KOLOKVIJI IN IZPITI IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

Matematika – univerzitetni študij

Zbral: Martin Raič

2012/13

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – univerzitetni študij
15. november 2012

1. Albert in Brigita igrata namizni tenis. V vsaki partiji Albert zmaga z verjetnostjo $1/3$, Brigita pa z verjetnostjo $2/3$. Igrata, dokler eden od njiju ne dobi dveh partij zapored. Kolikšna je verjetnost, da Albert dobi dvoboj? Privzamemo, da so posamezne partije med seboj neodvisne.

2. Marina ima sestanek in gre na avtobus, ki vozi na 12 minut. Čas vožnje je 20 minut, pri tem pa ni vštet prehod čez železniško progo, kjer vozijo vlaki neodvisno od voznega reda avtobusa. Prehod čez progo je 3 minute zaprt, 7 minut pa odprt.

   Marina pride na postajo 30 minut pred časom sestanka. Kolikšna je verjetnost, da pride še pravočasno? Čas hoje od izstopne postaje do mesta sestanka zanemarimo.

3. Študent dobi na izpitu 5 vprašanj, njegov uspeh pa je zelo odvisen od izpraševalčevega razpoloženja: verjetnost, da bo naredil izpit, je enaka $V/5$, kjer je V število dobljenih vprašanj, ki se jih je naučil. Študent se je naučil 30 izmed 50 vseh možnih vprašanj.

   a) Kolikšna je verjetnost, da je naredil izpit?
   b) Recimo, da je študent naredil izpit. Kolikšna je pogojna verjetnost, da se je naučil manj kot polovico vprašanj, ki jih je dobil?

   Nalogo rešite pod smiselnimi dodatnimi predpostavkami, ki jih formulirajte sami.

4. Med 10 igralcev razdelimo 50 kart s kupa dobro premešanih standardnih 52 kart: vsak igralec dobi 5 kart. Kolikšna je verjetnost, da ima vsaj en igralec vse karte v barvi pika s samimi zaporednimi vrednostmi, pri čemer lahko as pri vsakem igralcu šteje kot najvišja ali pa kot najnižja karta (ne pa tudi kot vmesna karta med kraljem in dvojko)?

4P. Na kupu so štiri karte s samimi različnimi vrednostmi, pri čemer je najprej na vrhu as. Karte nato dobro premešamo, nakar odkrijemo prvo karto in vidimo, da ni as. Kolikšna je verjetnost, da je med preostalimi kartami vsaj ena na natančno istem mestu v kupu, kot je bila pred mešanjem?

   Namig: nalogo je možno rešiti z uporabo načela vključitev in izključitev.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – univerzitetni študij
5. februar 2013

1. Francoska ruleta ima 37 zarez, od tega 18 rdečih. Kdor stavi določeno število žetonov na rdečo in kroglica obstane v rdeči zarezi, dobi nazaj vplačane žetone in še enkrat toliko (če ima torej najprej en žeton, ga stavi na rdečo in stavo dobi, ima potem dva žetona). Če kroglica ne obstane v rdeči zarezi, izgubi vse vplačane žetone.

   Renato ima na začetku 500 žetonov. Najprej 100-krat stavi po 5 žetonov na rdečo, nato pa hkrati na rdečo stavi še desetino vseh žetonov, ki jih tisti hip ima. Čim natančneje ocenite verjetnost, da bo Renato na koncu imel več kot 500 žetonov.

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z dvorazsežno gostoto:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c/x^3 & ; x > y > 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Izračunajte konstanto c in zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := X - 2Y$.

3. Rele se pokvari ob slučajnem času, ki je porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$, t. j. zvezno z gostoto:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & ; t > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Redna kontrola pride ob času t_0. Izračunajte pričakovani čas od okvare do kontrole (če se rele do kontrole še ni pokvaril, je ta čas seveda enak nič).

4. Standardno kocko mečemo, dokler ne pade tako ena pika kot tudi šest pik. Naj bo N število metov. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke.

4P. Dan je dobro premešan kup štirih kart: as, kralj, dama in fant. Brez vračanja vlečemo karte, dokler ne izvlečemo tako asa kot tudi fanta. Naj bo N število izvlečnih kart. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke.

3. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – univerzitetni študij
4. april 2013

1. Izračunajte pričakovani kot, pod katerim meteorit pade na planet. Privzemite, da ima planet obliko krogle, da so vse smeri v vesolju, iz katerih prileti meteorit, enako zastopane, pri posamezni smeri pa privzemite tudi enakomerno porazdelitev trajektorij (premic), ki sekajo planet. Prav tako zanemarite ukrivljenje trajektorij zaradi gravitacije.

2. Slučajni vektor (X, Y) ima kovariančno matriko $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$. Določite, pri katerih vrednostih parametra a je korelacijski koeficient med slučajnima spremenljivkama X in $X + aY$ enak $1/6$.

3. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$, t. j. zvezno z gostoto:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & ;\ x > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases} .$$

   Nadalje ima pogojno na X slučajna spremenljivka Y Poissonovo porazdelitev $\mathrm{P}(X)$. Določite brezpogojno porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

4. Naj bodo $A_1, A_2, \ldots$ neodvisni dogodki, za katere vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ divergira.

   a) Dokažite, da se skoraj gotovo zgodi vsaj eden izmed teh dogodkov.
   Namig: za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $1 + x \le e^x$.

   b) Dokažite, da se skoraj gotovo zgodi neskončno mnogo teh dogodkov.

   Drugemu rezultatu pravimo *druga Borel–Cantellijeva lema.*

4P. Določite vse kvartile Poissonove porazdelitve $\mathrm{P}(5)$.

4. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – univerzitetni študij
12. junij 2013

1. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_{100}$ so neodvisne in porazdeljene diskretno po shemi:
$$\begin{pmatrix} 0 & a-1 & a+1 & 2a \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$
Približno določite a, pri katerem bo aritmetična sredina teh slučajnih spremenljivk z verjetnostjo 5% večja od $11a/10$.

2. Statistična spremenljivka je porazdeljena zvezno z gostoto:
$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi a)}{\pi} t^{a-1}(1-t)^{-a} & ; 0 < t < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases},$$
kjer je $0 < a < 1$ neznan parameter. Na voljo imamo n neodvisnih opažanj te spremenljivke. Poiščite cenilko za a po metodi največjega verjetja.

3. Prvi kolokvij iz matematike na Oddelku za gozdarstvo na BTF v študijskem letu 2004/05 so pisali v dveh skupinah. V skupini A je pisalo 17 študentov, ki so v povprečju zbrali 45˙76 točk (od 72 možnih) s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom 15˙61 točk. V skupini B pa je pisalo 12 študentov, ki so v povprečju zbrali 31˙17 točk s popravljenim vzorčnim standardnim odklonom 20˙31 točk.
   a) Izračunajte popravljeni vzorčni standardni odklon za vse študente.
   b) Testirajte ničelno hipotezo, da sta bili skupini enako zahtevni, proti alternativni hipotezi, da je bila zahtevnost različna: opredelite, ali so bila odstopanja statistično značilna, zelo značilna ali nič od tega.

4. Opazimo eno vrednost statistične spremenljivke X, ki ima Poissonovo porazdelitev $\mathrm{P}(\lambda)$. Poiščite nepristransko cenilko za $\lambda\, e^{\lambda}$.

4P. Statistična spremenljivka je porazdeljena enakomerno zvezno na intervalu $[-a, a]$, kjer je $a > 0$ neznan parameter. Na voljo imamo n neodvisnih opažanj te spremenljivke. Poiščite cenilko za a po metodi momentov.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – univerzitetni študij
28. junij 2013

1. V vrečki je 10 lešnikov, 8 od dobavitelja A in 2 od dobavitelja B. Verjetnost, da bo lešnik dobavitelja A žarek, je 5%, verjetnost, da bo žarek lešnik dobavitelja B, pa 15%. Privzamemo, da so vsi lešniki med seboj neodvisni.

   Iz vrečke na slepo in brez vračanja vzamemo tri lešnike.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bosta natanko dva žarka?
   b) Recimo, da sta bila žarka natanko dva lešnika. Kolikšna je pogojna verjetnost, da sta oba prišla od dobavitelja B?

2. Dane so neodvisne slučajne spremenljivke $X_1, \ldots X_{100}, Y_1, \ldots Y_{100}$, za katere velja:

$$E(X_i) = 1\,, \quad D(X_i) = 4\,, \quad E(Y_i) = -1\,, \quad D(Y_i) = 9\,.$$

   Naj bo $S := X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_{100}Y_{100}$. Približno izračunajte $P(S > 0)$.

3. Statistična spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$f(x) = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}\, x^2\, e^{-ax^2}\,.$$

   Poiščite cenilko za a po metodi največjega verjetja, ki temelji na n neodvisnih opažanjih te spremenljivke.

4. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena geometrijsko s pričakovano vrednostjo a, pogojno na X pa je slučajna spremenljivka Y porazdeljena normalno $\mathrm{N}\big(0, 1/\sqrt{X}\big)$. Določite brezpogojno porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

4P. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$f_X(x) = \begin{cases} c\,x^{-2} + x^{-4} & ;\ x > 1 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}\,.$$

   Določite konstanto c in porazdelitev slučajne spremenljivke $Y = (X-2)^2$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – univerzitetni študij
23. avgust 2013

1. V košari za perilo je $2n$ nogavic, od tega $2k$ karirastih. Nogavice na slepo in brez vračanja jemljemo iz košare. Slučajna spremenljivka N naj označuje število nogavic, ki jih moramo izvleči iz košare, da dobimo prvi par karirastih nogavic.

   a) Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke N.

   b) Za $n = 4$ in $k = 2$ izračunajte $E(N)$ in $D(N)$.

2. Naj bodo $X_1, \dots X_{100}, Y_1, \dots Y_{100}$ neodvisne slučajne spremenljivke, za katere velja:

$$E(X_i) = 1\,, \quad E(Y_i) = 3\,, \quad D(X_i) = 8\,, \quad D(Y_i) = 1\,.$$

   Naj bo $S = X_1Y_1 + X_2Y_2 + \cdots + X_{100}Y_{100}$. Približno izračunajte $P(S < 240)$.

3. Denimo, da smo iz velike populacije vzeli enostaven slučajni vzorec, ki zajema enako število žensk in moških, in za telesno višino dobili naslednje podatke:

	Ženske	Moški
Aritmetična sredina	162˙01	171˙32
Popravljeni standardni odklon	39˙75	32˙94

   Najmanj kako velik bi moral biti vzorec, da bi na njegovi podlagi pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙01$ zavrnili ničelno hipotezo, da so ženske in moški enako visoki, in sprejeli alternativno hipotezo, da so moški višji od žensk? Seveda privzamemo normalno porazdelitev na populaciji.

4. Naj bo N slučajna spremenljivka, ki ima Poissonovo porazdelitev s pričakovano vrednostjo λ. Pogojno na N je v ravnini N točk, ki so neodvisne in porazdeljene standardno dvorazsežno normalno, t. j. zvezno z gostoto:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-(x^2+y^2)/2}$$

   (pravimo, da točke tvorijo *Poissonov točkovni proces* z gostoto intenzivnosti $\lambda\, e^{-(x^2+y^2)/2}/(2\pi)$). Izračunajte porazdelitev razdalje od izhodišča do najbližje točke. *Namig*: kumulativna porazdelitvena funkcija.

4P. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena enakomerno na intervalu od -1 do 2. Določite gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke $Y = X^2$.

2011/12

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – univerzitetni študij
17. november 2011

1. Janez in Krišpin igrata namizni tenis. V vsaki rundi Janez zmaga z verjetnostjo 2/3, Krišpin pa z verjetnostjo 1/3, neodvisno od ostalih rund. Igrata, dokler nekdo ne dobi dveh rund zapored.

   a) Kolikšna je verjetnost, da je zadnji dve rundi dobil Janez?

   b) Recimo, da je zadnji dve rundi res dobil Janez. Kolikšna je pogojna verjetnost, da sta odigrala več kot tri runde?

2. Albert pride na postajo ob času, izbranem na slepo med 9:53 in 10:03, in čaka na mestni avtobus, ki pelje na 10 minut: ob 10:00, 10:10 itd. Bojana pa se na to postajo pripelje s primestnim avtobusom, ki pride enkrat na slepo med 9:55 in 10:05 (in neodvisno od Albertovega prihoda na postajo), in se na postaji ne zadržuje. Kolikšna je verjetnost, da se bosta Albert in Bojana srečala?

3. Najmanj kolikokrat približno moramo vreči standardno kocko, če želimo z vsaj 95-odstotno verjetnostjo zagotoviti, da bo delež šestic vsaj 15%?

4. Na nekem izpitu dobi študent dve na slepo izbrani vprašanji izmed 10 možnih. Študent se je učil le polovico vseh vprašanj. Vendar pa na vsako vprašanje, ki se ga ni učil, z verjetnostjo 20% ugane odgovor. Glede tega so vprašanja neodvisna, prav tako je študentova zmožnost ugibanja odgovorov neodvisna od izbire izpitnih vprašanj.

   Slučajna spremenljivka U naj pove število vprašanj, ki se jih študent ni učil, je pa uganil odgovor. Zapišite njeno porazdelitev numerično na 4 decimalke natančno.

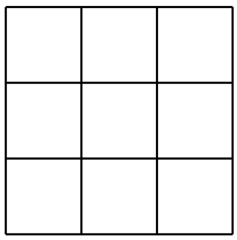
2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – univerzitetni študij
12. januar 2012

1. Slučajna spremenljivka U je porazdeljena zvezno enakomerno na intervalu $(0, 1)$. Označimo z D prvo števko v standardnem decimalnem zapisu števila $1/U$. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke.

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$, t. j. z gostoto:
$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}.$$
Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := \dfrac{X}{2X + Y}$.

3. Kvadrat razdelimo na devet polj, kot kaže slika:



Na slepo izberemo tri različna polja in jih prekrižamo. Slučajna spremenljivka S naj predstavlja skupno število vrstic in stolpcev, ki ostanejo prazni. Izračunajte $E(S)$.

4. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno s kumulativno porazdelitveno funkcijo $F_X(x) = e^{-e^{-x}}$. Izračunajte $E\big(e^{X/2}\big)$.

Namig: na določenem koraku si lahko pomagate z gostoto in simetrijo normalne porazdelitve.

3. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – univerzitetni študij
12. april 2012

1. Slučajni spremenljivki X in Y imata navzkrižno porazdelitev, podano s tabelo:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = a$
$X = 0$	$1/12$	$1/4$	0
$X = 1$	$1/2$	$1/12$	p

.

Določite p in izračunajte, pri katerem a sta X in Y nekorelirani.

2. Slučajna spremenljivka N naj ima Poissonovo porazdelitev $\mathrm{P}(\lambda)$ in pogojno na N naj ima slučajna spremenljivka S binomsko porazdelitev $\mathrm{b}(2N, 1/2)$.

   a) Določite (brezpogojno) rodovno funkcijo slučajne spremenljivke S.

   b) Izračunajte $P(S = 1)$.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_{150}$ so neodvisne in porazdeljene zvezno z gostoto:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Označimo z S njihovo vsoto. Približno določite x, za katerega bo $P(S \geq x) = 0\text{'}05$ (t. j. 95. centil slučajne spremenljivke S).

4. Dana je porazdelitev z gostoto:

$$f(u) = \begin{cases} 2u & ; 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   a) Izračunajte mediano te porazdelitve.

   b) Naj bosta U_1 in U_2 neodvisni slučajni spremenljivki z gostoto f. Izračunajte matematični upanji vrstilnih statistik $U_{(1)} = \min\{U_1, U_2\}$ in $U_{(2)} = \max\{U_1, U_2\}$.

   c) Opazimo X_1 in X_2, ki sta neodvisni in porazdeljeni tako kot $X = aU + b$, kjer ima U gostoto f, $a > 0$ in $b \in \mathbb{R}$ pa sta parametra, ki ju ne poznamo. Poiščite nepristransko cenilko mediane statistične spremenljivke X (to med drugim pomeni, da mora biti opazljiva, se pravi, da se mora dati izračunati iz X_1 in X_2, ne da bi poznali a in b). Pomagajte si s prejšnjo točko.

4. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – univerzitetni študij
7. junij 2012

1. Statistična spremenljivka je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(a, a)$, kjer je $a > 0$ (t. j. njen standardni odklon je enak matematičnemu upanju). Konstruirajte cenilko za a po metodi največjega verjetja na podlagi n neodvisnih opažanj te spremenljivke.

2. Statistična spremenljivka ima porazdelitev $\mathrm{Beta}(a, 1-a)$, t. j. porazdelitev z gostoto:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{-a}}{\mathrm{B}(a, 1-a)} & ; \ 0 < x < 1 \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases} .$$

Konstruirajte nepristransko cenilko za a z enakomerno najmanjšo disperzijo na podlagi enega samega opažanja te spremenljivke.

3. Statistična spremenljivka ima diskretno porazdelitev, podano s shemo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \dfrac{\theta^2}{\theta^2 - \theta + 1} & \dfrac{\theta(1-\theta)}{\theta^2 - \theta + 1} & \dfrac{(1-\theta)^2}{\theta^2 - \theta + 1} \end{pmatrix} .$$

Poiščite enostranski 95% interval zaupanja, ki bo temeljil na enem samem opažanju te spremenljivke. Natančneje, če opazimo k, naj bo ta interval oblike $I = [0, b_k)$ ali $[0, 1]$ (za $b_k = 1$). Interval naj bo optimalen v smislu, da je $\inf_{0 \le \theta \le 1} P_\theta(\theta \in I) = 0{\cdot}95$.

4. 13-krat vržemo kocko, meti so neodvisni. 5-krat pade šestica. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ testirajte ničelno hipotezo, da šestica pade z verjetnostjo $1/6$, proti alternativni, da pade z verjetnostjo, večjo od $1/6$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – univerzitetni študij
18. junij 2012

1. Pustolovec Albert pride v tujo deželo, kjer ga takoj primejo in vtaknejo v ječo. Po prvi noči, prebiti v ječi, ga obišče kralj in mu ponudi posodo, v kateri je ena rdeča in ena zelena kroglica. Albert na slepo izvleče eno kroglico. Če izvleče zeleno, je izpuščen, če izvleče rdečo, pa mora prebiti v ječi še eno noč. Naslednji dan ga spet obišče kralj in spet mu ponudi posodo, le da sta tokrat notri dve rdeči in ena zelena kroglica. Spet je Albert izpuščen, če izvleče zeleno kroglico, sicer pa mora ponovno prespati v ječi. Tako se nadaljuje: vsak dan je v posodi ena rdeča kroglica več.

   a) Dokažite, da Albert z verjetnostjo ena nekoč pride iz ječe.

   b) Ko Alberta izpustijo, mu kralj izroči posodo s kroglicami (n rdečimi in eno zeleno, če je Albert v ječi prespal n-krat). Albert nato sam takoj izvleče eno kroglico. Če je zelena, takoj zapusti deželo, sicer pa izvlečeno rdečo kroglico odvrže in tam prespi (tokrat na svobodi). Nato spet vleče kroglice (tokrat z eno rdečo manj) in če izvleče zeleno, deželo zapusti, sicer pa ponovno prespi. Tako nadaljuje, vsakič z eno rdečo kroglico manj.

      Recimo, da je Albert v tej deželi prespal natanko petkrat. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je v zaporu prespal trikrat?

2. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)\ln 2} & ; x > 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Določite porazdelitev ulomljenega dela te slučajne spremenljivke, t. j. $X - \lfloor X \rfloor$ (primer: ulomljeni del števila 3˙9 je 0˙9).

3. Statistična spremenljivka X je porazdeljena eksponentno $\text{Exp}(\lambda)$. Poiščite nepristransko cenilko za $1/(\lambda + 1)$ z enakomerno najmanjšo disperzijo, če:

   a) imate na voljo eno samo opažanje (namig: glejte e^{-X});

   b) imate na voljo dve neodvisni opažanji (namig: določite, funkcija katere statistike mora biti cenilka, in si oglejte porazdelitev te statistike).

4. 100 gospodinjstev v neki deželi povprašamo, koliko avtomobilov imajo. 9 jih ni imelo nobenega, 34 enega, 38 dva, 18 tri, eno gospodinjstvo pa je imelo pet avtomobilov. Določite 95% interval zaupanja za število avtomobilov na gospodinjstvo v tej deželi.

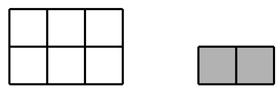
Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika
20. avgust 2012

1. Na tablo iz 6 kvadratkov druga za drugo slučajno in neodvisno padejo tri palice iz dveh kvadratkov (glej sliko). Vsaka lahko pade na sedem enako verjetnih načinov, tako da zasede dva kvadratka. Palico, ki zasede že zasedena mesta, zavržemo in ne upoštevamo morebitnega dodatnega mesta, ki bi ga zasedla.

   a) Zapišite porazdelitev števila sprejetih (t. j. nezavrnjenih) palic.

   b) Recimo, da sta bili sprejeti natanko dve palici. Kolikšna je pogojna verjetnost, da sta bili to *prvi* dve?



2. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ so porazdeljene geometrijsko $\mathrm{Geom}(2/3)$, slučajna spremenljivka N pa geometrijsko $\mathrm{Geom}(3/4)$. Vse omenjene slučajne spremenljivke so neodvisne. Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{2N}$.

3. Statistična spremenljivka ima porazdelitev $\mathrm{Beta}(a, 1-a)$, t. j. porazdelitev z gostoto:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{-a}}{\mathrm{B}(a, 1-a)} & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Konstruirajte nepristransko cenilko za a^2 z enakomerno najmanjšo disperzijo na podlagi enega samega opažanja te spremenljivke.

   Namig: izračunajte $E(X)$ in $E(X^2)$.

4. Statistična spremenljivka X je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, kjer nobenega od parametrov ne poznamo. Opazimo naslednji vzorec:

$$94,\ 76,\ 112,\ 71,\ 94,\ 83,\ 50,\ 98,\ 106,\ 99\,.$$

   (kjer privzamemo, da so vse enote vzorca neodvisne in porazdeljene tako kot X). Poiščite interval zaupanja za μ pri stopnji zaupanja $\beta = 0{\cdot}99$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika
3. september 2012

1. Strelec Rajko strelja v tarčo, ki ima 10 krogov. Pri vsakem strelu zadene k krogov z verjetnostjo $(11-k)/66$, kjer je $k = 0, 1, 2, \ldots 10$. Streli so med seboj neodvisni.

   Rajko pri prvem strelu zadene 7 krogov, nato strelja v nedogled.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bo pri naslednjem strelu, pri katerem bo zadel več kot 7 krogov, zadel 10 krogov?

   b) Vsakič, ko zadene več, kot je bilo največje število krogov v vseh prejšnjih strelih, Rajko postavi *osebni rekord*. Prvi strel je izvzet: ne šteje za osebni rekord. Označimo z R število osebnih rekordov, ki jih postavi Rajko. Določite porazdelitev te slučajne spremenljivke.

   c) Recimo, da je Rajko postavil natanko dva osebna rekorda. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je pri drugem strelu zadel 8 krogov?

2. Slučajna spremenljivka X ima porazdelitev Gama$(2, 1)$, slučajna spremenljivka U pa ima pogojno na X enakomerno porazdelitev na intervalu $(X, 2X)$. Določite brezpogojno porazdelitev slučajne spremenljivke U in izračunajte njeno matematično upanje.

3. Statistična spremenljivka je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$f(x) = \begin{cases} ax^{a-1} & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} ,$$

   kjer je $a > 0$ neznan parameter.

   a) Zapišite to kot eksponentno družino porazdelitev.

   b) Poiščite nepristransko cenilko za $1/(a+2)$ z najmanjšo možno disperzijo.

4. Statistična spremenljivka X je porazdeljena enakomerno na intervalu $(a, a+1)$. Dan je vzorec veliko neodvisnih opažanj te statistične spremenljivke. Konstruirajte asimptotični dvostranski 95% interval zaupanja za a, ki bo temeljil na vzorčnem povprečju. Konstrukcijo zapišite kot algoritem, ki sprejme velikost vzorca (n) in vrne interval zaupanja. Algoritem sme uporabljati le osnovne računske operacije, kot so seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje in korenjenje.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika
24. januar 2013

1. V pekarni so ostali le še štirje krofi: en navaden, en čokoladni, eden z roza prelivom in eden s karamelnim prelivom. Kupci prihajajo in privzamemo, da vsak kupi največ po en krof. Verjetnosti, da izbere navadnega, čokoladnega, roza oz. karamelnega, so v razmerju $4 : 3 : 2 : 1$. To velja tudi za pogojne verjetnosti, če ni več vseh krofov: če npr. ostaneta le še roza in karamelni krof, kupec izbere roza krof z verjetnostjo $2/3$, karamelnega pa z verjetnostjo $1/3$.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bo čokoladni krof pošel pred karamelnim?

   b) Recimo, da je čokoladni krof pošel pred karamelnim. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je čokoladni krof pošel kot drugi?

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni standardno normalno. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := (X + Y + 1)^2$.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, \ldots X_n$ so neodvisne in porazdeljene zvezno z gostoto:

$$f(x) = \begin{cases} c(\lambda)\, x\, e^{-\lambda x} & ; x > 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} ,$$

   kjer je $\lambda > 0$ neznan parameter.

   a) Določite $c(\lambda)$.

   b) Poiščite cenilko za λ na podlagi $X_1, \ldots X_n$ po metodi največjega verjetja.

4. Slučajne spremenljivke $X_1, \ldots X_n$ so neodvisne in porazdeljene diskretno po shemi:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 3a \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix} ,$$

   kjer je $a > 0$ neznan parameter. Za velike n poiščite asimptotični 95% interval zaupanja za a oblike $[0, a_{\max}]$, kjer mora biti meja $a_{\max}$ opazljiva.

2010/11

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika
15. november 2010

1. Andrej, Brina, Ciril in Dragica, ki se najprej ne poznajo, pridejo na zabavo, na kateri se poljubna dva izmed njih spoznata z verjetnostjo 1/3, neodvisno od drugih parov. Kolikšna je verjetnost, da je med njimi kdo, ki ne spozna nobenega od drugih omenjenih?

2. Na list papirja z enakomerno razmaknjenimi ravnimi vzporednimi črtami na slepo vržemo kvadrat, katerega diagonala se ujema z razmikom med črtami. Kolikšna je verjetnost, da kvadrat seka katero od črt?

3. V prvi posodi sta dve beli in ena črna, v drugi posodi pa ena bela in dve črni kroglici. Najprej pride Ula in izbere prvo posodo z verjetnostjo $0\dot{}3$, drugo pa z verjetnostjo $0\dot{}7$. Iz izbrane posode na slepo izvleče eno kroglico in je ne vrne. Nato pride še Vid in iz iste posode na slepo izvleče eno kroglico.

   a) Kolikšna je verjetnost, da je Vid izvlekel belo kroglico?

   b) Recimo, da je Vid izvlekel belo kroglico. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je tudi Ula izvlekla belo kroglico?

4. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena binomsko $\mathrm{b}(50, 0\dot{}4)$.

   a) Poiščite največje število k, za katerega bo $P(X = k) > 10^{-3}$ (lahko uporabite primeren približni obrazec, v tem primeru je dovolj zanesljiv).

   b) Izračunajte $P(X = k)$ in $P(X = k + 1)/\,P(X = k)$.

   c) Približno izračunajte $P(X \geq k)$.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika
10. januar 2011

1. Novakovi povabijo na obisk Ahačičeve in Berkopčeve, oboje ob istem času. Oboji malo zamudijo: zamuda Ahačičevih je porazdeljena zvezno enakomerno od 0 do 10 minut, zamuda Berkopčevih pa zvezno enakomerno od 0 do 20 minut. Zamudi sta neodvisni. Slučajna spremenljivka T naj predstavlja čas od dogovorjene ure obiska do prihoda prvih obiskovalcev. Zapišite njeno porazdelitveno gostoto.

2. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geom}(1/3)$. Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke $Y := \lfloor X/3 \rfloor$, kjer $\lfloor \cdot \rfloor$ označuje celi del (število, zaokroženo navzdol).

3. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$, t. j. zvezno z gostoto:
$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$
kjer je $\lambda > 0$.
   a) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := 2Y - X$.
   b) Izračunajte $E(Z)$.

4. Slučajna spremenljivka Z je porazdeljena standardno normalno $\mathrm{N}(0,1)$. Izračunajte $E(|Z|)$ in $D(|Z|)$.

   Ali za vsako slučajno spremenljivko X, ki ima disperzijo, velja $D(|X|) \le D(X)$?

3. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika
4. april 2011

1. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & ; 0 < x \leq 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases},$$

pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke Y glede na $X = x$ pa je normalna $\mathrm{N}\big(0, 1/\sqrt{x}\big)$. Določite brezpogojno porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

2. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_{100}$ so neodvisne in porazdeljene geometrijsko Geom(1/2). Naj bo S njihova vsota.

   a) Izračunajte njeno momentno-rodovno funkcijo, t. j. $E\big[e^{tS}\big]$. Kje je definirana?

   b) S pomočjo neenačbe Markova in momentno-rodovne funkcije ocenite $P(S \geq 300)$ (poiščite najboljšo možno oceno navzgor).

3. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ slučajne spremenljivke, ki *v porazdelitvi* konvergirajo proti X, $Y_1, Y_2, \ldots$ pa slučajne spremenljivke, ki v porazdelitvi konvergirajo proti konstanti c. Dokažite, da produkti $X_1Y_1, X_2Y_2, \ldots$ v porazdelitvi konvergirajo proti cX:

   a) v primeru, ko je $X_1, X_2, \ldots, X, Y_1, Y_2, \ldots, c > 0$ (namig: logaritmirajte, pri čemer lahko privzamete, da komponiranje z zvezno funkcijo ohranja konvergenco v porazdelitvi);

   b) v primeru, ko je še vedno $Y_1, Y_2, \ldots c > 0$, slučajne spremenljivke X_n pa so navzgor ali navzdol omejene z neko konstanto M (neodvisno od n).

4. Populacija je razdeljena na dve enako veliki skupini. Statistična spremenljivka ima na prvi skupini povprečje μ_1 in standardni odklon σ, na drugi skupini pa povprečje μ_2 in prav tako standardni odklon σ.

   Iz populacije nameravamo vzeti stratificirani vzorec, in sicer n enot iz prve skupine in n enot iz druge skupine, pri čemer bi iz vsake skupine vzeli enostavni slučajni vzorec. Vendar pa se pri vsaki enoti z verjetnostjo p zmotimo in vzamemo enoto iz napačne skupine. Privzamemo, da so vsi postopki izbire za posamezne enote vzorca *neodvisni* (populacija je tako velika, da vzorec zajema le njen majhen delež).

   Povprečje dane statistične spremenljivke na populaciji ocenimo s povprečjem te spremenljivke na tako dobljenem vzorcu. Izračunajte disperzijo te cenilke!

4. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika
9. junij 2011

1. Statistična spremenljivka je porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$, na voljo pa imamo vzorec iz n neodvisnih opažanj. Poiščite nepristransko cenilko za $1/\lambda^2$ z enakomerno najmanjšo disperzijo.

   Namig: cenilko iščite kot kvadratno funkcijo pripadajoče zadostne statistike. Upoštevajte, da za $\lambda > 0$ in $m \in \mathbb{N}_0$ velja $\displaystyle\int_0^\infty x^m e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{m!}{\lambda^{m+1}}$.

2. Izvedemo tri poskuse. Prvi poskus uspe z verjetnostjo θ. Če prvi poskus uspe, drugi poskus uspe s pogojno verjetnostjo $\frac{1+\theta}{2}$, če prvi poskus ne uspe, pa drugi uspe s pogojno verjetnostjo $\frac{\theta}{2}$. Podobno, če drugi poskus uspe, ne glede na izid prvega poskusa tretji poskus uspe s pogojno verjetnostjo $\frac{1+\theta}{2}$, če pa ne uspe, spet ne glede na izid prvega poskusa tretji poskus uspe s pogojno verjetnostjo $\frac{\theta}{2}$.

   Recimo, da je prvi poskus uspel, drugi ni uspel, tretji pa je spet uspel. Ocenite θ po metodi največjega verjetja.

3. 127 študentov povprašamo, kolikokrat na teden se gredo zvečer zabavat. Rezultati ankete so naslednji:

dni	0	1	2	3	4	5	6	7
študentov	22	47	35	17	3	2	0	1

   Poiščite 95% interval zaupanja za povprečno število dni v tednu, ko se gre študent zabavat.

4. Pri neki igri iz vrečke brez vračanja vlečemo listke in določeni med njimi so dobitni. V vrečki je 20 listkov, 5 jih izvlečemo. Prireditelj pred vlečenjem zatrdi, da je 12 listkov dobitnih. Konstruirajte randomiziran test, ki pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{,}05$ testira hipotezo, da prireditelj govori resnico, proti alternativni hipotezi, da je dobitnih listkov v vrečki manj. Lahko privzamete, da je več izvlečenih dobitnih listkov bolj "v skladu" z ničelno hipotezo.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika
30. junij 2011

1. Miranda je na nočni zabavi spoznala Ferdinanda. V dneh po zabavi čaka na njegov klic. Verjetnost, da jo Ferdinand prvič pokliče k-ti dan po zabavi, je enaka 3^{-k}. Vsako noč, ki sledi dnevu, ko Ferdinand Mirande ne pokliče, Miranda spozna novega fanta z verjetnostjo $1/10$.

   Recimo, da je Ferdinand poklical Mirando. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je, preden jo je prvič poklical, že spoznala novega fanta? Privzamemo, da Miranda fante spoznava le ponoči in da Franc na posamezen dan pokliče Mirando neodvisno od tega, ali je prej spoznala novega fanta ali ne.

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni, pri čemer ima X eksponentno porazdelitev $\mathrm{Exp}(\lambda)$, Y pa porazdelitev $\mathrm{Gama}(2, \lambda)$. Z drugimi besedami, za $x, y > 0$ sta porazdelitveni gostoti enaki:

   $$f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}\,, \qquad f_Y(y) = \lambda^2 y\, e^{-\lambda y}\,.$$

   Določite porazdelitveno gostoto slučajne spremenljivke $Z = \dfrac{X}{X+Y}$.

3. Slučajne spremenljivke $X, Y_1, Y_2, \ldots Y_{100}$ so neodvisne, pri čemer je $P(X = 1) = 2/3$, $P(X = 2) = 1/3$, $E(Y_i) = 1$ in $D(Y_i) = 100$. Slučajne spremenljivke $Y_1, \ldots Y_{100}$ so tudi enako porazdeljene. Označimo $S = X(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100})$. Približno izračunajte $P(S > 150)$.

4. Vsak poskus določene vrste uspe z verjetnostjo $p \in (0, 1)$. Poiščite nepristransko cenilko za p^2 z enakomerno najmanjšo disperzijo, ki temelji na izvedbi treh poskusov te vrste.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika
26. avgust 2011

1. Pri neki igri se v eni izmed štirih škatel skriva nagrada, v vsaki škatli z enako verjetnostjo. Igra poteka tako, da igralec najprej pokaže na eno škatlo, nato pa vodja igre odpre eno izmed škatel, na katero igralec ni pokazal in v kateri ni nagrade. Nazadnje igralec odpre neko še neodprto škatlo (bodisi tisto, ki jo je sprva pokazal, bodisi katero drugo) in dobi nagrado, če je le-ta notri.

   Recimo, da igralec najprej pokaže na prvo škatlo, relevantne pogojne verjetnosti, s katerimi vodja igre odpre drugo, tretjo oz. četrto škatlo, pa so v razmerju $1 : 2 : 3$ (če je npr. nagrada v prvi škatli, so te verjetnosti enake $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{2}$, če je nagrada v drugi škatli, pa so enake 0, $\frac{2}{5}$ in $\frac{3}{5}$).

   Recimo, da je vodja igre odprl drugo škatlo. Katero škatlo se igralcu najbolj splača odpreti in kolikšna je pogojna verjetnost, da bo notri nagrada?

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni eksponentno $\mathrm{Exp}(1)$, t. j. zvezno z gostoto:
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$
   Izračunajte korelacijski koeficient $r\big(e^{-X}, e^{-X-Y}\big)$.

3. Statistična spremenljivka X je porazdeljena diskretno po shemi:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \dfrac{1}{1+3\theta+2\theta^2} & \dfrac{3\theta}{1+3\theta+2\theta^2} & \dfrac{2\theta^2}{1+3\theta+2\theta^2} \end{pmatrix},$$
   kjer je $\theta > 0$ neznan parameter.

   a) Zapišite to kot enoparametrično eksponentno družino porazdelitev.
   Namig: pomagajte si s funkcijami $\rho_i(x) = \begin{cases} 1 & ; x = i \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$.

   b) Poiščite nepristransko cenilko za $1/(1+\theta)$ z enakomerno najmanjšo disperzijo.

4. Statistična spremenljivka X je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, kjer nobenega od parametrov ne poznamo. Opazimo naslednji vzorec:
$$33{\cdot}1,\ 24{\cdot}9,\ 30{\cdot}1,\ 28{\cdot}0,\ 30{\cdot}1,\ 26{\cdot}6,\ 31{\cdot}5,\ 29{\cdot}8,\ 33{\cdot}3,\ 31{\cdot}1$$
   (kjer privzamemo, da so vse enote vzorca neodvisne in porazdeljene tako kot X). Poiščite interval zaupanja za σ pri stopnji tveganja $\alpha = 0{\cdot}05$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika
5. september 2011

1. Palico na slepo prelomimo, nato pa na slepo izberemo enega od kosov in še tega na slepo prelomimo. Kolikšna je verjetnost, da bomo lahko iz dobljenih kosov sestavili trikotnik (t. j. nobeden od kosov ne bo daljši od skupne dolžine preostalih dveh)?

2. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki, pri čemer naj bo Y porazdeljena binomsko $\mathrm{b}(2, 1/2)$ ter še $E(X \mid Y) = Y$ in $D(X \mid Y) = Y + 1$. Izračunajte $E(X)$ in $D(X)$.

   Pojasnilo. Oznaka $D(X \mid Y)$ pomeni pogojno disperzijo, ki je disperzija ustrezne pogojne porazdelitve. Lahko jo definiramo tudi kot $D(X \mid Y) = E(X^2 \mid Y) - \big(E(X \mid Y)\big)^2$.

3. Dana sta dva kovanca: eden je pošten, pri drugem pa pade grb z verjetnostjo p. Kovancev na videz ne ločimo in v posameznem poskusu lahko vržemo le oba kovanca hkrati.

   Recimo, da v 15 poskusih ni padel noben grb, v 55 poskusih natanko en grb, v 30 poskusih pa sta padla dva grba. Ocenite p po metodi največjega verjetja.

4. Mirjana ima mlajšo sestro, ki jo pogosto kliče. Ker ji je to začelo presedati, si je začela dnevno beležiti, kolikokrat jo je sestra poklicala. Po enem letu so rezultati naslednji:

število klicev na dan	0	1	2	3	4	5	6	7	8
število dni	79	136	82	51	13	2	1	0	1

   Poiščite 99% interval zaupanja za povprečno število klicev na dan.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika
1. februar 2012

1. Petrček si zelo želi avtomobilček *Strela McQueen*, zato najprej začne sitnariti mami, naj mu ga kupi. Če ne uspe, začne sitnariti očetu; če spet ne uspe, začne spet sitnariti mami, nato očetu in tako naprej. Ko k-tič zasitnari mami, dobi avtomobilček z verjetnostjo $\dfrac{2^{-2k-1}}{1+2^{-2k}}$, ko pa k-tič zasitnari pri očetu, dobi avtomobilček z verjetnostjo $\dfrac{2^{-2k-2}}{1+2^{-2k-1}}$ (mišljene so pogojne verjetnosti glede na dogodek, da avtomobilčka še ni dobil, k pa je mišljen posebej za mamo in posebej za očeta: če je torej že 3-krat sitnaril mami in 2-krat očetu, ni uspel ter gre ponovno sitnarit očetu, je $k = 3$). Privzamemo, da Petrček, če ne dobi avtomobilčka, sitnarjenje ponavlja v nedogled.

   a) Kolikšna je verjetnost, da Petrček še po n-tem sitnarjenju (pri mami in očetu skupaj) **ne bo dobil** avtomobilčka?

   b) Kolikšna je verjetnost, da Petrček **dobi** avtomobilček?

   c) Recimo, da je Petrček dobil avtomobilček. Kolikšna je pogojna verjetnost, da mu ga je kupila mama?

2. Tri moške in tri ženske na slepo posedemo za okroglo mizo. Označimo z S število oseb, katerih soseda sta nasprotnega spola (t. j. levi sosed je drugega spola kot desni). Izračunajte $E(S)$ in $D(S)$.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_{500}$ so neodvisne s porazdelitvijo:

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 2a \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix},$$

   kjer je $a > 0$. Označimo $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{500}$. Približno določite a tako, da bo $P(S > 1000) = 0{\cdot}05$.

4. Statistična spremenljivka X naj bo porazdeljena normalno $\mathrm{N}(0, \sigma)$. Poiščite nepristransko cenilko za σ z najmanjšo možno disperzijo, ki temelji na enem samem opažanju.

   Namig: X^2 je nepristranska cenilka za σ^2. Kakšne oblike naj bo torej cenilka za σ?

2009/10

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – UNI-BOL
23. november 2009

1. Goran in Hedvika križata številke na loterijskih listkih. Goran prekriža 7 na slepo izbranih številk od 1 do 21, Hedvika pa neodvisno od Gorana prekriža 7 na slepo izbranih številk od 19 do 39. Kolikšna je verjetnost, da Goran in Hedvika prekrižata same različne številke?

2. Ambrož in Brina imata zmenek. Ambrož pride z zamudo od 0 do 5 minut, Brina pa z zamudo od 3 do 10 minut. Obe zamudi sta porazdeljeni zvezno enakomerno na omenjenih intervalih in neodvisni.

   Recimo, da Ambrož pride pred Brino. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je Brina zamudila manj kot 5 minut?

3. Najmanj kolikšna naj bo verjetnost, da je izdelek brezhiben, če želimo, da je v pošiljki 400 izdelkov z verjetnostjo vsaj 95% najmanj 350 izdelkov brezhibnih? Privzamemo, da so izdelki med seboj neodvisni.

4. Na enotski krožnici na slepo izberemo točko in z X označimo njeno absciso. Zapišite kumulativno porazdelitveno funkcijo in porazdelitveno gostoto te slučajne spremenljivke.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – UNI-BOL
18. januar 2010

1. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni, pri čemer je X porazdeljena enakomerno na intervalu $(1, 2)$, Y pa enakomerno na intervalu $(1, 4)$. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke XY.

2. Za okroglo mizo sedi n ljudi. Ko glasujejo, vsak dvigne roko z verjetnostjo $1/2$, neodvisno od ostalih. Slučajna spremenljivka S naj označuje število 2-*sosledij*, t. j. število parov sosedov, kjer oba dvigneta roko (če npr. sedi za mizo 7 ljudi in roke dvignejo 1., 2., 4., 5. in 7., je $S = 3$). Izračunajte $E(S)$ in $D(S)$.

3. a) Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki s končnima drugima momentoma in naj bo slučajni vektor (X', Y') neodvisna kopija slučajnega vektorja (X, Y) , t. j. enako porazdeljen kot (X, Y) in neodvisen od tega slučajnega vektorja. Izrazite količino:
$$E\big[(X - X')(Y - Y')\big]$$
s kovarianco $K(X, Y)$.

   b) Naj bo X slučajna spremenljivka, f in g pa taki naraščajoči funkciji, da imata $f(X)$ in $g(X)$ končna druga momenta. Dokažite, da je kovarianca
$$K\big(f(X), g(X)\big)$$
nenegativna.

4. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena po Poissonu $\mathrm{P}(\lambda)$. Izračunajte njen tretji centralni moment, t. j. $E\Big[\big(X - E(X)\big)^3\Big]$.

   Namig: lahko si pomagate z (momentno-)rodovnimi funkcijami.

3. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – UNI-BOL
22. april 2010

1. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_{400}$ so neodvisne in porazdeljene diskretno po shemi:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0\text{'}2 & 0\text{'}7 & 0\text{'}1 \end{pmatrix}.$$
Približno izračunajte $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{400} < 780)$.

2. Statistična spremenljivka ima porazdelitev Gama$(2a, a)$, kjer je $a > 0$ neznan parameter. Z drugimi besedami, porazdeljena je zvezno z gostoto:
$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{a^{2a}}{\Gamma(2a)} x^{2a-1} e^{-ax} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}.$$
Opazimo vzorec $X_1, X_2, \ldots X_n$, kjer so te slučajne spremenljivke neodvisne in imajo to porazdelitev. Poiščite minimalno zadostno statistiko.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_n$ so neodvisne in porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Definirajmo:
$$\bar{X} := \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}, \; U := \frac{(X_1 - \bar{X})(X_2 - \bar{X}) \cdots (X_n - \bar{X})}{\left[(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2\right]^{n/2}}.$$
   a) Pokažite, da je U postranska statistika v modelu, kjer sta μ in σ oba neznana.
   b) Pokažite, da je U neodvisna od $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$.

4. Statistična spremenljivka X je porazdeljena po Poissonu $\mathrm{P}(\lambda)$. Želeli bi oceniti λ^2, na voljo pa imamo eno samo opažanje (X).
   a) Poiščite cenilko po metodi največjega verjetja. Je le-ta nepristranska?
   b) Poiščite nepristransko cenilko z enakomerno najmanjšo disperzijo.
   c) Recimo, da nastavimo cenilko v obliki $X^2 - aX$. Katere izbire konstante a so smiselne z ozirom na srednjo kvadratično napako (q)?

   Pomoč: prvi štirje momenti Poissonove porazdelitve so:
$$E(X) = \lambda\,,\; E(X^2) = \lambda^2 + \lambda\,,\; E(X^3) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda\,,\; E(X^4) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda\,.$$

4. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – UNI-BOL
3. junij 2010

1. Statistična spremenljivka X je porazdeljena po Poissonu $\mathrm{P}(\lambda)$. Na voljo imamo eno samo opažanje.

   a) Poiščite transformacijo, ki pri cenilki po metodi največjega verjetja stabilizira disperzijo.

   b) Opazimo $X = 100$. Na podlagi prejšnje točke poiščite približni interval zaupanja za λ pri stopnji tveganja $\alpha = 0\text{'}05$.

2. Statistična spremenljivka X je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, kjer nobenega od parametrov ne poznamo. Opazimo naslednji vzorec:

   $$27\text{'}0,\ 18\text{'}8,\ 18\text{'}7,\ 21\text{'}2,\ 16\text{'}9,\ 19\text{'}4,\ 16\text{'}9,\ 20\text{'}5,\ 17\text{'}9,\ 19\text{'}8\,.$$

   (kjer privzamemo, da so vse enote vzorca neodvisne in porazdeljene tako kot X). Poiščite interval zaupanja za μ pri stopnji tveganja $\alpha = 0\text{'}01$.

3. Življenjska doba originalne žarnice je porazdeljena eksponentno s pričakovano vrednostjo 500 ur, življenjska doba ponaredka pa je porazdeljena eksponentno s pričakovano vrednostjo 100 ur. Na podlagi opažene življenjske dobe ene žarnice testiramo ničelno hipotezo, da je originalna, proti alternativni hipotezi, da je ponaredek. Konstruirajte najmočnejši test pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}05$. Kolikšna je njegova moč?

4. Statistična spremenljivka je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Na voljo imamo vzorec $X_1, X_2, \ldots X_n$, kjer so vse spremenljivke v vzorcu neodvisne in imajo predpisano porazdelitev.

   Opazimo $n = 100$, $\sum_{i=1}^{n} X_i = 37$, $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 75$. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}01$ na podlagi razmerja verjetij testirajte hipotezo, da je $\mu = \sigma^2$, proti alternativni hipotezi, da to ni res. Pomagajte si z aproksimacijo porazdelitve ustrezne statistike s porazdelitvijo hi hvadrat.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – UNI-BOL
23. junij 2010

1. Tone ima dogovor s krovci, da mu 4. junija naredijo nadstrešek za avto. Toda obrtniki z določeno verjetnostjo zamujajo, in sicer je verjetnost, da mu nadstrešek naredijo k-tega junija, enaka 2^{3-k}, $k = 4, 5, 6, \ldots$ (datumi po 30. juniju imajo tako majhne verjetnosti, da jih lahko zanemarimo).

   Od vključno 1. junija dalje vsak dan klesti uničujoča toča z verjetnostjo 1/10, neodvisno od ostalih dni in obrtnikov. Do vključno dneva, ko je nadstrešek narejen, taka toča, če se pojavi, Tonetu obtolče avto. Privzamemo, da sta toča in zamuda obrtnikov neodvisni.

   a) Kolikšna je verjetnost, da Tonetu toča obtolče avto?
   b) Recimo, da je toča Tonetu obtolkla avto. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so obrtniki zamudili z nadstreškom?

2. Naj bodo X, Y in Z neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene enakomerno na intervalu $[-1, 1]$. Izračunajte $E\big[\operatorname{sgn}(X - Y)\operatorname{sgn}(X - Z)\big]$, kjer je, kot običajno:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} .$$

3. Statistične spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_n$ so neodvisne in porazdeljene zvezno z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1 - e^{-\alpha/e}}\, x^{\alpha x}(1 + \ln x) & ; \dfrac{1}{e} < x < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} ,$$

   kjer je $\alpha > 0$. Poiščite minimalno zadostno statistiko.

4. Tine je zgeneriral 100 slučajnih števil, ki so neodvisna in porazdeljena normalno $\mathrm{N}(0, 1)$, Tone pa je zgeneriral 10.000 takih števil. Oba povesta povprečje števil, ki sta jih dobila.

   a) Zapišite porazdelitev Tinetovega in Tonetovega povprečja.
   b) Zapomnimo si enega izmed povprečij, ne pa tudi, čigavo je. Konstruirajte najmočnejši test, ki na podlagi tega opažanja pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ testira ničelno hipotezo, da je opaženo povprečje Tonetovo, proti alternativni hipotezi, da je Tinetovo. Kolikšna je njegova moč?

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – UNI-BOL
6. september 2010

1. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni eksponentno Exp(1), t. j. zvezno z gostoto:
$$p(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$
Izračunajte $P(X > Y \mid Y > 1)$.

2. n otrok se igra v krogu in vsak ima eno žogo. Naenkrat vsi vržejo žoge, vsak proti kateremu drugemu otroku, izbranemu na slepo in neodvisno od izbir drugih otrok. Označimo z S število otrok, ki ne dobijo nobene žoge. Izračunajte $E(S)$ in $D(S)$.

3. Statistična spremenljivka je porazdeljena zvezno z gostoto:
$$p(x) = \begin{cases} ax^{a-1} & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} ,$$
kjer je $a > 0$ neznan parameter. Na voljo imamo vzorec $X_1, X_2, \ldots X_n$, kjer so vse spremenljivke v vzorcu neodvisne in imajo predpisano porazdelitev. Poiščite nepristransko cenilko za $1/a$, ki ima enakomerno najmanjšo disperzijo.

   Namig: obliko cenilke uganite iz zapisa ustrezne eksponentne družine.

4. Statistična spremenljivka X je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, kjer nobenega od parametrov ne poznamo. Opazimo naslednji vzorec:
$$24{\cdot}7,\ 27{\cdot}1,\ 24{\cdot}5,\ 19{\cdot}3,\ 30{\cdot}2,\ 18{\cdot}4,\ 24{\cdot}6,\ 28{\cdot}4,\ 24{\cdot}4,\ 27{\cdot}9$$
(kjer privzamemo, da so vse enote vzorca neodvisne in porazdeljene tako kot X). Poiščite interval zaupanja za σ pri stopnji tveganja $\alpha = 0{\cdot}05$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – UNI-BOL
20. september 2010

1. Na mizi je n na videz enakih kovancev. Od tega je k poštenih, preostali pa so pristranski, in sicer na vsakem izmed njiju pade grb z verjetnostjo $p \neq 1/2$. Na slepo izberemo dva kovanca in ju vržemo.

   a) Kolikšna je verjetnost, da na enem kovancu pade grb, na drugem pa cifra?

   b) Recimo, da res na enem pade grb, na drugem pa cifra. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je kateri izmed vrženih kovancev pristranski?

2. Tone čaka avtobus in nima pojma, kdaj pride. Iz izkušenj pa ve, da je čas čakanja v urah porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+t)^2} & ; \ t > 0 \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases} .$$

   Če Tone ujame avtobus, ima do cilja še eno uro, če gre peš, pa ima do cilja še tri ure. Tone nekaj časa čaka, če do takrat ni avtobusa, pa gre peš. Koliko časa naj čaka, da bo pričakovani čas od začetka čakanja do prihoda na cilj minimalen?

   Namig. Označimo z A čas prihoda avtobusa, s t_0 čas, ob katerem se Tone odloči iti peš, če še ni bilo avtobusa, s T pa celoten čas, ki ga Tone porabi za prihod do cilja. Zapišite T kot funkcijo slučajne spremenljivke A.

3. Statistična spremenljivka je porazdeljena enakomerno na intervalu $[0, a]$, na voljo pa imamo n neodvisnih opažanj. Recimo, da se odločimo ocenjevati parameter a na podlagi vzorčnega povprečja $\bar{X}$.

   a) Poiščite funkcijo g, za katero bo disperzija slučajne spremenljivke $g(\bar{X})$ za velike n približno neodvisna od parametra, matematično upanje pa se bo z njim spreminjalo.

   b) Pri $n = 100$ opazimo $\bar{X} = 3$. V kontekstu prej povedanega poiščite 99% interval zaupanja za a.

   Komentirajte! *Namig*: CLI, delta metoda.

4. Statistični spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni po Poissonu: $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$ in $Y \sim \mathrm{P}(\mu)$. Opazimo $X = 230$ in $Y = 180$. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ na podlagi razmerja verjetij testirajte hipotezo, da je $\lambda = \mu = 200$, proti alternativni hipotezi, da to ni res. Pomagajte si z aproksimacijo porazdelitve ustrezne statistike s porazdelitvijo hi hvadrat.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Matematika – UNI-BOL
16. februar 2011

1. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni zvezno z gostoto:
$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & ; x > 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$
Izračunajte $P(X > 2 \mid X + Y > 4)$.

2. V dobro premešanem kupu osmih kart so štiri rdeče in štiri črne. Karte drugo za drugo in brez vračanja vlečemo s kupa, dokler ne izvlečemo vsaj ene rdeče in vsaj ene črne. Število izvlečenih kart označimo z X. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke ter izračunajte $E(X)$ in $D(X)$.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_n$ so neodvisne in porazdeljene normalno $\mathrm{N}\big(a/2, \sqrt{a}\big)$, kjer je $a > 0$ neznan parameter. Dokažite, da obstaja nepristranska cenilka za $a^2 + 4a$ z enakomerno najmanjšo disperzijo, in jo tudi poiščite.

4. Statistična spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\, e^{2x} & ; x \leq 0 \\ \frac{2}{3}\, e^{-x} & ; x \geq 0 \end{cases} .$$
   a) Zapišite gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke $-X$.
   b) Opazimo X ali $-X$. Konstruirajte najmočnejši test, ki na podlagi tega opažanja pri stopnji značilnosti $\alpha = 0'05$ testira ničelno hipotezo, da smo opazili X, proti alternativni hipotezi, da smo opazili $-X$.