamo tako Borelovo σ-algebro definirano na dva načina – po definiciji 2.1.8 in definiciji 2.2.8. Toda po trditvi 2.2.7 se ti dve definiciji ujemata.

Trditev 2.2.9. *Naj bo X topološki prostor z bazo $\mathscr{U}$, za katero velja, da je vsaka odprta množica števna unija množic iz $\mathscr{U}$. Tedaj je $\mathscr{B}(X) = \sigma_X(\mathscr{U})$.*

Dokaz. Po definiciji je $\mathscr{B}(X) = \sigma_X(\mathscr{T})$, kjer je $\mathscr{T}$ topologija na X, torej družina vseh odprtih množic. Ker je vsaka odprta množica števna unija množic iz $\mathscr{U}$, ki so tudi same odprte, je $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{T} \subseteq \sigma(\mathscr{U})$. Po posledici 2.1.8 je $\sigma_X(\mathscr{U}) = \sigma_X(\mathscr{T}) = \mathscr{B}(X)$. ■

Posledica 2.2.10. *Če je $Q \subseteq \mathbb{R}$ povsod gosta množica, je Borelova σ-algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ σ-algebra, generirana z vsemi odprtimi intervali (a, b), kjer je $a, b \in Q$ in $a < b$.*

Definicija 2.2.9. Naj bosta $(M, \mathscr{F})$ in $(N, \mathscr{G})$ merljiva prostora. *Produktna σ-algebra* na kartezijskem produktu $M \times N$ je σ-algebra $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$, generirana z vsemi pravokotniki $A \times B$, kjer je $A \in \mathscr{F}$ in $B \in \mathscr{G}$.

Trditev 2.2.11. *Naj bosta $(M, \mathscr{F})$ in $(N, \mathscr{G})$ kot prej ter naj bosta $\pi\colon M \times N \to M$ in $\rho\colon M \times N \to N$ koordinatni projekciji. Tedaj je produktna σ-algebra $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$ tudi σ-algebra, generirana s $\pi^{-1}\mathscr{F} \cup \rho^{-1}\mathscr{G}$.*

Dokaz. Po definiciji je $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G} = \sigma_{M\times N}(\mathscr{H})$, kjer je $\mathscr{H} := \{A \times B \,;\, A \in \mathscr{F}, B \in \mathscr{G}\}$. Če pišemo $A \times B = (A \times N) \cap (M \times B)$ in uporabimo zgled 2.2.6, vidimo, da je tudi $\mathscr{H} = \{C \cap D \,;\, C \in \pi^{-1}\mathscr{F}, D \in \rho^{-1}\mathscr{G}\}$. Očitno je $\pi^{-1}\mathscr{F}, \rho^{-1}\mathscr{G} \subseteq \mathscr{H}$. Po drugi strani pa vsaka množica iz $\mathscr{H}$ pripada $\sigma_{M\times N}\big(\pi^{-1}\mathscr{F} \cup \rho^{-1}\mathscr{G}\big)$. Torej je $\pi^{-1}\mathscr{F} \cup \rho^{-1}\mathscr{G} \subseteq \mathscr{H} \subseteq \sigma_{M\times N}\big(\pi^{-1}\mathscr{F} \cup \rho^{-1}\mathscr{G}\big)$ in po posledici 2.1.8 je potem $\sigma_{M\times N}\big(\pi^{-1}\mathscr{F} \cup \rho^{-1}\mathscr{G}\big) = \sigma_{M\times N}(\mathscr{H}) = \mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$. ∎

Trditev 2.2.12. *Naj bosta M in N množici in $\mathscr{U}$ družina množic na M, $\mathscr{V}$ pa družina množic na N. Naj bosta $\pi\colon M \times N \to M$ in $\rho\colon M \times N \to N$ koordinatni projekciji. Tedaj je $\sigma_M(\mathscr{U}) \otimes \sigma_N(\mathscr{V})$ σ-algebra, generirana s $\pi^{-1}\mathscr{U} \cup \rho^{-1}\mathscr{V}$, in tudi σ-algebra, generirana s pravokotniki $A \times B$, $A \times N$ in $M \times B$, kjer je $A \in \mathscr{U}$ in $B \in \mathscr{V}$.*

Dokaz. Po trditvah 2.2.5 in 2.2.11 je:

$$\begin{aligned}\sigma_M(\mathscr{U}) \otimes \sigma_N(\mathscr{V}) &= \sigma_{M\times N}\big(\pi^{-1}\sigma_M(\mathscr{U}) \cup \rho^{-1}\sigma_N(\mathscr{V})\big) = \\ &= \sigma_{M\times N}\big(\sigma_{M\times N}(\pi^{-1}\mathscr{U}) \cup \sigma_{M\times N}(\rho^{-1}\mathscr{V})\big)\,.\end{aligned}$$

Očitno je:

$$\pi^{-1}\mathscr{U} \cup \rho^{-1}\mathscr{V} \subseteq \sigma_{M\times N}(\pi^{-1}\mathscr{U}) \cup \sigma_{M\times N}(\rho^{-1}\mathscr{V}) \subseteq \sigma_{M\times N}\big(\pi^{-1}\mathscr{U} \cup \rho^{-1}\mathscr{V}\big)$$

in po posledici 2.1.8 je:

$$\sigma_{M\times N}\big(\pi^{-1}\mathscr{U} \cup \rho^{-1}\mathscr{V}\big) = \sigma_{M\times N}\big(\sigma_{M\times N}(\pi^{-1}\mathscr{U}) \cup \sigma_{M\times N}(\rho^{-1}\mathscr{V})\big) = \sigma_M(\mathscr{U}) \otimes \sigma_N(\mathscr{V})\,.$$

Očitno se σ-algebra, generirana s pravokotniki $A \times B$, $A \times N$ in $M \times B$, kjer je $A \in \mathscr{U}$ in $B \in \mathscr{V}$, ujema s σ-algebro, generirano z množico $\mathscr{W}^* := \{A \times B \,;\, A \in \mathscr{U}^*, B \in \mathscr{V}^*\}$, kjer je $\mathscr{U}^* := \mathscr{U} \cup \{M\}$ in $\mathscr{V}^* := \mathscr{V} \cup \{N\}$. Nadaljujemo podobno kot v dokazu trditve 2.2.11: opazimo, da je tudi $\mathscr{W}^* = \{C \cap D \,;\, C \in \pi^{-1}\mathscr{U}^*, D \in \rho^{-1}\mathscr{V}^*\}$. Očitno je $\pi^{-1}\mathscr{U}, \rho^{-1}\mathscr{V} \subseteq \mathscr{W}^*$, po drugi strani pa vsaka množica iz $\mathscr{W}^*$ pripada $\sigma_{M\times N}\big(\pi^{-1}\mathscr{U} \cup \rho^{-1}\mathscr{V}\big)$. Torej je $\pi^{-1}\mathscr{U} \cup \rho^{-1}\mathscr{V} \subseteq \mathscr{W}^* \subseteq \sigma_{M\times N}\big(\pi^{-1}\mathscr{U} \cup \rho^{-1}\mathscr{V}\big)$. Po posledici 2.1.8 in po prejšnjem je potem $\sigma_M(\mathscr{U}) \otimes \sigma_N(\mathscr{V}) = \sigma_{M\times N}\big(\pi^{-1}\mathscr{U} \cup \rho^{-1}\mathscr{V}\big) = \sigma_{M\times N}(\mathscr{W}^*)$. ∎

Trditev 2.2.13. *Za 2-števna topološka prostora X in Y velja $\mathscr{B}(X \times Y) = \mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$.*

Dokaz. Naj bo $\mathscr{U}$ števna baza topologije prostora X, $\mathscr{V}$ pa števna baza topologije prostora Y. Privzeti smemo, da je $X \in \mathscr{U}$ in $Y \in \mathscr{V}$. Tedaj je $\mathscr{W} := \{U \times V \,;\, U \in \mathscr{U}, V \in \mathscr{V}\}$ števna baza produktne topologije prostora $X \times Y$, torej je vsaka množica, ki je odprta v $X \times Y$, števna unija množic iz $\mathscr{W}$. Po trditvi 2.2.9 je $\mathscr{B}(X \times Y) = \sigma_{X\times Y}(\mathscr{W})$. Po trditvi 2.2.12 pa je to enako $\sigma_X(\mathscr{U}) \otimes \sigma_Y(\mathscr{V})$ in spet po trditvi 2.2.9 je to enako $\mathscr{B}(X) \otimes \mathscr{B}(Y)$. ∎

Definicija 2.2.10. Naj bodo $(M_1, \mathscr{F}_1), (M_2, \mathscr{F}_2), \ldots, (M_n, \mathscr{F}_n)$ merljivi prostori. Produktna σ-algebra na kartezijskem produktu $\prod_{k=1}^n M_k = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ je σ-algebra $\bigotimes_{k=1}^n F_k = \mathscr{F}_1 \otimes F_2 \otimes \cdots \otimes \mathscr{F}_n$, generirana z vsemi pravokotniki $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, kjer je $A_1 \in \mathscr{F}_1, A_2 \in \mathscr{F}_2, \ldots, A_n \in \mathscr{F}_n$.

Naslednji rezultat nam omogoča, da lahko produkte več σ-algeber gledamo tudi zaporedoma.

Trditev 2.2.14. *Naj bodo $(M, \mathscr{F})$, $(N, \mathscr{G})$ in $(P, \mathscr{H})$ merljivi prostori. Če identificiramo kartezijske produkte $(M \times N) \times P$, $M \times (N \times P)$ in $M \times N \times P$, velja $(\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}) \otimes \mathscr{H} = \mathscr{F} \otimes (\mathscr{G} \otimes \mathscr{H}) = \mathscr{F} \times \mathscr{G} \times \mathscr{H}$.*

DOKAZ. Dokazali bomo le, da je $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G} \otimes \mathscr{H} = (\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}) \otimes \mathscr{H}$, ostalo se dokaže podobno. Po definiciji je $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G} \otimes \mathscr{H} = \sigma_{M \times N \times P}(\mathscr{W})$, kjer je $\mathscr{W} = \{A \times B \times C \,;\, A \in \mathscr{F}, B \in \mathscr{G}, C \in \mathscr{H}\}$, in $(\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}) \otimes \mathscr{H} = \sigma_{M \times N \times P}(\mathscr{Z})$, kjer je $\mathscr{Z} := \{D \times C \,;\, D \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{G}, C \in \mathscr{H}\}$.

Očitno je $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{Z}$. Fiksirajmo $C \in \mathscr{H}$ in definirajmo $\mathscr{K} := \{D \subseteq M \times N \,;\, D \times C \in \sigma_{M \times N \times P}(\mathscr{W})\}$. Opazimo, da K vsebuje vse produkte $A \times B$, kjer je $A \in \mathscr{F}$ in $B \in G$. Nadalje pokažimo, da je $\mathscr{K}$ σ-algebra. Očitno $\mathscr{K}$ vsebuje prazno množico. Ker je $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\right) \times C = \bigcup_{k=1}^{\infty}(D_k \times C)$, je $\mathscr{K}$ zaprta za končne unije. Ker je $D^{\mathrm{c}} \times C = (D \times C)^{\mathrm{c}} \setminus (M \times N \times C^{\mathrm{c}})$, je $\mathscr{K}$ zaprta tudi za komplemente. Torej je $\mathscr{K}$ res σ-algebra. To pa pomani, da je $\mathscr{K}$ res σ-algebra, od koder sledi, da je $\mathscr{K} \supseteq \mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$. To pa pomeni, da je $\mathscr{Z} \subseteq \sigma_{M \times N \times P}(\mathscr{W})$. Velja torej $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{Z} \subseteq \sigma_{M \times N \times P}(\mathscr{W})$ in po posledici 2.1.8 je $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G} \otimes \mathscr{H} = \sigma_{M \times N \times P}(\mathscr{W}) = \sigma_{M \times N \times P}(\mathscr{Z}) = (\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}) \otimes \mathscr{H}$. ■

Iz trditev 2.2.12 in 2.2.14 lahko z indukcijo izpeljemo naslednji različici trditev 2.2.12 in 2.2.13 za več faktorjev (podrobnosti so prepuščene bralcu):

Trditev 2.2.15. *Naj bodo $M_1, M_2, \ldots, M_n$ množice. Označimo $M := \prod_{k=1}^{n} M_k$. Za vsak $k = 1, 2, \ldots, n$ naj bo $\mathscr{U}_k$ družina množic na M_k, $\pi_k \colon M \to M_k$ pa koordinatna projekcija. Tedaj je $\bigotimes_{k=1}^{n} \sigma_{M_k}(\mathscr{U}_k)$ σ-algebra, generirana z $\bigcup_{k=1}^{n} \pi_k^{-1}\mathscr{U}_k$, in tudi σ-algebra, generirana s pravokotniki $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, kjer je $A_k \in \mathscr{U}_k \cup \{M_k\}$ za $k = 1, 2, \ldots, n$.* ■

Trditev 2.2.16. *Za 2-števne topološke prostore $X_1, \ldots, X_n$ velja $\mathscr{B}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathscr{B}(X_k)$.* ■

DEFINICIJA 2.2.11. *Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}^n$* je σ-algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) := \prod_{k=1}^{n} \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Za $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definiramo Borelovo σ-algebro na A, $\mathscr{B}(A)$, kot sled σ-algebre $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ na A.

Opomba. Iz trditve 2.2.16 sledi, da je to tudi Borelova σ-algebra po definiciji 2.2.8, torej σ-algebra, generirana z odprtimi množicami.

Opomba. Če identificiramo $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{m+n}$, velja $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^{m+n})$.

2.3 Merljive preslikave

DEFINICIJA 2.3.1. Naj bosta $(M, \mathscr{F})$ in $(N, \mathscr{G})$ merljiva prostora. Preslikava $h \colon M \to N$ je *merljiva glede na σ-algebri $\mathscr{F}$ in $\mathscr{G}$* ali krajše *$\mathscr{F}/\mathscr{G}$-merljiva*, če za poljubno množico $B \in \mathscr{G}$ velja $f^{-1}(B) \in \mathscr{F}$.

ZGLED 2.3.2. Vsaka konstantna preslikava je merljiva. □

ZGLED 2.3.3. Naj bo:

$$\begin{aligned} M &:= \{1,2,3,4\}\,, & \mathscr{F} &:= \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3,4\}, \{1,2\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\big\}\,, \\ N &:= \{5,6,7\}\,, & \mathscr{G} &:= \big\{\emptyset, \{5\}, \{6,7\}, \{5,6,7\}\big\}\,. \end{aligned}$$

Definirajmo preslikavi $h_1, h_2\colon\ \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ po predpisu:

$$\begin{array}{llll} h_1(1) := 5 & h_2(2) := 5 & h_2(3) := 6 & h_2(4) := 7\,, \\ h_2(1) := 7 & h_2(2) := 7 & h_2(3) := 5 & h_2(4) := 6\,. \end{array}$$

Tedaj je preslikava h_1 merljiva glede na $\mathscr{F}$ in $\mathscr{G}$, preslikava h_2 pa ni merljiva, saj je $\{5\} \in \mathscr{G}$, medtem ko je $h_2^{-1}(\{5\}) = \{3\} \notin \mathscr{F}$. □

ZGLED 2.3.4. Indikator merljive množice je merljiva funkcija. Natančneje, če je $(M, \mathscr{M})$ merljiv prostor in $A \in \mathscr{M}$, indikator množice A definiramo kot funkcijo $\mathbf{1}_A\colon\ \Omega \to \{0,1\}$, definirano po predpisu:

$$\mathbf{1}_A(\omega) := \mathbf{1}(\omega \in A) = \begin{cases} 1 & ; \omega \in A \\ 0 & ; \omega \notin A \end{cases}$$

Ta funkcija je $\mathscr{M}/\mathscr{P}(\{0,1\})$-merljiva, saj so vse možne praslike le $\emptyset, A, A^{\mathrm{c}}$ in M. To se ohrani, če indikator gledamo kot funkcijo v katero koli množico $N \subseteq \{0,1\}$: $\mathbf{1}_A$ je $\mathscr{M}/\mathscr{P}(N)$-merljiva funkcija. □

ZGLED 2.3.5. Celi del je $\mathscr{B}(\mathbb{R})/\mathscr{P}(\mathbb{R})$-merljiva funkcija. Če namreč označimo $f(x) := \lfloor x \rfloor$, za vsako vsako množico $B \subseteq \mathbb{R}$ velja, da je $f^{-1}(B)$ unija števno mnogo intervalov oblike $[k, k+1)$. □

ZGLED 2.3.6. Če je $(M, \mathscr{F})$ merljiv prostor, $M' \subseteq M$ in $\mathscr{F}'$ sled σ-algebre $\mathscr{F}$ na M', je inkluzija $\iota\colon\ M' \to M$ merljiva. Za vsak $A \in \mathscr{M}$ je namreč $\iota^{-1}(A) = A \cap M'$, kar je po definiciji 2.2.1 element σ-algebre $\mathscr{F}'$. □

Opomba 2.3.1. Če sta $(M, \mathscr{F})$ in $(N, \mathscr{G})$ merljiva prostora, je preslikava $h\colon\ M \to N$ $\mathscr{F}/\mathscr{G}$-merljiva natanko tedaj, ko je $h^{-1}\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$.

Opomba 2.3.2. Če je $h\colon\ M \to N$ preslikava in $\mathscr{G}$ σ-algebra na N, je povlek $h^{-1}\mathscr{G}$ je najmanjša taka σ-algebra $\mathscr{F}$ na M, da je preslikava h $\mathscr{F}/\mathscr{G}$-merljiva.

Trditev 2.3.3. *Naj bo $\mathscr{F}$ σ-algebra na $\mathscr{M}$ in $\mathscr{V}$ družina množic na N. Naj bo $h\colon\ M \to N$ preslikava in naj za vsak $B \in \mathscr{V}$ velja $h^{-1}(B) \in \mathscr{F}$. Tedaj je h $\mathscr{F}/\sigma_N(\mathscr{V})$-merljiva.*

DOKAZ. Po predpostavki je $h^{-1}(\mathscr{V}) \subseteq \mathscr{F}$. Ker je $\mathscr{F}$ σ-algebra, je po opombi 2.1.6 in trditvi 2.2.5 tudi $h^{-1}\sigma_N(\mathscr{V}) = \sigma_M(h^{-1}\mathscr{V}) \subseteq \mathscr{F}$ in po opombi 2.3.1 je potem h res $\mathscr{F}/\sigma_N(\mathscr{V})$-merljiva. ■

Posledica 2.3.4. *Vsaka zvezna preslikava med topološkima prostoroma je merljiva glede na ustrezni Borelovi σ-algebri.*

ZGLED 2.3.7. Seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje so merljive operacije. Natančneje, funkcije:

$$\begin{array}{rlr} s\colon & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, & s(x,y) := x + y\,, \\ d\colon & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, & d(x,y) := x - y\,, \\ m\colon & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, & m(x,y) := xy\,, \\ q\colon & \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}\,, & q(x,y) := \dfrac{x}{y} \end{array}$$

so merljive, če vse prostore opremimo z ustreznimi Borelovimi σ-algebrami. □

Definicija 2.3.8. *Izomorfizem merljivih prostorov* $(M, \mathscr{F})$ *in* $(N, \mathscr{G})$ je taka merljiva bijektivna preslikava $h\colon M \to N$, da je tudi h^{-1} merljiva. Če med merljivima prostoroma obstaja izomorfizem, pravimo, da sta *izomorfna*. Izomorfizmu, ki slika iz merljivega prostora v isti merljivi prostor, pravimo *avtomorfizem*.

Zgled 2.3.9. Vsak homeomorfizem med topološkima prostoroma je tudi izomorfizem med ustreznima merljivima prostoroma, kjer vzamemo Borelovi σ-algebri. □

Opomba 2.3.5. Vsaka bijektivna afina transformacija $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je homeomorfizem, torej je tudi avtomorfizem merljivega prostora $\big(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\big)$. Borelove množice so torej *invariantne* za bijektivne afine transformacije: če je $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ Borelova, je tudi $T(B)$ Borelova.

2.4 Operacije, ki ohranjajo merljivost preslikav

Trditev 2.4.1. *Naj bodo $(M, \mathscr{M})$, $(N, \mathscr{N})$ in $(S, \mathscr{S})$ merljivi prostori, $f\colon M \to N$ naj bo $\mathscr{M}/\mathscr{N}$-merljiva, $g\colon N \to S$ pa naj bo $\mathscr{N}/\mathscr{S}$-merljiva. Tedaj je preslikava $g \circ f$ $\mathscr{M}/\mathscr{S}$-merljiva.*

Dokaz. Velja $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$. Če je $C \in \mathscr{S}$, je $g^{-1}(C) \in \mathscr{N}$ in $f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathscr{M}$. ■

Trditev 2.4.2. *Naj bosta $(M, \mathscr{M})$ in $(N, \mathscr{N})$ merljiva prostora in naj bo $f\colon M \to N$ $\mathscr{M}/\mathscr{N}$-merljiva preslikava. Nadalje naj bo $M' \subseteq M$ in $\mathscr{F}'$ sled σ-algebre $\mathscr{F}$ na M'. Tedaj je zožitev preslikave f na M' $\mathscr{F}'/\mathscr{G}$-merljiva.*

Dokaz. Dana zožitev je kompozitum $f \circ \iota$, kjer je ι inkluzija iz M' v M. Po zgledu 2.3.6 je ta inkluzija merljiva in po trditvi 2.4.1 je kompozitum merljivih preslikav merljiv. ■

Trditev 2.4.3. *Naj bosta $(M, \mathscr{M})$ in $(N, \mathscr{N})$ merljiva prostora, naj bo $N' \subseteq N$ in $\mathscr{N}'$ sled σ-algebre $\mathscr{N}$ na N'. Dana naj bo še preslikava $f'\colon M \to N'$. Naj bo $f\colon M \to N$ definirana z istim predpisom kot f'.*

(1) *Če je f' $\mathscr{M}/\mathscr{N}'$-merljiva, je f $\mathscr{M}/\mathscr{N}$-merljiva.*

(2) *Če je f $\mathscr{M}/\mathscr{N}$-merljiva in $N' \in \mathscr{N}$, je f' $\mathscr{M}/\mathscr{N}'$-merljiva.*

Dokaz.
(1): Velja $f = \iota \circ f'$, kjer je ι inkluzija iz N' v N. Trditev tako sledi iz zgleda 2.3.6 in trditve 2.4.1.
(2): Dokazati moramo, da je $(f')^{-1}(B) = f^{-1}(B) \in \mathscr{M}$ za vse $B \in \mathscr{N}'$. Toda če je $N' \in \mathscr{N}$, je po trditvi 2.2.2 tudi $B \in \mathscr{N}$, zato je res $f^{-1}(B) \in \mathscr{M}$. ■

Trditev 2.4.4. *Naj bosta $(M, \mathscr{M})$ in $(N, \mathscr{N})$ merljiva prostora in naj bo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ali $A_1, A_2, \ldots$ končna oz. števno neskončna razčlenitev (particija) množice M, pri čemer naj bodo vse množice A_k merljive, torej elementi σ-algebre $\mathscr{M}$. Za vsak k naj bo $\mathscr{M}_k$ sled σ-algebre $\mathscr{M}$ na A_k in naj bo $h_k\colon A_k \to N$ $\mathscr{M}_k/\mathscr{N}$-merljiva preslikava. Tedaj je tudi preslikava $h\colon M \to N$, definirana po predpisu $h(\omega) := h_k(\omega)$, če je $\omega \in A_k$, $\mathscr{M}/\mathscr{N}$-merljiva.*

Dokaz. Za vsak $B \in \mathscr{N}$ velja $h^{-1}(B) = \bigcup_k h_k^{-1}(B)$. Za vsak k velja $h_k^{-1}(B) \in \mathscr{M}_k$, a ker je $A_k \in \mathscr{M}$, po trditvi 2.2.2 velja $\mathscr{M}_k \subseteq \mathscr{M}$. Trditev je s tem dokazana. ■

Zgled 2.4.1. V zgledu 2.3.7 smo videli, da so seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje merljive operacije, če jih gledamo na $\mathbb{R}$. Iz trditev 2.4.3 in 2.4.4 pa sledi, da so merljive tudi, če jih po definicijah iz razdelka 1.1 gledamo na $[-\infty, \infty]$. Natančneje, funkcije:

$$\begin{aligned}
s&\colon \big([-\infty,\infty]\times[-\infty,\infty]\big)\setminus\{(-\infty,\infty),(\infty,-\infty)\}\to[-\infty,\infty]\,, && s(x,y):=x+y\,,\\
d&\colon \big([-\infty,\infty]\times[-\infty,\infty]\big)\setminus\{(-\infty,-\infty),(\infty,\infty)\}\to[-\infty,\infty]\,, && d(x,y):=x-y\,,\\
m&\colon [-\infty,\infty]\times[-\infty,\infty]\to[-\infty,\infty]\,, && m(x,y):=xy\,,\\
q&\colon [-\infty,\infty]\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})\to[-\infty,\infty]\,, && q(x,y):=\frac{x}{y}
\end{aligned}$$

so merljive glede na sled produktne σ-algebre $\mathscr{B}([-\infty,\infty]) \otimes \mathscr{B}([-\infty,\infty])$ na ustreznem definicijskem območju in na $\mathscr{B}([-\infty,\infty])$. □

Trditev 2.4.5. *Naj bodo $(\Omega, \mathscr{F})$, $(M, \mathscr{M})$ in $(N, \mathscr{N})$ merljivi prostori in $g\colon \Omega \to M$ $\mathscr{F}/\mathscr{M}$-merljiva, $h\colon \Omega \to N$ pa $\mathscr{F}/\mathscr{N}$-merljiva preslikava. Tedaj je preslikava $F\colon \Omega \to M \times N$, definirana po predpisu $F(\omega) := \big(g(\omega), h(\omega)\big)$, merljiva glede na $\mathscr{F}$ in $\mathscr{M} \otimes \mathscr{N}$.*

Dokaz. Za poljubni množici $A \in \mathscr{M}$ in $B \in \mathscr{N}$ velja $F^{-1}(A \times B) = g^{-1}(A) \cap h^{-1}(B) \in \mathscr{F}$. Merljivost preslikave F zdaj sledi iz trditve 2.3.3. ■

Trditev 2.4.6. *Naj bo $(\Omega, \mathscr{F})$ merljiv prostor in naj bosta $g\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ in $h\colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ $\mathscr{F}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$-merljivi funkciji. Tedaj so vse množice:*

$$\begin{gathered}
\{\omega\in\Omega\,;\,g(\omega)=h(\omega)\}\,,\qquad \{\omega\in\Omega\,;\,g(\omega)<h(\omega)\}\,,\qquad \{\omega\in\Omega\,;\,g(\omega)\le h(\omega)\}\,,\\
\{\omega\in\Omega\,;\,g(\omega)>h(\omega)\}\,,\qquad \{\omega\in\Omega\,;\,g(\omega)\ge h(\omega)\}
\end{gathered}$$

merljive, t. j. pripadajo $\mathscr{F}$.

Dokaz. Dovolj je dokazati za prvi dve množici, saj je tretja unija prvih dveh, četrto in peto pa lahko dobimo iz druge in tretje z zamenjavo funkcij g in h. Če definiramo preslikavo $F\colon \Omega \to [-\infty, \infty] \times [-\infty, \infty]$ po predpisu $F(\omega) := \big(g(\omega), h(\omega)\big)$, je prva množica enaka $F^{-1}(E)$, druga množica pa $F^{-1}(M)$, kjer je:

$$\begin{aligned}
E &:= \{(x,y)\in[-\infty,\infty]\times[-\infty,\infty]\,;\,x=y\}\,,\\
M &:= \{(x,y)\in[-\infty,\infty]\times[-\infty,\infty]\,;\,x<y\}\,.
\end{aligned}$$

Množica $E \cap \mathbb{R}^2$ je zaprta, množica $M \cap \mathbb{R}^2$ pa odprta v $\mathbb{R}^2$. Zato sta ti dve množici merljivi v $\mathbb{R}^2$, t. j. pripadata $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$. Ker je $\mathbb{R}^2 \in \mathscr{B}([-\infty, \infty]) \otimes \mathscr{B}([-\infty, \infty])$, množici $E \cap \mathbb{R}^2$ in $M \cap \mathbb{R}^2$ po trditvi 2.2.2 pripadata $\mathscr{B}([-\infty, \infty]) \otimes \mathscr{B}([-\infty, \infty])$. Potem pa je tudi:

$$\begin{aligned}
E &= (E\cap\mathbb{R}^2)\cup\{(-\infty,-\infty),(\infty,\infty)\}\in\mathscr{B}([-\infty,\infty])\otimes\mathscr{B}([-\infty,\infty])\,,\\
M &= (M\cap\mathbb{R}^2)\cup(\mathbb{R}\times\{\infty\}\in\mathscr{B}([-\infty,\infty])\otimes\mathscr{B}([-\infty,\infty])\,.
\end{aligned}$$

Po trditvi 2.4.5 je preslikava F merljiva glede na $\mathscr{F}$ in $\mathscr{B}([-\infty, \infty]) \otimes \mathscr{B}([-\infty, \infty])$, torej dani množici res pripadata $\mathscr{F}$. ■

Trditev 2.4.7. *Vsota, razlika, produkt in količnik merljivih funkcij z vrednostmi v $[-\infty, \infty]$ so merljive funkcije. Natančneje, če je $(\Omega, \mathscr{F})$ merljiv prostor in sta $g, h\colon\ \Omega \to [-\infty, \infty]$ $\mathscr{F}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$-merljivi preslikavi, znak $*$ pa označuje seštevanje, odštevanje, množenje ali deljenje, je množica:*

$$D := \{\omega \in \Omega\ ;\ \textit{vrednost } g(\omega) * h(\omega) \textit{ je definirana}\}$$

merljiva (t. j. pripada $\mathscr{F}$), funkcija $g * h\colon\ D \to [-\infty, \infty]$ pa je merljiva glede na sled σ-algebre $\mathscr{F}$ na D in Borelovo σ-algebro $\mathscr{B}([-\infty, \infty])$.

Dokaz. Po trditvi 2.4.5 je funkcija $F(\omega) := \big(g(\omega), h(\omega)\big)$ merljiva glede na $\mathscr{F}$ in $\mathscr{B}([-\infty, \infty]) \otimes \mathscr{B}([-\infty, \infty])$. Nadalje označimo z B definicijsko območje funkcije $k(x, y) := x*y$. Zlahka se prepričamo, da ta množica pripada $\mathscr{B}([-\infty, \infty])\otimes\mathscr{B}([-\infty, \infty])$ ne glede na izbiro računske operacije $*$. Velja $D = F^{-1}(B)$, torej je res $D \in \mathscr{F}$. Če z F_D označimo zožitev preslikave F na množico D, z $\mathscr{F}_D$ pa sled σ-algebre $\mathscr{F}$ na množici D, je F_D po trditvi 2.4.2 merljiva glede na $\mathscr{F}_D$ in $\mathscr{B}([-\infty, \infty]) \otimes \mathscr{B}([-\infty, \infty])$. Ker je $B \in \mathscr{B}([-\infty, \infty]) \otimes \mathscr{B}([-\infty, \infty])$, pa je F_D po trditvi 2.4.3 kot preslikava iz D v B tudi $\mathscr{F}_D/\mathscr{G}$-merljiva, pri čemer je $\mathscr{G}$ sled σ-algebre $\mathscr{B}([-\infty, \infty]) \otimes \mathscr{B}([-\infty, \infty])$ na množici B. V zgledu 2.4.1 smo videli, da je k merljiva glede na $\mathscr{G}$ in $\mathscr{B}([-\infty, \infty])$. Končno je po trditvi 2.4.1 funkcija $g * h = k \circ F$ merljiva glede na $\mathscr{F}_D$ in $\mathscr{B}([-\infty, \infty])$. ■

Merljiva sta tudi supremum in infimum funkcij (glej razdelek 1.2). Ta dva sta definirana povsod, kjer so definirane funkcije, saj ima po trditvi 1.2.9 vsaka množica na $[-\infty, \infty]$ svoj supremum in infimum.

Definicija 2.4.2. Če je f_λ, $\lambda \in \Lambda$, družina funkcij iz množice M v $[-\infty, \infty]$, označimo s $\sup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ funkcijo, ki ω preslika v $\sup_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(\omega)$, z $\inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ pa označimo funkcijo, ki ω preslika v $\inf_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(\omega)$,

Trditev 2.4.8. *Naj bo $(\Omega, \mathscr{F})$ merljiv prostor in naj bo dano končno ali neskončno zaporedje funkcij $f_1, f_2, \ldots\colon\ \Omega \to [-\infty, \infty]$. Če so vse funkcije f_k $\mathscr{F}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$-merljive, to velja tudi za funkciji $\sup_k f_k$ in $\inf_k f_k$.*

Dokaz. Označimo $s := \sup_k f_k$ in $m := \inf_k f_k$. Iz definicij 1.2.1 in 1.2.2 ter opombe 1.2.2 in njene različice za infimum sledi, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja:

$$s^{-1}\big([-\infty, x]\big) = \bigcap_k f_k^{-1}\big([-\infty, x]\big) \quad \text{in} \quad m^{-1}\big([x, \infty]\big) = \bigcap_k f_k^{-1}\big([x, \infty]\big)\,.$$

Vse te množice pripadajo $\mathscr{F}$. Merljivost funkcij s in m zdaj sledi iz trditev 2.1.9 in 2.3.3. ■

Iz prejšnje trditve ter trditev 1.4.9 in 1.4.10 zdaj dobimo naslednji rezultat:

Posledica 2.4.9. *Če je $(\Omega, \mathscr{F})$ merljiv prostor in je $f_1, f_2, \ldots\colon\ \Omega \to [-\infty, \infty]$ zaporedje $\mathscr{F}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$-merljivih funkcij, to velja tudi za funkciji $\limsup_{n\to\infty} f_n$ in $\liminf_{n\to\infty} f_n$.*

Definicija 2.4.3. Za zaporedje funkcij $f_1, f_2, \ldots : \Omega \to [-\infty, \infty]$ definiramo funkcijo $\lim_{n\to\infty} f_n$ kot funkcijo f, definirano na množici točk $\omega \in \Omega$, za katero je zaporedje $f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots$ konvergentno, in deluje po predpisu $f(\omega) := \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$.

Trditev 2.4.10. *Naj bo $(\Omega, \mathscr{F})$ merljiv prostor in naj bo dano zaporedje funkcij $f_1, f_2, \ldots : \Omega \to [-\infty, \infty]$. Označimo z D množico točk $\omega \in \Omega$, za katero je zaporedje $f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots$ konvergentno. Če so funkcije $f_1, f_2, \ldots$ $\mathscr{F}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$-merljive, je tudi $D \in \mathscr{F}$, funkcija $\lim_{n\to\infty} f_n$ pa je merljiva glede na sled σ-algebre $\mathscr{F}$ na množici D in σ-algebro $\mathscr{B}([-\infty, \infty])$.*

Dokaz. Po trditvi 1.4.4 velja $D = \{\omega \in \Omega ; \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega) = \limsup_{n\to\infty} f_n(\omega)$. Da je ta množica merljiva, tako sledi iz trditve 2.4.6 in posledice 2.4.9. Velja $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_{n,D} = \limsup_{n\to\infty} f_{n,D}$, kjer je $f_{n,D}$ zožitev funkcije f_n na množico D. Po trditvi 2.4.2 so te funkcije merljive glede na sled σ-algebre $\mathscr{F}$ na množici D in σ-algebro $\mathscr{B}([-\infty, \infty])$ in po posledici 2.4.9 to velja tudi za $\limsup_{n\to\infty} f_{n,D}$. ■

Posledica 2.4.11. *Naj bo $(\Omega, \mathscr{F})$ merljiv prostor in naj bo dano zaporedje $\mathscr{F}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$-merljivih funkcij $f_1, f_2, \ldots : \Omega \to [-\infty, \infty]$. Označimo z D množico točk $\omega \in \Omega$, za katero je zaporedje $f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots$ konvergentno. Nadalje naj bo $g \colon \Omega \to [-\infty, \infty]$ še ena $\mathscr{F}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$-merljiva funkcija. Tedaj je tudi funkcija:*

$$f(\omega) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) & ; \omega \in D \\ g(\omega) & ; \omega \notin D \end{cases}$$

merljiva. Po prejšnji trditvi je namreč funkcija $\lim_{n\to\infty} f_n$ merljiva glede na sled σ-algebre $\mathscr{F}$ na D, zožitev funkcije g na D je po trditvi 2.4.2 merljiva glede na sled σ-algebre $\mathscr{F}$ na $\Omega \setminus D$ in zlepek f je merljiv po trditvi 2.4.4.

2.5 Borelovo merljive funkcije kot limite

Trditev 2.5.1. *Če je $(M, \mathscr{M})$ merljiv prostor, je vsaka $\mathscr{M}/\mathscr{B}([-\infty, \infty])$-merljiva funkcija limita zaporedja funkcij iz M v $\mathbb{R}$, ki so $\mathscr{M}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-merljive in imajo končne zaloge vrednosti. Vsaka $\mathscr{M}/\mathscr{B}([0, \infty])$-merljiva funkcija pa je limita naraščajočega zaporedja funkcij iz M v $[0, \infty)$, ki so $\mathscr{M}/\mathscr{B}([0, \infty))$-merljive in imajo končne zaloge vrednosti.*

Dokaz. Najprej dokažimo drugi del trditve. Naj bo torej h $\mathscr{M}/\mathscr{B}([0, \infty])$-merljiva. Za $n = 0, 1, 2, \ldots$ definirajmo:

$$h_n(x) := \begin{cases} 2^{-n} \lfloor 2^n h(x) \rfloor & ; h(x) < 2^n \\ 2^n & ; h(x) \ge 2^n , \end{cases}$$

kjer $\lfloor \cdot \rfloor$ označuje celi del. V zgledu 2.3.5 smo videli, da je celi del merljiva funkcija. Iz tega ter trditev 2.4.1, 2.4.2, 2.4.4 in 2.4.7 dobimo, da so vse funkcije h_n $\mathscr{M}/\mathscr{B}([0, \infty])$-merljive. Poleg tega ima funkcija h_n končno zalogo vrednosti $\{k \cdot 2^{-n} ; k = 0, 1, \ldots, 2^n\}$.

Pokažimo, da je $h_0, h_1, \ldots$ naraščajoče zaporedje. Za ta namen najprej opazimo, da za vsako realno število y velja $\frac{1}{2}\lfloor 2y \rfloor \ge \lfloor y \rfloor$. Sledi, da je $h_{n+1}(x) \ge h_n(x)$, brž ko je $h(y) < 2^n$.

A če je $2^n \le h(x) < 2^{n+1}$, je $h_{n+1}(x) = 2^{-n-1}\lfloor 2^{n+1}h(x)\rfloor \ge 2^{-n-1}\lfloor 2^{n+1}\cdot 2^n\rfloor = 2^n \ge h(x) \ge h_n(x)$. Končno, če je $h(x) \ge 2^{n+1}$, je $h_n(x) = h_{n+1}(x) = 2^n$.

Da dokončamo dokaz drugega dela trditve, je treba pokazati še, da za vse $x \in M$ velja $h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)$. Če je $h(x) < \infty$, za dovolj velike n velja $h_n(x) = 2^{-n}\lfloor 2^n h(x)\rfloor$; tedaj je $h(x) - 2^{-n} < h_n(x) \le h(x)$. Z uporabo posledice 1.5.3 in izreka o sendviču (trditev 1.4.5) dobimo, da je res $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x)$. Če pa je $h(x) = \infty$, za vse n velja $h_n(x) = 2^n$, torej je $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \infty = h(x)$.

Za dokaz prvega dela trditve pa pišimo $h(x) = h_+(x) - h_-(x)$, kjer je:

$$h^+(x) := \max\{h(x), 0\}\,, \qquad h^-(x) := -\min\{h(x), 0\}\,.$$

Po že dokazanem drugem delu trditve obstajajo take $\mathscr{M}/\mathscr{B}([0,\infty])$-merljive funkcije $h_0^+, h_1^+, \dots$ in $h_0^-, h_1^-, \dots$, da za vse $x \in M$ velja $h_+(x) = \lim_{n\to\infty} h_n^+(x)$ in $h_-(x) = \lim_{n\to\infty} h_n^-(x)$. Tedaj so tudi funkcije $h_n(x) := h_n^+(x) - h_n^-(x)$ merljive. Konvergence zaporedja h_n sicer ne moremo izpeljati neposredno z uporabo posledice 1.5.3 (zakaj ne?). Toda če je $h(x) \ge 0$, je $h(x) = h^+(x)$, $h_n(x) = h_n^+(x)$ in $h^-(x) = h_n^-(x) = 0$. Sledi $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} h_n^+(x) = h^+(x) = h(x)$. Podobno, če je $h(x) \le 0$, je $h(x) = -h^-(x)$, $h_n(x) = -h_n^-(x)$ in $h^+(x) = h_n^+(x) = 0$. Z uporabo trditve 1.5.1 dobimo, da je $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty}(-h_n^-(x)) = -\lim_{n\to\infty} h_n^-(x) = -h^-(x) = h(x)$. Dana trditev je tako dokazana. ■

Prejšnja trditev pride marsikdaj prav. Eden od primerov je naslednji: naj bo M neprazna množica, $(N, \mathscr{N})$ in $(S, \mathscr{S})$ pa naj bosta merljiva prostora. Dani naj bosta preslikavi $f\colon M \to N$ in $g\colon N \to S$, pri čemer naj bo g $\mathscr{N}/\mathscr{S}$-merljiva. Iz opombe 2.3.1 sledi, da je preslikava f $f^{-1}\mathscr{N}/\mathscr{N}$-merljiva. Po trditvi 2.4.1 je potem preslikava $h := g\circ f$ $f^{-1}\mathscr{N}/\mathscr{N}$-merljiva.

S pomočjo trditve 2.5.1 pa bomo izpeljali naslednji rezultat, ki je neke vrste obrat ugotovitve iz prejšnjega odstavka:

Trditev 2.5.2 (Doob–Dynkinova lema). *Naj bo M neprazna množica, $(N, \mathscr{N})$ merljiv prostor. Dani naj bosta še preslikava $f\colon M \to N$ in funkcija $h\colon M \to [-\infty, \infty]$. Če je h $f^{-1}\mathscr{N}/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$-merljiva, obstaja taka $\mathscr{N}/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$-merljiva funkcija g, da je $h = g \circ f$.*

Dokaz. Najprej privzemimo, da ima h končno zalogo vrednosti $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Če označimo $A_k := h^{-1}(\{z_k\})$, lahko pišemo $h = \sum_{k=1}^n z_k \mathbf{1}_{A_k}$. Ker za vsak $k = 1, 2, \dots, n$ velja $\{z_k\} \in \mathscr{B}([-\infty,\infty])$, je $A_k \in f^{-1}\mathscr{N}$, kar pomeni, da obstaja taka množica $B_k \in \mathscr{N}$, da je $A_k = f^{-1}(B_k)$. Tedaj pa je $h = \sum_{k=1}^n z_k \mathbf{1}_{f^{-1}(A_k)} = \sum_{k=1}^n z_k(\mathbf{1}_{B_k}\circ f) = g \circ f$, kjer je $g = \sum_{k=1}^n z_k \mathbf{1}_{B_k}$ (ker so $z_1, \dots, z_k$ realna števila, z obstojem vsote ni težav). Iz zgledov 2.3.2 in 2.3.4 ter trditve 2.4.7 dobimo, da je g $\mathscr{N}/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$-merljiva.

Vzemimo zdaj splošno funkcijo h. Po trditvi 2.5.1 obstaja zaporedje $\mathscr{M}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$-merljivih funkcij $h_1, h_2, \dots$ s končnimi zalogami vrednosti, ki konvergira proti h. Po prejšnjem za vsak n obstaja taka $\mathscr{N}/\mathscr{B}([-\infty,\infty])$-merljiva funkcija g_n, da je $h_n = g_n \circ f$. Definirajmo:

$$g(y) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} g_n(y) & ; \text{ zaporedje } g_1(y), g_2(y), \dots \text{ je konvergentno v } [-\infty,\infty] \\ 0 & ; \text{ sicer.} \end{cases}$$

Iz zgleda 2.3.2 in posledice 2.4.11 sledi, da je g merljiva. Naj bo zdaj $x \in M$ in $y = f(x)$. Zaporedje $h_n(x) = g_n(y)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ima limito $h(x)$, torej je konvergentno, zato je $g(f(x)) = g(y) = \lim_{n\to\infty} g_n(y) = h(x)$. Ker to velja za vsak $x \in M$, je tudi tokrat $h = g \circ f$. ■

3.

Mera

3.1 Definicija in osnovni zgledi

DEFINICIJA 3.1.1. Naj bo $(\Omega, \mathscr{F})$ merljiv prostor. *Pozitivna mera* na $(\Omega, \mathscr{F})$ je funkcija iz $\mathscr{F}$ v $[0, \infty]$, *realna mera* na $(\Omega, \mathscr{F})$ pa je funkcija iz $\mathscr{F}$ v $\mathbb{R}$. Pri tem morata biti izpolnjena še naslednja dva pogoja:

(1) $\mu(\emptyset) = 0$.

(2) Če so $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{F}$ disjunktne množice, je $\mu\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$.

Verjetnostna mera na $(\Omega, \mathscr{F})$ je pozitivna mera $\mathbb{P}$, za katero je $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Opomba 3.1.1. Vsaka verjetnostna mera je tudi realna mera.

Opomba 3.1.2. Zahtevi (2) pravimo *števna aditivnost*. Namesto $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}$ lahko pišemo tudi $\bigcup_{k=1}^{\infty}$. Pri pozitivnih merah lahko po trditvi 1.6.6 vsoto $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ po definiciji 1.6.2 zamenjamo z vsoto $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ po definiciji 1.6.1. Pri realnih merah pa je po trditvi 1.7.6 ekvivalentno zahtevati, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ absolutno konvergentna in $\mu\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Opomba 3.1.3. Pod predpostavko (1) števna aditivnost implicira *končno aditivnost*, ki pomeni, da za poljubno končno zaporedje disjunktnih množic $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathscr{F}$ velja $\mu\big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. Velja namreč $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$ in $\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n) + 0 + 0 + \cdots$.

Posledica 3.1.4. *Pod predpostavko (1) je števna aditivnost ekvivalentna zahtevi, da za vsako števno množico Λ in poljubne disjunktne množice A_λ, $\lambda \in \Lambda$, velja $\mu\big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\big) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mu(A_\lambda)$.*

DOKAZ. Če je Λ končna, lahko pišemo $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ ter velja $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{k=1}^{n} A_{\lambda_k}$ in $\sum_{\lambda\in\Lambda} \mu(A_\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_{\lambda_k})$. Podobno, če je Λ števno neskončna, lahko pišemo $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ ter velja $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{\lambda_k}$ in $\sum_{\lambda\in\Lambda} \mu(A_\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{\lambda_k})$. ■

DEFINICIJA 3.1.2. Mera μ je *neomejeno aditivna*, če za poljubne disjunktne množice A_λ, $\lambda \in \Lambda$, velja $\mu\big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\big) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mu(A_\lambda)$.

Zgled 3.1.3. Ničelna mera, t. j. $\mu(A) = 0$ za vse $A \in \mathscr{F}$, je neomejeno aditivna. $\square$

Zgled 3.1.4. Za $x \in \Omega$ definiramo *Diracovo mero* δ_x po predpisu:

$$\delta_x(A) := \mathbf{1}(x \in A) := \mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & ; \, x \in A \\ 0 & ; \, x \notin A \end{cases}$$

To mero lahko gledamo na celi potenčni množici $\mathscr{P}(\Omega)$ in je neomejeno aditivna verjetnostna mera. $\square$

Zgled 3.1.5. Vzemimo $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathscr{F} = \big\{\emptyset, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}\big\}$ in definirajmo $\mu\big(\{1,3,5\}\big) := 300$ in $\mu\big(\{2,4,6\}\big) := -100$. Če naj bo μ mera, mora biti seveda $\mu(\emptyset) = 0$ in tudi $\mu\big(\{1,2,3,4,5,6\}\big) = 200$. Tako definirana funkcija je realna mera in je neomejeno aditivna. Kot bomo videli v zgledu 3.1.7, se da le-ta razširiti na celo potenčno množico, a ne enolično. $\square$

Zgled 3.1.6. Če je $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ poljubna funkcija, je predpis:

$$\mu(A) := \sum_{\omega \in A} f(\omega) \tag{3.1.1}$$

neomejeno aditivna pozitivna mera na $\mathscr{P}(\Omega)$. To sledi iz posledice 1.6.11. Podobno, če je $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ taka funkcija, da je $\sum_{\omega\in\Omega} |f(\omega)| < \infty$, predpis (3.1.1) določa neomejeno aditivno realno mero na $\mathscr{P}(\Omega)$. To sledi iz posledice 1.7.11.

Verjetnostno mero dobimo natanko tedaj, ko f slika v $[0,1]$ in velja $\sum_{\omega\in\Omega} f(\omega) = 1$.

Če postavimo $f(\omega) = 1$ za vse ω, mera μ predstavlja kardinalnost – to je *mera, ki šteje*. Tudi to je torej neomejeno aditivna mera. $\square$

Opomba 3.1.5. Če je Ω števna množica, je vsaka mera na $\big(\Omega, \mathscr{P}(\Omega)\big)$ oblike (3.1.1), saj lahko postavimo $f(\omega) := \mu(\{\omega\})$, zveza (3.1.1) pa sledi iz števne aditivnosti in posledice 3.1.4.

Zgled 3.1.7. Kot smo videli v prejšnji opombi, mora biti vsaka razširitev mere μ na celo potenčno množico oblike (3.1.1). Ustrezne funkcije f so natančno tiste, za katere velja $f(1) + f(3) + f(5) = 300$ in $f(2) + f(4) + f(6) = -100$. $\square$

Zgled 3.1.8. Naj bo $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathscr{F}$ pa naj bo σ-algebra, ki jo sestavljajo števne množice in njihovi komplementi. Tedaj je predpis:

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & ; \, A \text{ je števna} \\ 1 & ; \, A \text{ je komplement števne množice} \end{cases}$$

verjetnostna mera na $(\mathbb{R}, \mathscr{F})$, ki pa ni neomejeno aditivna. $\square$

3.2 Osnovne lastnosti mer

Trditev 3.2.1. *Če je μ pozitivna mera in $A \subseteq B$ merljivi množici, je $\mu(A) \le \mu(B)$.*

Dokaz. Množica B je disjunktna unija množic A in $B \setminus A$, torej je $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \ge \mu(A)$. ■

Trditev 3.2.2. *Če sta $A \subseteq B$ merljivi množici, μ pa je bodisi realna mera bodisi taka pozitivna mera, da je $\mu(A) < \infty$, je $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Dokaz. Podobno kot v dokazu prejšnje trditve izpeljemo, da je $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Če je $\mu(A) < \infty$, smemo ta člen odšteti in dobimo želeno zvezo. ■

Trditev 3.2.3. *Naj bosta A in B merljivi množici, μ pa naj bo bodisi realna mera bodisi taka pozitivna mera, da je $\mu(A \cap B) < \infty$. Tedaj je $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.*

Dokaz. Množica $A \cup B$ je disjunktna unija množic A in $B \setminus A$, torej je $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Velja $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ in $A \cap B \subseteq B$, torej po trditvi 3.2.2 velja $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$. Rezultat sledi. ■

Posledica 3.2.4. *Če je μ pozitivna mera, za poljubni merljivi množici A in B velja $\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)$ (ne glede na končnost ali neskončnost mere na kateri koli množici).*

Trditev 3.2.5. *Naj bo μ pozitivna ali realna mera.*

(1) *Če je $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ naraščajoče zaporedje merljivih množic, velja $\mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_k)$.*

(2) *Naj bo $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ padajoče zaporedje merljivih množic in naj bo bodisi μ realna mera bodisi $\mu(B_1) < \infty$. Tedaj je $\mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_k)$.*

Dokaz.
(1): Množica $A := \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ je disjunktna unija množic $A_1' := A_1$, $A_2' := A_2 \setminus A_1$, $A_3' := A_3 \setminus A_2, \ldots$, torej je $\mu(A) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k')$, kar je po definiciji 1.6.1 enako $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \mu(A_k')$. Množica A_n pa je disjunktna unija množic $A_1', A_2', \ldots, A_n'$, torej je $\mu(A_n) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k')$. Rezultat sledi.

(2): Če označimo $B := \bigcup_{k=1}^\infty B_k$, je množica $B_1 \setminus B$ unija naraščajočega zaporedja množic $B_1 \setminus B_2, B_1 \setminus B_3, \ldots$, torej po prejšnji točki velja $\mu(B_1 \setminus B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_1 \setminus B_n)$. Iz predpostavk in trditve 3.2.1 sledi, da so mere vseh množic B_k, B, $B_1 \setminus B_k$ in $B_1 \setminus B$ končne. Po trditvi 3.2.2 je $\mu(B_1) - \mu(B) = \mu(B_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$. Ker je vse končno, od tod sledi zahtevani rezultat. ■

Kot pokaže naslednji zgled, brez predpostavke, da je $\mu(B_1) < \infty$, točka (2) trditve 3.2.5 ne velja nujno:

Zgled 3.2.1. Naj bo $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathscr{F} = 2^\Omega$, μ pa mera, ki šteje. Nadalje naj bo $B_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$. Za vse n velja $\mu(B_n) = \infty$, torej je tudi $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \infty$, čeprav je $\bigcap_{n=1}^\infty B_n = \emptyset$, torej $\mu\left(\bigcap_{n=1}^\infty B_n\right) = 0$. □

Trditev 3.2.6. *Če je μ pozitivna mera, za poljubno zaporedje množic $A_1, A_2, \ldots$ velja $\mu\bigl(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\bigr) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.*

Dokaz. Definirajmo $U_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Iz posledice 3.2.4 z indukcijo izpeljemo, da je $\mu(U_n) \le \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$. Ker je $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots$ in $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, po točki (1) trditve 3.2.5 in definiciji 1.6.1 velja $\mu\bigl(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\bigr) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. ■

3.3 Enoličnost mer

Kdaj se dve meri, ki se ujemata na določeni družini množic $\mathscr{U}$, ujemata tudi na σ-algebri, generirani z $\mathscr{U}$? Kot bomo videli, brez dodatnih predpostavk ne gre.

Zgled 3.3.1. Naj bo $\Omega = \{1, 2\}$ in $\mathscr{U} = \bigl\{\{1\}\bigr\}$. Očitno je $\sigma_\Omega(\mathscr{U}) = 2^\Omega$. Toda Diracova mera δ_2 se na $\mathscr{U}$ ujema z ničelno mero, ne ujema pa se z njo na množici $\{2\}$. □

Morda je pri zgornjem zgledu šlo narobe to, da družina $\mathscr{U}$ ni vsebovala celega prostora Ω. Toda tudi v tem primeru se lahko zalomi.

Zgled 3.3.2. Naj bo $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ in $\mathscr{U} = \bigl\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 2, 3, 4\}$. Spet ni težko preveriti, da je $\sigma_\Omega(\mathscr{U}) = 2^\Omega$. Zdaj pa definirajmo funkciji $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ po predpisu:

$$f(1) := f(3) := \tfrac{1}{2}\,, \quad f(2) := f(4) := 0 \quad \text{in} \quad g(1) := g(3) := 0\,, \quad g(2) := g(4) := \tfrac{1}{2}\,.$$

Tedaj se meri $\mu(A) := \sum_{\omega \in A} f(\omega)$ in $\nu(A) := \sum_{\omega \in A} g(\omega)$ spet ujemata na $\mathscr{U}$, ne ujemata pa se na množicah $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ in $\{4\}$. Meri μ in ν sta celo verjetnostni. □

Za izpeljavo, kdaj se dve meri ujemata na celotni σ-algebri, bomo potrebovali nekaj novih pojmov.

Definicija 3.3.3. Družina podmnožic $\mathscr{S}$ neke množice Ω je *razred Sierpińskega*, če velja naslednje:

(1) Za poljubni podmnožici $A, B \in \mathscr{S}$, za kateri je $A \subseteq B$, je tudi $B \setminus A \in \mathscr{S}$.

(2) Če je $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$ (ne nujno strogo) naraščajoče zaporedje množic iz $\mathscr{S}$, tudi unija teh množic pripada $\mathscr{S}$.

Ključni razlog za to, da se splača gledati zgornje razrede, je naslednje očitno dejstvo:

Trditev 3.3.1. *Če sta μ in ν realni meri, je družina podmnožic, na kateri se ujemata, razred Sierpińskega.* ■

Naslednji rezultat je ključno orodje za izpeljavo enoličnosti mer.

Izrek 3.3.2. *Naj bo $\mathscr{U}$ družina podmnožic množice Ω, ki vsebuje Ω in je zaprta za neprazne končne preseke (t. j. za poljubni množici $A, B \in \mathscr{U}$ velja $A \cap B \in \mathscr{U}$, brž ko je $A \cap B \neq \emptyset$). Tedaj vsak razred Sierpińskega, ki je nadmnožica družine $\mathscr{U}$, tudi nadmnožica σ-algebre $\sigma_\Omega(\mathscr{U})$.*

Preden dokažemo izrek 3.3.2, formulirajmo naslednjo očitno posledico trditve 3.3.1 in izreka 3.3.2:

Izrek 3.3.3. *Naj bo $\mathscr{U}$ družina podmnožic množice Ω, ki vsebuje Ω in je zaprta za neprazne končne preseke. Če se realni meri ujemata na $\mathscr{U}$, se ujemata tudi na $\sigma_\Omega(\mathscr{U})$.* ■

Prvi korak k dokazu izreka 3.3.2 je naslednje opažanje.

Trditev 3.3.4. *Družina podmnožic množice Ω, ki je razred Sierpińskega, je σ-algebra natanko tedaj, ko vsebuje Ω in ko je zaprta za neprazne končne preseke.*

Dokaz. Dokazati je potrebno le to, da je vsak razred Sierpińskega $\mathscr{S}$, ki vsebuje Ω in je zaprt za neprazne končne preseke, tudi σ-algebra. Ker $\mathscr{S}$ vsebuje Ω, je zaprt za komplemente, potem pa vsebuje tudi prazno množico. Torej je zaprt za vse končne preseke in tudi za končne unije. Potem pa mora biti zaprt tudi za števne unije, torej je σ-algebra. ■

Dokaz izreka 3.3.2. Ker je poljuben presek razredov Sierpińskega spet razred Sierpińskega, obstaja najmanjši razred Sierpińskega, ki je nadmnožica družine $\mathscr{U}$. Označimo ga z $\mathscr{S}$. Dovolj je dokazati, da je $\mathscr{S}$ nadmnožica σ-algebre $\sigma_\Omega(\mathscr{U})$. To bomo storili v več korakih.

Prvi korak: $\mathscr{S}$ vsebuje prazno množico. Ker je namreč $\Omega \in \mathscr{U} \subseteq \mathscr{S}$ in je $\mathscr{S}$ razred Sierpińskega, je tudi $\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathscr{S}$.

Drugi korak: za vsak $A \in \mathscr{U}$ in $B \in \mathscr{S}$ je $A \cap B \in \mathscr{S}$. Definirajmo:

$$\mathscr{S}_A := \{C \subseteq \Omega \,;\, A \cap C \in \mathscr{S}\}\,.$$

Ni težko preveriti, da je $\mathscr{S}_A$ razred Sierpińskega, ki vsebuje Ω. Ker je $\mathscr{U}$ zaprta za neprazne končne preseke in ker $\mathscr{S}$ vsebuje prazno množico, je $\mathscr{S}_A \supseteq \mathscr{U}$, torej je tudi $\mathscr{S}_A \supseteq \mathscr{S}$, se pravi, da $\mathscr{S}_A$ vsebuje B, to pa pomeni, da je $A \cap B \in \mathscr{S}$.

Tretji korak: $\mathscr{S}$ je zaprt za končne preseke. Dokazati moramo torej, da za poljubni množici $A, B \in \mathscr{S}$ velja $A \cap B \in \mathscr{S}$. Naj bo $\mathscr{S}_A$ tako kot prej. Iz prejšnjega odstavka sledi, da je $\mathscr{S}_A \supseteq \mathscr{U}$ (tudi pod zdajšnjo predpostavko, da je $A \in \mathscr{S}$). Ker je $\mathscr{S}_A$ razred Sierpińskega, je tudi $\mathscr{S}_A \supseteq \mathscr{S}$, se pravi, da $\mathscr{S}_A$ vsebuje B, to pa pomeni, da je $A \cap B \in \mathscr{S}$.

Četrti korak: $\mathscr{S}$ je σ-algebra. To sledi iz trditve 3.3.4 (in opažanja, da tudi $\mathscr{S}$ vsebuje Ω).

Peti korak: $\mathscr{S} \supseteq \sigma_\Omega(\mathscr{U})$. Sledi iz dejstva, da je $\mathscr{S} \supseteq \mathscr{U}$, in opombe 2.1.6. ■

Če sta μ in ν neskončni pozitivni meri, izrek 3.3.3 v splošnem ne drži, kot pokaže naslednji zgled:

Zgled 3.3.4. Naj bo $\Omega = \mathbb{R}$ in naj bo $\mathscr{U}$ družina vseh neizrojenih intervalov na realni osi. Mera μ dane množice naj bo enaka nič, če je množica prazna, in neskončno, če je neprazna. Mera ν pa naj bo enaka nič, če je množica števna, in neskončno, če je neštevna. Tedaj se μ in ν na $\mathscr{U}$ ujemata, ne ujemata pa se na $\sigma_\Omega(\mathscr{U})$. □

Za neskončne pozitivne mere moramo predpostavke izreka 3.3.3 nekoliko spremeniti. V duhu teh sprememb lahko izrek formuliramo tudi za realne mere: za ta primer bodo nove predpostavke nekoliko rahlejše od tistih iz izreka 3.3.3: izrek 3.3.5 je močnejši od izreka 3.3.3.

Izrek 3.3.5. *Naj bo $\mathscr{U}$ družina podmnožic množice Ω, ki je zaprta za neprazne končne preseke.*

(1) *Če $\mathscr{U}$ vsebuje števno poddružino, ki pokrije Ω, se poljubni realni meri, ki se ujemata na $\mathscr{U}$, ujemata tudi na $\sigma_\Omega(\mathscr{U})$.*

(2) *Če se pozitivni meri μ in ν ujemata na $\mathscr{U}$ in $\mathscr{U}$ vsebuje števno poddružino, ki pokrije Ω in na kateri sta meri μ in ν končni, se μ in ν ujemata tudi na $\sigma_\Omega(\mathscr{U})$.*

Dokaz. Pod predpostavko (1) definirajmo $\mathscr{U}^* := \mathscr{U} \cup \{\emptyset\}$, pod predpostavko (2) pa definirajmo $\mathscr{U}^* := \{A \in \mathscr{U} \,;\, \mu(A) = \nu(A) < \infty\} \cup \{\emptyset\}$. Opazimo, da je množica $\mathscr{U}^*$ zaprta za končne preseke. Nadalje z $\mathscr{U}^{**}$ označimo družino vseh končnih unij množic iz $\mathscr{U}^*$. Ker je $\mathscr{U}^*$ zaprta za končne preseke, to velja tudi za $\mathscr{U}^{**}$.

Pokažimo, da se μ in ν ujemata na $\mathscr{U}^{**}$. Z indukcijo po n torej dokazujemo trditev, da za poljubne $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathscr{U}^*$ velja $\mu\big(\bigcup_{k=1}^n U_k\big) = \mu\big(\bigcup_{k=1}^n U_k\big)$. Za $n = 1$ je to očitno res, indukcijski korak pa izpeljemo tako, da iz trditve 3.2.3 izpeljemo:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} U_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} U_k\right) + \mu(U_{n+1}) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} (U_k \cap U_{n+1})\right),$$
$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} U_k\right) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^{n} U_k\right) + \nu(U_{n+1}) - \nu\left(\bigcup_{k=1}^{n} (U_k \cap U_{n+1})\right).$$

Računa veljata zaradi končnosti mer na množicah U_k. Po indukcijski predpostavki in zaradi zaprtosti družine $\mathscr{U}^*$ za končne preseke se oba izraza ujemata, s čimer je indukcijski korak končan.

Iz predpostavk izreka sledi, da obstaja zaporedje množic $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \ldots$ iz $\mathscr{U}^{**}$, ki pokrijejo Ω. Označimo z $\mathscr{U}_k$ sled družine $\mathscr{U}^{**}$ na množici Q_k. Očitno $\mathscr{U}_k$ vsebuje Q_k. Ker je $\mathscr{U}^{**}$ zaprta za končne preseke, to velja tudi za $\mathscr{U}_k$. Poleg tega je $\mathscr{U}_k \subseteq \mathscr{U}^{**}$. Torej sta μ in ν realni meri na $\sigma_{Q_k}(\mathscr{U}_k)$, ki se ujemata na $\mathscr{U}_k$. Po izreku 3.3.3 se μ in ν ujemata na celotni družini $\sigma_{Q_k}(\mathscr{U}_k)$, ki je po posledici 2.2.6 tudi sled σ-algebre $\sigma_\Omega(\mathscr{U}^{**})$ na Q_k. To pa pomeni, da se za vsak $A \in \sigma_\Omega(\mathscr{U}^{**})$ meri μ in ν ujemata na $A \cap Q_k$. Po točki (1) trditve 3.2.5 se morata tedaj ujemati tudi na A. Sledi, da se μ in ν ujemata na $\sigma_\Omega(\mathscr{U}^{**})$, torej tudi na $\sigma_\Omega(\mathscr{U})$. ■