KOLOKVIJI IN IZPITI IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

FRI, IŠRM

Zbral: Martin Raič

2020/21

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

20. november 2020

1. [35] V kolektivu je 10 delavcev, med katerimi je tudi Zdravko. Vsi opravijo hitri test AbC19 za novi koronavirus SARS-Cov-2. Pri okuženih je test pozitiven z verjetnostjo 92˙5%, pri neokuženih pa z verjetnostjo 2˙1%[1]. Privzamemo, da je v populaciji 3% okuženih oseb.

   a) Kolikšna je verjetnost, da je Zdravkov test pozitiven?

   b) Izkaže se, da je bil natanko eden izmed testiranih pozitiven, a ni znano, kdo. Kolikšna je verjetnost, da je Zdravko okužen?

   Smiselno privzemite ustrezno neodvisnost in napišite, kaj ste privzeli. Obe verjetnosti izračunajte numerično na vsaj tri decimalke natančno.

2. [35] V Nacionalni raziskavi o razširjenosti COVID-19 v Sloveniji so aprila letos 1316 osebam odvzeli krvne vzorce in jih testirali na protitelesa proti virusu. Protitelesa je imelo 41 oseb.

   Naj bo p verjetnost, da ima posamezna oseba protitelesa, in privzamemo, da so osebe med seboj neodvisne. Približno določite maksimalni p, pri katerem je verjetnost, da bo izmed 1316 oseb imelo protitelesa manj kot 41, vsaj 2˙5%.

3. [30] Pepe in Rudi igrata šah. Pepe dobi partijo z verjetnostjo $p > 0$, Rudi z verjetnostjo $r > 0$, lahko pa tudi remizirata. Posamezne partije so med seboj neodvisne. Igrata tako dolgo, kolikor je potrebno, da vsak od njiju zmaga vsaj enkrat.

   a) Izračunajte porazdelitev števila odigranih partij.

   b) Kolikšna je verjetnost, da v zadnji partiji zmaga Pepe?

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **75 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

[1]Vir: Mulchandani et al.: Accuracy of UK Rapid Test Consortium (UK-RTC) “AbC-19 Rapid Test” for detection of previous SARS-CoV-2 infection in key workers: test accuracy study. BMJ 2020; 371

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

4. marec 2021

1. [35] Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, porazdeljeni zvezno z gostotama:

$$p_X(x) = \begin{cases} a\sqrt{x}\, e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} \qquad \text{in} \qquad p_Y(y) = \frac{b}{(1+y^2)^{3/2}}\,.$$

   Določite porazdelitvi slučajnih spremenljivk:

$$T := \frac{X}{1+Y^2} \qquad \text{in} \qquad U := \frac{Y\sqrt{X}}{\sqrt{1+Y^2}}\,.$$

   Izračunajte tudi konstanti a in b.

   Pomoč: $\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$, $\Gamma(m+1) = m\,\Gamma(m)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

2. [30] Za okroglo mizo, ki ima $2n$ sedežev, kjer je $n \geq 2$, naključno posedemo n zakonskih parov. Pri tem ženske in moški sedijo izmenoma in vse take možnosti so enako verjetne. Naj bo X število parov, pri katerih žena sedi desno ob možu, Y pa število parov, pri katerih mož sedi desno ob ženi. Izračunajte $\operatorname{corr}(X, Y)$.

3. [35] Slučajna spremenljivka Y naj bo porazdeljena geometrijsko $\operatorname{Geom}\left(\frac{1}{2}\right)$, torej:

$$P(Y = y) = 2^{-y}\,; \quad y = 1, 2, 3, \ldots$$

   Nadalje naj bo:

$$P(X = x \mid Y = y) = (x-y)\,2^{y-x-1}\,; \quad x = y+1, y+2, \ldots$$

   a) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

   b) Izračunajte $E(Y \mid X)$.

   Pomoč: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

3. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

29. april 2021

1. [40] Statistična spremenljivka je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} c(a-x) & ; 0 \le x \le a \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

   a) Izrazite c z a.
   b) Po metodi momentov poiščite cenilko za a na podlagi n neodvisnih manifestacij dane statistične spremenljivke.
   c) Je dobljena cenilka nepristranska? Izračunajte njeno srednjo kvadratično napako.
   d) Če dobljeno cenilko označimo z $\hat{a}$, določite konstanto k, pri kateri bo imela cenilka $k\hat{a}$ najmanjšo srednjo kvadratično napako.

2. [30] V spodnji tabeli je prikazana frekvenčna porazdelitev telesne teže 30 domačih mačk[2]:

teža [kg]	2˙0	2˙1	2˙2	2˙3	2˙4	2˙5	2˙6	2˙7	2˙8	2˙9
št. mačk	3	6	3	7	2	1	3	3	0	2

   Določite 95% interval zaupanja za standardni odklon telesne teže domače mačke. Privzamemo, da le le-ta porazdeljena normalno.

3. [30] Na dvoranskem prvenstvu Slovenije v atletiki, ki je bilo 13. februarja 2021 v Novem mestu, so članice v prvem in tretjem poskusu dosegle naslednje rezultate v skoku v daljino (štete so samo članice, ki so bile v obeh poskusih uspešne)[3]:

Prvi poskus	Tretji poskus
5˙87	5˙98
5˙24	5˙48
5˙20	5˙23
5˙22	5˙21
5˙13	5˙09
5˙07	4˙89
4˙82	4˙70

   Pri stopnji tveganja $\alpha = 0˙05$ preizkusite domnevo, da je pričakovana daljava v prvem poskusu enaka pričakovani daljavi v tretjem poskusu.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

[2]Gre za vzorec iz malo večjega nabora podatkov.
Vir: `https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html`, ogled 27. 4. 2021.

[3]Vir: `www.timingljubljana.si`, ogled 27. 4. 2021.

3. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

29. april 2021

1. [40] Statistična spremenljivka je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} c(a-x) & ; 0 \le x \le a \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

   a) Izrazite c z a.
   b) Po metodi momentov poiščite cenilko za a na podlagi n neodvisnih manifestacij dane statistične spremenljivke.
   c) Je dobljena cenilka nepristranska? Izračunajte njeno srednjo kvadratično napako.
   d) Če dobljeno cenilko označimo z $\hat{a}$, določite konstanto k, pri kateri bo imela cenilka $k\hat{a}$ najmanjšo srednjo kvadratično napako.

2. [30] V spodnji tabeli je prikazana frekvenčna porazdelitev telesne teže 30 domačih mačk[4]:

teža [kg]	2'0	2'1	2'2	2'3	2'4	2'5	2'6	2'7	2'8	2'9
št. mačk	3	6	3	7	2	1	3	3	0	2

   Določite 95% interval zaupanja za standardni odklon telesne teže domače mačke. Privzamemo, da le le-ta porazdeljena normalno.

3. [30] Na dvoranskem prvenstvu Slovenije v atletiki, ki je bilo 13. februarja 2021 v Novem mestu, so članice v prvem in tretjem poskusu dosegle naslednje rezultate v skoku v daljino (štete so samo članice, ki so bile v obeh poskusih uspešne)[5]:

Prvi poskus	Tretji poskus
5'87	5'98
5'24	5'48
5'20	5'23
5'22	5'21
5'13	5'09
5'07	4'89
4'82	4'70

   Pri stopnji tveganja $\alpha = 0'05$ preizkusite domnevo, da je pričakovana daljava v prvem poskusu enaka pričakovani daljavi v tretjem poskusu.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

[4] Gre za vzorec iz malo večjega nabora podatkov.
Vir: `https://vincentarelbundock.github.io/Rdatasets/datasets.html`, ogled 27. 4. 2021.

[5] Vir: `www.timingljubljana.si`, ogled 27. 4. 2021.

4. KOLOKVIJ IN IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

14. junij 2021

Za kolokvij rešujete zadnje tri naloge, za izpit pa 1., 2., 3. in 5. nalogo.

Pri kolokviju se bodo točke pomnožile s 4/3.

1. Anabela, Božidar in Celestin dobijo vsak po 5 kart iz kupa standardnih 52 kart. Karte se ne ponavljajo (niti pri posameznem igralcu niti med igralci) in vse možne kombinacije so enako verjetne.

   a) Kolikšna je verjetnost, da so vse Anabeline karte iste barve (barve so štiri in vse so enako zastopane)?

   b) Recimo, da so Anabeline karte iste barve. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so tudi vse Božidarjeve ali pa vse Celestinove karte iste barve?

2. Naj bo $0 < a < b$. Slučajna spremenljivka X ima porazdelitev $\mathrm{Gama}(2,1)$, tj. ima gostoto:

   $$p_X(x) = \begin{cases} x\,e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

   Pogojno na $X = x$ je slučajna spremenljivka Y porazdeljena enakomerno na intervalu (ax, bx). Določite brezpogojno porazdelitev slučajne spremenljivke Y in izračunajte $E(1/Y)$.

   Namig: uporabite pogojno pričakovano vrednost.

3. V spodnji tabeli so prikazane porodne teže deklic in dečkov, ki so se rodili 18. decembra 1997 v porodnišnici *Mater Mothers' Hospital* v Brisbanu v Avstraliji:[6]

Deklice:	3837, 3334, 2208, 1745, 2576, 3208, 3746, 3523.
Dečki:	3554, 3838, 3625, 2846, 3166, 3520, 3380, 3294, 3521, 2902.

   Pri stopnji tveganja 0˙05 preizkusite domnevo, da so deklice in dečki v povprečju enako težki, proti alternativni domnevi, ki to zanika.

4. V spodnji tabeli je prikazano število popravil večjih plovil (težjih od 75 gigaton) v singapurskem pristanišču v letu 2019 po mesecih:[7]

JAN	FEB	MAR	APR	MAJ	JUN
227	224	215	204	252	201

JUL	AVG	SEP	OKT	NOV	DEC
209	239	223	222	213	223

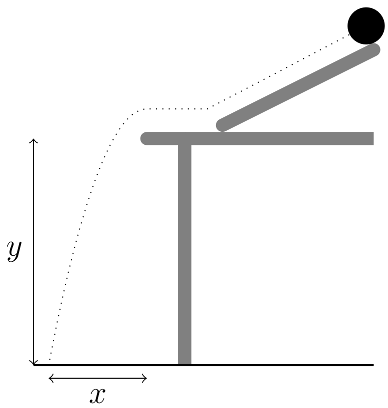
[6] Vir: `http://jse.amstat.org/jse_data_archive.htm`, podatki `babyboom`, ogled 13. 6. 2021.

[7] Vir: `https://data.gov.sg/dataset/vessel-calls-75-gt-monthly`, ogled 13. 6. 2021.

Pri stopnji tveganja $\alpha = 0\text{˙}05$ preizkusite domnevo, da so popravila enakomerno porazdeljena skozi vse leto, proti alternativni domnevi, ki to zanika.

5. Galileo Galilei[8] je meril, koliko daleč pade krogla, ki jo spustimo z mize, potem ko je pridobila hitrost s kotaljenjem po klančini (glej sliko). Pri tem je spreminjal višino mize, klančina pa je ostajala enaka. Če vodoravni odmik točke padca od roba označimo z x, višino mize pa z y, so podatki naslednji:

x	y
1500	1000
1340	828
1328	800
1172	600
800	300



Razdalje so podane v *punktih*, en punkt je približno $0\text{˙}938$ mm. Postavimo model, kjer je višina y pojasnjevalna, odmik x pa odvisna spremenljivka in se ravna po predlogi $x = ky^{\alpha}$.

a) Z logaritmiranjem pretvorite model v enostavno linearno regresijo ter ocenite koeficienta k in α. Razložite ocenjeno vrednost koeficienta α.

b) Napovejte odmik pri padcu z višine 1200 punktov najprej točkovno, nakar poiščite 95% napovedni interval.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

[8] Vir: `http://jse.amstat.org/jse_data_archive.htm`, podatki `galilei`, ogled 14. 6. 2021.

2018/19

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

6. december 2018

1. Ambrož, Brina in Cveta izbirajo črke slovenske abecede (ki jih je 25). Ambrož izbere 3 različne črke, Brina 4 in Cveta 5 črk. Kolikšna je verjetnost, da dva izbereta isto črko, vse ostale izbrane črke pa so različne (med seboj in tudi od črke, ki sta jo izbrala dva)?

2. Bernard mora na letališču prestopati. Letalo, s katerim bo na tem letališču pristal, po voznem redu pristane ob 12:00, letalo, ki ga lovi, pa po voznem redu vzleti ob 12:50. V resnici pa ima prvo letalo ob pristanku zamudo, porazdeljeno enakomerno na intervalu od 0 do 60 minut, drugo letalo pa ima ob vzletu zamudo, porazdeljeno enakomerno na intervalu od 0 do 30 minut. Za uspešen prestop potrebuje Bernard vsaj 30 minut.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bo Bernard ujel letalo?

   b) Recimo, da je Bernard ujel letalo. Kolikšna je verjetnost, da je letalo, ki ga je lovil, vzletelo pred 13. uro?

3. V posodo, v kateri je sprva 100 belih kroglic, dodajamo nove kroglice, od katerih je vsaka bela z verjetnostjo 40% in rdeča z verjetnostjo 60%. Najmanj približno koliko kroglic moramo dodati, če želimo z verjetnostjo 95% zagotoviti, da bo v posodi vsaj polovica rdečih kroglic?

4. Adrijan, Branko in Cirila na poziv povedo število. Adrijan vedno reče 0, Branko vedno reče 2, Cirila pa pove slučajno število, porazdeljeno enakomerno na intervalu od 1 do 4. Z verjetnostjo 1/6 po številu vprašamo Adrijana, z verjetnostjo 1/3 Branka in z verjetnostjo 1/2 Cirilo. Odgovor, ki ga dobimo, označimo z X. Zapišite kumulativno porazdelitveno funkcijo te slučajne spremenljivke in narišite njen graf.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

27. marec 2019

1. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z dvorazsežno gostoto:

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2x^4\sqrt{2\pi}}\, e^{-(1+y^2)/(2x^2)}\,.$$

   Določite porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y/X ter dokažite, da sta ti dve slučajni spremenljivki neodvisni.

2. Za okroglo mizo sedi 6 kvartopircev. Mednje naključno razdelimo karte z vrednostmi $1, 2, \ldots, 6$, vsakemu eno; vse razdelitve so enako verjetne. Označimo z X število kvartopircev, ki imajo višjo karto od svojega levega soseda, z Y pa število kvartopircev, ki imajo višjo karto od soigralca, ki sedi nasproti. Izračunajte kovarianco med X in Y.

3. Pošteno kocko mečemo, dokler ne pade šestica; meti so neodvisni. Nato naključno izberemo enega od realiziranih metov – pogojno na število metov vse mete enako verjetno. Označimo z X zaporedno številko izbranega meta (štejemo od 1 naprej). Izračunajte $E(X)$.

4. Dan je proces razvejanja, v katerem ima vsak posameznik natanko k potomcev z verjetnostjo $\frac{2^k}{3^{k+1}}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

   a) Določite porazdelitev števila predstavnikov druge generacije, t. j. za vsak $k = 0, 1, 2, \ldots$ izračunajte verjetnost, da ima druga generacija natanko k predstavnikov.

   b) Kolikšna je verjetnost, da proces izumre?

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

3. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

7. junij 2019

1. Hazarder Lipe igra igro, ki ga stane 1 evro. Z verjetnostjo 40% ta evro izgubi, z verjetnostjo 58% ga dobi nazaj, z verjetnostjo 2% pa dobi 20 evrov, tako da njegov dobiček znaša 19 evrov. Lipe odigra 200 neodvisnih iger.

   a) Kolikšna je verjetnost, da je Lipe na dobičku?

   b) Recimo, da je Lipe na dobičku. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je v prvi igri zadel 20 evrov?

2. Opažene vrednosti $X_1, \ldots, X_n$ so neodvisne in porazdeljene normalno z matematičnim upanjem a in standardnim odklonom a, kjer je $a > 0$ neznan parameter. Poiščite cenilko za a po metodi največjega verjetja in ocenite a iz vzorca:

$$16\,,\ -3\,,\ 20\,,\ 16\,,\ 65\,,\ 26\,,\ 24\,,\ 27\,,\ 12\,,\ 11\,.$$

3. 186 odraslih Britancev je odgovorilo na vprašanje, kakšna se jim je zdela premierka Theresa May v odstopu. Rezultati po spolu so zbrani v naslednji tabeli:

mnenje	ženske	moški
odlična	3	0
dobra	21	13
povprečna	28	20
slaba	18	20
grozna	22	41

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{,}05$ testirajte hipotezo, da imajo moški in ženske o premierki enako dobro mnenje, proti alternativni hipotezi, ki to zanika. Premislite, kateri test je najprimernejši – da upošteva urejenost možnih odgovorov.

4. Enostavni slučajni sprehod se začne v položaju 0 in gre na vsakem koraku z verjetnostjo 1/5 za 1 gor, z verjetnostjo 4/5 pa za 1 dol. Označimo s T_1 število korakov, potrebnih, da sprehod (prvič) pride v stanje 1; če sprehod nikoli ne pride v 1, naj bo $T_1 = \infty$. Izračunajte $E(T_1 \mid T_1 < \infty)$.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

18. junij 2019

1. Pepček dobi nalogo, da iz pralnega stroja pobere perilo. V perilu je 5 različnih parov nogavic. Pepček vsako nogavico pobere z verjetnostjo 80%.

   a) Označimo z A dogodek, da so vse nogavice, ki jih je pobral Pepček, v parih (vključno z izidom, da Pepček ni pobral nobene nogavice). Izračunajte verjetnost tega dogodka.

   b) Recimo, da se je zgodil dogodek A. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je Pepček našel natanko tri pare nogavic?

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^2 y^2} & ;\ 0 < x, y < 1,\ 2xy > 1 \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

   Izračunajte konstanto c ter določite robni porazdelitvi in porazdelitev slučajne spremenljivke $Z = XY$.

3. Statistična spremenljivka je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{a+b}\, e^{x/a} & ;\ x \le 0 \\ \frac{1}{a+b}\, e^{-x/b} & ;\ x \ge 0\,, \end{cases}$$

   kjer sta $a, b > 0$ neznana parametra. Opazimo n neodvisnih realizacij te spremenljivke. Poiščite cenilki za a in b po metodi momentov. Pri kakšnih podatkih dobimo smiselni cenilki?

4. V tabeli na desni je prikazan svetovni promet po mobilnem internetu (v petabajtih na mesec)[9]. Modelirajmo to tako, da logaritem prometa zadošča enostavni linearni regresiji. Napovejte promet za leto 2022 in poiščite 95% napovedni interval.

leto	promet
2011	597
2012	885
2013	1.480
2014	2.514
2015	3.685
2016	7.201
2017	11.510
2018	19.010

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

[9] Vira: `https://en.wikipedia.org/wiki/Internet_traffic`, `https://www.statista.com/statistics/271405/global-mobile-data-traffic-forecast/`, ogled 15. 6. 2019.

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

28. junij 2019

1. Žena pošlje moža v trgovino. Na listek mu napiše seznam stvari, ki jih je treba kupiti. Število stvari na seznamu je slučajno, in sicer ima porazdelitev:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0\text{'}2 & 0\text{'}4 & 0\text{'}3 & 0\text{'}1 \end{pmatrix}.$$

   Mož pogleda listek, ga pusti doma in se odpravi v trgovino. Tam se vsake stvari spomni z verjetnostjo 0'8, pri čemer so stvari med seboj neodvisne.

   a) Kolikšna je verjetnost, da je mož prinesel vse stvari?

   b) Recimo, da je mož res prinesel vse stvari. Za $k = 1, 2, 3, 4$ izračunajte pogojno verjetnost, da je bilo na seznamu natanko k stvari, če vemo, da je mož prinesel vse.

2. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x} & ; 1 < x < 2 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

   Nadalje naj bo Y slučajna spremenljivka, ki je pogojno na X porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(X)$.

   a) Izračunajte konstanto c.

   b) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

   c) Izračunajte $P(XY > 1)$.

3. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene zvezno z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

   Označimo $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Približno določite najmanjši n, pri katerem je $P(S_n > 100) \geq 0\text{'}95$.

4. Isti izpit so pisali tako študenti smeri Praktična matematika kot smeri Fizikalna merilna tehnika. Rezultati za smer Praktična matematika so:

$$61,\ 72,\ 16,\ 70,\ 37,\ 55\,,$$

rezultati za smer Fizikalna merilna tehnika pa so:

$$28,\ 43,\ 35,\ 10,\ 20,\ 29,\ 50\,.$$

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ testirajte hipotezo, da so študenti obeh smeri enako dobri, proti alternativni hipotezi, ki to zanika. Računajte dovolj natančno!

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

22. avgust 2019

1. Inšpektor Nosan zajame 10 ljudi, pri katerih se ve, da je med njimi natanko 5 članov prepovedane Bratovščine sluzastega lignja. Nosan vsakega vpraša, ali je član te bratovščine ali ne. Osumljenec, ki je član Bratovščine, odgovori pritrdilno z verjetnostjo 40%, osumljenec, ki ni član Bratovščine, pa z verjetnostjo 30%. Pritrdilno odgovorijo prvi, drugi, četrti, peti in osmi osumljenec. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so natanko omenjeni osumljenci člani Bratovščine? Privzamemo, da so vse možne razporeditve petih članov Bratovščine med desetimi zajetimi enako verjetne, prav tako tudi, da so dogodki, da posamezen osumljenec odgovori pritrdilno, med seboj neodvisni.

2. Slučajni spremenljivki sta neodvisni in porazdeljeni zvezno z gostotama:

$$p_X(x) = \begin{cases} x\,e^{-x} & ;\, x > 0 \\ 0 & ;\, \text{sicer}, \end{cases} \qquad p_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & ;\, y > 0 \\ 0 & ;\, \text{sicer}. \end{cases}$$

   Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := \dfrac{X}{X+Y}$.

3. V 10 škatel vržemo 10 kroglic. Vsaka kroglica prileti v posamezno škatlo z enako verjetnostjo in posamezne kroglice so pri tem neodvisne. Označimo z X število praznih škatel. Izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

4. Statistična spremenljivka X lahko zavzame vrednosti od 0 do 5. Frekvenčna porazdelitev 200 neodvisnih realizacij te spremenljivke je zbrana v naslednji tabeli:

vrednost	0	1	2	3	4	5
frekvenca	9	39	67	56	25	4

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{,}05$ testirajte hipotezo, da je $X \sim \mathrm{Bin}(5, p)$ za neki $p \in [0, 1]$, proti alternativni hipotezi, ki to zanika.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2017/18

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

14. december 2017

1. Peteršiljčkovi vsako jutro porabijo liter mleka, če je le na voljo. Čez dan gredo v trgovino in kupijo en ali dva litrska tetrapaka mleka, tako da ga imajo na zalogi dva litra. Zjutraj najprej odprejo tetrapak, ki so ga kupili prej (ali vsakega z enako verjetnostjo, če so oba kupili prejšnji dan). Če se mleko ne sesiri, ga porabijo in preostali tetrapak pustijo za naslednji dan. Če pa se sesiri, ga zavržejo in odprejo preostali tetrapak. Če se še to mleko sesiri, so tisto jutro pač brez mleka. Kasneje čez dan ne uživajo mleka.

   Mleko, ki so ga Peteršiljškovi kupili prejšnji dan, se sesiri z verjetnostjo 20%, mleko, ki so ga kupili pred dvema dnevoma, pa z verjetnostjo 40%. Privzamemo, da so morali Peteršiljčkovi v ponedeljek kupiti dva litra mleka.

   a) Izračunajte verjetnosti dogodkov:

   $$T_0 := \{\text{Peteršiljčkovim se v torek zjutraj prvi tetrapak, ki ga vzamejo, ne sesiri}\}\,,$$
   $$T_1 := \{\text{Peteršiljčkovim se v torek zjutraj prvi tetrapak sesiri, drugi pa ne}\}\,,$$
   $$T_2 := \{\text{Peteršiljčkovi v torek zjutraj ostanejo brez mleka}\}\,.$$

   b) Kolikšna je verjetnost, da bodo Peteršiljčkovi v sredo zjutraj lahko pili mleko?

      Namig: pogojujte na dogodke iz prejšnje točke.

   c) Recimo, da so Peteršiljčkovi v sredo zjutraj lahko pili mleko. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so bili v torek zjutraj brez mleka?

2. Letalo *Airbus A380* se da urediti tako, da sprejme 853 potnikov. Vsak potnik, ki kupi karto, se dejansko pojavi z verjetnostjo 90%. Največ koliko kart lahko letalska družba proda, če naj bo verjetnost, da na letalu ne bo dovolj sedežev, manjša od 5%? Dovolj bo uporabiti ustrezen približni obrazec.

3. V dobro premešanem kupu 8 kart so 4 rdeče in 4 črne. Označimo z X število črnih kart, ki so nad drugo rdečo karto, gledano z vrha.

   a) Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

   b) Naj bo A dogodek, da je vrhnja karta rdeča. Pri katerih k sta dogodka $\{X = k\}$ in A neodvisna?

4. Nik in Pia se dogovorita za zmenek ob 20. uri. Nik pride ob času, porazdeljenem enakomerno med 19:55 in 20:05, Pia pa ob času, porazdeljenem enakomerno med 20:00 in 20:10; časa sta med seboj neodvisna. Slučajna spremenljivka T naj pove, koliko minut je Nik čakal Pio; če je Pia prišla pred njim, vzamemo $T = 0$.

   a) Zapišite kumulativno porazdelitveno funkcijo te slučajne spremenljivke in narišite njen graf.

   b) Je slučajna spremenljivka T porazdeljena zvezno? Če je, zapišite gostoto.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

23. marec 2018

1. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x^2-y^2)^2} & ;\ x > 2y > 0,\ x+y > 1 \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

   Določite porazdelitev vsote $X + Y$.

2. *Šnops* je igra, ki se igra z 20 kartami, med katerimi so štirje kralji in štiri dame. Če igrata dva igralca, vsak dobi pet kart. Privzemimo, da so karte dobro premešane. Recimo, da igrata Darja in Krištof. Izračunajte kovarianco med številom dam, ki jih dobi Darja, in številom kraljev, ki jih dobi Krištof.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ so neodvisne s porazdelitvijo:

$$P(X_i = k) = \frac{1}{k\, 2^k \ln 2}\,; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

   Od njih neodvisna slučajna spremenljivka N pa ima Poissonovo porazdelitev $\text{Pois}(\ln 2)$. Določite porazdelitev slučajne vsote $Z := X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.
   Pomoč: za $-1 < x \leq 1$ velja $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

4. Bernard se večkrat pelje na določeni relaciji in vsakič na spletni strani `prevoz.org` ponudi prevoz še za tri osebe. Vedno pa ne uspe napolniti mest: z verjetnostjo 13% sploh ne dobi potnikov, z verjetnostjo 35% dobi enega potnika, z verjetnostjo 32% dobi dva potnika, z verjetnostjo 20% pa dobi tri potnike. Približno izračunajte verjetnost, da bo Bernard v prihodnjih 200 prevozih prepeljal vsaj 300 potnikov. Seveda privzamemo, da so prevozi med seboj neodvisni.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

3. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

11. junij 2018

1. Opažene vrednosti $X_1, \ldots, X_n$ so neodvisne in porazdeljene zvezno z gostoto, podano na desni; $a > 0$ je neznan parameter.

$$p(x \mid a) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi a x^3}} e^{-1/(ax)} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   a) Poiščite cenilko za a po metodi največjega verjetja.

   b) Določite, ali je dobljena cenilka nepristranska. *Pomoč:* $\displaystyle\int_0^\infty t^{-5/2} e^{-1/t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. V spodnji tabeli so za zadnje predčasne volitve v Državni zbor prikazani rezultati vzporednih volitev ($n = 14483$) in delni neuradni rezultati po 99˙9% preštetih glasov. Prikazani so samo deleži tistih strank, ki bodo glede na rezultate prišle v Državni zbor:

	SDS	LMŠ	Levica	SD	SMC
Vzporedne	24˙4%	12˙6%	9˙5%	9˙3%	9˙8%
99˙99% preštetih	24˙94%	12˙65%	9˙31%	9˙93%	9˙75%

	DeSUS	NSi	SNS	SAB
Vzporedne	5˙0%	6˙6%	4˙3%	5˙5%
99˙99% preštetih	4˙92%	7˙13%	4˙19%	5˙13%

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙01$ testirajte hipotezo, da so bili volivci na vzporednih volitvah opredeljeni enako kot na pravih volitvah.

3. V tabeli na desni so prikazana števila nadstropij določenih nebotičnikov in njihove višine v metrih. Predlagajte regresijski model za odvisnost višine od števila nadstropij in poiščite 95% napovedni interval za višino zgradbe, ki bi imela 200 nadstropij.

nebotičnik	nadstr.	višina
Burj Kalifa	163	828 m
Taipei 101	101	508 m
Petronasovi stolpnici	88	452 m
Willisova stolpnica	108	442 m
Empire State Building	102	381 m

4. V procesu razvejanja je verjetnost, da bo imel posameznik natanko k potomcev, enaka $(1-q)q^k$, kjer je $k = 0, 1, 2, \ldots$ in $0 < q < 1$.

   a) Določite porazdelitev števila predstavnikov druge generacije (t. j. vnukov začetnika drevesa).

   b) Kolikšna je verjetnost, da proces izumre?

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

19. junij 2018

1. Na podružnični šoli so trije razredi. V prvem razredu je 8, v drugem 6 in v tretjem 5 otrok. Pri malici vsak od njih dobi kakav v skodelici. Med skodelicami je 12 starih in 7 novih. Privzamemo, da so vse razporeditve skodelic med otroke enako verjetne.

   a) Kolikšna je verjetnost, da kateri od otrok edini v svojem razredu dobi staro skodelico?

   b) Recimo, da kateri od otrok edini v svojem razredu dobi staro skodelico. Kolikšna je pogojna verjetnost, da v prvem razredu vsi otroci dobijo stare skodelice?

2. Slučajna spremenljivka U naj bo porazdeljena enakomerno na intervalu od 0 do $\pi/2$. Izračunajte korelacijski koeficient med $\cos U$ in $\sin U$.
   Pomoč: $\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$, $\cos u \sin u = \frac{\sin(2u)}{2}$, $\sin^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$.

3. Izvajamo zaporedje poskusov z dvema kovancema – v vsakem poskusu vržemo oba. Prvi kovanec je pošten, na drugem pa grb pade z verjetnostjo 49%. Vsi meti so med seboj neodvisni. Ocenite, najmanj koliko poskusov moramo narediti, da bo verjetnost, da na prvem kovancu pade več grbov kot na drugem, večja od 95%.

4. Statistična spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{2\sqrt{a}-x-a/x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer}, \end{cases}$$

   kjer je $a > 0$ neznan parameter. Opazimo n neodvisnih vrednosti te spremenljivke. Poiščite cenilko za a po metodi največjega verjetja.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

4. julij 2018

1. Pek prodaja dve vrsti žemelj: podolgovate in okrogle. Za vsako žemljo, ki jo proda, si brž zapiše na papir številko 1 ali 2. Ena od teh številk pomeni podolgovato, druga pa okroglo žemljo.

   Statistiku je znano, da je med žemljami, ki jih pek proda, 30% podolgovatih in 70% okroglih. Nadalje privzame, da z apriorno verjetnostjo 1/2 številka 1 pomeni podogovato in številka 2 okroglo žemljo, z verjetnostjo 1/2 pa velja obratno.

   Statistik pri peku vidi 6 enic in 4 dvojke. Kolikšna je pogojna verjetnost, da številka 1 pomeni podolgovato, številka 2 pa okroglo žemljo?

2. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto, podano na desni, slučajna spremenljivka Y pa je pogojno na X porazdeljena eksponentno, in sicer velja $E(Y \mid X) = \frac{1}{X}$.

   $$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln 2} & ;\ 1 < x < 2 \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

   a) Določite brezpogojno porazdelitev slučajne spremenljivke Y.
   b) Izračunajte $E(e^{-X} \mid Y)$.

3. Opazimo vrednosti $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots, X_n, Y_n$, ki so vse neodvisne, velja pa še $X_k \sim \mathrm{N}(\mu_k, \sigma)$ in $Y_k \sim \mathrm{N}(\mu_k, \sigma)$.

   a) Določite konstanto c, za katero bo

   $$\hat{\sigma}^2 := c\Big[(X_1 - Y_1)^2 + (X_2 - Y_2)^2 + \cdots + (X_n - Y_n)^2\Big]$$

   nepristranska cenilka za σ^2.

   b) Izračunajte varianco cenilke iz prejšnje točke.
   Pomoč: za $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$ velja $\mathrm{var}(Z^2) = 2$.

4. Standardni komplet igralnih kart sestoji iz 52 kart, ki imajo štiri enako zastopane barve: pik, križ, srce in karo. Karte 1000-krat premešamo in izvlečemo vrhnje tri karte. 70-krat se zgodi, da so vse tri izvlečene karte enake barve, 501-krat se zgodi, da sta bili med izvlečenimi kartami zastopani natanko dve barvi in 429-krat se zgodi, da so bile vse tri izvlečene karte različnih barv. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}01$ testirajte hipotezo, da smo karte dobro mešali.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **105 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

 IŠRM

23. avgust 2018

1. Ajda in Boris streljata puščice v dve tarči, rdečo in modro. Ajda strelja v rdečo tarčo z verjetnostjo 70% in v modro z verjetnostjo 30%, Boris pa strelja v rdečo tarčo z verjetnostjo 40% in v modro z verjetnostjo 60%. Vse izbire tarče so med seboj neodvisne in oba vedno zadeneta tarčo. Ajda ustreli trikrat, Boris pa dvakrat.

   a) Kolikšna je verjetnost, da so se v rdeči tarči znašle tri, v modri pa dve puščici?

   b) Recimo, da so bile res v rdeči tarči tri, v modri pa dve puščici. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so vse puščice v rdeči tarči Ajdine, vse puščice v modri tarči pa Borisove?

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y/x} & ; x > 0,\ y > x^2 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

   Določite porazdelitev slučajnega vektorja $Z = X/Y$.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ so porazdeljene diskretno po shemi:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1/3 & 5/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

   Označimo $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Približno določite najmanjši n, pri katerem bo $P(|S_n| > 100) > 0{\cdot}95$.

4. Parkirane avtomobile smo razvrstili po barvi in delu sveta, od koder prihajajo njihovi proizvajalci. Rezultati so zbrani v spodnji tabeli:

	temna	rdeča	srebrna, svetlorjava	bela, rumena
Severna in Srednja Evropa, Amerika	13	5	8	9
Južna Evropa	8	3	7	3
Azija	5	2	10	7

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ testirajte hipotezo, da barva in izvor nista povezana. Pri tem zanemarite, da so določene pričakovane frekvence prenizke.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2016/17

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

8. december 2016

1. Profesor verjetnosti in statistike gre vsak dan ob isti uri na kosilo. Na voljo ima dve samopostrežni restavraciji, vzhodno in zahodno. V vsaki strežejo brezmesno malico, mesno malico, enolončnico in dodatno ponudbo. Iz dolgoročnih opažanj profesor ve, da v vzhodni restavraciji do ure, ko pride, brezmesne malice zmanjka z verjetnostjo 25%, mesne zmanjka z verjetnostjo 20%, dodatne ponudbe pa zmanjka z verjetnostjo 15%. V zahodni restavraciji pa brezmesne malice zmanjka z verjetnostjo 20%, mesne z verjetnostjo 10% in dodatne ponudbe z verjetnostjo 30%. Poleg tega vsake jedi zmanjka neodvisno, enolončnice pa nikoli ne zmanjka.

   a) Profesorju vedno tekneta natanko dve kategoriji jedi od štirih, ne glede na restavracijo, npr. brezmesna malica in dodatna ponudba. Glede na (večjo) verjetnost, da bo v posamezni restavraciji dobil jed, ki mu tekne, se odloči, kam bo šel. Če sta obe verjetnosti enaki, žreba in gre v obe z enako verjetnostjo. Za vsako kombinacijo dveh kategorij jedi zapišite, kako se bo profesor odločil (šel v vzhodno restavracijo, šel v zahodno restavracijo, žrebal).
   b) Privzemimo, da je za vse kombinacije dveh kategorij enako verjetno, da ravno jedi iz te kombinacije tekneta profesorju. Kolikšna je verjetnost, da bo v izbrani restavraciji dobil jed, ki mu tekne?
   c) Recimo, da je profesor dobil, kar mu je teknilo. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je šel v zahodno restavracijo?

   Za popoln odgovor morate verjetnosti podati numerično na štiri decimalke natančno.

2. Najmanj kolikokrat približno moramo vreči standardno kocko, če naj z najmanj 99-odstotno verjetnostjo pade vsaj 50 šestic?

3. Na kupu kart si od zgoraj navzdol sledijo as, kralj, dama, fant, 10, 9, 8 in 7. S kupa po vrsti jemljemo karte v roko, pri čemer se pri vsaki karti, ki ni prva, odločimo, ali jo damo na začetek ali na konec šopa: na začetek šopa jo damo z verjetnostjo 0˙4, na konec pa z verjetnostjo 0˙6; odločitve so med seboj neodvisne. Označimo z X število kart, ki se v dobljenem šopu nahajajo med asom in sedmico. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke.

4. Stroj ima za isto funkcijo predvidena dva neodvisna sestavna dela in deluje, dokler se oba dela ne pokvarita. Življenjska doba vsakega od delov je porazdeljena zvezno z gostoto:

   $$p(t) = \begin{cases} e^{-t} & ; t > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   Določite porazdelitveno gostoto slučajne spremenljivke T, ki pove, koliko časa bo deloval stroj. Po kolikšnem času stroj deluje z verjetnostjo 1/2?

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

8. marec 2017

1. Naj bo X slučajno realno število, porazdeljeno zvezno z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/x^2 & ; \; x \geq 1 \\ 0 & ; \; \text{sicer.} \end{cases}$$

   Številu odrežemo decimalke in z D označimo dolžino desetiškega zapisa tako dobljenega naravnega števila (za 2017 je torej to 4). Določite porazdelitev slučajne spremenljivke D.

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x\, e^{-x-y-x\,e^{-y}} & ; \; x > 0 \\ 0 & ; \; \text{sicer.} \end{cases}$$

   a) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke Y.
   b) Dokažite, da sta slučajni spremenljivki X in $Y - \ln X$ neodvisni.

3. V neki igri se zaporedoma vržejo trije pošteni kovanci. Mož in žena se lotita igranja. V vsaki igri stavita oba: žena stavi, da na prvem in drugem kovancu pade grb, mož pa stavi, da grb pade na prvem in tretjem kovancu. Zakonca odigrata dve igri. Označimo z X število stav, ki jih dobi žena, z Y pa število stav, ki jih dobi mož. Privzamemo, da sta igri med seboj neodvisni.

   a) Določite porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y.
   b) Določite skupno porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.
   c) Izračunajte korelacijski koeficient med X in Y.

4. Slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena diskretno s predpisom:

$$P(X = k) = k\, p^2 (1-p)^{k-1}\,; \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

   kjer je $0 < p < 1$. Nadalje naj bo Y slučajna spremenljivka, ki je pogojno na $X = k$ porazdeljena enakomerno na $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Določite brezpogojno porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

   Pomoč: za $-1 < q < 1$ velja $1 + q + q^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-q}$.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

3. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

12. junij 2017

1. Slučajne spremenljivke $X_1, \ldots X_{100}$ so neodvisne in porazdeljene diskretno po shemi:

$$\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 0{\cdot}6 & 0{\cdot}4 \end{pmatrix}.$$

Približno izračunajte:

a) $P\big(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{99} < 1.060\big)$;

b) $P\big(X_1X_{100} + X_2X_{100} + X_3X_{100} + \cdots + X_{99}X_{100} < 10.600\big)$.

2. Statistična spremenljivka X je porazdeljena diskretno s predpisom:

$$P(X = k) = \binom{2k}{k} q^k \sqrt{1-4q}\,; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

kjer je $0 \le q < 1/4$ neznan parameter (dogovorimo se, da je $\binom{0}{0} = 1$). Opazimo n neodvisnih realizacij te spremenljivke. Poiščite cenilko za q po metodi največjega verjetja.

3. V tabeli so podani podatki o povprečni temperaturi na Kredarici v zadnjih desetih letih:[10]

2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
$-0{\cdot}3$	$-0{\cdot}7$	$-0{\cdot}8$	$-1{\cdot}8$	$0{\cdot}1$	$-0{\cdot}4$	$-0{\cdot}7$	$0{\cdot}0$	$0{\cdot}5$	$-0{\cdot}4$

Točkasto ocenite povprečno letno temperaturo leta 2030 in poiščite 95% napovedni interval.

4. V spodnji tabeli je prikazana zastopanost začetnih števk števil v tekstovnem delu spletne strani `http://www.stat.si/StatWeb/News/Index/5284` (presneto 8. 6. 2017):

1	2	3	4	5	6	7	8	9
17	31	6	4	6	2	2	2	3

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}01$ testirajte ničelno hipotezo, da začetne števke sledijo *Benfordovi porazdelitvi*, ki je določena s formulo:

$$P(D = d) = \log_{10} \frac{d+1}{d}\,; \quad d = 1, 2, 3, \ldots, 9\,.$$

Po potrebi združite zadnjih nekaj vrednosti.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

[10] Vir: ARSO

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

28. avgust 2017

1. Petrček sestavlja stolp iz devetih kock. Le-te so treh različnih velikosti, za vsako velikost pa ima eno rdečo, eno modro in eno rumeno. Kocke jemlje v povsem naključnem vrstnem redu.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bodo vse manjše kocke stale na večjih?

   b) Recimo, da vse manjše kocke res stojijo na večjih. Kolikšna je pogojna verjetnost, da nobeni dve kocki iste barve nista skupaj?

2. Naj bo $0 < a < b$. Slučajna spremenljivka X ima porazdelitev $\mathrm{Gama}(2, 1)$, t. j. ima gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} x\,e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

   Pogojno na $X = x$ je slučajna spremenljivka Y porazdeljena enakomerno na intervalu (ax, bx). Določite brezpogojno porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

3. Igralnica zasnuje novo igro na srečo, kjer igralec z verjetnostjo $9/40$ dobi 2 evra, z verjetnostjo $19/40$ izgubi 1 evro, sicer pa ostane na istem. Približno po kolikšnem številu iger ima igralnica dobiček z verjetnostjo 99%?

4. Na desni so prikazani rezultati prvih dveh poskusov v metu kopja za ženske na atletskem mitingu Diamond League v Londonu 9. julija letos.[1] Znak $\times$ pomeni, da se poskus ni posrečil. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ testirajte ničelno hipotezo, da tekmovalke v prvem poskusu v povprečju vržejo enako dolgo kot v drugem, proti alternativni hipotezi, ki to zanika.

1. poskus	2. poskus
62·62	65·42
56·63	66·79
57·92	64·85
64·47	×
61·99	63·76
63·25	61·50
59·46	61·06
60·91	×
56·49	59·02

[1] Vir: `https://london.diamondleague.com/lists_results_london/`

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2015/16

1. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

10. december 2015

1. Na mizi so sprva po vrsti razporejene karte z oznakami od 1 do 10. Vržemo standardno kocko in na slepo izberemo toliko kart, kolikor pik je padlo na kocki. Izbrane karte povsem naključno premešamo med seboj (kar dopušča tudi možnost, da vse ostanejo na istem mestu). Če torej na kocki pade ena pika, ne storimo ničesar.

   a) Kolikšna je verjetnost, da je na koncu karta z oznako 10 tam, kjer je bila prej karta z oznako 1?

   b) Recimo, da je na koncu karta z oznako 10 tam, kjer je bila prej karta z oznako 1. Kolikšna je pogojna verjetnost, da sta na kocki padli natanko dve piki?

2. Urban in Vesna imata zmenek. Urban pride na kraj zmenka enkrat med 19:55 in 20:05 z enakomerno porazdelitvijo in čaka Vesno, dokler ne pride. Vesna pa pride enkrat med 20:00 in 20:10, prav tako z enakomerno porazdelitvijo in neodvisno od Urbana ter čaka Urbana največ dve minuti.

   a) Kolikšna je verjetnost, da se dobita?

   b) Recimo, da sta se dobila. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je morala Vesna čakati Urbana?

3. Najmanj kolikokrat približno moramo vreči standardno kocko, če naj z najmanj 99-odstotno verjetnostjo pade vsaj 16% šestic?

4. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} ax - bx^3 & ; 0 < x < \sqrt{a/b} \\ 0 & ; \text{sicer}, \end{cases}$$

   kjer je $a, b > 0$. Določite a in b tako, da bo p res gostota in da bo veljalo $P(X > 1) = 9/16$.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

7. april 2016

1. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(1 - x^2 - y^2\right) & ; x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

   a) Določite robni porazdelitvi, t. j. porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y.

   b) Določite pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X glede na Y.

   c) Dokažite, da je slučajna spremenljivka $\dfrac{X}{\sqrt{1-Y^2}}$ neodvisna od Y.

2. Za okroglo mizo naključno posedemo pet zakonskih parov, tako da se izmenjujejo moški in ženske; vse take razporeditve so enako verjetne. Označimo z W število parov, pri katerih zakonca sedita skupaj. Izračunajte $E(W)$ in $\mathrm{var}(W)$.

3. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki. Privzemimo, da je Y porazdeljena binomsko $\mathrm{Bin}(6, 1/3)$ in da je $E(X \mid Y) = 3Y + 1$. Izračunajte $E(X)$ in $E(XY)$.

4. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene enakomerno na intervalu od -1 do 1. Približno izračunajte prvi decil (kvantil za verjetnost 1/10) vsote njihovih kvadratov.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

3. KOLOKVIJ IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

10. junij 2016

1. Statistična spremenljivka ima zvezno porazdelitev z gostoto:

$$p(x \mid a) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{(1/\ln a)+1}} & ; x > 1 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases},$$

   kjer je $a > 1$ neznan parameter. Opazimo n neodvisnih realizacij te spremenljivke.

   a) Določite zvezo med a in c.

   b) Poiščite cenilko za a po metodi največjega verjetja.

   c) Dokažite, da cenilka za a iz prejšnje točke ni nepristranska, je pa asimptotično nepristranska.

2. Čez prehod za pešce pred IJS na Jadranski ulici v Ljubljani se je v določenem obdobju peljalo 120 vozil na motorni pogon in 15 koles. Poiščite 90% interval zaupanja za delež koles med vozili, ki se v podobnih okoliščinah peljejo čez ta prehod.

3. Spodaj je prikazano gibanje delniškega indeksa *Dow Jones* za obdobje od 2. do 20. maja letos:[11] odstotek ob posameznem dnevu prikazuje spremembo začetnega tečaja glede na začetni tečaj *prejšnjega* delovnega dne (torej je bil tečaj 2. maja za 0˙16% nižji kot 29. aprila).

PON	2.5.	−0˙16%
TOR	3.5.	0˙49%
SRE	4.5.	−0˙76%
ČET	5.5.	−0˙40%
PET	6.5.	−0˙08%

PON	9.5.	0˙53%
TOR	10.5.	−0˙10%
SRE	11.5.	1˙09%
ČET	12.5.	−1˙16%
PET	13.5.	0˙00%

PON	16.5.	−1˙01%
TOR	17.5.	0˙97%
SRE	18.5.	−1˙13%
ČET	19.5.	0˙07%
PET	20.5.	−0˙44%

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙05$ testirajte hipotezo, da je sprememba tečaja med zaporednima delovnega dneva v povprečju enako velika kot sprememba s petka na ponedeljek, proti alternativni hipotezi, da je v povprečju drugačna.

4. Na desni so prikazani rezultati tekmovanja za čiste zobe na Osnovni šoli Janka Modra. Modelirajte te podatke z enostavno linearno regresijo in poiščite ustrezno regresijsko premico. Kolikšen rezultat bi pričakovali za učence devetih razredov?

5.b	70˙61%
1.c	67˙74%
1.a	62˙05%
5.a	61˙62%
2.c	60˙94%
4.a	59˙26%

2.a	56˙83%
1.b	55˙59%
4.b	55˙08%
3.a	54˙54%
3.b	52˙11%
2.b	46˙58%

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

[11] Vir: `finance.yahoo.com`, pridobljeno 26. 5. 2016

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

28. junij 2016

1. Viktor dobi pet naključno izbranih kart izmed 53. Slednjih 53 sestavlja standardnih 52 kart, ki imajo 4 različne barve in 13 različnih vrednosti, in en džoker, ki lahko nadomesti katero koli karto.

   a) Dobitek *full house* sestavljata *tris*, t. j. tri karte iste vrednosti, in *par*, t. j. dve karti iste vrednosti, pri čemer pa sta vrednosti za tris in par različni. Kolikšna je verjetnost, da Viktor dobi full house (pri čemer upoštevamo, da lahko džoker nadomesti katero koli karto)?

   b) Recimo, da je Viktor dobil full house. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je dobil džokerja?

   c) Recimo, da je Viktor dobil full house in džokerja. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je ta džoker nadomestil karto iz trisa?

2. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(1)$, t. j. zvezno z gostoto:

   $$p_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

   Nadalje je slučajna spremenljivka Y pogojno na X porazdeljena enakomerno na intervalu od 0 do e^{-3X}. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

3. Dana je igra na srečo, kjer se vržejo tri poštene kocke. Če na nobeni ne pade šestica, igralec izgubi en evro, sicer pa dobi toliko evrov, kolikor šestic je padlo. Najmanj koliko iger se mora približno odviti, da bo imela igralnica od njih dobiček z verjetnostjo vsaj 99%? Kot znano lahko privzamete, da je to število dovolj veliko.

4. Statistična spremenljivka ima porazdelitev z gostoto:

   $$p(x) = \begin{cases} c\left(e^{-x/a} - e^{-x/b}\right) & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer,} \end{cases}$$

   kjer sta $a > b > 0$ neznana parametra.

   a) Izrazite c z a in b.

   b) Po metodi momentov ocenite a in b iz vzorca:

   $$2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 16,\ 5,\ 6,\ 3,\ 9\ .$$

   c) Kaj se zgodi z metodo momentov, če vse opažene vrednosti pridejo enake? Komentirajte!

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

29. avgust 2016

1. Na okensko polico slučajno razporedimo šest begonij in pet fuksij, vsi vrstni redi so enako verjetni.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bo desno od najbolj leve begonije tudi begonija?

   b) Recimo, da je desno od najbolj leve begonije res begonija. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo levo od najbolj desne fuksije tudi fuksija?

2. Slučajni vektor (X, Y) naj bo porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} & ; x > 0\,,\ 0 < y < x^2 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

   Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z = Y/X$.

3. Slučajni spremenljivki X in Y imata skupno porazdelitev, podano s tabelo:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = a$
$X = 0$	0	1/2	0
$X = 1$	1/3	0	1/6

   Določite, pri katerih vrednostih parametra a sta X in Y nekorelirani.

4. Statistična spremenljivka lahko zavzame vrednosti 1, 2 ali 3. Pri 100 neodvisnih opažanjih te spremenljivke smo 70-krat opazili vrednost 1, 27-krat vrednost 2 in 3-krat vrednost 3. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{˙}05$ testirajte hipotezo, da ima dana statistična spremenljivka porazdelitev, podano s shemo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 - a & a - a^2 & a^2 \end{pmatrix},$$

   kjer je $a \in (0, 1)$ neznan parameter.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2014/15

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

18. december 2014

1. V dobro premešanem kupu šestih kart so tri rdeče in tri črne. Iz kupa brez vračanja vlečemo karte, dokler črna karta ne sledi rdeči karti ali pa ne izvlečemo vseh kart. Zapišite porazdelitev števila izvlečenih kart.

2. Verjetnost, da se bo zrno riža pri pakiranju polomilo, je 7%. Posamezna zrna so pri tem neodvisna. Riž pakiramo v škatle, na katere želimo dati deklaracijo: 'Polomljena zrna: največ 8%'. Ocenite, najmanj koliko zrn riža mora biti v posamezni škatli, če naj bo deklaracija pravilna za vsaj 99% škatel.

3. Manja ugiba neznano besedo, ki ima štiri soglasnike in en samoglasnik. Črke se ji prikazujejo druga za drugo, vrstni red prikazovanja pa je izbran na slepo. Ko so črke enkrat prikazane, ostanejo na zaslonu. V tabeli na desni so prikazane verjetnosti, da Manja ugane besedo po določenem številu prikazanih soglasnikov in samoglasnikov, pogojno na to, da Manja prej besede ni uganila; te pogojne verjetnosti veljajo ne glede na to, katere črke so bile prikazane prej.

sogl.	samogl.	ugane
0	0	0˙05
0	1	0˙1
1	0	0˙15
1	1	0˙2
2	0	0˙4
2	1	0˙6
3	0	0˙7

   a) Recimo, da so bili prve tri črke sami soglasniki. Kolikšna je *pogojna* verjetnost, da Manja ugane besedo po teh treh prikazanih črkah (ne pa tudi prej)?

   b) Kolikšna je *brezpogojna* verjetnost, da Manja ugane besedo po treh prikazanih črkah (ne pa tudi prej)?

   c) Recimo, da je Manja uganila besedo po treh prikazanih črkah. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so bili to sami soglasniki?

4. Recimo, da lahko do izpadov elektrike pride zaradi dveh vrst okvar: malih in velikih. Z verjetnostjo 2/3 pride do male okvare, pri kateri je čas trajanja izpada porazdeljen eksponentno Exp(2). Z verjetnostjo 1/3 pa pride do velike okvare, kjer pa je čas trajanja izpada sestavljen iz dveh delov: prvi traja 2 časovni enoti, drugi pa je porazdeljen eksponentno Exp(1). Naj bo T čas trajanja izpada nasploh (če ne vemo, ali gre za malo ali za veliko okvaro).

   a) Zapišite kumulativno porazdelitveno funkcijo te slučajne spremenljivke.

   b) Je slučajna spremenljivka T porazdeljena zvezno? Če da, zapišite njeno gostoto.

Pojasnilo: eksponentna porazdelitev $\mathrm{Exp}(\lambda)$ ima gostoto $p_\lambda(t) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda t} & ;\ t > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

23. marec 2015

1. Slučajni vektor (X, Y) naj bo porazdeljen zvezno z dvorazsežno gostoto:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{a}{(x+y)^4} & ; \ x, y > 1 \\ 0 & ; \ \text{sicer.} \end{cases}$$

   Določite konstanto a in porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := X/Y$.

2. Za okroglo mizo izmenoma sedijo štiri ženske in štirje moški. Vsak vrže kocko, meti so neodvisni. Naj bo X število žensk, za katere velja, da vržejo šestico, obenem pa nobeden od njenih sosedov ne vrže šestice. Slučajna spremenljivka Y pa naj označuje število moških, ki vržejo šestico, obenem pa velja, da nobena od njegovih sosed ne vrže šestice. Izračunajte $\operatorname{cov}(X, Y)$.

3. Naj bo $\lambda > 0$. Slučajna spremenljivka Y naj bo porazdeljena eksponentno $\operatorname{Exp}(\lambda)$ in pogojno na Y naj bo X porazdeljena eksponentno $\operatorname{Exp}(Y)$. Določite brezpogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X.

   Pojasnilo: porazdelitev $\operatorname{Exp}(\lambda)$ je zvezna z gostoto $p(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & ; \ x > 0 \\ 0 & ; \ \text{sicer.} \end{cases}$

4. Izračunajte sploščenost (kurtozis) binomske porazdelitve $\operatorname{Bin}(n, 1/2)$.

   Namig: rodovne funkcije.

3. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

12. junij 2015

1. Igralnica uvede novo igro na srečo, ki stane 1€. Z verjetnostjo 50% igralec ne dobi ničesar (torej je na izgubi za vplačani evro), z verjetnostjo 49% znaša dobitek 1€ (kar pomeni, da je igralec na ničli), z verjetnostjo 1% pa dobitek znaša 40€ (torej vplačani evro in še dodatnih 39). Približno določite število iger, po katerih ima igralnica dobiček z verjetnostjo 99%.

2. Statistična spremenljivka ima porazdelitev Gama(a, λ). Vzamemo vzorec 100 neodvisnih realizacij: povprečje pride 50, popravljeni standardni odklon pa pride 22. Po metodi momentov ocenite oba parametra.

   Pomoč: k-ti moment porazdelitve Gama(a, λ) je enak $\frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)}{\lambda^k}$.

3. Pri nekem poskusu so merili vpliv magnetnega polja na telesno težo miši. 60 miši so razdelili v dvakrat po deset kletk, v vsaki so bile po tri miši. Deset kletk so izpostavili magnetnemu polju in v njih so zabeležili naslednja povečanja skupne telesne teže miši:

   $$22\text{'}8\,,\ 10\text{'}2\,,\ 20\text{'}8\,,\ 27\text{'}0\,,\ 19\text{'}2\,,\ 9\text{'}0\,,\ 14\text{'}2\,,\ 19\text{'}8\,,\ 14\text{'}5\,,\ 14\text{'}8\,.$$

   V desetih kletkah, ki niso bile pod vplivom magnetnega polja, pa so opazili naslednja povečanja telesne teže:

   $$23\text{'}5\,,\ 31\text{'}0\,,\ 19\text{'}5\,,\ 26\text{'}2\,,\ 26\text{'}5\,,\ 25\text{'}2\,,\ 24\text{'}5\,,\ 23\text{'}8\,,\ 27\text{'}8\,,\ 22\text{'}0\,.$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}05$ testirajte ničelno hipotezo, da magnetno polje nima vpliva na telesno težo miši, proti alternativni hipotezi, da ga ima.

4. Statistična spremenljivka ima vrednosti na množici $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Izmerimo 100 vrednosti in dobimo naslednjo frekvenčno porazdelitev:

vrednost	-2	-1	0	1	2
frekvenca	9	29	23	19	20

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}05$ testirajte ničelno hipotezo, da je porazdelitev simetrična okoli izhodišča, proti alternativni, da to ni res.

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

22. junij 2015

1. Med 8 kartami so štiri rdeče. Vse karte dobro premešamo in jih brez vračanja vlečemo, dokler drugič ne izvlečemo rdeče karte.

   a) Zapišite porazdelitev števila vseh izvlečenih kart.

   b) Recimo, da smo izvlekli vsaj pet kart. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bila prva izvlečena karta rdeča?

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z dvorazsežno gostoto:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x\, e^{-xy} & ;\ x > 0, y > 1 \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

   a) Določite porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y.

   b) Pri katerih parih, ki jih lahko tvorimo iz X, Y in XY, sta slučajni spremenljivki neodvisni?

3. Komplet kart za igro remi sestavljajo 104 karte, med katerimi imata po dve in dve enako sprednjo stran. Iz kompleta na slepo in brez vračanja izvlečemo 20 kart. Označimo z S število dobljenih parov kart z enako sprednjo stranjo. Izračunajte $E(S)$ in $\mathrm{var}(S)$.

4. Na sliki je prikazan razpored študentov, ki so pisali izpit. S črko P so označeni tisti, ki jih je asistent poznal, s piko pa tisti, ki jih ni poznal. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{'}05$ testirajte ničelno hipotezo, ki trdi, da to, ali asistent pozna študenta, ni povezano s tem, koliko spredaj oz. zadaj sedi študent. Alternativna hipoteza to zanika – pravi, da povezava je.

ZADAJ

	•	•	P	P	•	P
	P	P		P	P	•
•	•	P				
	P	•		P	•	•
			•		P	
	P	P		•		P

SPREDAJ

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

27. avgust 2015

1. Janko ima na začetku dva igralniška žetona. Posamezen žeton je z verjetnostjo 40% dobiten, kar pomeni, da igralec, ki ga stavi, dobi dva nova žetona (tako da ima potem en žeton več kot prej); če žeton ni dobiten, ga igralec seveda izgubi. Janko v vsaki igri stavi vse žetone, ki jih ima, in igra, dokler ima kaj žetonov.

   a) Kolikšna je verjetnost, da sta bila med vsemi žetoni, ki jih je Janko stavil, natanko dva dobitna?

   b) Recimo, da sta bila med vsemi žetoni, ki jih je Janko stavil, natanko dva dobitna. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je imel dva dobitna žetona v isti igri?

   Privzamemo, da so vsi žetoni med seboj neodvisni.

2. Mečemo kovanec, na katerem grb pade z verjetnostjo 55%. Označimo z n število metov, za katere privzamemo, da so neodvisni. Najmanj kolikokrat približno moramo vreči ta kovanec, če naj bo verjetnost, da število grbov preseže $\frac{n}{2} + \sqrt{n}$, vsaj 95%?

   Opomba: prag je postavljen približno glede na dvostranski test hipoteze, da je kovanec pošten, pri stopnji značilnosti 5%.

3. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena enakomerno na intervalu $[-1, 1]$, slučajna spremenljivka Y pa zvezno z gostoto, prikazano na desni. Določite porazdelitev vsote $X + Y$.

$$p_Y(y) = \begin{cases} 6y(1-y) & ; 0 \le y \le 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

4. Leta 1965 se je v nekem časopisu pojavila novica o študentu, ki je pri 17.950 metih kovanca dobil 9.207 grbov in 8.743 cifer. Jack Youden, statistik na ameriškem nacionalnem uradu za standardizacijo, je študenta vprašal, kako točno je izvedel eksperiment.[a] Študent mu je povedal, da je, da bi prihranil čas, metal pet kovancev hkrati, njegov mlajši brat pa je zapisoval, koliko grbov je padlo. V tabeli na desni so prikazane frekvence.

število grbov	frekvenca
0	100
1	524
2	1080
3	1126
4	655
5	105

[a] Vir: J. Youden: Enduring Values. *Technometrics* **14** (1972), 1–11.

S testom hi kvadrat pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{,}05$ preverite, ali so ti podatki skladni z domnevo, da je študent neodvisno metal pet kovancev z isto verjetnostjo za grb, ki pa ni nujno 1/2.

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

18. marec 2016

1. Za okroglo mizo naključno posadimo b belih in r rdečih vitezov, tako da so vsi vrstni redi enako verjetni. Med belimi vitezi sta tudi Hubert in Kaspar.

   a) Kolikšna je verjetnost, da sta Hubert in Kaspar soseda?

   b) Kolikšna je verjetnost, da ima Hubert na svoji desni belega viteza (ne glede na to, ali je to Kaspar ali ne)?

   c) Kolikšna je verjetnost, da imata Hubert in Kaspar oba na svoji desni belega viteza?

   d) Recimo, da imata Hubert in Kaspar oba na svoji desni belega viteza. Kolikšna je pogojna verjetnost, da sta soseda?

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c}{1+x^2} & ; 0 < x + 2y < 1 \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

   a) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke X in konstanto c.

   b) Določite porazdelitev vsote $Z = X + Y$.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ naj bodo porazdeljene enakomerno na intervalu od -1 do 2. Največ koliko približno sme biti enak n, če naj bo verjetnost, da je njihova vsota manjša od 300, najmanj 95%?

4. Gašper, Herman in Krištof kandidirajo na volitvah za predsednika države. Agencija Maksistik pred volitvami povpraša 500 volivcev, med katerimi se jih 32˙4% opredeli za Gašperja, 50˙2% za Hermana in 17˙4% za Krištofa. Na volitvah nato Gašper dobi 30˙5%, Herman 48˙3% in Krištof 21˙2% glasov. Lahko pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙05$ rečemo, da je bila anketa pristranska?

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2013/14

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

12. december 2013

1. Učitelj mora izmed 6 učencev izbrati tri, da odnesejo star papir. Najprej vpraša, kdo bi to naredil. Trije od njih se vedno takoj javijo, preostali trije pa se javijo slučajno in neodvisno, vsak z verjetnostjo 30%. Nato učitelj izmed vseh, ki so se javili, na slepo izbere tri.

   a) Kolikšna je verjetnost, da sta izmed tistih treh, ki se vedno takoj javijo, izbrana vsaj dva?

   b) Recimo, da sta izmed tistih treh, ki se vedno takoj javijo, izbrana vsaj dva. Kolikšna je pogojna verjetnost, da se od preostalih treh nihče ni javil?

2. Matematik[12] ima v levem žepu pet, v desnem pa tri vžigalice. Vsakič, ko potrebuje vžigalico, vleče iz levega žepa z verjetnostjo $1/3$ in iz desnega z verjetnostjo $2/3$, dokler to gre, t. j. dokler ne ugotovi, da v žepu, iz katerega želi vleči, ni več vžigalic. Označimo z X število vžigalic, ki so še ostale v drugem žepu. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke. Privzamemo, da so izbire levega oz. desnega žepa neodvisne.

3. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} 3\,e^{-3x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Y = (X-2)^2$.

4. Štirikrat vržemo pošten kovanec, meti so neodvisni. Naj bo X število grbov v prvih treh, Y pa v zadnjih dveh metih.

   a) Zapišite porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y).

   b) Sta X in Y neodvisni?

[12] Naloga je različica znanega *Banachovega problema z vžigalicami*, ki se imenuje po poljskem matematiku Stefanu Banachu (1892–1945), čeprav tega problema ni sestavil ali rešil on, temveč njegovi kolegi, ki jih je navdahnila Banachova kadilska razvada.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

20. marec 2014

1. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi x(1+x^2)} & ; x > y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z = \dfrac{Y}{X^2}$.

2. Danih je šest ploščic z naslednjimi oznakami:

$$\boxed{1} \qquad \boxed{1} \qquad \boxed{1} \qquad \boxed{2} \qquad \boxed{3} \qquad \boxed{\text{S}}$$

   Ploščice se naključno premešajo in obrnejo. Nato jih odkrivamo, dokler ne odkrijemo ploščice $\boxed{\text{S}}$. Označimo z X vsoto vseh odkritih števil. Izračunajte $E(X)$.

   Namig: izrazite X kot vsoto primernih slučajnih spremenljivk.

3. Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki, pri čemer naj bo Y porazdeljena binomsko $\text{Bin}(6, 1/3)$ ter še $E(X \mid Y) = 3Y$ in $\text{var}(X \mid Y) = Y + 1$. Izračunajte $E(X)$ in $\text{var}(X)$.

4. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke, katerih porazdelitev je podana s formulo:

$$P(X_i = k) = \frac{2^k}{3^{k+1}} \, ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

   Nadalje naj bo N slučajna spremenljivka, neodvisna od slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots$, njena porazdelitev pa naj bo dana s formulo:

$$P(N = k) = \frac{3^k}{4^{k+1}} \, ; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

   Izračunajte porazdelitev vsote $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ (za $N = 0$ postavimo $S = 0$).

3. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

9. junij 2014

1. Hazarder Marko obišče 100 igralnih avtomatov. Pred vsakim vrže pošten kovanec. Če pade cifra, na tem avtomatu igra, sicer pa ne. Na vsakem avtomatu ima, če igra, pričakovano izgubo 1 evro, standardni odklon pa je 3 evre. Približno izračunajte verjetnost, da bo imel Marko na koncu dobiček. Privzamemo, da so posamezne igre in meti kovanca med seboj neodvisni.

2. Statistična spremenljivka ima *inverzno Gaussovo porazdelitev*, t. j. porazdelitev z gostoto:

$$p(x \mid \mu, \tau) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\tau}{2\pi x^3}} \exp\left\{-\dfrac{\tau}{2x\mu^2}(x-\mu)^2\right\} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases},$$

   kjer sta $\tau > 0$ in $\mu > 0$ neznana parametra. Ocenite ju po metodi največjega verjetja, če imate na voljo n neodvisnih meritev te spremenljivke.

3. Dne 5. februarja 2013 je bilo v Kranjski Gori prvenstvo srednjih šol Ljubljane in Novega mesta v veleslalomu. Rezultati v kategoriji dijakov (letnik 1993 in mlajši) so prikazani na desni (LJ za Ljubljano in NM za Novo mesto). Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ testirajte hipotezo, da so Ljubljančani in Novomeščani v splošnem enako dobri, proti alternativni hipotezi, da niso.

0:38.20	LJ	0:43.71	NM
0:39.40	LJ	0:44.59	LJ
0:39.99	NM	0:45.52	NM
0:40.21	NM	0:47.30	LJ
0:40.52	LJ	0:48.16	NM
0:41.04	LJ	0:49.55	NM
0:42.60	LJ	0:49.88	NM
0:42.68	LJ	0:51.12	NM
0:43.01	LJ	1:25.22	LJ

   Vir: Timing Ljubljana, `www.timingljubljana.si`, presneto 14. 3. 2013.

4. Dan je regresijski model s predlogo $Y = a + bX^2$. Poiščite krivuljo v tem modelu, ki se glede na kvadrate rezidualov najbolje prilega podatkom:

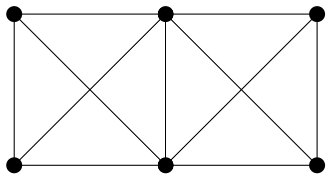
X_i	-2	-1	0	0	1	2
Y_i	5	3	3	1	3	6

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

16. junij 2014

1. Šest študentov piše izpitno nalogo, vsak jo zna rešiti z verjetnostjo 0˙3 in pri tem so med seboj neodvisni. Študent reši nalogo, če jo zna rešiti sam ali pa jo je sam rešil njegov sosed. Sosednost prikazuje naslednja slika:



   Določite porazdelitev slučajne spremenljivke, ki predstavlja število študentov, ki so rešili izpitno nalogo.

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni enako z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\, e^{-1/x} & ;\ x > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases} .$$

   Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}$.

3. Za slučajni spremenljivki X in Y velja:

$$E(X) = 2\,, \quad E(Y) = 1\,, \quad \mathrm{var}(X) = 4\,, \quad \mathrm{var}(Y) = 9 \text{ in } \mathrm{corr}(X, Y) = \frac{2}{3}\,.$$

   a) Izračunajte $E(XY)$.
   b) Določite tako realno število t, da bosta X in $X + tY$ nekorelirani.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$72,\ 74,\ 76,\ 77,\ 87,\ 81,\ 80,\ 86,\ 74,\ 70\,.$$

   Poiščite 99% interval zaupanja za σ.

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

27. avgust 2014

1. Ekipe A, B, C in D imajo mini turnir v nogometu, ki poteka tako, da se najprej na slepo izbereta po dve in dve ekipi, ki se pomerita med seboj, nakar se zmagovalca pomerita za prvo mesto. Za vsak par ekip so na desni prikazane verjetnosti, da posamezna ekipa zmaga oz. izgubi. Te verjetnosti veljajo ne glede na zgodovino.

zmaga\izgubi	A	B	C	D
A		0˙6	0˙7	0˙9
B	0˙4		0˙5	0˙6
C	0˙3	0˙5		0˙4
D	0˙1	0˙4	0˙6	

   a) Kolikšna je verjetnost, da ekipa A na koncu zmaga?

   b) Recimo, da je ekipa A na koncu zmagala. Kolikšna je pogojna verjetnost, da se je bila v drugo pomerila z ekipo B?

2. Slučajna spremenljivka R ima *Rayleighovo porazdelitev*, t. j. porazdelitev z gostoto:

$$p_R(r) = \begin{cases} ar\, e^{-ar^2/2} & ; r > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   (to je porazdelitev razdalje, za katero se po določenem času premakne delec, ki se giblje v skladu z ravninskim Brownovim gibanjem).

   a) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke R^2.

   b) Slučajnima spremenljivkama R in R^2 določite 95. centil.
   Namig: katerega je lažje izračunati?

3. Francoska ruleta ima 37 številk, od katerih je 18 rdečih, 18 črnih in še ničla, ki je zelena. Igralec, ki stavi en žeton na rdečo, dobi dva žetona, če pade rdeča številka (vplačani in še dodatni žeton), sicer pa ostane brez vplačanega žetona. Igralec, ki stavi en žeton na ničlo, pa dobi 36 žetonov, če dobi stavo (spet to pomeni vplačani žeton in še 35 dodatnih), sicer pa ostane brez vplačanega žetona.

   Hazarder Berti v vsaki igri stavi en žeton na rdečo in en žeton na ničlo. Približno izračunajte število iger, po katerih bo imela igralnica z Bertijem dobiček z verjetnostjo približno 95%.

4. Statistična spremenljivka je porazdeljena zvezno z gostoto

$$p(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda(x-a)} & ; x > a \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Izvedemo n neodvisnih meritev te spremenljivke. Na njihovi podlagi poiščite cenilki za λ in a po metodi momentov.

2012/13

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

14. december 2012

1. Dedek Mraz bo malemu Galu prinesel medvedka, Niku bo prinesel kocke in Timu avtomobilček. Otroci pa imajo nekoliko spremenljive želje: Gal si medvedka želi z verjetnostjo 40%, avtomobilček z verjetnostjo 40% in kocke z verjetnostjo 20%. Nik si kocke želi z verjetnostjo 50%, avtomobilček z verjetnostjo 40% in medvedka z verjetnostjo 10%. Tim pa si avtomobilček želi z verjetnostjo 60%, kocke z verjetnostjo 30% in medvedka z verjetnostjo 10%.

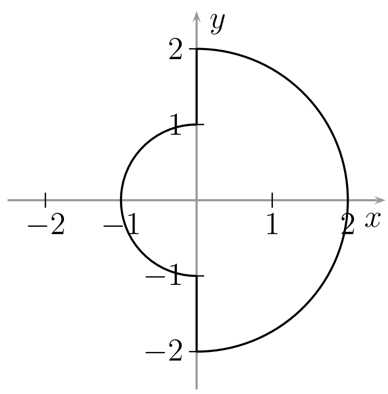
   a) Kolikšna je verjetnost, da ne bo vsak dobil to, kar si je želel, a bo to mogoče doseči že po eni zamenjavi?

   b) Recimo, da je možno z eno zamenjavo doseči, da so vsi otroci zadovoljni. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bil Gal že od začetka zadovoljen s svojim darilom, t. j. z medvedkom?

2. Kolo sreče nam vsakič, ko ga zavrtimo, z verjetnostjo 30%, prinese eno točko, z verjetnostjo 20% nam prinese 20 točk, z verjetnostjo 50% pa nam ne prinese nič. Kolo zavrtimo 50-krat in dobitki so med seboj neodvisni. Kolikšna je verjetnost, da bomo skupaj zbrali manj kot 20 točk? Rezultat zapišite v obliki eksaktne formule in izračunajte približek.

3. Ploskve pravilnega tetraedra so označene s števili 1, 2, 3 in 4. Tetraeder mečemo, dokler ni število, ki se znajde na dnu, manjše ali enako prejšnjemu. Privzamemo, da so meti neodvisni in da pri posameznem metu vsaka ploskev pade z enako verjetnostjo. Označimo z N število metov. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke.

4. Na slepo izberemo točko iz lika, ki ga sestavljajo točke, ki ležijo levo od ordinatne osi in so od izhodišča oddaljene največ 1, in točke, ki ležijo desno od ordinatne osi in so od izhodišča oddaljene največ 2 (glej sliko). Naj bo Z oddaljenost izbrane točke od izhodišča. Zapišite kumulativno porazdelitveno funkcijo in gostoto porazdelitve te slučajne spremenljivke.



2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

29. marec 2013

1. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z dvorazsežno gostoto:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(1 - x^2 - y^2) & ; x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z = Y/X$.

2. Za dogodka A in B velja $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, njuna indikatorja:

$$X = \begin{cases} 1 & ; A \text{ se zgodi} \\ 0 & ; A \text{ se ne zgodi} \end{cases} , \qquad Y = \begin{cases} 1 & ; B \text{ se zgodi} \\ 0 & ; B \text{ se ne zgodi} \end{cases}$$

   pa imata korelacijski koeficient $4/5$. Izračunajte $P(A \cap B)$.

3. Naj bo $\lambda > 0$. Število potomcev v prvi generaciji ima Poissonovo porazdelitev $\text{Pois}(\lambda)$, vsak izmed njih pa ima k potomcev z verjetnostjo:

$$\frac{\left(1 - e^{-\lambda}\right)^k}{k\lambda} ; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

   Vsa števila potomcev so neodvisna. Določite porazdelitev števila potomcev v drugi generaciji.

   Namig: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$, $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$.

4. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_{24}$ so porazdeljene enakomerno na intervalu $[0, 1]$. Označimo $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{24}$. Približno določite tak x, da bo $P(S < x) = 0{\dot{}}05$.

3. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

13. junij 2013

1. Statistična spremenljivka je porazdeljena enakomerno na intervalu od a do $a+1$. Na voljo imamo n neodvisnih opažanj.

   a) Ocenite $b := e^a$ po metodi momentov.

   b) Dokažite, da se da dobljena cenilka za b pomnožiti s takim opazljivim faktorjem, da je potem nepristranska. Kako se obnaša ta faktor, ko gre število opažanj proti neskončno?

2. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$28\text{'}3\,,\ 33\text{'}5\,,\ 25\text{'}3\,,\ 27\text{'}0\,,\ 33\text{'}5\,,\ 29\text{'}1\,,\ 34\text{'}5\,,\ 28\text{'}9\,,\ 26\text{'}9\,,\ 29\text{'}4\,.$$

   Poiščite 99% interval zaupanja za μ.

3. Meritve 100 vrednosti neke celoštevilske statistične spremenljivke so zbrane v naslednji frekvenčni tabeli:

vrednost	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
frekvenca	52	17	11	6	6	1	1	2	1	1	0	1	0	1

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}05$ testirajte hipotezo, da je ta spremenljivka porazdeljena geometrijsko. Če je potrebno, združite razrede!

4. 50 odjemalcev so vprašali, kako so zadovoljni s kakovostjo menze. Ker rezultati niso bili prav dobri, so sklenili ponudbo spremeniti in čez nekaj časa so taistih 50 odjemalcev ponovno vprašali, kako so zadovoljni s kakovostjo. Anketo so izvedli tako, da je znano, katera dva odgovora prej in potem sodita skupaj. Anketiranci so lahko izbirali med naslednjimi možnostmi:

   1 – zelo nezadovoljen, 2 – nezadovoljen, 3 – niti zadovoljen niti nezadovoljen,
   4 – zadovoljen, 5 – zelo zadovoljen.

   Rezultati obeh anket so naslednji:

prej\potem	1	2	3	4	5
1	4	11	1	0	0
2	1	3	9	2	0
3	1	0	5	6	0
4	0	0	1	3	1
5	0	0	0	1	1

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}05$ testirajte ničelno hipotezo, da se menza ni nič izboljšala, proti alternativni, da se je izboljšala.

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

27. junij 2013

1. Aljaž in Branko sta povabljena na neko zabavo. Oba zamudita, zamudi pa sta neodvisni in porazdeljeni enakomerno na intervalu od 0 do 1 ure.

   a) Naj bo T zamuda tistega, ki pride prvi. Zapišite kumulativno porazdelitveno funkcijo te slučajne spremenljivke. Je ta porazdelitev zvezna?

   b) Recimo, da je prvi, ki je prišel, zamudil več kot 20 minut. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je Aljaž zamudil več kot 30 minut?

2. Naj bosta X in Y *neodvisni* diskretni slučajni spremenljivki. V spodnji tabeli je danih nekaj navzkrižnih in ena robna verjetnost:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 4$	Skupaj
$X = 0$					
$X = 2$	1/20		3/20		
$X = 3$			3/20	1/10	
Skupaj	1/8				

   Dopolnite tabelo in izračunajte $\mathrm{var}(2X - Y)$.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_{500}$ so neodvisne s porazdelitvijo:

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 2a \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix},$$

   kjer je $a > 0$. Označimo $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{500}$. Približno določite a tako, da bo $P(S > 1000) = 0{\text{'}}05$.

4. V spodnji tabeli je prikazano število stanovanj glede na velikost v dveh mestnih območjih v Sloveniji:

	do 20	21–40	41–60	61–80	81–100	101 +
Žalec	29	442	788	351	158	324
Žiri	5	61	184	197	169	559

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\text{'}}05$ testirajte hipotezo, da so se velikosti stanovanj v obeh občinah izbirale po enakem ključu, proti alternativni hipotezi, da so v enem od teh območij favorizirali večja stanovanja kot v drugem.

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

27. avgust 2013

1. Študenta Adrijan in Brigita se dogovorita, da se počakata pred predavalnico in nato skupaj vstopita. Njuna prihoda sta neodvisna in porazdeljena zvezno z gostotama:

$$p_A(t) = \begin{cases} a(5+t) & ; -5 < t < 5 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} , \qquad p_B(t) = \begin{cases} b(5-t) & ; -5 < t < 5 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Prihoda gledamo glede na začetek predavanja (vrednost -3 pomeni prihod 3 minute pred začetkom predavanja).

   a) Določite konstanti a in b.
   b) Kolikšna je verjetnost, da vstopita pred začetkom predavanja?
   c) Recimo, da sta vstopila pred začetkom predavanja. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je Adrijan prišel pred Brigito?

2. Slučajni vektor (X, Y, Z) ima kovariančno matriko:

$$K = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

   Določite vse linearne kombinacije slučajnih spremenljivk X, Y in Z (t. j. $aX + bY + cZ$), ki so nekorelirane tako z $X + Y$ kot tudi z $X - Y - 2Z$.

3. Slučajne spremenljivke $X, Y_1, Y_2, \ldots Y_{100}$ so neodvisne, pri čemer je $P(X = 1) = 2/3$, $P(X = 2) = 1/3$, $E(Y_i) = 1$ in $\mathrm{var}(Y_i) = 100$. Slučajne spremenljivke $Y_1, \ldots Y_{100}$ so tudi enako porazdeljene. Označimo $S = X(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{100})$. Približno izračunajte $P(S > 150)$.

4. Korporacija *Thomson Reuters* vsako leto razvrsti revije iz različnih panog glede na citiranost (t. i. *SCI – Science Citation Index*). Področji verjetnosti in statistike šteje kot enotno panogo. Leta 2012 je bilo v to panogo uvrščenih 117 revij. Mesta revij, ki (po deloma subjektivni oceni) realno dopuščajo objavo člankov iz teorije verjetnosti (brez statistike), so naslednja:

$$9\,,\ 25\,,\ 29\,,\ 31\,,\ 32\,,\ 47\,,\ 48\,,\ 57\,,\ 58\,,\ 59\,,\ 67\,,\ 80\,,\ 84\,,\ 85\,,$$
$$86\,,\ 90\,,\ 93\,,\ 95\,,\ 97\,,\ 99\,,\ 100\,,\ 103\,,\ 104\,,\ 105\,,\ 106\,,\ 107\,,\ 110\,.$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}01$ testirajte ničelno hipotezo, da se revije, ki realno dopuščajo objavo člankov iz teorije verjetnosti, na splošno po indeksu citiranosti uvrščajo enako visoko kot revije, ki takih člankov ne dopuščajo, proti alternativni hipotezi, da temu ni tako.

2011/12

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

9. december 2011

1. Raztreseni profesor je založil dva lista, vsakega v enega izmed treh predalov. Posamezen list je založil v prvi predal z verjetnostjo 60%, v drugi predal z verjetnostjo 30%, v tretji predal pa z verjetnostjo 10%. Oba lista je založil neodvisno.

   Profesorjeva žena na slepo odpre enega izmed predalov, ga temeljito prebrska (tako da ji nič ne more uiti), nakar zakliče: "Našla sem!" Pri tem misli, da je našla vsaj en list. Kolikšna je pogojna verjetnost, da sta v tem predalu oba lista?

2. Verjetnost, da bo posamezen izdelek prvorazreden, je 20%. Izdelki so neodvisni in pakirani v pakete po 400. Tovarna zagotavlja, da je v vsaj 95% paketov najmanj x izdelkov prvorazrednih. Kolikšen je največji x, ki ga tovarna še lahko postavi?

3. Med 16 kartami sta dve vredni po 2 točki, dve po 1 točko, preostale pa niso vredne nič. Na slepo in brez vračanja izvlečemo dve karti in naj bo S njuna skupna vrednost. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke. Rezultat podajte numerično na tri decimalke natančno.

4. Mati pride v vrtec po otroka ob času, ki je porazdeljen zvezno enakomerno na intervalu med 14:35 in 14:45. Otroci pa pojedo popoldansko malico ob času, ki je porazdeljen zvezno enakomerno na intervalu med 14:30 in 14:40 in neodvisen od materinega prihoda. Če otrok še jé, mati počaka, da poje do konca. Označimo s T čas čakanja v minutah (ki torej lahko zavzame vrednosti od 0 do 5). Zapišite kumulativno porazdelitveno funkcijo te slučajne spremenljivke in narišite njen graf v celoti.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

30. marec 2012

1. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} e^{-x-2} & ; x > -2 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke $Y = X^2$.

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni enakomerno na intervalu $[0, 1]$. Izračunajte $\operatorname{var}\big((X + Y)^2\big)$.

3. Dano je Bernoullijevo zaporedje poskusov, od katerih vsak uspe z verjetnostjo $1/3$. Izvedemo slučajno število poskusov, porazdeljeno geometrijsko Geom$(1/2)$. Privzamemo, da je število izvedenih poskusov neodvisno od njihovega uspeha oz. neuspeha.

   a) Zapišite rodovno funkcijo števila uspelih poskusov.

   b) Kolikšna je verjetnost, da uspejo natanko trije poskusi?

4. Slučajne spremenljivke $X_0, X_1, \ldots X_{400}$ so neodvisne in porazdeljene diskretno po shemi:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix} .$$

   Definirajmo $S := X_0(X_1 + X_2 + \ldots + X_{400})$. Približno izračunajte $P(S > 20)$.

3. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

8. junij 2012

1. Statistična spremenljivka ima matematično upanje μ in standardni odklon σ. Ocenite oba parametra po metodi momentov na osnovi vzorca:

$$5{\cdot}8\,,\ 1{\cdot}9\,,\ 4{\cdot}0\,,\ 8{\cdot}0\,,\ 6{\cdot}5\,.$$

2. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$54{\cdot}4\,,\ 54{\cdot}8\,,\ 49{\cdot}3\,,\ 56{\cdot}3\,,\ 45{\cdot}2\,,\ 45{\cdot}7\,,\ 53{\cdot}5\,,\ 40{\cdot}1\,,\ 42{\cdot}3\,,\ 50{\cdot}1\,.$$

   Poiščite 95% interval zaupanja za μ.

3. Za neko celoštevilsko statistično spremenljivko domnevamo, da ima Poissonovo porazdelitev Pois(λ). Rezultati 50 neodvisnih meritev so podani v spodnji tabeli:

Vrednosti	0	1	2	3	8
Frekvence	23	12	9	5	1

   a) Ocenite λ po metodi največjega verjetja.

   b) Testirajte domnevo pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}01$ (kjer je potrebno, razrede ustrezno združite).

4. Med 17 študenti so izvedli anketo z naslednjima vprašanjema:

   1. Ocenite stopnjo stresa pri vas v zadnjih dveh tednih.
      (1 – zelo majhna, 2 – majhna, 3 – srednja, 4 – velika, 5 – zelo velika)
   2. Ali ste se v zadnjih dveh tednih posvečali študiju bolj kot ponavadi?
      (da/ne)

   Rezultati ankete so:

	1	2	3	4	5
da	0	2	1	5	2
ne	0	5	2	0	0

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ testirajte hipotezo, ali so študenti, ki se v zadnjih dveh tednih bolj posvečajo študiju, v tem času enako pod stresom kot tisti, ki se ne, proti alternativni hipotezi, da so študenti, ki se v zadnjih dveh tednih bolj posvečajo študiju, v tem času bolj pod stresom kot tisti, ki se ne.

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

22. junij 2012

1. Študenti, ki bodo pisali izpit, se posedejo v tri vrste in tri kolone, tako kot je prikazano spodaj:

Aljaž	Brigita	Cveto
Dragica	Edo	Fani
Gregor	Hana	Iztok

   Asistent na slepo izbere tri študente in jih zamenja: prvega premesti na mesto drugega, drugega na mesto tretjega in tretjega na mesto prvega.

   a) Kolikšna je verjetnost, da sta Aljaž in Brigita po premestitvi še vedno soseda skupaj v isti vrsti?

   b) Recimo, da sta Aljaž in Brigita po premestitvi res še vedno soseda v isti vrsti. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bil vsaj eden od njiju premeščen?

2. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena enakomerno na intervalu od 0 do 3. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $(X-1)^2$.

3. Pri neki spletni strani, ki so jo na novo postavili, se odločijo, da bodo nagradili deset tisočega obiskovalca. Časi med dvema obiskoma strani so neodvisni in porazdeljeni eksponentno z matematičnim upanjem 8˙6000 sekunde. Kolikšna je verjetnost, da nagrada po 24 urah še ne bo podeljena?

4. V neki anketi so študente biopsihologije vprašali, kateri predmet njihove stroke jim je najljubši, gledali pa so tudi spol anketirancev. Rezultati so naslednji:

predmet\spol	moški	ženske
Osnove psihologije	0	5
Psihologija človeškega razvoja	2	12
Nevrološke osnove višjih živčnih funkcij	6	21

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙05$ testirajte hipotezo, da je spol povezan z najljubšim predmetom pri študiju. Če se vam zdi potrebno, komentirajte!

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

10. september 2012

1. Pri neki računalniški igrici je v ribniku 10 postrvi in 5 krapov. Med postrvmi so 3 lačne in 7 sitih, med krapi pa 2 lačna in 3 siti. Igralec izbere 5 rib in jih poskuša ujeti. Lačna riba se bo ujela, sita pa ne. Igralec ne ve vnaprej, katera riba je lačna sita in katera sita. Igra je dobljena, če igralec ujame vsaj dve postrvi in vsaj enega krapa. Privzemimo, da igralec ribe izbere na slepo, ne glede na vrsto.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bo dobil igro?

   b) Recimo, da je igralec dobil igro. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je ujel vse tri lačne postrvi?

2. Slučajna spremenljivka X ima Cauchyjevo porazdelitev, t. j. porazdelitev z gostoto:

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,,$$

   slučajna spremenljivka Y pa je porazdeljena enakomerno na intervalu od 1 do 2 in neodvisna od X. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := X/Y$.

3. Albert in Bernarda odigrata 1000 rund igre Kamen, škarje, papir. V vsaki rundi vsak izmed njiju na slepo izbere kamen, škarje ali papir. Če sta izbrala enak predmet, je igra neodločena, sicer pa rundo dobi tisti, čigar predmet premaga predmet drugega, pri čemer kamen premaga škarje, škarje premagajo papir, papir pa premaga kamen. Privzemite, da Albert in Bernarda predmete izbirata neodvisno, prav tako tudi, da so runde med seboj neodvisne. Približno izračunajte verjetnost, da bo imela Bernarda najmanj 30 zmag več kot Albert.

4. V neki raziskavi so 100 osebam zastavili dve vprašanji:

   1. Ali so cene v lokalih po vašem mnenju previsoke?
   2. Koliko je po vašem mnenju primerna cena kave v lokalu?

   Odgovori na drugo vprašanje so zbrani v dveh frekvenčnih tabelah. Tabela za tiste, ki so na prvo vprašanje odgovorili z DA:

Cena	0˙3	0˙5	0˙6	0˙7	0˙8	0˙9	1	1˙1	1˙2	1˙3	1˙5	2
Frekvenca	1	8	3	2	10	1	28	3	5	2	3	4

   Tabela za tiste, ki so na prvo vprašanje odgovorili z NE:

Cena	1	1˙2	1˙25	1˙5	2	3
Frekvenca	11	4	2	6	6	1

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙05$ testirajte ničelno hipotezo, da bi tisti, ki menijo, da so cene previsoke, v povprečju postavili enako ceno kave kot tisti, ki menijo, da niso previsoke, proti alternativni hipotezi, da bi prvi v povprečju postavili nižjo ceno.

2010/11

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

23. november 2010

1. V kvadratu $ABCD$ s stranico 7 na slepo izberemo točko. Kolikšna je verjetnost, da bo izbrana točka od roba oddaljena za manj kot 2 in bližje oglišču A kot C?

2. Pri izpolnjevanju formularjev se ljudje često zmotijo ter zamenjajo ime in priimek. Verjetnost takšne napake ocenjujemo na 10%, ne glede na ime in priimek izpolnjevalca. Vse druge napake zanemarimo.

   Slovenec pri izpolnjevanju formularja za ime navede *Cvetko*, za priimek pa *Vinko* (pogojna verjetnost tega dogodka pri pogoju, da je izpolnjevalcu ime Vinko, piše pa se Cvetko, je torej 10%). Vemo, da je 0˙075% Slovencem moškega spola ime Cvetko, 0˙329% pa Vinko. Poleg tega vemo, da se 0˙048% Slovencev moškega spola piše Cvetko, 0˙011% pa Vinko. Kolikšna je pogojna verjetnost, da se je naš Slovenec zmotil?

   Podatkov o deležih kombinacij imena in priimka nimamo, zato privzamemo, da sta ime in priimek neodvisna.

3. V letnik je vpisanih 200 študentov. Vsak od njih bo obiskoval predavanja z verjetnostjo 80%. Najmanj koliko študentov mora sprejeti predavalnica, če naj bo verjetnost, da bo premajhna, manjša od 5%? Privzamemo, da so odločitve študentov, ali bodo obiskovali predavanja, med seboj neodvisne.

4. Ludvik in Francelj igrata šah. Pri vsaki partiji z verjetnostjo 0˙5 zmaga Ludvik, z verjetnostjo 0˙3 zmaga Francelj, z verjetnostjo 0˙2 pa je remi. Zmaga prinese zmagovalcu eno točko, remi pa vsakemu pol točke. Igrata na 2 točki razlike, vendar pa odigrata maksimalno 5 partij.

   Slučajna spremenljivka N naj predstavlja število partij, ki sta jih odigrala Ludvik in Francelj. Zapišite njeno porazdelitev.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

3. februar 2011

1. Slučajna spremenljivka X ima *Cauchyjevo porazdelitev*, t. j. zvezno porazdelitev z gostoto:
$$p_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \,.$$
   a) Zapišite gostoto porazdelitve slučajne spremenljivke $Y = \sqrt{|X|}$.
   b) Izračunajte mediano slučajne spremenljivke Y.

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:
$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\left(\dfrac{1}{x^4y^5} + \dfrac{1}{x^5y^4}\right) & ; \, x, y > 1 \\ 0 & ; \text{ sicer} \end{cases} \,.$$
Izračunajte konstanto c in korelacijski koeficient $\mathrm{corr}(X, Y)$.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_n$ so neodvisne in porazdeljene eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$, t. j. zvezno z gostoto:
$$p(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & ; \, x > 0 \\ 0 & ; \text{ sicer} \end{cases} \,,$$
kjer je $\lambda > 0$. Približno določite, najmanj kolikšen mora biti n, če naj bo verjetnost, da njihovo vzorčno povprečje:
$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$
preseže svoje matematično upanje za več kot 1%, enaka največ 5%.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:
$$121,\ 123,\ 112,\ 120,\ 124,\ 80,\ 108,\ 114,\ 115,\ 114\,.$$
Poiščite 99% interval zaupanja za μ.

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

17. februar 2011

1. Aleksander in Branka se vozita v mesto z istim avtobusom. V 10 dneh gre Aleksander na avtobus natanko 3-krat, pri čemer dneve izbere na slepo. Branka pa gre na avtobus kvečjemu v prvih 7 dneh, pri čemer gre vsak dan na avtobus z verjetnostjo 50%. Branka se vsak dan odloča neodvisno, prav tako tudi neodvisno od Aleksandra.

   Recimo, da se Aleksander in Branka nista nikoli srečala na avtobusu. Kolikšna je pogojna verjetnost, da Aleksander v prvih 7 dneh sploh ni šel na avtobus?

2. Kolikšna je verjetnost, da je na slepo izbrana točka v kvadratu bližje robu kot središču kvadrata?

3. Slučajne spremenljivke $U_1, \ldots U_{100}$ so porazdeljene enakomerno na intervalu $[0,1]$, slučajne spremenljivke $V_1, \ldots V_{100}$ pa diskretno po shemi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

   Vse omenjene slučajne spremenljivke so med seboj neodvisne.

   a) Definirajmo $X_i := U_i V_i$. Izračunajte $E(X_i)$ in $\mathrm{var}(X_i)$.

   b) Naj bo $S := X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$. Približno izračunajte $P(S < 60)$.

4. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_n$ so neodvisne in imajo Pascalovo porazdelitev $\mathrm{NB}(3, 1/\alpha)$, kjer je α neznan parameter. Poiščite cenilko za α po metodi največjega verjetja. Je ta cenilka nepristranska?

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

30. maj 2011

1. Delavec pride v službo enkrat med 7:50 in 8:05 z enakomerno porazdelitvijo, šef pa enkrat med 7:55 in 8:10, prav tako z enakomerno porazdelitvijo in neodvisno od delavca. Recimo, da delavec pride v službo po 8. uri. Kolikšna je pogojna verjetnost, da šef pride prej?

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta porazdeljeni enakomerno na intervalu $[0, 1]$, njun korelacijski koeficient pa je enak $1/2$. Izračunajte $\mathrm{var}(3X - Y)$.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_{100}$ so neodvisne in porazdeljene diskretno po shemi:
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$
Označimo $S = 10X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{100}$. Približno izračunajte $P(S < 40)$.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:
$$74,\ 73,\ 79,\ 78,\ 81,\ 72,\ 75,\ 69,\ 74\,.$$
Poiščite 95% interval zaupanja za σ.

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

6. september 2011

1. Na daleč neločljiva Janez in Lojze se odpravita streljat. Janez vsakič zadene z verjetnostjo 80%, Lojze pa z verjetnostjo 30%. Privzamemo, da so dogodki, da nekdo od njiju v posameznem strelu zadene, med seboj neodvisni.

   Eden od njiju, za katerega na začetku privzamemo, da je z verjetnostjo 1/2 Janez, z verjetnostjo 1/2 pa Lojze, dvakrat pomeri in obakrat zadene. Nato pomeri še tretjič. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo zadel?

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-x} & ; x > y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := X/Y$.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \dots X_{100}$ so neodvisne in porazdeljene diskretno po shemi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ p & 1-2p & p \end{pmatrix} .$$

   Označimo $S := X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$. Približno določite vrednost parametra p, pri kateri je $P(S < 90) = 0\text{'}05$.

4. Statistična spremenljivka X je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, kjer nobenega od parametrov ne poznamo. Opazimo naslednji vzorec:

$$33\text{'}1,\ 24\text{'}9,\ 30\text{'}1,\ 28\text{'}0,\ 30\text{'}1,\ 26\text{'}6,\ 31\text{'}5,\ 29\text{'}8,\ 33\text{'}3,\ 31\text{'}1 .$$

   Poiščite 99% interval zaupanja za μ.

2009/10

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

18. november 2009

1. Danih je 16 kart – vse možne kombinacije štirih barv (pik, križ, srce in karo) in štirih vrednosti (as, kralj, dama, fant). Karte dobro premešamo in jih razdelimo na dva kupa po 8 kart. Nato vzamemo eno karto iz prvega kupa, vidimo, da je srčev as, jo prestavimo v drugi kup, le-tega spet dobro premešamo in potegnemo ven dve karti. Kolikšna je verjetnost, da sta karti, ki smo ju potegnili, obe srci?

2. V ravnini sta dani točki A in B. Točko C izberemo kot presečišče premic skozi A in B, pri čemer sta kota $\angle BAC$ in $\angle ABC$ izbrana na slepo med 0 in $\pi/2$. Kolikšna je verjetnost, da je tudi kot $\angle ACB$ manjši od $\pi/2$?

3. Zavarovalnica je proti določeni vrsti škode sklenila 1000 polic. Verjetnost, da se pri posamezni polici zgodi škodni dogodek, je $1/500$. Posamezne police so neodvisne. Zavarovalnina za posamezen škodni dogodek znaša 1000 evrov. Najmanj koliko naj znaša zavarovalna premija, če naj ima zavarovalnica izgubo z verjetnostjo največ 5%?

   Namig: lahko uporabite Poissonovo aproksimacijo.

4. S kupa jemljemo karte, tako da mečemo kocko, dokler ne poberemo vseh kart. Vsakič poberemo toliko kart, kolikor pik pade na kocki, le v primeru, ko je kart premalo, ne vzamemo ničesar. Recimo, da sta nam preostali še dve karti. Z X označimo število metov kocke, ki so potrebni, da poberemo obe karti. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke. Privzamemo, da je kocka poštena, meti pa neodvisni.

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

FRI–UNI

1. december 2009

Nekoliko prirejena različica

1. Pepe deli karte pri taroku. Ko deli talon (6 kart), pogleda, ali je v njem škis (ena izmed 54 kart, kolikor jih je vseh skupaj). Če je škis v talonu, mu ga s pogojno verjetnostjo 50% uspe neopaženo vtihotapiti med svojih 12 kart, z verjetnostjo 30% mu to ne uspe (a tudi nihče nič ne opazi), z verjetnostjo 20% pa ga razkrinkajo.

   Recimo, da soigralci niso opazili nič sumljivega. Kolikšna je pogojna verjetnost, da ima Pepe škisa?

2. Standardno kocko (s pikami od 1 do 6) želimo obtežiti tako, da bo, ko jo bomo dvakrat (neodvisno) vrgli, vsota pik obeh metov zavzela vrednost od 2 do 12, vsako z enako verjetnostjo. Poiščite tako obtežitev ali pa dokažite, da ne obstaja.

3. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen po naslednji shemi:

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = -1$		0˙06	0˙06	
$X = 0$	0˙08	0˙12		
$X = 1$	0˙08			

   Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni. Poiščite še robni porazdelitvi in pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke $X - Y$ glede na $X^2 + Y^2 = 1$, torej $P\big(X - Y = k \mid X^2 + Y^2 = 1\big)$.

4. V kvadratu s stranico 2, ki ima stranice vzporedne s koordinatnima osema, na slepo izberemo slučajno točko in z M označimo manhattansko razdaljo do najbližjega oglišča. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka M?

   Manhattanska razdalja med točkama $A(x_1, y_1)$ in $B(x_2, y_2)$ je $d(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$.

5. Življenjska doba varovalk, ki jih uporabljamo pri računalniških monitorjih, ima eksponentno porazdelitev s parametrom $\lambda = 5$. Vsak monitor ima dve varovalki, pri čemer ena deluje kot '*backup*' in prične delovati, šele ko prva odpove.

   a) Če imata dve taki varovalki neodvisni življenjski dobi X in Y, poiščite gostoto porazdelitve $p_{X,Y}(x, y)$.

   b) Efektivna skupna življenjska doba dveh varovalk je $X+Y$. Poiščite pričakovano skupno efektivno življenjsko dobo para dveh varovalk za monitor.

6. a) Kolikšna je verjetnost, da se pri metu poštenega kovanca relativna frekvenca grba v 3600 metih 0˙5 razlikuje za manj kot 0˙01, se pravi, da grb pade med 1764 in 1836-krat?

b) Kolikokrat moramo vreči pošten kovanec, da bo verjetnost dogodka, da se relativna frekvenca grba razlikuje od 0˙5 za manj kot 0˙05, večja od 0˙997?

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

27. januar 2010

1. Dani sta neodvisni slučajni spremenljivki X in Y, pri čemer je X porazdeljena standardno normalno, Y pa geometrijsko Geom(1/2). Na tri decimalke natančno izračunajte $P(X/Y > 1)$.

2. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_{200}$ so neodvisne in porazdeljene zvezno z gostoto:
$$p(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$
Označimo:
$$S := X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} + 2\big(X_{101} + X_{102} + \cdots + X_{200}\big) .$$
Približno izračunajte $P(S > 330)$.

3. Statistična spremenljivka na neki populaciji je porazdeljena diskretno po shemi:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & b & 1-2a-b \end{pmatrix}$$
Po metodi največjega verjetja iz vzorca:
$$3,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 3,\ 3$$
ocenite parametra a in b.

4. Izmed 100 poskusov jih je uspelo natanko 60. Statistični model predvideva, da so poskusi neodvisni in da vsak uspe z verjetnostjo p.

   a) Poiščite dvostranski 95% interval zaupanja za p.

   b) Poiščite največjo vrednost p_0, pri kateri še ne zavrnemo hipoteze $H_0\colon p = p_0$ proti alternativni hipotezi $H_1\colon p \neq p_0$, pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\dot{}}05$.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

FRI–UNI

15. januar 2010

Nekoliko prirejena različica

1. Kup šestih kart, v katerem sta 2 $\heartsuit$, 2 $\diamondsuit$, 1 $\spadesuit$ in 1 $\clubsuit$, dobro premešamo in jih, obrnjene z licem navzdol, postavimo v vrsto. Nato vse karte obrnemo. Naj bo S_1 mesto prve srčeve ($\heartsuit$) karte, S_2 mesto druge srčeve ($\heartsuit$) karte in K_1 mesto prve karine ($\diamondsuit$) karte (šteto od leve proti desni).

   a) Izračunajte matematično upanje slučajne spremenljivke S_1, torej $E(S_1)$.
   b) Izračunajte matematično upanje slučajne spremenljivke K_1, torej $E(K_1)$.
   c) Izračunajte pogojno matematično upanje $E(S_2 \mid S_1 = 2)$.
   d) Izračunajte kovarianco slučajnih spremenljivk S_1 in K_1, torej $\mathrm{cov}(S_1, K_1)$.

2. Statistična spremenljivka je porazdeljena binomsko $\mathrm{Bin}(5, p)$, kjer je p neznan parameter. Po metodi momentov in po metodi največjega verjetja iz vzorca:

   $$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3$$

   ocenite neznani parameter p.

3. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, 4)$, dajo naslednje vrednosti:

   $$13,\ 12,\ 11,\ 15,\ 7,\ 8,\ 7,\ 8,\ 9\,.$$

   Pri stopnji zaupanja $\beta = 0{\dot{}}99$ poiščite interval zaupanja za parameter μ.

4. Poliklorirani bifenili (PCB-ji), ki se uporabljajo v proizvodnji velikih električnih transformatorjev in kondenzatorjev so izjemno nevarni onesnaževalci okolja. Agencija za zaščito okolja (EPA) preizkuša novo napravo za merjenje koncentracije PCB-jev v ribah. Za testiranje natančnosti nove naprave so naredili 8 merjenj koncentracije PCB-ja na isti ribi. Podatki so zabeleženi v spodnji tabeli (v delcih na milijon):

   $$5{\dot{}}7,\ 6{\dot{}}2,\ 6{\dot{}}4,\ 5{\dot{}}8,\ 6{\dot{}}2,\ 5{\dot{}}9,\ 5{\dot{}}7,\ 6{\dot{}}1\,.$$

   Ali nova naprava ustreza specifikacijam Agencije za zaščito okolja, če le ta zahteva, da naprave za merjenje koncentracije PCB-ja merijo z varianco manjšo od $0{\dot{}}1$? Testirajte pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\dot{}}1$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

IŠRM

16. februar 2010

1. Gospodinje Andreja, Brigita in Cvetka kupujejo marmelado. Andreja z verjetnostjo 70% kupi slivovo, z verjetnostjo 30% pa marelično. Brigita z verjetnostjo 60% kupi marelično, z verjetnostjo 40% pa jagodno. Cvetka pa z verjetnostjo 80% kupi jagodno in z verjetnostjo 20% slivovo marmelado. Privzamemo, da kupujejo neodvisno druga od druge.

   Ko nakupijo, na polici zmanjka natanko po ena marmelada vsake vrste. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je Brigita kupila marelično marmelado?

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\,y^2\,e^{-xy} & ; \; x > y > 0 \\ 0 & ; \; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Določite konstanto c in gostoto slučajne spremenljivke $Z = XY$.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, \ldots X_{100}$ so neodvisne in porazdeljene diskretno po shemi:

$$\begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 0\text{'}6 & 0\text{'}4 \end{pmatrix} .$$

   Približno izračunajte:

$$P\big(X_1X_2 + X_1X_3 + X_1X_4 + \cdots + X_1X_{100} < 1000\big) .$$

4. 100-krat vržemo pošteno kocko. Dobimo naslednjo frekvenčno porazdelitev števila metov:

1	2	3	4	5	6
9	13	17	19	16	26

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}05$ testirajte hipotezo, da je kocka poštena.

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

18. junij 2010

1. Andreja, Bojan, Cvetka in Dragan gredo v slaščičarno, kjer imajo na voljo še natanko štiri slaščice: torto, kremno rezino, pito in baklavo. Najprej naroči Andreja, nato Bojan, nato Cvetka in nazadnje Dragan. Andrejine preference so $4 : 3 : 2 : 1$, Bojanove $3 : 4 : 2 : 1$ in Cvetkine $1 : 2 : 4 : 3$. Preference so razmerja med (pogojnimi) verjetnostmi naročila posameznih slaščic glede na to, katere še ostanejo (t. j. če Andreja naroči torto, Bojan naroči kremno rezino s pogojno verjetnostjo $4/7$, pito s pogojno verjetnostjo $2/7$ in baklavo s pogojno verjetnostjo $1/7$).

   Recimo, da je Bojan naročil kremno rezino. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo Dragan dobil baklavo?

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni enako eksponentno, t. j. z gostoto:
$$p(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & ;\ x > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$
   Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := \dfrac{X}{X+Y}$.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, \dots X_{100}$ so neodvisne in porazdeljene diskretno po shemah:
$$X_1 \sim \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 0˙6 & 0˙4 \end{pmatrix}, \quad X_2, \dots X_{100} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0˙6 & 0˙4 \end{pmatrix}.$$
   Približno izračunajte:
$$P\big(X_1X_2 + X_1X_3 + X_1X_4 + \cdots + X_1X_{100} < 1500\big).$$

4. Meritve talilne toplote ledu po prvi metodi (v kalorijah na gram) so dale naslednje rezultate:

   79.98, 80.04, 80.02, 80.04, 80.03, 80.03, 80.04, 79.97, 80.05, 80.03, 80.02, 80.00, 80.02,

   po drugi metodi pa:

   80.02, 79.94, 79.98, 79.97, 79.97, 80.03, 79.95, 79.97 .

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙01$ testirajte ničelno hipotezo, da sta metodi enakovredni, proti alternativni hipotezi, da dajeta različne rezultate.

IZPIT IZ VERJETNOSTI IN STATISTIKE

IŠRM

1. september 2010

1. Andrej, Boris in Cveto zaporedoma odkrivajo škatle. Škatel je 5 in v natanko eni od njih se skriva nagrada. Vsak od njih misli, da si je zapomnil, v kateri škatli je nagrada. V resnici pa si Andrej pravilno zapomni z verjetnostjo 30%, Boris z verjetnostjo 20% in Cveto z verjetnostjo 60%. V primeru, ko si posamezen igralec ne zapomni pravilne škatle, je škatla, za katero misli, da je notri nagrada, porazdeljena enakomerno med preostalimi štirimi. Prizamemo, da so igralci glede tega med seboj neodvisni.

   Vsak igralec odkrije škatlo, za katero misli, da je bila notri nagrada – razen če je bila ta že odkrita; v tem primeru na slepo odkrije eno izmed še neodkritih škatel. Igra se konča, ko bodisi vsi odkrijejo po eno škatlo bodisi ko je odkrita nagrada.

   a) Kolikšna je verjetnost, da igralci odkrijejo nagrado?
   b) Recimo, da je bila nagrada odkrita. Kolikšna je pogojna verjetnost, da jo je odkril Cveto?

2. Neodvisni slučajni spremenljivki X in Y sta porazdeljeni enakomerno na intervalu $[0, 1]$. Izračunajte kovarianco $\mathrm{cov}(X, XY)$.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_{1000}$ so neodvisne in porazdeljene diskretno po shemi:
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ a & 1-2a & a \end{pmatrix}.$$
   Označimo $S := X_1 + X_2 + \ldots + X_{1000}$. Določite približni interval za a, na katerem je $P(S > 20) \geq 1/4$.

4. Vrednost celoštevilske statistične spremenljivke X je bila izmerjena 100-krat. Rezultati meritev so zbrani v naslednji tabeli:

Vrednost(i)	1	2	3	4	> 4
Frekvenca	38	26	20	7	9

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{,}05$ testirajte hipotezo, da je spremenljivka X porazdeljena geometrijsko Geom(1/2).

2008/09

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

19. november 2008

1. Pepček mora iz omare v spalnici prinesti dva para nogavic, t. j. štiri nogavice, pri čemer morata biti po dve in dve enake barve (lahko tudi vse štiri enake barve). V omari sta dva para rdečih in dva para modrih nogavic (skupaj torej osem nogavic).

   Pepček nosi nogavice posamezno, drugo za drugo. Ko gre po prvo, tretjo in četrto nogavico, iz omare jemlje povsem na slepo. Ko gre po drugo nogavico, pa si z verjetnostjo 70% zapomni, katere barve je bila prva nogavica, z verjetnostjo 30% pa to pozabi. Če si zapomni, vzame nogavico, ki je iste barve kot prva, če pozabi, pa vzame nogavico povsem na slepo.

   a) Kolikšna je verjetnost, da na koncu prinese, kot mu je bilo naročeno?
   b) Recimo, da je na koncu res prinesel, tako kot mu je bilo naročeno. Kolikšna je pogojna verjetnost, da prvi dve nogavici, ki ju je prinesel, nista bili enake barve?

2. Potnik mora na letališču prestopiti z enega na drugo letalo, pri čemer ima pol ure rezerve. Zamuda letala, s katerim je priletel, je porazdeljena enakomerno od nič do ene ure, prav tako pa tudi zamuda drugega letala pri vzletu. Letali sta med seboj neodvisni. Kolikšna je verjetnost, da bo potnik še ujel drugo letalo?

3. V letnik je vpisanih 200 študentov. Verjetnost, da posamezen študent pride na kolokvij, je 60%. Študentje so med seboj neodvisni. Za najmanj koliko študentov je treba rezervirati predavalnico, če naj bo verjetnost, da bo premajhna, manjša od 5%?

4. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} a^2 - x^2 & ; -a < x < a \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   a) Izračunajte konstanto a.
   b) Naj bo $Y := X^2$. Določite porazdelitveno funkcijo F_Y slučajne spremenljivke Y.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

23. januar 2009

1. Dani sta neodvisni slučajni spremenljivki X in Y, pri čemer je X porazdeljena standardno normalno, Y pa enakomerno na intervalu $[0, 1]$. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := X/Y$.

2. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \dots X_{500}$ so neodvisne s porazdelitvijo:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0\text{˙}2 & 0\text{˙}4 & 0\text{˙}4 \end{pmatrix}.$$
Označimo z S njihovo vsoto. Približno izračunajte $P(S < 950)$.

3. Statistična spremenljivka na neki populaciji je porazdeljena eksponentno z gostoto:
$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}\, e^{-x/a} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases},$$
kjer je $a > 0$ neznan parameter. Iz populacije vzamemo vzorec neodvisnih enot. Vrednosti dane statistične spremenljivke na njih označimo z $X_1, X_2, \dots X_n$. Oglejmo si skupino cenilk parametra a oblike:
$$\hat{a}(k) := k(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\,,$$
kjer je k konstanta, odvisna le od velikosti vzorca.
   a) Dokažite, da je možno parameter k določiti tako, da je $\hat{a}(k)$ nepristranska cenilka parametra a.
   b) Dokažite, da je možno parameter k določiti tudi tako, da je srednja kvadratična napaka $q(\hat{a}(k)) := E\big[(\hat{a}(k) - a)^2\big]$ najmanjša možna.

   Dobljena rezultata na kratko pokomentirajte.

4. Neka količina je na prvi populaciji porazdeljena normalno $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma)$, na drugi pa normalno $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma)$. Meritve na vzorcu iz prve populacije dajo naslednje vrednosti:
$$52,\ 54,\ 55,\ 49,\ 51,\ 53,\ 52,\ 50\,,$$
na vzorcu iz druge populacije pa vrednosti:
$$52,\ 50,\ 50,\ 51,\ 53,\ 48,\ 49,\ 46,\ 48,\ 48\,.$$
Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{˙}05$ testirajte hipotezo, da je $\mu_1 = \mu_2$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu_1 \neq \mu_2$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

IŠRM

12. februar 2009

1. Profesor mora izpraševati tri kandidate, ki jih je naročil na pol ure. Za vsakega kandidata porabi med 25 in 35 minut časa z enakomerno porazdelitvijo in neodvisno od ostalih kandidatov. Naslednji kandidat je na vrsti, ko je naročen oziroma ko prejšnji kandidat konča – kar pride kasneje.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bo moral tretji kandidat čakati?

   b) Recimo, da je moral tretji kandidat čakati. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je profesor za prvega kandidata porabil več kot pol ure?

2. Med štiri igralce razdelimo 16 kart iz dobro premešanega kupa 32 kart, med katerimi je 8 pikov. Vsak igralec dobi po štiri karte. Označimo z S število igralcev, ki imajo natanko dva pika. Izračunajte $E(S)$.

3. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots X_{300}$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene enakomerno na $[0,1]$. Približno izračunajte:

$$P\big(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{300}^2 < 95\big)\,.$$

4. Telesna teža v skupini 75 učencev ima naslednjo frekvenčno porazdelitev:

teža [kg]	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
št. učencev	1	3	5	8	8	7	9	8	6	6	4	3

teža [kg]	51	52	53	54	59
št. učencev	2	2	1	1	1

Privzemimo, da ta skupina predstavlja enostavni slučajni vzorec iz populacije, kjer je telesna teža porazdeljena normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Poiščite 95% interval zaupanja za μ.

Izpit iz verjetnosti in statistike

IŠRM

18. junij 2009

1. Vržemo pošteno kocko. Če pade šest pik, vržemo ponovno. Če spet pade šest pik, tudi ponovno vržemo. Tako nadaljujemo, dokler ne pade manj kot šest pik. Naj bo S skupno število pik, ki padejo. Izračunajte $E(S)$.

2. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, porazdeljeni zvezno z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Izračunajte $P(X > Y \mid X > 1)$.

3. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots X_{1000}$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene po shemi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & b & a \end{pmatrix} .$$

   Označimo $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{1000}$. Čim natančneje določite parametra a in b, pri katerih velja $P(S > 1030) = 0\text{'}05$.

4. Na desetih osebah so preizkušali učinek neke diete proti debelosti. Osebe so stehtali pred začetkom in po koncu diete. Podatki so naslednji:

Pred dieto	125	131	126	117	114
Po dieti	121	118	119	121	113

Pred dieto	134	123	135	100	117
Po dieti	118	111	130	97	118

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}05$ testirajte ničelno hipotezo, da dieta nima učinka, proti alternativni hipotezi, da ima shujševalni učinek. Privzeti smete, da je vektor telesne teže pred in po dieti porazdeljen dvorazsežno normalno.

Izpit iz verjetnosti in statistike

IŠRM

15. september 2009

1. Deset deklet, med njimi Andreja, Barbara in Cirila, in deset fantov, med njimi Klemen, Luka in Matej, gredo plesat. Andreji sta všeč Klemen in Matej, Barbari in Cirili pa Klemen in Luka (oba obema). Luki sta všeč Andreja in Barbara, Mateju pa Andreja in Cirila.

   Izbirajo dekleta – najprej Andreja, nato Barbara, nato Cirila, nato ostale. Posamezno dekle izbere fanta, ki ji je všeč in je še ostal – če sta dva, oba z enako verjetnostjo. Če ni ostal noben fant, ki ji je všeč, pa izbere enega od preostalih, vse z enako verjetnostjo.

   Recimo, da Luka pleše z dekletom, ki mu je všeč. Kolikšna je pogojna verjetnost, da tudi Matej pleše z dekletom, ki mu je všeč?

2. Dvojčka Budimir in Kazimir se zbudita enkrat med polnočjo in 4. uro zjutraj, neodvisno drug od drugega in z enakomerno porazdelitvijo. Posamezen dvojček ostane buden še eno uro po tistem, ko se zbudi, pri čemer staršem ne da spati. Naj bo T čas spanca, ki ga dvojčka ukradeta staršem (če se zbudita ob istem času, jim ukradeta eno uro; če se zbudita več kot uro narazen, jim ukradeta dve uri). Izračunajte $E(T)$.

3. Slučajne spremenljivke $Z_1, \dots Z_{100}$ naj bodo porazdeljene standardno normalno, slučajne spremenljivke $U_1, \dots U_{100}$ pa naj bodo porazdeljene enakomerno na $\{1, 2\}$. Vse omenjene slučajne spremenljivke naj bodo neodvisne.

   a) Definirajmo $X_i := Z_i U_i$. Izračunajte $\operatorname{var}(X_i)$.

   b) Naj bo $S := X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$. Približno izračunajte $P(S > 7)$.

4. Rezultati nekega kolokvija, pri katerih je zraven pripisan spol, so naslednji:

63	Ž	25	Ž	13	Ž	73	Ž
56	Ž	57	M	66	M	49	Ž
65	Ž	42	M	60	Ž	64	Ž
78	Ž	55	Ž	37	Ž	65	M
32	M	57	Ž	62	Ž		

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ testirajte hipotezo, da so moški in ženske enako dobri, proti alternativni hipotezi, da niso enako dobri.

2007/08

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

14. november 2007

1. Neka cesta gre skozi pet zaporednih semaforiziranih križišč. Semaforji so med seboj neodvisni. Na prvem križišču gori zelena luč 30%, na preostalih pa 60% časa.

   a) Kolikšna je verjetnost, da na vsaj dveh križiščih gori zelena luč?

   b) Recimo, da res na vsaj dveh križiščih gori zelena luč. Kolikšna je pogojna verjetnost, da zelena luč ne gori na nobenih dveh zaporednih križiščih?

2. Na list papirja, na katerem so izmenoma narisane modre in rumene proge, povsem slučajno vržemo iglo. Vse proge so enako široke in širina posamezne proge se ujema z dolžino igle. Kolikšna je verjetnost, da bo igla v celoti ležala na modri progi?

3. Iz posode, v kateri so tri zelene in tri rdeče kroglice, na slepo vlečemo kroglice drugo za drugo brez vračanja, dokler ne izvlečemo dveh kroglic različnih barv. Slučajna spremenljivka X naj predstavlja število izvlečenih kroglic. Zapišite njeno porazdelitev.

4. Iz neke sadike lahko zraste rastlina z rdečim ali rumenim cvetom. Verjetnost, da zraste rastlina z rdečim cvetom, je 60%. Najmanj koliko sadik moramo posaditi, če naj bo verjetnost, da delež rastlin z rdečim cvetom znaša med 58 in 62 odstotki, najmanj 99%?

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

17. januar 2008

1. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni, pri čemer je X porazdeljena enakomerno na intervalu $[0, 1]$, Y pa ima gostoto, podano po predpisu:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+y)^2} & ; y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   Izračunajte $P(Y > X^2)$.

2. Za okroglo mizo posedemo štiri zakonske pare, pri čemer možje in žene sedijo izmenoma. Vse take porazdelitve so enako verjetne. Naj bo S število parov, pri katerih mož in žena sedita skupaj. Izračunajte $E(S)$ in $\mathrm{var}(S)$.

   Namig: Slučajno spremenljivko S zapišite kot vsoto.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, \ldots X_{100}$ so neodvisne in porazdeljene enakomerno na intervalu $[-1, 1]$. Označimo z

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$$

   njihovo povprečje. Približno izračunajte verjetnost dogodka, da je $|\bar{X}| > 1/10$.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$52,\ 54,\ 55,\ 49,\ 51,\ 53,\ 52,\ 51$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}01$ testirajte hipotezo, da je $\mu = 50$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu > 50$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

IŠRM

14. februar 2008

1. Andraž, Barbara, Cvetka in Dušan drug za drugim vlečejo karte iz dobro premešanega kupa 16 kart, dokler ne izvlečejo enega izmed dveh črnih asov, ki sta notri. Najprej vleče Andraž, nato Barbara, nato Cvetka, nato Dušan, nato spet Andraž in tako naprej.

   a) Kolikšna je verjetnost, da črnega asa izvleče Andraž?

   b) Recimo, da je Andraž izvlekel črnega asa. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bila to prva izvlečena karta?

2. Janez želi opraviti neko delo, ki bi mu vzelo slučajno mnogo časa, in sicer je ta čas v urah porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^2} & ; \, t > 1 \\ 0 & ; \, \text{sicer} \end{cases} .$$

   Janez začne delati in če po dveh urah še ne opravi polovice dela (privzamemo, da dela z enakomerno hitrostjo), obupa in neha delati, sicer pa opravi delo do konca. Označimo s T količino časa, ki ga je Janez porabil za delo. Izračunajte $E(T)$ in $\mathrm{var}(T)$.

3. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, pri čemer je X porazdeljena normalno $\mathrm{N}(0, 6)$, Y pa binomsko $\mathrm{Bin}(400, 0\text{'}8)$. Približno izračunajte $P(X + Y > 335)$.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$51,\ 53,\ 49,\ 50,\ 48,\ 54,\ 53,\ 50\,.$$

   Poiščite 99% interval zaupanja za μ.

Izpit iz verjetnosti in statistike

IŠRM

8. julij 2008

1. Raztreseni Pepček mora odposlati tri različna pisma na tri različne naslove. Pisma daje v ovojnice z že napisanimi naslovi. Pri vsakem pismu je z verjetnostjo 10% nezbran in ga vloži na slepo v eno izmed še praznih ovojnic (lahko torej tudi v pravo). Z verjetnostjo 90% pa je zbran in pismo vloži v pravo ovojnico, če je le-ta še prazna (sicer pa odkrije napako).

   a) Kolikšna je verjetnost, da Pepček vsa pisma vloži v prave ovojnice?

   b) Recimo, da je Pepček katero od pisem vložil v napačno ovojnico. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je *prvo* pismo vložil v napačno ovojnico?

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c}{(1+x)^3} & ; x > y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Določite konstanto c in izračunajte $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

3. Naj bodo $X_1, X_2, \ldots X_{500}$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene zvezno z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\big(\ln(1{\cdot}1) - \ln(0{\cdot}9)\big)} & ; 0{\cdot}9 < x < 1{\cdot}1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Ocenite verjetnost, da bo njihov produkt večji od 1.

   Namig: uporabite primerno transformacijo.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$64,\ 66,\ 67,\ 66,\ 70,\ 63,\ 65,\ 69,\ 64\,.$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}01$ testirajte ničelno hipotezo, da je $\mu = 64$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu > 64$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

IŠRM

4. september 2008

1. Najprej imamo tri različne garniture po šest enakih kozarcev, nato pa vsak kozarec razbijemo z verjetnostjo 30%, neodvisno od drugih kozarcev.

   a) Kolikšna je verjetnost, da imamo potem na voljo vsaj še pet enakih kozarcev?

   b) Recimo, da imamo res na voljo vsaj še pet enakih kozarcev. Kolikšna je pogojna verjetnost, da smo razbili največ tri kozarce?

2. Andraž ima do nekega cilja na voljo dve avtobusni progi. Prva vozi na 10 minut in ima čas vožnje 25 minut, druga pa na 15 minut in ima čas vožnje 20 minut. Privzamemo, da sta progi neodvisni.

   a) Kolikšna je verjetnost, da Andraž pride s prvo progo prej kot z drugo?

   b) Naj bo T razlika med časoma, ki ju Andraž porabi za potovanje s posamezno progo (čas s prvo progo minus čas z drugo progo). Izračunajte $E(T)$ in $\mathrm{var}(T)$.

3. Najprej 225-krat vržemo kovanec po en evro, potem pa še 100-krat kovanec po dva evra. Oba kovanca sta poštena in posamezni meti so neodvisni. Naj bo S vsota vseh cifer, ki so padle. Približno izračunajte $P(S > 225)$.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

   $$51,\ 53,\ 49,\ 50,\ 48,\ 54,\ 53,\ 50$$

   Poiščite 99% interval zaupanja za σ.

2006/07

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

21. november 2006

1. Za okroglo mizo posedemo tri zakonske pare. Kolikšna je verjetnost, da pri vseh treh mož in žena sedita skupaj, če:

   a) pare posedemo povsem slučajno, t. j. vse razporeditve so enako verjetne?

   b) moške in ženske posedemo izmenoma (in so vse take razporeditve spet enako verjetne)?

2. Primož in Renata se ob istem času odpravita na kraj zmenka. Primož ima do tja pet, Renata pa štiri minute hoda. Vsak od njiju ima na poti semafor, na katerem tri minute gori rdeča, dve minuti pa zelena luč. Semaforja sta med seboj neodvisna, drugih ovir na poti ni.

   a) Kolikšna je verjetnost, da pride Renata pred Primožem?

   b) Recimo, da je Renata res prišla pred Primožem. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je vsaj nekaj časa čakala pred semaforjem?

3. Loterija načrtuje igro na srečo, pri kateri so dogodki, da je posamezna srečka dobitna, neodvisni. Največ kolikšna sme biti verjetnost, da je posamezna srečka dobitna, če naj bo verjetnost, da med milijon srečkami ni nobene dobitne, vsaj 8-krat tolikšna kot verjetnost, da sta med milijon srečkami natanko dve dobitni?

4. Slučajno izberemo realno število med 0 in 1. Če je manjše od $1/2$, mu prištejemo $1/4$, sicer pa ga pustimo nespremenjenega. Dobljeno število označimo z X. Narišite grafa porazdelitvene funkcije in porazdelitvene gostote slučajne spremenljivke X.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

IŠRM

17. januar 2007

1. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni enakomerno na intervalu $[1, 2]$. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z = XY$.

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni standardizirano normalno. Izračunajte $K\big(e^X, e^{X+Y}\big)$.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, \ldots X_{100}$ so neodvisne in porazdeljene diskretno po naslednji shemi:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0\dot{}2 & 0\dot{}7 & 0\dot{}1 \end{pmatrix}$$
Označimo z $\bar{X}$ njihovo povprečje:
$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_{100}}{100}$$
Določite število m, za katerega bo približno veljalo $P(\bar{X} \le m) = 0\dot{}95$.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:
$$5\dot{}1,\ 5\dot{}3,\ 4\dot{}9,\ 5\dot{}0,\ 4\dot{}8,\ 5\dot{}4,\ 5\dot{}3,\ 5\dot{}0$$
Poiščite 99% interval zaupanja za μ.

Izpit iz verjetnosti in statistike

IŠRM

26. januar 2007

1. Kontrolor iz serije vzame vzorec 100 izdelkov in serijo izloči, če je v vzorcu več kot 40 drugorazrednih izdelkov. Največ kolikšna sme biti verjetnost, da je posamezen izdelek drugorazreden, če naj bo verjetnost, da kontrolor serijo zavrne, manj kot 5%?

2. V dobro premešanem kupu osmih kart so štiri rdeče in štiri črne. Karte drugo za drugo in brez vračanja vlečemo s kupa, dokler ne izvlečemo dveh rdečih. Število izvlečenih kart označimo z X. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke ter izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

3. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, porazdeljeni eksponentno Exp(1), t. j.:
$$p_X(x) = p_Y(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$
Izračunajte $P(X > 1 \mid X + Y > 1)$.

4. Pri nekem tekmovanju so dijaki prve šole dosegli naslednje rezultate:
$$75,\ 81,\ 93,\ 80,\ 66,\ 99,\ 87,\ 88,\ 72,\ 89$$
dijaki druge šole pa naslednje:
$$68,\ 53,\ 72,\ 88,\ 71,\ 68,\ 77$$
Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{'}05$ testirajte hipotezo, da so dijaki obeh šol enako dobri, proti alternativni hipotezi, da niso.

Izpit iz verjetnosti in statistike

IŠRM

9. februar 2007

1. Karte za tarok sestavlja 8 pikov, 8 križev, 8 src, 8 kar in 22 tarokov. 48 kart dobijo igralci, preostalih 6 kart pa sestavlja talon. Kolikšna je verjetnost, da so v talonu zastopane vse štiri barve (t. j. pik, križ, srce in karo)?

2. Jože gre z avtobusom na obisk. Na voljo ima dve progi. Prva vozi vsakih 7 minut, druga pa vsakih 10 minut. Privzamemo, da je čas prihoda avtobusa posamezne proge slučajen in porazdeljen enakomerno ter da sta progi med seboj neodvisni. Če gre Jože na avtobus prve proge, od trenutka, ko stopi na avtobus, potrebuje do cilja še 30 minut, če gre na drugo progo, pa še 35 minut.

   Ko Jože pride na postajo, stopi na prvi avtobus, ki pride. Slučajna spremenljivka T naj predstavlja čas, ki preteče od prihoda na postajo do prihoda na cilj. Izračunajte $E(T)$.

3. Slučajna spremenljivka N je porazdeljena po Poissonu Pois(2500). Približno izračunajte $P(N < 2400)$.

   Namig: porazdelitev slučajne spremenljivke N aproksimirajte z ustrezno normalno porazdelitvijo. Zakaj je to smiselno?

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, 10)$, dajo naslednje vrednosti:

   $$75,\ 81,\ 93,\ 80,\ 66,\ 99,\ 87,\ 88,\ 72,\ 89$$

   Določite stopnjo zaupanja, pri kateri bo imel ustrezni interval zaupanja za μ dolžino 10.

Izpit iz verjetnosti in statistike

IŠRM

12. september 2007

1. Razbojniki se skrivajo v enem izmed treh skrivališč: v prvem z verjetnostjo 0˙3, v drugem z verjetnostjo 0˙2 in v tretjem z verjetnostjo 0˙5. Če so v prvem skrivališču, jih vohuni odkrijejo z verjetnostjo 0˙6, če so v drugem, z verjetnostjo 0˙8 in če so v tretjem, z verjetnostjo 0˙3. Če jih vohuni odkrijejo, naznanijo to žandarjem, ki gredo naslednji dan v akcijo. Toda ponoči se razbojniki lahko umaknejo na drugo lokacijo, in sicer iz prvega skrivališča z verjetnostjo 0˙5, iz drugega z verjetnostjo 0˙4 in iz tretjega z verjetnostjo 0˙9, neodvisno od tega, ali so jih vohuni odkrili ali ne.

   Recimo, da so vohuni odkrili razbojnike. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bodo žandarji razbojnike naslednji dan ujeli v skrivališču, ki so ga izdali vohuni?

2. Marta se ob 11:30 z avtom odpravi na urad, do katerega ima 27 minut vožnje. Toda vmes je cestna zapora s semaforjem, na katerem 5 minut gori rdeča, 2 minuti pa zelena luč. Drugih ovir na poti ni. Točno opoldne se urad za eno uro zapre.

   Označimo s T čas v minutah, ki je minil od Martinega odhoda od doma do trenutka, ko je vstopila v urad. Izračunajte $E(T)$.

3. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, porazdeljeni zvezno z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := X + Y$.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$51,\ 53,\ 49,\ 50,\ 48,\ 54,\ 53,\ 50$$

   Poiščite 99% interval zaupanja za σ.

2005/06

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij (2. letnik)
30. november 2005

1. Pri igri Najšibkejši člen so ostali še štirje igralci, ki morajo izločiti enega izmed njih. Denimo, da vsak izmed njih na slepo in neodvisno od drugih glasuje za izločitev enega izmed preostalih treh soigralcev. Izločen je igralec, ki dobi največ glasov, v primeru izenačenja pa odloča najmočnejši člen.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bo izločen prav najmočnejši člen?

   b) Recimo, da je bil izločen najmočnejši člen. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bil izločen s tremi glasovi?

   Namig: Pazite na primer, ko pride do izenačenja.

2. V pošiljki je 100 izdelkov in za vsakega je verjetnost, da bo prvovrsten, enaka p. Najmanj kolikšna mora biti ta verjetnost, če naj bo delež prvovrstnih izdelkov v pošiljki s 95% verjetnostjo večji od $\frac{9}{10}p$?

3. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} c\,(e^{-x} - e^{-3x}) & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$$

   Izračunajte konstanto c in še $P(1 < X < 3)$.

4. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen po naslednji shemi:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	0'04	0'04	0'02
$X = 1$			0'06
$X = 2$			

   a) Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

   b) Poiščite robni porazdelitvi (t. j. porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y) ter porazdelitev vsote $X + Y$.

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij (3. letnik)
30. november 2005

1. V posodi je 5 belih in 3 črne kroglice. Dva igralca izmenično vlečeta po eno kroglico iz posode. Kroglic ne vračata. Zmaga tisti, ki prvi povleče belo kroglico.
   Kolikšna je verjetnost, da zmaga igralec, ki je prvi začel?

2. Top dvakrat ustreli na letalo. Strela sta med sabo neodvisna. Ni nujno, da posamezen zadetek sestreli letalo. Vemo naslednje:

   Verjetnosti, da 1. in 2. strel zadene letalo, sta (po vrsti) 0˙4 in 0˙7.
   Verjetnosti, da 1. in 2. zadetek sestreli letalo, sta 0˙2 in 1.
   Letalo je sestreljeno.

   Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bilo letalo zadeto natanko enkrat?

3. Verjetnost, da študent naredi izpit, naj bo p. Na izpit se je prijavilo 200 študentov. Če hočemo zagotoviti, da bo z verjetnostjo 95% vsaj 50 študentov naredilo izpit, koliko mora biti p?

4. Na intervalu (a, b) izberemo dve točki neodvisno drugo od druge. Slučajna spremenljivka R naj bo razdalja med njima.
   Določite in narišite njeno porazdelitveno funkcijo ter gostoto.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij (2. letnik)
16. januar 2006

1. Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana s tabelo:

	$X = 0$	$X = 2$	$X = \lambda$
$Y = -1$	0˙1	0˙2	0˙05
$Y = 0$	0˙15	0˙1	0˙1
$Y = 4$	0˙15	0	0˙15

   Določite parameter λ, tako da bosta slučajni spremenljivki X ter Y nekorelirani. Za ta primer preverite, ali sta tedaj tudi neodvisni, ter izračunajte še standardni odklon (deviacijo) spremenljivk X in Y.

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4}{(1 + x + y)^3} & ; 0 \leq x \leq 1, y \geq 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   a) Določite robni gostoti p_X in p_Y.
   b) Izračunajte pogojno matematično upanje $E(Y \mid X = x)$.

3. Tisočkrat vržemo kovanec. Najmanj in največ kolikokrat moramo vreči grb, da bo imel 90% interval zaupanja za verjetnost, da pade grb, dolžino vsaj 0˙04?

4. V neki deželi na volitvah tekmujejo tri stranke, A, B in C. Rezultati javnomnenjske raziskave, ki upošteva tudi izobrazbo volilcev, so naslednji:

Izobrazba	A	B	C
Osnovna	28	40	31
Srednja	32	34	39
Višja/visoka	44	34	18

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙05$ testirajte hipotezo, da se volilci odločajo ne glede na izobrazbo.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij (3. letnik)
16. januar 2006

1. Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana s tabelo:

	$X = 0$	$X = 2$	$X = \lambda$
$Y = -1$	0'1	0'3	0'1
$Y = \lambda$	0'2	0'1	0'2

Določite parameter λ, tako da bosta slučajni spremenljivki X in Y nekorelirani. Ali sta tedaj tudi neodvisni?

2. Naj bosta X in Y neodvisni zvezni slučajni spremenljivki. Gostota za X je podana s formulo:

$$p_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{za } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases},$$

slučajna spremenljivka Y pa je porazdeljena standardno normalno $Y \sim \mathrm{N}(0, 1)$. Izračunajte pričakovano vrednost (matematično upanje) in varianco slučajne spremenljivke $Z := e^X(Y + 1)$.

Namig: Ne poskušajte izračunati gostote za Z, ampak upoštevajte neodvisnost.

3. Vzorec, vzet iz populacije, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, 5)$, nam da:

$$123,\ 234,\ 345,\ 456,\ 567,\ 678,\ 789,\ 890,\ 901\,.$$

Kolikšna mora biti stopnja zaupanja, da bo imel interval zaupanja za μ dolžino vsaj 10? Za koliko se spremeni rezultat, če v vzorcu vrednost 901 zamenjamo s 109?

4. Štirje prijatelji A,B,C in D igrajo tarok. Ko končajo, je rezultat naslednji:

A	B	C	D
25	25	0	0
85	25	60	0
85	25	50	-10
85	55	50	20
100	70	50	20
180	70	130	20

Pišejo se vedno sprotni rezultati, tako da je npr. igralec A v zadnji igri priigral 80 točk.

Igralec D trdi, da igra enako dobro kot A (torej, da v povprečju dosega enako število pik na igro), le da je tokrat A imel srečo. Ali lahko na podlagi teh rezultatov pri stopnji značilnosti $\alpha = 0'1$ zavrnemo njegovo hipotezo? Kaj pa pri $\alpha = 0'05$? Kaj pa v primeru, da enako trdi igralec B?

Navodilo: Zaradi enostavnosti predpostavite, da so vsi izidi iger neodvisni in normalno porazdeljeni. Izračunajte izide posameznih igralcev in testirajte razlike ustreznih povprečij.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij (2. letnik)
25. januar 2006

1. Loterijska srečka ima 20 pokritih polj, na katerih so zapisani različni zneski. Na treh poljih je zapisan znesek 1000 donarjev, na petih poljih znesek 20 donarjev, na preostalih 12 poljih pa znesek 1 donar. Vse možne razporeditve zneskov so enako verjetne. Igralec odkrije tri polja. Srečka je dobitna, če je na vseh treh odkritih poljih enak znesek; le-ta tudi predstavlja dobitek srečke.

   a) Označimo z X dobitek srečke (če srečka ni dobitna, pa naj bo $X = 0$). Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

   b) Izračunajte $E(X)$ in $\sigma(X)$.

   c) Recimo, da je srečka dobitna. Izračunajte pogojno verjetnost, da je dobitek večji od enega donarja.

2. Verjetnost, da se poskus izide, je 20%. Poskus ponavljamo, dokler se ne izide 40-krat. Kolikšna je verjetnost, da bomo morali opraviti več kot 210 poskusov?

3. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, ki sta enakomerno porazdeljeni na $[0, 1]$, t. j. imata gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   Izračunajte $\mathrm{var}(X^2Y + XY^2)$.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$75,\ 78,\ 81,\ 74,\ 77,\ 80,\ 74,\ 76,\ 78,\ 80$$

   Poiščite 99% interval zaupanja za μ.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij (3. letnik)
25. januar 2006

1. CIA izve, da se dva terorista skrivata na petih možnih lokacijah, vendar zagotovo ne skupaj. Vse možne razporeditve po lokacijah so enako verjetne. Verjetnost, da se na kateri koli od teh lokacij nahajajo civilisti, je 30%, če se tam nahaja terorist, sicer pa 60%. Vojska lahko vrže eno bombo (ki ubije vse), preden terorista pobegneta in se za njima izgubi vsaka sled.

   a) Kolikšna je verjetnost, da ubijejo terorista, ne da bi pri tem ubili kakšnega civilista?

   b) Če vemo, da so med žrtvami napada civilisti, kolikšna je (pogojna) verjetnost, da so kljub temu ubili terorista?

2. Verjetnost, da se poskus izide, je 25%. Poskus ponavljamo, dokler se ne izide 100-krat. Kolikšna je verjetnost, da bomo morali opraviti več kot 420 poskusov?

3. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki. Slučajna spremenljivka Y je porazdeljena eksponentno $Y \sim \text{Exp}(1)$, X pa ima gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   a) Zapišite skupno gostoto spremenljivk X in Y.

   b) Izračunajte $P(X > Y)$.

   c) Izračunajte gostoto za vsoto $Z := X + Y$.

   d) Izračunajte $E(Z)$ in $\text{var}(Z)$. Pri tem ni nujno, da si pomagaš s točko (c).

4. Študentje so na kolokvijih dosegli naslednji uspeh:

pod 80 točk	80 – 90 točk	90 – 100	100 – 110	110 – 120	nad 120
3	5	1	17	11	5

Povprečje je bilo $\mu = 104$, standardni odklon pa je bil $\sigma = 11$.
Pri stopnjah zaupanja $\alpha = 0{\cdot}05$ in $\alpha = 0{\cdot}01$ preizkusite domnevo, da so točke porazdeljene normalno $N(\mu, \sigma)$.
Navodilo: Uporabite Pearsonov test hi kvadrat. Najprej določite hipotetično (normalno) porazdelitev po skupinah.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij (2. letnik)
6. februar 2006

1. Naključno izberemo 5 oseb.

   a) Kolikšna je verjetnost, da so vsaj tri izmed njih rojene na isti dan v tednu?

   b) Najmanj koliko oseb moramo najti, da bo opisani dogodek gotov?

2. Opišite vse pare pozitivnih števil a, b, za katere predpis

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{a + \sin x}{b} & ; 0 \leq x \leq 2\pi \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   določa gostoto zvezne slučajne spremenljivke. Kako se v tem primeru z a in b izraža njeno matematično upanje?

3. Mestna pekarna mora za zadostitev potreb prebivalcev dnevno na trg poslati 1500 štruc kruha. Iz izkušenj pa vedo, da se jih 6% ne speče, kot bi se morale, in zato ne morejo v prodajo. Koliko štruc morajo speči, da lahko z verjetnostjo 97% upajo, da jih bo dovolj za na trg?

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$113,\ 108,\ 107,\ 110,\ 115,\ 106,\ 111,\ 108,\ 112$$

   Pri stopnji značilnosti 0˙05 testirajte hipotezo, da je $\mu = 108$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu \neq 108$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij (3. letnik)
6. februar 2006

1. Najmanj koliko ljudi mora biti v skupini, da bo verjetnost, da sta vsaj dva člana skupine rojena v istem horoskopskem znamenju, večja od verjetnosti nasprotnega dogodka? Lahko privzamete, da vsi horoskopski znaki trajajo enako dolgo.

2. Opišite vse pare nenegativnih števil a, b, za katere predpis

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{a + \cos x}{b} & ; \ 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & ; \ \text{sicer} \end{cases}$$

   določa gostoto zvezne slučajne spremenljivke. Kako se v tem primeru z a in b izraža njeno matematično upanje?

3. Mestna pekarna mora za zadostitev potreb prebivalcev dnevno na trg poslati 1500 štruc kruha. Iz izkušenj pa vedo, da se jih p odstotkov ne speče, kot bi se morale, in ne morejo v prodajo. Zato dajo vsak dan speči 1600 štruc. Kolikšen odstotek slabih štruc si še lahko privoščijo, da bo bojazen, da jih ne bo dovolj za na trg, znašala največ 2%?

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, 6)$, dajo naslednje vrednosti:

$$113,\ 108,\ 107,\ 110,\ 115,\ 106,\ 111,\ 108,\ 112$$

   Pri stopnji značilnosti 0˙05 testirajte hipotezo, da je $\mu = 108$, proti alternativni hipotezi, da $\mu > 108$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
9. junij 2006

1. Pri igri Vzemi ali pusti igralec drugo za drugo odkriva škatle. V vsaki škatli je določen znesek, vsi zneski so različni. Vseh škatel je 24, igralec pa lahko odkrije vsako škatlo razen svoje. V petih škatlah so zneski milijonski (t. j. najmanj 1 milijon tolarjev) in v natanko eni izmed njih je znesek 15 milijonov. V prvi rundi igralec odkrije 6 škatel. Privzamemo, da so vse razporeditve zneskov enako verjetne.

   a) Kolikšna je verjetnost, da igralec v prvi rundi odkrije vse škatle z milijonskimi zneski?

   b) Recimo, da je igralec v prvi rundi res odkril vse škatle z milijonskimi zneski. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bilo v prvi škatli, ki jo je odkril, 15 milijonov?

2. Vržemo standardno kocko. Če padejo tri pike, vržemo še enkrat, nato končamo. Naj bo S skupno število pik, ki so padle. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke. Seveda privzamemo, da je kocka poštena, posamezni meti kocke pa med seboj neodvisni.

3. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} a + x^{-3} & ;\ 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$

   a) Določite konstanto a, tako da bo to res gostota neka porazdelitve.

   b) Izračunajte $P(X < 2)$ in $E(X)$.

4. V neki javnomnenjski anketi so anketirance spraševali, katero izmed treh strank podpirajo. Rezultati po starostnih skupinah so naslednji:

	A	B	C
< 40	75	61	37
40–60	56	82	41
> 60	34	63	52

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{'}05$ testirajte hipotezo, da je podpora strankam neodvisna od starosti.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij, 2. letnik
12. september 2006

1. Letalska družba ima na voljo tri letala, in sicer letalo A leti od Ljubljane do Reykjavika, letali B in C pa od tam naprej do Arhangelska. Drugih povezav ni. Zaradi vremenskih razmer včasih polete odpovedo, in sicer se to zgodi letalu A pri 30% poletov, letaloma B in C pa s pogostostjo 25% oz. 20%. Odpovedi so med seboj neodvisne.

   a) S kolikšno verjetnostjo bo potnik iz Ljubljane prispel do Arhangelska?

   b) Tja vendarle ni mogel. Kolikšna je verjetnost, da je letalo B moralo ostati na tleh?

2. V semenu je 10% nekaljivih zrn. Kolikšna je verjetnost, da je med 8000 na slepo izbranimi zrni vsaj 7100 uporabnih?

3. Naj ima slučajna spremenljivka X gostoto

   $$p(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$$

   Določite gostoto slučajne spremenljivke e^X.

4. V mestu je registriranih 35 avtomobilov znamke A, 55 znamke B ter 70 znamke C. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\dot{}}01$ testirajte hipotezo, da je tržni delež znamke A v celi državi enak 20%, medtem ko znamki B in C zavzemata 35 oz. 45 odstotkov. Privzamemo, da drugih avtomobilskih znamk na trgu ni.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij, 3. letnik

12. september 2006

1. Letalska družba ima na voljo tri letala, in sicer letalo A leti od Ljubljane do Reykjavika, letali B in C pa od tam naprej do Arhangelska. Drugih povezav ni. Zaradi vremenskih razmer včasih polete odpovedo, in sicer se to zgodi letalu A pri 30% poletov, letaloma B in C pa s pogostostjo 25% oz. 20%. Odpovedi so med seboj neodvisne.

   a) S kakšno verjetnostjo bo potnik iz Ljubljane prispel do Arhangelska?

   b) Tja vendarle ni mogel. Kolikšna je verjetnost, da je letalo B moralo ostati na tleh?

   c) Družba se odloči, da bo nakupila dodatnih n letal na liniji Ljubljana-Reykjavik, za katere pričakujejo isti odstotek odpovedanih poletov kot pri letalu A. Kolikšen mora biti n, da bo potnik iz Ljubljane v Arhangelsk prispel z verjetnostjo, večjo od 0˙9?

2. Pri streljanju s topom je verjetnost zadetka 0˙03. Če ustrelimo stokrat, kolikšna je verjetnost, da smo zadeli vsaj trikrat?

3. Naj ima slučajna spremenljivka X gostoto $p(x)$. Določi gostoto slučajne spremenljivke e^X.

4. V mestu je registriranih 35 avtomobilov znamke A, 55 znamke B ter 70 znamke C. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙01$ testirajte hipotezo, da je tržni delež znamke A v celi državi enak 20%, medtem ko znamki B in C zavzemata 35 oz. 45 odstotkov. Privzamemo, da drugih avtomobilskih znamk na trgu ni.

2004/05

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
24. november 2004

1. Študent dobi na izpitu tri vprašanja in naredi izpit, če pravilno odgovori na vsaj dve vprašanji. Posamezno vprašanje se je študent naučil z verjetnostjo $1/2$, neodvisno od drugih vprašanj. Vsako vprašanje, ki se ga je naučil, na izpitu tudi zna, za vsako, ki se ga ni naučil, pa ugane pravilni odgovor z verjetnostjo 10%, neodvisno od ostalih vprašanj.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bo študent naredil izpit?

   b) Recimo, da je študent naredil izpit. Kolikšna je pogojna verjetnost, da se je naučil vsa tri vprašanja, ki jih je dobil?

2. Kolikšna mora biti verjetnost, da bo posamezen izdelek prvorazreden, če naj bo verjetnost, da bo v pošiljki 100 izdelkov vsaj 60 prvorazrednih, enaka 0˙95? Izdelki so med seboj neodvisni.

   Namig: Pazite na predznake!

3. Slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena binomsko $\mathrm{B}(3, 1/4)$, slučajna spremenljivka Y, neodvisna od X, pa po naslednji porazdelitveni shemi:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0\dot{}2 & 0\dot{}4 & 0\dot{}16 & 0\dot{}24 \end{pmatrix}$$

   Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z = (X - 1)Y$.

4. Do šole je 5 minut hoda. Janezek se odpravi od doma enkrat med 7:55 in 7:58 z enakomerno porazdelitvijo. Toda na poti do šole je še semafor, na katerem izmenoma tri minute gori rdeča, eno minuto pa zelena luč. Privzamemo, da se Janezek drži predpisov, da ni drugih ovir na poti, da je njegov odhod od doma neodvisen od semaforja in da se pouk prične ob 8:00.

   a) Izračunajte verjetnost, da je Janezek zamudil manj kot eno minuto, in verjetnost, da je zamudil manj kot štiri minute.

   b) Slučajna spremenljivka X naj predstavlja, koliko je zamudil Janezek. Zapišite njeno porazdelitveno funkcijo in gostoto.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
12. januar 2005

1. Skupna gostota slučajnih spremenljivk X in Y je podana s funkcijo:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3x & ; 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   Izračunajte kovarianco $K(X,Y)$.

2. Slučajna spremenljivka X naj ima gostoto

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{(x+2)^3} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   Določite konstanto c in vse kvartile za X.

3. Populacija X je porazdeljena diskretno po shemi:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ b & 1-2a-b & 2a \end{pmatrix}$$

   Po metodi maksimalne zanesljivosti iz vzorca

$$-1,\ 0,\ 1,\ -1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 1$$

   ocenite parametra a in b.

4. Iz populacije, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ (kjer sta oba parametra neznana), vzamemo enostavni slučajni vzorec. Dobimo:

$$-7,\ 13,\ 3,\ 4,\ -1,\ 4,\ 6$$

   Določite 95% interval zaupanja za μ.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
17. januar 2005

1. Klepetulja Maruša je točno opoldne zmenjena s kolegico Štefko. Ko se odpravi k njej, načrtuje, da bo prišla že ob 11:56. Toda na poti lahko sreča še dve drugi kolegici, Francko z verjetnostjo 1/3, Lojzko pa z verjetnostjo 1/4. Dogodka, da sreča posamezno kolegico, sta neodvisna. Če sreča Francko, jo ta zadrži od 3 do 5 minut z enakomerno porazdelitvijo, Lojzka pa jo zadrži od 3 do 6 minut, prav tako z enakomerno porazdelitvijo.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bo Maruša zamudila k Štefki?

   b) Recimo, da je Maruša zamudila. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bila srečala Francko?

2. Naj bosta X in Y neodvisni in enako porazdeljeni slučajni spremenljivki z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} 2x & ;\ 0 < x < 1 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$

   Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke $Z = X + Y$.

3. Populacija X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_X(x; a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2ax^3} & ;\ \dfrac{1}{a+1} < x < \dfrac{1}{a-1} \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$

   kjer je $a > 1$ neznan parameter. Po metodi momentov poiščite cenilko za a.

4. V ribniku živijo tri vrste rib. Ribič je ujel 5 rib prve vrste, 12 rib druge vrste in 8 rib tretje vrste. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{,}05$ testirajte hipotezo, da je v ribniku 25% rib prve vrste, 35% rib druge vrste in 40% rib tretje vrste.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
28. januar 2005

1. Dve nogometni moštvi igrata tekmo. Prvo moštvo doseže v povprečju 3 gole, drugo pa 2 gola na tekmo. Predpostavimo, da je število golov vsake ekipe porazdeljeno po Poissonu, neodvisno od nasprotnika (torej je število golov prve ekipe $X_1 \sim \text{Pois}(3)$ in druge $X_2 \sim \text{Pois}(2)$).

   a) Kolikšna je verjetnost, da bo izid na koncu izenačen in nobeno od moštev ne doseže več kot pet golov?

   b) Privzemimo, da so bili doseženi natanko trije goli. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je zmagala prva ekipa?

2. Moštvi iz prve naloge igrata podaljšek do prvega gola (brez časovne omejitve). Čas, ki ga posamezno moštvo potrebuje, da doseže gol, je porazdeljen eksponentno in neodvisno od nasprotnika (torej prvo moštvo potrebuje $T_1 \sim \text{Exp}(3/90) = \text{Exp}(1/30)$ minut, drugo pa $T_2 \sim \text{Exp}(1/45)$ minut).

   a) Kolikšna je verjetnost, da zmaga prvo moštvo?

   b) Kolikšna je verjetnost, da po 30 minutah igre še ni gola?

3. Dana je gostota slučajne spremenljivke X:

$$p_X(x) = \begin{cases} ax & ; 0 \leq x \leq b \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} ,$$

   kjer sta $a, b > 0$ neznana parametra,

   a) Poiščite zvezo med a in b, tako da bo p_X res gostota slučajne spremenljivke.

   b) Po metodi momentov poiščite cenilki za parametra a in b.

   c) Je takšna cenilka za b nepristranska? Ali je dosledna?

4. Pred volitvami so izvedli anketo, kjer so anketirance spraševali po stranki, za katero bodo volili, ter po starosti. Rezultati so predstavljeni s tabelo:

	stranka X	stranka Y	stranka Z
18-30 let	25	11	12
31-45 let	14	13	16
46-65 let	11	9	26
od 66 let naprej	13	10	32

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0'05$ testirajte domnevo, da je izbira stranke neodvisna od starosti.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
31. maj 2005

1. Asistent razdeli 12 študentom domače naloge, vsakemu eno. Domače naloge so štirih različnih tipov, tako da po trije študentje dobijo enako domačo nalogo. Študent Andrej pozna še dva kolega, Boštjana in Ceneta. Vsak od njih zna rešiti nalogo z verjetnostjo 0˙7, neodvisno od ostalih dveh. Andrej odda domačo nalogo, če jo bodisi zna rešiti sam bodisi jo prepiše od Boštjana ali Ceneta v primeru, ko kateri od njiju dobi enako nalogo in jo zna rešiti.

   a) Kolikšna je verjetnost, da Andrej odda nalogo?
   b) Recimo, da je Andrej oddal nalogo. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je rešitev prepisal?

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen po naslednji shemi:

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 2$
$X = -1$	0	0	6α
$X = 0$	0	β	0
$X = 2$	6α	0	7α

   a) Izrazite β z α.
   b) Katere vrednosti lahko zavzameta α in β?
   c) Izračunajte korelacijski koeficient $r(X, Y)$.
   d) Pri katerih vrednostih parametra α sta slučajni spremenljivki X in Y nekorelirani? Pri katerih vrednostih pa sta neodvisni?

3. V populaciji so trije različni genotipi. Delež genotipa AA je p^2, delež genotipa AB je $2p(1-p)$, delež genotipa BB pa $(1-p)^2$, kjer je p neznan parameter. V vzorcu, ki ga vzamemo, je 5 osebkov tipa AA, 12 osebkov tipa AB in 8 osebkov tipa BB. Po metodi maksimalne zanesljivosti ocenite parameter p.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$58,\ 57,\ 61,\ 60,\ 58,\ 59,\ 59,\ 61,\ 56,\ 61$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙05$ testirajte hipotezo, da je $\mu = 60$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu < 60$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
8. september 2005

1. Aleš in Blaž jemljeta karte iz dobro premešanega kupa 16 kart. V kupu so po štirje asi, kralji, dame in fanti. Najprej Aleš vzame eno karto z vrha kupa. A če izvleče fanta, hitro, ne da bi Blaž opazil, vzame še naslednjo karto, fanta pa vrne na vrh kupa. Tako pridobljeno karto obdrži.

   a) Kolikšna je verjetnost, da ima Aleš v rokah fanta?

   b) Blaž vzame karto z vrha kupa preostalih 15 kart. Kolikšna je verjetnost, da je to fant?

   c) Recimo, da je Blaž dobil fanta. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bil tega fanta sprva izvlekel Aleš?

2. Zvezno porazdeljen slučajni vektor (X, Y) ima porazdelitveno gostoto, podano po predpisu:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^5} & ; x > y > 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   a) Izračunajte konstanto c.

   b) Zapišite porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y (t. j. robni porazdelitvi).

   c) Izračunajte $E(XY)$.

3. Iz populacije, porazdeljena diskretno po shemi:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ a & 2a & b & 1 - 3a - b \end{pmatrix}$$

   kjer sta a in b neznana parametra, vzamemo vzorec. Dobimo:

$$A, B, A, B, B, A, C, D, D, B$$

   Po metodi maksimalne zanesljivosti ocenite parametra a in b.

4. Iz populacije, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ (kjer sta oba parametra neznana), vzamemo enostavni slučajni vzorec. Dobimo:

$$52,\ 50,\ 48,\ 51,\ 49,\ 46,\ 49,\ 51,\ 53,\ 46$$

   Določite 99% interval zaupanja za μ.

2003/04

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
14. november 2003

1. Avtobus pripelje na postajo enkrat med 7:00 in 7:10, in sicer z enakomerno porazdelitvijo. Tudi sam pridem na postajo slučajno med 7:00 in 7:10 z enakomerno porazdelitvijo. Recimo, da ujamem avtobus. Kolikšna je pogojna verjetnost, da sem prišel na postajo pred 7:05?

2. Andrej, Blaž in Ciril neodvisno drug od drugega vsak po enkrat ustrelijo v tarčo. Andrej in Blaž zadeneta z verjetnostjo p, Ciril pa z verjetnostjo 0˙6. Naj bo A dogodek, da je Andrej zadel, D pa dogodek, da sta zadela natanko dva. Pri katerih p sta A in D neodvisna?

3. Verjetnost, da bo posamezen izdelek prvovrsten, je 30%. Najmanj kolikšna naj bo velikost pošiljke, če želimo z 99% verjetnostjo zagotoviti, da bo v pošiljki vsaj 29% izdelkov prvovrstnih?

4. Slučajna spremenljivka X ima porazdelitveno funkcijo, podano po predpisu:

$$F_X(x) = e^{-e^{-x}}$$

   Izračunajte porazdelitveno gostoto $p_Y(y)$ slučajne spremenljivke $Y := e^{-X}$.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
13. januar 2004

1. Dani sta neodvisni zvezno porazdeljeni slučajni spremenljivki z gostotama:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} \qquad p_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & ; y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   Določite porazdelitev slučajnega vektorja $Z := Y - \sqrt{X}$.

2. Slučajni vektor (X, Y) ima naslednjo porazdelitveno tabelo:

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = -1$	$\frac{1}{6} - \frac{t^2}{18}$	$\frac{t}{9}$	$\frac{t^2}{18} - \frac{t}{9} + \frac{1}{6}$
$X = 0$	$\frac{t}{9}$	$\frac{1}{3} - \frac{2t}{9}$	$\frac{t}{9}$
$X = 1$	$\frac{t^2}{18} - \frac{t}{9} + \frac{1}{6}$	$\frac{t}{9}$	$\frac{1}{6} - \frac{t^2}{18}$

   a) Pri katerih t je z zgornjo tabelo res določena porazdelitev slučajnega vektorja?
   b) Za katere vrednosti t sta X in Y nekorelirani?
   c) Za katere vrednosti t sta X in Y neodvisni?

3. Populacija X je porazdeljena diskretno po naslednji shemi:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 - 2p - 3q & 2q & q & 2p \end{pmatrix}$$

   kjer sta p in q neznana parametra.

   a) Po metodi momentov poiščite cenilki za p in q.
   b) Ocenite p in q iz vzorca:

   1, 1, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 1

4. Dani sta dve populaciji, porazdeljeni normalno $N(\mu_1, \sigma)$ in $N(\mu_2, \sigma)$. Iz vsake vzamemo enostaven slučajni vzorec, pri čemer sta vzorca neodvisna drug od drugega. V prvem vzorcu dobimo naslednje vrednosti:

   105, 97, 92, 104, 97, 99, 102, 104

   v drugem pa:

   89, 98, 90, 95, 98

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ testirajte hipotezo, da je $\mu_1 = \mu_2$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu_1 \neq \mu_2$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
19. januar 2004

1. Najprej smo imeli pet različnih parov nogavic. Nato pa se nam jih je nekaj izgubilo: vsaka posamezna nogavica se je izgubila z verjetnostjo 0˙1, neodvisno od ostalih. Kolikšna je verjetnost, da nam potem ostanejo vsaj še štirje celi pari?

2. Slučajni vektor (X, Y) ima porazdelitveno gostoto, podano po predpisu:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{x} & ; 3x > y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   - Poimenujte porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := Y/X$.
   - Izračunajte še $E(Z)$ in $\mathrm{var}(Z)$.

3. Statistična spremenljivka X ima zvezno porazdelitev z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha - 1)}{x(1 + \ln x)^\alpha} & ; x > 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   - Po metodi maksimalne zanesljivosti poiščite cenilko za α.
   - Ocenite α iz vzorca:

   1˙5, 2˙4, 2˙1, 1˙7, 1˙8

4. Meritve slučajnih količin X in Y dajo naslednje vrednosti:

X	1	2	3	3	4	5
Y	5	4	7	6	6	8

   Z linearno regresijo napovejte vrednost količine Y pri $X = 10$ in poiščite dvostranski 95% interval zaupanja.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
30. januar 2004

1. Štirje študentje prespijo izpit in se naslednji dan izgovorijo pri profesorju, da niso mogli priti pravočasno, ker jim je na poti počila guma na avtu. Profesor se jih usmili z dodatnim izpitom, ki je sestavljen iz dveh delov. Prvi del, vreden 60% celotne ocene, je sestavljen iz štirih nalog, drugi del izpita pa obsega le vprašanje 'Katera guma je počila?' in prinese 40% ocene. Vsak študent reši posamezno nalogo iz prvega dela izpita z verjetnostjo 20% in seveda neodvisno od preostalih treh študentov. Pri tem si drugi del ocene (40%) prislužijo le, če vsi odgovorijo na vprašanje enako. Kolikšna je verjetnost, da bodo vsi štirje študenti naredili izpit (da bo vsak zbral vsaj 50%)?

2. Dani sta neodvisni zvezni slučajni spremenljivki X in Y, porazdeljeni enakomerno na intervalu $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Določi porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := X + 2Y$.

3. Zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka X ima gostoto verjetnosti, podano po predpisu

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{a^2} & ; 0 < x < a \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

kjer je $a > 0$ neznan parameter.

   a) Po metodi momentov poiščite cenilko za a.
   b) Ali je cenilka nepristranska?
   c) Izračunajte varianco cenilke.

4. Na neki internetni strani je 1990 ljudi glasovalo, kateri film bo letos najverjetneje dobil Oskarja. Anketirance so razdelili v tri razrede glede na starost. Rezultati ankete so naslednji:

	do 20	od 20 do 40	nad 40
Gospodar prstanov	350	250	180
Skrivnostna reka	80	100	100
Seabiscuit	70	90	130
Zgubljeno s prevodom	50	80	110
Gospodar in bojevnik	200	150	50

S testom hi kvadrat preizkusite domnevo, da je mnenje o letošnjih Oskarjih neodvisno od starosti. Stopnja značilnosti naj bo 0'05.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
1. junij 2004

1. Franc, Jože in Miha pri štehvanju poskušajo zbiti sodec z droga. Vsak poskusi enkrat, a le če ni pred njim že kdo drug zbil sodca. Vrstni red žrebajo. V posameznem poskusu Franc zbije sodec z verjetnostjo 0˙3, Jože z verjetnostjo 0˙4, Miha pa z verjetnostjo 0˙25.

   a) Kolikšna je verjetnost, da jim bo uspelo zbiti sodec in da bo Jože tisti, ki mu bo uspelo?

   b) Recimo, da jim je uspelo zbiti sodec. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je to uspelo Jožetu?

2. Slučajni vektor (X, Y) ima porazdelitveno gostoto, podano po predpisu:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cx & ; 0 < y < x < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   - Izračunajte konstanto c in določite robni porazdelitvi.
   - Izračunajte še $\mathrm{var}(X + Y)$.

3. Statistična spremenljivka X ima zvezno porazdelitev z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} 3\lambda x^2 \, e^{-\lambda x^3} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   - Po metodi maksimalne zanesljivosti poiščite cenilko za λ.
   - Ocenite λ iz vzorca:

     9, 12, 13, 12, 14

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

   73, 75, 69, 78, 73, 74, 76, 70, 69

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙05$ testirajte hipotezo, da je $\sigma = 2$, proti alternativni hipotezi, da je $\sigma > 2$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
9. september 2004

1. Marko ima pet kovancev, izmed katerih ima eden cifro na obeh straneh, dva imata grb na obeh straneh, dva kovanca pa sta poštena. Marko naključno izbere kovanec in ga vrže.

   a) Kakšna je verjetnost, da bo padel grb kovanca?

   b) Padel je grb. Kolikšna je verjetnost, da je na drugi strani kovanca tudi grb?

   c) Marko ponovno vrže isti kovanec. Kolikšna je verjetnost, da bo zopet padel grb?

2. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki, porazdeljeni eksponentno s parametrom 1. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := \max\{X, Y\}$ ter pokažite, da ima enako porazdelitev kot slučajna spremenljivka $V := X + \frac{1}{2}Y$.

3. Populacija X je porazdeljena po naslednjem predpisu:

$$P(X = k) = \frac{1-q}{q} q^k, \qquad k \in \mathbb{N}$$

   kjer je $0 < q < 1$ neznan parameter. Po metodi momentov in metodi maksimalne zanesljivosti določite cenilki za parameter q.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $N(\mu, 2)$, dajo naslednje vrednosti:

$$99,\ 97,\ 100,\ 93,\ 97,\ 101,\ 94,\ 104$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}05$ testirajte hipotezo, da je $\mu = 100$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu < 100$.

2002/03

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
19. november 2002

1. V prvi posodi so 4 bele in 6 črnih kroglic, v drugi je 5 belih in 5 rdečih, v tretji pa 6 belih in 4 črne. Na slepo izberemo eno posodo in iz nje prav tako na slepo in brez vračanja potegnemo dve kroglici.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bosta obe beli?

   b) Recimo, da smo res potegnili dve beli kroglici. Kolikšna je pogojna verjetnost, da smo vlekli iz posode, v kateri je bilo 6 belih in 4 črne kroglice?

2. Dve ladji bosta na določen dan pripluli v neko pristanišče. Pripluli bosta neodvisno in ob enakomerno porazdeljenem slučajnem času – med 0:00 in 24:00. Vsaka od njiju bo v pristanišču ostala dve uri. Kolikšna je verjetnost, da bosta obe hkrati v pristanišču?

3. Verjetnost, da bo izdelek prvovrsten, je 30%. Najmanj koliko neodvisnih izdelkov moramo vzeti, če naj bo verjetnost, da je prvovrstnih izdelkov med 29% in 31%, vsaj 99%?

4. Število nevtrinov, ki jih detektor zazna v časovnem intervalu dolžine t, je porazdeljeno po Poissonu $\mathrm{Pois}(t/2)$. Naj bo T_3 slučajna spremenljivka, ki predstavlja čas, ki je potreben, da zaznamo tri nevtrine.

   a) Zapišite porazdelitveno funkcijo in porazdelitveno gostoto slučajne spremenljivke T_3.

      Namig: Dogodek, da je $T_3 < t$, zapišite kot dogodek, ki opisuje število nevtrinov, zaznanih v časovnem intervalu od 0 do t.

   b) Poimenujte njeno porazdelitev in določite vse potrebne parametre.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
14. januar 2003

1. Dani sta neodvisni zvezno porazdeljeni slučajni spremenljivki z gostotama:

$$p_X(x) = \begin{cases} e^x & ; x < 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} \qquad p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\, e^{-\sqrt{y}} & ; y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   a) Določite porazdelitev slučajnega vektorja $Z := \frac{1}{2}\big(\sqrt{Y} - X\big)$.

   b) Izračunajte $E(e^Z)$.

2. Dani sta neodvisni slučajni spremenljivki X in Y. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena geometrijsko G(1/3), slučajna spremenljivka Y pa po Poissonu Pois(1/3). Izračunajte $P(X > Y \mid X + Y = 4)$.

3. Diskretno porazdeljena populacija je porazdeljena po naslednji shemi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3}a & \frac{2}{3}a & \frac{1}{3}(1-a) & \frac{2}{3}(1-a) \end{pmatrix}$$

   kjer je $0 < a < 1$ neznan parameter. Po metodi maksimalne zanesljivosti ga ocenite iz vzorca:

$$1, 2, 1, 3, 3, 4, 2, 4, 3, 1$$

4. Na neki šoli so bili učenci pri določenem predmetu ocenjeni tako, kot kaže naslednja tabela:

	deklice	dečki
zelo uspešno	25	20
uspešno	20	15
manj uspešno	5	15

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}05$ testirajte hipotezo, da je ocena neodvisna od spola.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
27. januar 2003

1. V neki deželi barvo oči določata le dve različici istega gena: R in r. Vsak posameznik podeduje dva tovrstna gena: enega od očeta, drugega pa od matere, pri čemer so vse možnosti enako verjetne. Kdor ima vsaj en gen R, ima rjave oči, sicer pa ima modre. V populaciji je 40% genov R in 60% genov r.

   a) Kolikšna je verjetnost, da ima posameznik rjave oči, in kolikšna, da ima modre?
   b) Fant in dekle imata oba rjave oči. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo njun potomec modrook?

   Namig: Premislite, kakšne potomce ima posameznik z genotipom RR in kakšen genotip imajo lahko starši modrookega posameznika.

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:
$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{x} & ;\ x > y > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$
   Določite porazdelitev slučajne spremenljivke X in izračunajte korelacijski koeficient $r(X, Y)$.

3. Iz populacije, porazdeljene zvezno z gostoto:
$$p(x; a, s) := c(a, s)\, e^{-\left|\frac{x-a}{s}\right|}$$
   kjer sta $a \in \mathbb{R}$ in $s > 0$ neznana parametra, vzamemo enostavni slučajni vzorec.

   a) Izrazite $c(a, s)$ z a in s.
   b) Po metodi momentov poiščite par cenilk za a in s.

   Namig: Upoštevajte, da je $\int_0^\infty x^r\, e^{-x}\, dx = r!$.

4. Dani sta dve populaciji, porazdeljeni normalno $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma)$ in $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma)$. Iz vsake vzamemo enostavni slučajni vzorec, pri čemer sta vzorca neodvisna drug od drugega. V prvem vzorcu dobimo naslednje vrednosti:
$$102,\ 106,\ 109,\ 107,\ 106,\ 106$$
   v drugem pa:
$$111,\ 109,\ 109,\ 111$$
   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\dot{}}01$ testirajte hipotezo, da je $\mu_1 = \mu_2$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu_1 < \mu_2$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
10. februar 2003

1. V knjižnici je pet samih različnih knjig s področja verjetnosti. Najprej si dve od njih sposodi profesor Umnik. Čez pol leta pa si želi še profesor Modrijan izposoditi tri knjige, slučajno in neodvisno od profesorja Umnika. Vendar pa je do takrat profesor Umnik vsako knjigo vrnil le z verjetnostjo $1/3$, neodvisno od ostalih. Slučajna spremenljivka X naj predstavlja število knjig, ki si jih profesor Modrijan želi izposoditi in so na voljo. Zapišite njeno porazdelitev ter izračunajte še $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

2. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(2, 3)$, od nje neodvisna slučajna spremenljivka Y pa prav tako normalno $\mathrm{N}(3, 4)$. Izračunajte $P(X < Y)$.

3. Iz zvezno porazdeljene populacije z gostoto:

$$p(x; a) = e^{-\left(x - a + e^{-(x-a)}\right)}$$

kjer je a neznan parameter, vzamemo enostavni slučajni vzorec. Po metodi maksimalne zanesljivosti poiščite cenilko za a.

4. Iz populacije, porazdeljene normalno $N(\mu, \sigma)$, vzamemo enostavni slučajni vzorec:

$$50,\ 32,\ 34,\ 45,\ 45,\ 33,\ 39,\ 48,\ 34,\ 40$$

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\dot{}}01$ testirajte hipotezo, da je $\sigma = 5$, proti alternativni hipotezi, da je $\sigma > 5$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
4. junij 2003

1. Pacienta A in B se prideta testirat za neko bolezen. Anamneza pred testom kaže, da je verjetnost, da ima A res to bolezen, enaka 10%, verjetnost, da jo ima B, pa 25%. Ko izvedejo test, pacientu A povedo, da je izvid pozitiven. Test je sicer popolnoma zanesljiv, vendar pa so njuna vzorca z verjetnostjo 40% zamenjali. Kolikšna je pogojna verjetnost, da ima A to bolezen? Privzamemo, da so pacienta in testiranje neodvisni.

2. Dani sta neodvisni zvezno porazdeljeni slučajni spremenljivki z gostotama:

$$p_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} \qquad p_Y(y) = \begin{cases} 2y\, e^{-y^2} & ; y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   a) Določite porazdelitev slučajnega vektorja $Z := \frac{1}{2}(X + Y^2)$.

   b) Izračunajte $E(e^Z)$.

3. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z naslednjo gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x)^2}{2\sigma^2}} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   kjer je $\sigma > 0$ neznan parameter.

   a) Zapišite cenilko za σ, ki jo dobimo po metodi maksimalne zanesljivosti.

   b) Ocenite σ iz vzorca:

$$0˙7,\ 1˙2,\ 1˙5,\ 0˙9,\ 1$$

4. V enostavnem slučajnem vzorcu 100 ljudi so bili 4 rdečelasci, 10 blondincev, 50 rjavolascev in 36 črnolascev. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙01$ testirajte hipotezo, da je zastopanost barv las v populaciji naslednja:

rdeča	blond	rjava	črna
10%	20%	40%	30%

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
11. september 2003

1. Lojze in Mare se dogovorita, da gresta na pijačo. Lojze ima od doma do gostilne 5 minut hoda, vmes pa je semafor, na katerem izmenično dve minuti gori zelena, tri minute pa rdeča luč. Mare pa ima do gostilne 4 minute hoda, a z verjetnostjo 40% sreča Toneta, ki ga zadrži za natanko dve minuti. Privzamemo, da je srečanje Mareta in Toneta neodvisno od semaforja. Oba se hkrati odpravita od doma.

   a) Kolikšna je verjetnost, da Mare pride kasneje kot Lojze?

   b) Oba se hkrati odpravita od doma in Mare pride kasneje. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je na poti srečal Toneta?

2. Dani sta neodvisni in enako porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y s porazdelitveno gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\, x^{1+\ln x}} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   a) Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $U := \ln X$? Izračunajte $E(U)$ in $\operatorname{var}(U)$.

   b) Zapišite porazdelitveno gostoto slučajne spremenljivke $Z := \ln X + \ln Y$. Poimenujte njeno porazdelitev!

3. Populacija X je porazdeljena diskretno po naslednji shemi:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p & 2p & q & 3q & r \end{pmatrix}$$

   kjer so p, q in r neznani parametri.

   a) Izrazite r s p in q.

   b) Iz populacije vzamemo enostavni slučajni vzorec. Dobimo:

   3, 2, 5, 5, 5, 1, 4, 4, 2, 2

   Po metodi maksimalne zanesljivosti ocenite parametre p, q in r.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

   97, 95, 104, 91, 99, 95, 97, 91, 95

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}01$ testirajte hipotezo, da je $\mu = 100$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu < 100$.

2001/02

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij

8. november 2001

1. Od doma do avtobusne postaje je 5 minut hoda, vmes pa je semafor, na katerem dve minuti gori rdeča, dve minuti pa zelena luč. Drugih ovir na poti ni. Avtobus odpelje s postaje enkrat v triminutnem intervalu med 7:05 in 7:08 (tako da je točno ob 7:08 ravno še zadnji možni trenutek, ko lahko odpelje), in sicer z enakomerno porazdelitvijo. Kolikšna je verjetnost, da še ujamem avtobus, če se odpravim od doma točno ob 7:00 in se držim prometnih predpisov? Privzamemo, da sta odhod avtobusa in prižiganje semaforja neodvisna.

2. V posodi so tri bele in štiri črne kroglice. Najprej Albina na slepo in brez vračanja vleče kroglice, dokler ne izvleče bele. Nato pride še Barbara in na slepo izvleče še eno kroglico.

   Recimo, da je Barbara izvlekla belo kroglico. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je tudi Albina že prvič izvlekla belo kroglico?

3. Verjetnost, da je izdelek brezhiben, je 98%. Kolikšna je verjetnost, da bo med 20 izdelki vsaj 18 brezhibnih? Privzamemo, da so izdelki med seboj neodvisni.

4. Tone in Urban igrata karte. Tone dobi igro z verjetnostjo 1/3, Urban pa z verjetnostjo 2/3. Igrata, dokler eden izmed njiju skupaj ne dobi štirih iger. Naj bo T število iger, ki jih je skupaj dobil Tone. Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke T. Privzamemo, da so igre med seboj neodvisne.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
10. januar 2002

1. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z naslednjo gostoto:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\,e^{-x-y} & ;\ x > 1,\ y > 2 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$

   a) Izračunajte konstanto c.
   b) Izračunajte korelacijski koeficient $r(X, Y)$.

2. Naj bo S skupno število pik, ki padejo v 100 neodvisnih metih standardne kocke. Izračunajte $E(S)$ in $\mathrm{var}(S)$ ter z uporabo centralnega limitnega izreka ocenite $P(S < 330)$.

3. Populacija X je porazdeljena diskretno po naslednjem zakonu:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & b \end{pmatrix}$$

   a) Izrazite b z a.
   b) Katere vrednosti lahko zavzame a?
   c) Iz populacije vzamemo enostaven slučajni vzorec velikosti 100. V vzorcu se 20-krat pojavi vrednost 1, 30-krat vrednost 2 in 50-krat vrednost 3. Ocenite a po metodi maksimalne zanesljivosti.

4. Dani sta dve populaciji, porazdeljeni normalno $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma)$ in $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma)$. Iz vsake vzamemo enostaven slučajni vzorec, pri čemer sta vzorca neodvisna drug od drugega. V prvem vzorcu dobimo naslednje vrednosti:

   106, 98, 98, 98

   v drugem pa:

   97, 87, 83, 97, 87, 95, 89, 93

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ testirajte hipotezo, da je $\mu_1 = \mu_2$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu_1 \neq \mu_2$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
21. januar 2002

1. Iz posode, v kateri je 5 belih, 3 rdeče in 2 modri kroglici, na slepo in brez vračanja zapored vlečemo kroglice, dokler ne izvlečemo kroglice, ki *ni* bela. Naj bo X število izvlečenih kroglic, M pa naj bo dogodek, da je zadnja izvlečena kroglica modra.

   a) Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

   b) Izračunajte $P(M)$.

   c) Zapišite pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X glede na dogodek M, t. j. za vsak k izračunajte $P(X = k \mid M)$.

2. Naj bosta X in Y neodvisni zvezno porazdeljeni slučajni spremenljivki z gostotama:

$$p_X(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} \qquad p_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & ; y > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   kjer je $\lambda > 0$.

   a) Zapišite porazdelitveno funkcijo $F_Z(z)$ slučajne spremenljivke $Z := Y/X$.

   b) Izračunajte $E(Z)$.
   Namig: Poskusite brez uporabe točke a).

3. Meritve neke količine so razporejene na naslednji način:

Območje	< 0	0–10	10–20	20–30	> 30
Število meritev	10	15	30	25	20

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{,}05$ testirajte hipotezo, da je količina porazdeljena normalno $\mathrm{N}(15, 10)$.

4. Meritve para slučajnih količin (X, Y) dajo naslednje vrednosti:

X	1	2	2	3
Y	3	5	4	6

   Z regresijsko analizo poiščite premico $y = \alpha + \beta x$, ki se najbolje prilega danim podatkom.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
1. februar 2002

1. Alja in Blaž se hkrati odpravita do kraja zmenka. Do tam ima Alja 3 minute, Blaž pa 4 minute hoda. Vsakdo od njiju pa ima vmes semafor, na katerem dve minuti gori rdeča, dve minuti pa zelena luč. Semaforja sta neodvisna drug od drugega, drugih ovir na poti ni. Kolikšna je verjetnost, da pride Alja pred Blažem, če se oba držita predpisov?

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen po naslednji shemi:

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = -1$	$\frac{1}{4}\alpha$	$\frac{3}{20}\alpha$	$\frac{1}{10}\alpha$
$X = 0$	$\frac{1}{6}\alpha$	β	$\frac{1}{15}\alpha$
$X = 1$	$\frac{1}{12}\alpha$	$\frac{1}{20}\alpha$	$\frac{1}{30}\alpha$

   a) Izrazite β z α.
   b) Katere vrednosti lahko zavzame α?
   c) Pri katerih vrednostih parametra α sta slučajni spremenljivki X in Y nekorelirani? Pri katerih vrednostih pa sta neodvisni?

3. Populacija X je porazdeljena zvezno z naslednjo gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{c(\alpha)}{x^\alpha} & ; x > 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   kjer je $\alpha > 1$ neznan parameter.

   a) Izračunajte $c(\alpha)$.
   b) Po metodi maksimalne zanesljivosti poiščite cenilko za α.

4. Dani sta dve populaciji, porazdeljeni normalno $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma)$ in $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma)$. Iz vsake vzamemo enostaven slučajni vzorec, pri čemer sta vzorca neodvisna drug od drugega. V prvem vzorcu dobimo naslednje vrednosti:

$$114,\ 110,\ 107,\ 109,\ 110,\ 110$$

   v drugem pa:

$$105,\ 107,\ 107,\ 105$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}01$ testirajte hipotezo, da je $\mu_1 = \mu_2$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu_1 > \mu_2$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
5. junij 2002

1. Loterijski listek ima številke od 1 do 39, izmed katerih se potem izžreba 7 različnih številk. Privzamemo, da so vse možne kombinacije izžrebane z enako verjetnostjo.

   a) Na listku prekrižamo 7 številk. Kolikšna je verjetnost, da zadenemo "sedmico", t. j. da je izžrebanih vseh sedem številk? Kolikšna pa je verjetnost, da so izžrebane natanko 4 številke, ki smo jih prekrižali?

   b) Urban na svojem listku prekriža številke 1, 2, 3, 4, 5, 6 in 7, Vesna pa številke 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 9. Kolikšna je verjetnost, da bo imel vsaj eden od njiju natanko 4 izžrebane številke?

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni enakomerno na intervalu $[0, 1]$.

   a) Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := X - Y$.

   b) Izračunajte matematično upanje, varianco in asimetrijo slučajne spremenljivke Z.

3. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z naslednjo gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(\ln x - \ln a)^2} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   kjer je $a > 0$ neznan parameter.

   a) Zapišite cenilko za a, ki jo dobimo po metodi maksimalne zanesljivosti.

   b) Ocenite a iz vzorca:

   2, 2'4, 3'24, 2'5, 6'25

4. Pri 600 metih kocke smo dobili naslednje frekvence števila pik:

Število pik	1	2	3	4	5	6
Frekvenca	105	116	118	83	85	93

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0'05$ testirajte hipotezo, da je kocka poštena, t. j. da je verjetnost vsakega izida enaka 1/6.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
12. september 2002

1. Do šole je štiri minute hoda, vmes pa sta dva neodvisna semaforja. Na vsakem gori dve minuti zelena, dve minuti pa rdeča luč. Janezek, ki se zvesto drži prometnih predpisov, se je odpravil v šolo pet minut pred začetkom pouka in pravočasno prišel v šolo. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je imel na prvem semaforju rdečo luč?

2. Slučajna spremenljivka X_1 je porazdeljena binomsko $\mathrm{B}(n, p_1)$, slučajna spremenljivka X_2 binomsko $\mathrm{B}(n, p_2)$, njuna vsota pa tudi binomsko $\mathrm{B}(n, p_1 + p_2)$, kjer je n naravno število ter $0 \leq p_1, p_2 \leq 1$ in $p_1 + p_2 \leq 1$.

   a) Izračunajte $K(X_1, X_2)$ in $r(X_1, X_2)$.
      Namig: varianca.

   b) Kdaj sta X_1 in X_2 neodvisni?

3. Populacija X je porazdeljena diskretno po naslednji shemi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p & q & pq & 1 - p - q - pq \end{pmatrix}$$

   kjer sta $0 \leq p, q \leq 1$ neznana parametra. Po metodi maksimalne zanesljivosti ju ocenite na podlagi naslednjega vzorca:

   3, 2, 3, 1, 4, 4, 4

4. Meritve neke količine, ki je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

   100˙5, 99˙5, 97˙5, 100˙0, 98˙5, 99˙0, 98˙5, 99˙5, 98˙0

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙01$ dvostransko testirajte hipotezo, da je $\mu = 100$.

2000/01

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
17. november 2000

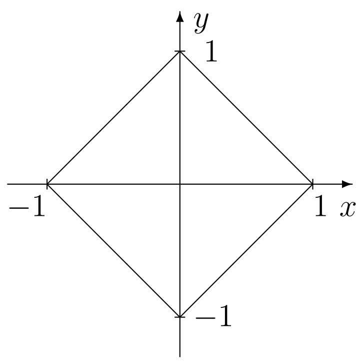
1. Motor je lahko v vročem ali hladnem stanju, kar zaznava posebno tipalo. Če je tipalo brezhibno, se obarva rdeče, če je motor v vročem stanju, in modro, če je v hladnem stanju. Če pa je tipalo pokvarjeno, se obarva slučajno in neodvisno od stanja motorja, pri čemer sta obe barvi enako verjetni. Verjetnost, da je motor v vročem stanju, je 70%, da je v hladnem, pa 30%. Poleg tega je tipalo pokvarjeno z verjetnostjo 10%, neodvisno od stanja motorja.

   Recimo, da je tipalo obarvano modro. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je motor v hladnem stanju?

2. Med zrni peska je zlato le vsako milijonto. Najmanj koliko zrn moramo prebrati, če želimo z verjetnostjo vsaj 95% najti vsaj eno zlato?

3. Iz posode, v kateri so tri rdeče, tri modre in štiri zelene kroglice, na slepo in brez vračanja vlečemo kroglice, dokler ne dobimo bodisi vseh treh rdečih bodisi vseh treh modrih. Število izvlečenih kroglic označimo z X. Zapišite porazdelitev te slučajne spremenljivke.

4. Slučajno in na slepo izberemo točko (X, Y) iz kvadrata $\{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$:



   Zapišite porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ slučajne spremenljivke X in narišite njen graf. Je X zvezno porazdeljena? Če je, zapišite še porazdelitveno gostoto $p_X(x)$ in narišite graf.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
12. januar 2001

1. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p_{X,Y}(x, y) := \begin{cases} \dfrac{c}{(1 + x + y)^4} & , \quad x, y \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

   Določite konstanto c in porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := X + Y$.

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni standardizirano normalno. Določite parameter a tako, da bosta slučajni spremenljivki $U := X + 2Y$ in $V := X + aY$ nekorelirani.

3. Populacija X je porazdeljena diskretno po naslednji shemi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \dfrac{1}{(1+p)^2} & \dfrac{p}{(1+p)^2} & \dfrac{p}{(1+p)^2} & \dfrac{p^2}{(1+p)^2} \end{pmatrix}$$

   Po metodi maksimalne zanesljivosti iz vzorca:

$$1, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 4, 2, 1$$

   ocenite neznani parameter p.

4. Meritve neke količine, ki je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$20'1,\ 20'3,\ 19'5,\ 20'0,\ 19'7,\ 19'8,\ 19'7,\ 19'9,\ 19'6$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0'01$ dvostransko testirajte hipotezo, da je $\mu = 20$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
19. januar 2001

1. Dani sta neodvisni slučajni spremenljivki X in Y. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena binomsko $\mathrm{B}(5, 1/3)$, slučajna spremenljivka Y pa po Poissonu $\mathrm{Pois}(1/2)$. Izračunajte $P(X + Y = 3 \mid X > Y)$.

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi \ln 2\,(1 + x^2 + y^2)} & , \quad x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

   Izračunajte $\mathrm{var}(X + Y)$.

   Namig: Upoštevajte simetrijo in po potrebi prištejte kako konstanto.

3. Populacija X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} c(\alpha)x^\alpha & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

   kjer je $\alpha > 0$ neznan parameter.

   a) Določite $c(\alpha)$.
   b) Po metodi maksimalne zanesljivosti poiščite cenilko za α.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

   99, 102, 101, 104, 98, 99, ,102, 101, 99, 105

   Testirajte hipotezo, da je $\sigma = 1$, proti alternativni hipotezi, da je $\sigma > 1$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
1. februar 2001

1. Operacijski sistem obvisi natanko tedaj, ko se požene program B, medtem ko že teče vsaj ena kopija programa A. Pet uporabnikov drug za drugim požene vsak en program, ki teče dalje, pri čemer posamezen uporabnik požene program A z verjetnostjo 0˙1, program B z verjetnostjo 0˙2, z verjetnostjo 0˙7 pa nobenega od teh dveh programov, in to neodvisno od drugih uporabnikov.

   a) Kolikšna je verjetnost, da sistem med delom teh petih uporabnikov obvisi?

   b) Ko sta prva dva uporabnika pognala svoja programa, sistem še ni obvisel. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo obvisel med delom preostalih treh uporabnikov?

2. Verjetnost, da bo posamezen izdelek prvovrsten, je 75%. Proizvajalec zagotavlja, da bo v pošiljki z verjetnostjo vsaj 0˙01 najmanj 74% prvovrstnih izdelkov. Izdelki v posamazni pošiljki so neodvisni. Najmanj koliko izdelkov mora biti v pošiljki?

3. Populacija X je porazdeljena zvezno z naslednjo gostoto:

$$p(x) = \frac{c(\alpha)}{(\alpha + |x|)^4}, \qquad \alpha > 0$$

   a) Izračunajte $c(\alpha)$.

   b) Po metodi momentov poiščite cenilko za α.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, 2)$, dajo naslednje vrednosti:

$$101,\ 100,\ 103,\ 99,\ 104,\ 102,\ 100,\ 102,\ 101$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙05$ testirajte hipotezo, da je $\mu = 100$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu \neq 100$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
31. maj 2001

1. Tine in Tone si razdelita vsak po pet kart iz dobro premešanega kupa 32 kart. Kolikšna je verjetnost, da ima kateri od njiju vse karte enake barve? Barve kart so štiri (pik, križ, srce in karo) in vse so enako zastopane.

2. Janez in Peter mečeta kocko. Najprej meče Janez, dokler ne pade šest, nato pa na isti način meče še Peter. Naj bo M skupno število metov kocke.

   a) Zapišite porazdelitev slučajne spremenljivke M.

   b) Izračunajte $E(M)$.
   Namig: M je vsota dveh slučajnih spremenljivk; kako sta porazdeljeni?

   c) Recimo, da je $M = m$. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je Janez vrgel kocko natanko j-krat ($j = 0, 1, \ldots m$)?

3. Populacija X je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_X(x) = \frac{|x|}{\alpha}\, e^{-x^2/\alpha}$$

   kjer je $\alpha > 0$ neznan parameter. Po metodi maksimalne zanesljivosti poiščite cenilko za α. Je ta cenilka nepristranska? Je najučinkovitejša?

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$104,\ 101,\ 102,\ 99,\ 101,\ 103,\ 100,\ 102,\ 101$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\text{˙}}05$ testirajte hipotezo, da je $\mu = 100$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu > 100$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
12. september 2001

1. Andrej, Blaž in Ciril streljajo v tarčo. Andrej zadene z verjetnostjo 0˙4, Blaž z verjetnostjo 0˙3, Ciril pa z verjetnostjo 0˙6. Vsi hkrati ustrelijo neodvisno drug od drugega. V tarči se znajdeta dve puščici. Kolikšna je pogojna verjetnost, da sta to Andrejeva in Cirilova?

2. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z naslednjo gostoto:

$$p_X(x) = \frac{c}{1+x^2}$$

   a) Izračunajte konstanto c.
   b) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Y = \operatorname{arc\,tg} X$.
   c) Izračunajte tiste količine $E(X)$, $\operatorname{var}(X)$, $E(Y)$ in $\operatorname{var}(Y)$, ki obstajajo.

3. Populacija X je porazdeljena diskretno po naslednji shemi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p & 2p & p & ? \end{pmatrix}$$

   kjer je p neznan parameter.

   a) Katere vrednosti lahko zavzame p?
   b) Po metodi maksimalne zanesljivosti ocenite p iz naslednjega vzorca:

$$1,\ 2,\ 4,\ 4$$

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$104,\ 101,\ 102,\ 99,\ 101,\ 103,\ 100,\ 102,\ 101$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙05$ testirajte hipotezo, da je $\sigma = 2$, proti alternativni hipotezi, da je $\sigma > 2$.

1999/2000

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij

26. 11. 1999

1. V prvi posodi je 6 belih in 4 rdeče kroglice, v drugi pa ena bela in ena rdeča. Najprej na slepo premestimo 3 kroglice iz prve posode v drugo, nato pa iz druge posode potegnemo dve kroglici (brez vračanja). Obe sta rdeči. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so bile vse tri premeščene kroglice rdeče?

2. Verjetnost, da bo izdelek prvorazreden, je 25%. Najmanj kolikšna naj bo velikost pošiljke, če naj bo z verjetnostjo vsaj 95% v njej vsaj 24% prvorazrednih izdelkov?

3. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena enakomerno na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$, za slučajno spremenljivko Y, neodvisno od X, pa naj velja $P(Y = 0) = \frac{1}{3}$ in $P(Y = 1) = \frac{2}{3}$. Naj bo $Z = XY$.

   a) Nariši grafe porazdelitvenih funkcij F_X, F_Y in F_Z.

   b) Katere od teh slučajnih spremenljivk so diskretno in katere zvezno porazdeljene? Pri zvezno porazdeljenih nariši še graf porazdelitvene gostote.

4. V avtobusu, ki ima 32 sedežev, je 30 potnikov. Vsak potnik bo z verjetnostjo 1/30 na naslednji postaji izstopil, neodvisno od drugih potnikov. Število potnikov, ki bodo na naslednji postaji vstopili, pa je porazdeljeno po Poissonu Pois(1) in seveda neodvisno od izstopnih namer trenutnih potnikov. Kolikšna je verjetnost, da ne bodo mogli vsi potniki sedeti, ko bo avtobus speljal s postaje?

   Namig: Dogodek, da izstopita več kot dva potnika in vseeno ne bo dovolj sedežev za vse, je tako malo verjeten, da ga lahko zanemarimo.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij

14. 1. 2000

1. Stroj ima dva neodvisna sestavna dela z eksponentno porazdeljenima življenjskima dobama. Pričakovana življenjska doba prvega dela je 3 leta, pričakovana življenjska doba drugega pa 6 let. Za ostale dele privzamemo, da so trajni.

   Kako je porazdeljena življenjska doba celega stroja? Izračunajte pričakovano vrednost!

   Namig: Porazdelitvena funkcija.

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni standardizirano normalno. Izračunajte $\mathrm{var}(X(X+Y))$.

3. Populacija X je porazdeljena binomsko $\mathrm{B}(5, p)$, kjer je p neznan parameter. Določite najučinkovitejšo cenilko za p. Ocenite p iz naslednjega vzorca:

   $$3, 3, 4, 2, 5, 4, 3, 1, 5, 0, 2, 4, 3, 4, 5$$

4. V nekem mestu so anketirali 100 ljudi v zvezi s tem, kaj menijo o graditvi obvoznice. Prebivalce so razdelili v tri razrede glede na starost. Rezultati ankete so naslednji:

	– 35	35 – 60	60 –
Za	15	20	10
Proti	5	15	15
Neopredeljeni	10	5	5

   S testom hi kvadrat preizkusite domnevo, da je mnenje o graditvi obvoznice neodvisno od starosti. Stopnja značilnosti naj bo 0˙05.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij

21. 1. 2000

1. Naj bodo X, X_1, X_2, X_3 in X_4 neodvisne slučajne spremenljivke. Slučajna spremenljivka X naj bo porazdeljena enakomerno na $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, ostale pa enakomerno na $[0, 1]$. Naj bo A dogodek, da sta natanko dve od slučajnih spremenljivk $X_1, \ldots X_4$ večji od X, B pa naj bo dogodek, da je $X_1 > X$. Izračunajte $P(A \mid B)$.

2. Pošteno kocko mečemo, dokler ne pade pet ali šest, vendar največ petkrat. Naj bo X število potrebnih metov.

   a) Napišite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

   b) Izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

3. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

   $$97, 95, 104, 91, 99, 95, 97, 91, 95$$

   Testirajte hipotezo, da je $\mu = 100$, proti alternativni hipotezi $\mu \neq 100$. Stopnja značilnosti naj bo 0˙01.

4. Število primerov neke bolezni se je v zaporednih letih gibalo takole:

   $$240, 250, 247, 252, 269, 260, 270, 275, 273, 284$$

   Z linearno regresijo napovejte število primerov naslednje leto in določite dvostranski 95-odstotni interval zaupanja.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
4. 2. 2000

1. Janez pride v mesto trikrat v sedmih dneh, Micka pa štirikrat v istih sedmih dneh. Vse možnosti so enako verjetne. Naj bo X število dni, ko sta oba hkrati v mestu.

   a) Poimenujte porazdelitev slučajne spremenljivke X in napišite njeno porazdelitveno shemo. Izračunajte še $E(X)$.

   b) Vsakič, ko sta oba hkrati v mestu, je verjetnost, da se srečata, enaka 20%, neodvisno od drugih dni. Naj bo Y število dni, ko se Janez in Micka v mestu srečata. Napišite porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke Y in izračunajte še $E(Y)$.

2. Tovarna vsak dan proizvede 10.000 izdelkov. Za vsak izdelek je 1% verjetnosti, da ne bo brezhiben in ga bo potrebno spraviti v posebno skladišče, ki se dnevno prazni. Koliko izdelkov mora sprejeti skladišče, če naj bo verjetnost, da v skladišču ne bo dovolj prostora, enaka 1% ? Privzamemo seveda, da so izdelki med seboj neodvisni.

3. Populacija X je porazdeljena po Pascalovi porazdelitvi $\mathrm{NB}(3, \frac{1}{\alpha})$, kjer je α neznan parameter.

   a) Po metodi momentov poiščite cenilko za α.

   b) Je ta cenilka nepristranska? Je dosledna? Je najučinkovitejša?

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

   $$107, 94, 95, 100, 103, 102, 98, 100, 101$$

   Testirajte hipotezo, da je $\sigma = 2{\dot{}}5$, proti alternativni hipotezi, da je $\sigma > 2{\dot{}}5$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
5. 6. 2000

1. Vržemo pet neodvisnih kock. Naj bo X število kock, na katerih je padlo šest pik, Y pa naj bo število pik na prvi kocki. Izračunajte $E(Y \mid X = 2)$.

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni standardizirano normalno. Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke $Z := \sqrt{X^2 + Y^2}$.

3. Slučajna spremenljivka X ima gostoto:

$$p_X(x) = \tfrac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}$$

   Po metodi momentov določite cenilko za parameter λ. Ocenite ga na podlagi naslednjega vzorca:

$$1\dot{}3,\ -1\dot{}7,\ 0\dot{}1,\ 1\dot{}5,\ -1\dot{}9$$

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $N(\mu, \sigma)$, kjer je $\sigma = 3$, dajo naslednje vrednosti:

$$100,\ 95,\ 101,\ 94,\ 98,\ 97,\ 98,\ 96,\ 103$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\dot{}05$ testirajte hipotezo, da je $\mu = 100$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu < 100$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
12. september 2000

1. Slučajno in neodvisno ter z enakomerno porazdelitvijo izberemo dve števili z intervala $[0,1]$. Naj bo D razdalja med njima. Določite porazdelitveno funkcijo F_D, porazdelitveno gostoto p_D in matematično upanje $E(D)$.

2. Dana so števila od 1 do 5. Izmed njih slučajno in nepristransko najprej izberemo število X, nato pa izmed preostalih še število Y.

   a) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

   b) Izračunajte $E(Y \mid X)$.

   c) Izračunajte kovarianco $\operatorname{cov}(X, Y)$.

3. Populacija X je porazdeljena eksponentno $\operatorname{Exp}(1/\alpha)$, t. j. z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} e^{-x/\alpha} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{sicer} \end{cases}$$

   Po metodi momentov poiščite cenilko za α. Je ta cenilka nepristranska? Je dosledna? Je najučinkovitejša?

4. Vrednost neke količine se je s časom spreminjala takole:

Čas	0	1	2	3	4
Vrednost	2˙3	2˙1	2˙0	2˙1	1˙8

   Z linearno regresijo napovejte vrednost ob času 10 in določite dvostranski 95% interval zaupanja.

1998/99

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij

13. 11. 1998

1. Andraž, Bojan, Cene in Damjan streljajo v tarčo. Andraž in Bojan streljata z rdečimi, Cene in Damjan pa z modrimi puščicami. Andraž zadene z verjetnostjo 0˙6, Bojan z verjetnostjo 0˙7, Cene z verjetnostjo 0˙5, Damjan pa z verjetnostjo 0˙9. Vsi hkrati pomerijo in ustrelijo, neodvisno drug od drugega. V tarči se znajdeta ena rdeča in ena modra puščica. Kolikšna je verjetnost, da sta to Bojanova in Damjanova?

2. Eno belo, eno modro, eno rdečo in eno zeleno puščico slučajno razporedimo v deset škatel, in sicer tako, da je v vsaki škatli največ ena kroglica. Vse razporeditve so enako verjetne. Od škatel je ena bela, ena rdeča, ena modra in ena zelena, vse ostale škatle pa so črne. Kolikšna je verjetnost, da niti ena kroglica ni v škatli svoje barve?

   Namig: Načelo vključitev in izključitev.

3. Verjetnost, da bo izdelek drugorazreden, je 20%. Izdelki so pakirani v pakete po 100. Tovarna zagotavlja, da bo v vsaj 95% paketov največ x izdelkov drugorazrednih. Kolikšen je najmanjši x, ki ga tovarna še lahko postavi?

4. Pošten kovanec mečemo, dokler ne pade najprej cifra, takoj za njo pa še grb. Slučajna spremenljivka X naj predstavlja število metov. Določi njeno porazdelitev.

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
15. 1. 1999

1. Potapljač se potaplja, dokler ne nabere 80 biserov. Pri vsakem potopu nabere največ en biser, pa še tega le z verjetnostjo 20%. Potopi so med seboj neodvisni.

   a) Kolikšno je pričakovano število potopov (matematično upanje)?

   b) Oceni verjetnost, da se bo moral potopiti več kot 500-krat. *Namig*: porazdelitev števila potopov aproksimiraj s primerno normalno porazdelitvijo in na kratko utemelji, zakaj smeš to storiti.

2. Slučajna spremenljivka X ima porazdelitveno gostoto, podano po predpisu:

$$p_X(x) = \begin{cases} c\,(-\ln x)^{-1/2} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

   Dana naj bo še funkcija $f(x) = \sqrt{-2\ln x}$.

   a) Poišči gostoto slučajne spremenljivke $f(X)$.

   b) Izračunaj konstanto c.

   c) Izračunaj $P\big(X > \frac{1}{2}\big)$.

3. Slučajna spremenljivka X ima porazdelitveno gostoto, podano po predpisu:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\alpha^2}\, e^{-\frac{x}{\alpha}} & x > 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

   a) Poišči najučinkovitejšo cenilko za α.

   b) Je ta cenilka nepristranska? Odgovor utemelji!

   c) Izračunaj varianco cenilke!

4. Meritve neke količine, ki je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$50{\cdot}3 \quad 50{\cdot}7 \quad 48{\cdot}7 \quad 50{\cdot}1 \quad 48{\cdot}3 \quad 49{\cdot}5 \quad 48{\cdot}2 \quad 49{\cdot}7 \quad 48{\cdot}5$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}01$ testiraj hipotezo, da je $\mu = 50$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu < 50$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
22. 1. 1999

1. Najprej imamo deset (samih različnih) parov nogavic, nato pa izgubimo štiri nogavice (vse možnosti so enako verjetne). Naj bo X število celih parov, ki še ostanejo. Napiši porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke X ter izračunaj še $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

2. Dani sta neodvisni slučajni spremenljivki R in Θ. Slučajna spremenljivka Θ je porazdeljena enakomerno na intervalu $[\frac{\pi}{4} - \delta, \frac{\pi}{4} + \delta]$, kjer je $\delta > 0$, slučajna spremenljivka R pa ima porazdelitveno gostoto, podano po predpisu:

$$p_R(r) = \begin{cases} \dfrac{3}{2r^4} & |r| > 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Pri katerih δ sta slučajni spremenljivki $X := R \cos \Theta$ in $Y := R \sin \Theta$ nekorelirani?

3. Populacija X je porazdeljena po naslednjem predpisu:

$$P(X = x) = \frac{1-q}{1+q}\, q^{|x|}, \quad x \in \mathbb{Z}$$

kjer je $0 < q < 1$ neznan parameter. Poišči najučinkovitejšo cenilko za q.

4. Meritve neke količine, ki je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$103 \quad 106 \quad 98 \quad 96 \quad 90 \quad 102 \quad 100 \quad 99 \quad 104 \quad 102$$

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{,}05$ testiraj hipotezo, da je $\sigma = 4$, proti alternativni hipotezi, da je $\sigma > 4$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
4. 2. 1999

1. Micka pride v mesto natanko trikrat v desetih dneh in vse možnosti so enako verjetne. Janez jo želi presenetiti in jo hodi vsak dan čakat na železniško postajo. Toda Micka vsakič pride z vlakom le z verjetnostjo 70%, z verjetnostjo 30% pa pride z avtobusom. Vsakič, ko se odpravi, izbere vlak ali avtobus popolnoma neodvisno.

   V prvih petih dneh Janez Micke ni dočakal. Kolikšna je verjetnost, da jo bo dočakal šesti dan?

2. V državi X je relativna umrljivost premo sorazmerna s starostjo. Če slučajna spremenljivka T ponazarja življenjsko dobo, od tod sledi:

$$P(T > t) = e^{-\frac{1}{2}\beta t^2}, \quad t \geq 0$$

   Izračunaj konstanto β in $\sigma(T)$, če veš, da je pričakovana življenjska doba enaka $E(T) = 75$ let. Kolikšen delež prebivalcev države X dočaka več kot 100 let?

3. Populacija X je porazdeljena zvezno po naslednjem predpisu:

$$p_X(x) = \begin{cases} ax^{a-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

   kjer je a neznan parameter. Poišči najučinkovitejšo cenilko za a in jo oceni iz naslednjega vzorca:

$$0\text{'}75 \quad 0\text{'}6 \quad 0\text{'}7 \quad 0\text{'}8 \quad 0\text{'}75 \quad 0\text{'}65 \quad 0\text{'}8 \quad 0\text{'}6 \quad 0\text{'}75$$

4. Tečaj delnic podjetja A v državi X se je gibal takole:

1. 2.	2. 2.	3. 2.	4. 2.	5. 2.	9. 2.
256	262	263	254	258	262

   Z regresijsko analizo ocenite tečaj dne 15. 2.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
3. 6. 1999

1. Računalnika si prek slabe zveze pošiljata bit za bitom. Verjetnost, da bo pri prenosu posameznega bita prišlo do napake (t. j. pošiljatelj pošlje ničlo, prejemnik pa dobi enico, ali pa obratno), je odvisna od tega, ali je do napake prišlo tudi pri prenosu prejšnjega bita, ne pa tudi od prenosa predhodnih bitov. Če je bil prejšnji bit poslan pravilno, je pogojna verjetnost, da bo naslednji bit poslan napačno, enaka 1/10. Če pa je bil prejšnji bit poslan napačno, je pogojna verjetnost, da bo tudi naslednji bit poslan napačno, enaka 2/10. Verjetnost, da je prvi bit poslan napačno, je enaka 1/9.

   a) Kolikšna je verjetnost, da bo drugi bit poslan napačno?
   b) Zaradi varnosti pošiljatelj dani bit pošlje trikrat zapored, prejemnik pa prejeto trojico bitov razume kot tisti bit, ki ima večino (tako npr. 010 razume kot 0, 110 pa kot 1). Kolikšna je verjetnost, da bo prejemnik narobe razumel pošiljko?
   c) Recimo, da je prejemnik prejel tri enake bite. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo pošiljko razumel narobe?

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni po Poissonu: $X \sim \text{Pois}(a)$ in $Y \sim \text{Pois}(b)$. Naj bo n naravno število.

   a) Za vsak k izračunaj $P(X = k \mid X + Y = n)$.
   b) Poimenuj pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X pri dogodku $X+Y = n$ in določi morebitne parametre.

3. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno z naslednjo gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a^2}\, e^{-\frac{\sqrt{x}}{a}} & x > 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

   Poišči najučinkovitejšo cenilko za neznani parameter a.

4. Meritve neke količine, ki je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$98 \quad 101 \quad 93 \quad 91 \quad 85 \quad 97 \quad 95 \quad 94 \quad 99 \quad 97$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{'}01$ testiraj hipotezo, da je $\mu = 100$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu < 100$.

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
14. 9. 1999

1. Študent dobi na izpitu pet vprašanj. Izpit naredi, če pravilno odgovori na vsaj tri vprašanja. Vseh možnih vprašanj je 20 in vse možne izbire vprašanj so enako verjetne.

   a) Študent se nauči le 9 vprašanj. Kolikšna je verjetnost, da bo naredil izpit? Privzamemo, da zna študent odgovoriti natanko na tista vprašanja, ki se jih je naučil.

   b) Če ne naredi v prvem roku, poskusi še enkrat. Na drugem roku se vprašanja izbirajo neodvisno od prvega roka (lahko se torej pojavijo ista). Študent zdaj zna odgovoriti na vsa vprašanja, ki se jih je poprej naučil, vsa vprašanja, ki so bila na prvem roku, in še na dve vprašanji. Kolikšna je verjetnost, da bo naredil izpit v prvem ali drugem roku?

2. Slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni standardizirano normalno. Izračunaj $P(X > 0 \mid X + Y > 0)$.

   Namig: polarne koordinate.

3. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena po naslednji shemi:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} - 3a & 8a & p & q & 8a & \frac{1}{3} - 3a \end{pmatrix}$$

   a) Izrazi p in q z a tako, da bo $E(X) = 0$.

   b) Izračunaj $\mathrm{var}(X)$.

   c) Recimo, da je populacija porazdeljena tako kot X. Po metodi momentov poišči cenilko za neznani parameter a.

      Namig: Ne obupaj!

4. Meritve neke količine, ki je porazdeljena normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma = 5)$, dajo naslednje vrednosti:

   56 57 52 49 54 50 48 53 51 55

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\text{'}05$ testiraj hipotezo, da je $\mu = 50$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu > 50$.

1997/98

1. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
14. 11. 1997

1. V prvi posodi sta 2 beli, 7 rdečih in 3 črne kroglice, v drugi posodi pa 3 bele, 5 rdečih in 5 črnih kroglic. Najprej na slepo premestimo dve kroglici iz prve posode v drugo, nato pa iz druge posode potegnemo 4 kroglice. Kolikšna je verjetnost, da je med njimi ena bela, ena črna in dve rdeči?

2. Avtobus se ustavi na postaji med 6:55 in 7:05, in sicer z enakomerno porazdelitvijo. Sam pa sem nagnjen k zamujanju in pridem na postajo med 7:00 in 7:07, tudi z enakomerno porazdelitvijo.

   a) Kolikšna je verjetnost, da ujamem ta avtobus?

   b) Avtobus vozi do postaje, na kateri izstopim, še 55 minut, sam pa potem potrebujem še tri minute, da pridem do predavalnice. Predavanje se začne ob 8:00. Kolikšna je verjetnost, da pridem še pravočasno na predavanje? Če tega avtobusa ne ujamem, seveda zamudim.

3. Miha se odpravi na obisk k vinogradnikom Janezu, Ivanu in Štefanu. Vsak mu ponudi kozarec vina. Janez mu ponudi šmarnico z verjetnostjo 60 %, Ivan z verjetnostjo 40 %, Štefan pa z verjetnostjo 10 %. Verjetnost, da Miho boli glava, ne da bi pil šmarnico, je 10 %, verjetnost, da ga boli po kozarcu šmarnice, 40 %, po dveh kozarcih 70 % in po treh kozarcih 100 %. Naslednji dan Miho boli glava in prijatelj Tone mu pravi: “Janez in Ivan sta ti gotovo dala šmarnico!” Kolikšna je verjetnost, da ima prav?

4. Verjetnost, da se poskus izide, je 20 %. Da naredimo uspešno analizo, se mora iziti vsaj 40 poskusov. Kolikšna je verjetnost, da bomo morali opraviti natanko 200 poskusov?

2. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
16. 1. 1998

1. Gledano z makroskopskega stališča je radioaktivni razpad determinističen proces. Če pa gledamo posamezne delce, ugotovimo, da razpadajo slučajno: njihova življenjska doba T ima eksponentno porazdelitev z gostoto $p_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$, razpolovni čas pa je mediana slučajne spremenljivke T.

    a) Radioaktivni delec ima razpolovni čas τ. Naj bo T njegova življenjska doba. Izračunaj $E(T)$.

    b) Prvi radioaktivni delec ima razpolovni čas τ_1, drugi pa τ_2. Kolikšna je verjetnost, da bo prvi delec razpadel pred drugim?

2. Slučajni vektor (X, Y) ima naslednjo porazdelitveno tabelo:

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=1$
$X=-1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}(1-\alpha)$	$\frac{1}{9}$
$X=0$	$\frac{1}{9}(1-\alpha)$	β	$\frac{1}{9}(1-\alpha^2)$
$X=1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}(1+\alpha^2)$	$\frac{1}{9}$

    a) Izrazi β z α.

    b) Pri katerih α je z zgornjo tabelo res določena porazdelitev slučajnega vektorja?

    c) Pri katerih α sta X in Y nekorelirani?

    d) Pri katerih α sta X in Y neodvisni?

3. Slučajni vektor (X, Y) ima naslednjo porazdelitveno gostoto:

$$p_{(X,Y)}(x, y) = \frac{Cx^2y^2}{(1 + x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

    Izračunajte konstanto C in gostoto slučajne spremenljivke $Z := X^2 + Y^2$.

    Namig: polarne koordinate

4. Proizvajalec kondenzatorjev deklarira, da je njihova povprečna kapaciteta $100\,pF$. Ko izmerimo kapaciteto slučajno izbranim devetim kondenzatorjem, dobimo naslednje rezultate:

Kondenzator:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kapaciteta [pF]:	99	92	101	92	89	95	88	97	102

    a) Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0'01$ testiraj hipotezo, da je povprečna kapaciteta enaka $100\,pF$, proti alternativni hipotezi, da je manjša od $100\,pF$. Za serijo privzemi, da je porazdeljena normalno.

    b) Se rezultat kaj spremeni, če vzamemo dvostranski test?

Izpit iz verjetnosti in statistike (prepis)

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij

26. 1. 1998

1. Iz žare, v kateri so 4 bele, 5 rdečih in 7 črnih kroglic, na slepo in brez vračanja jemljemo kroglice, dokler ne potegnemo bele ali črne.

   a) Kolikšna je verjenost, da belo kroglico izvlečemo pred črno?

   b) Izračunajte pričakovano število rdečih kroglic, ki jih med tem procesom izvlečemo iz žare.

2. Določite konstanto c in asimetrijo slučajne spremenljivke X, ki je porazdeljena zvezno z gostoto verjetnosti:

$$p(x) = \begin{cases} c \sin x & , \ 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & , \ \text{sicer} \end{cases}$$

3. Slučajna spremenljivka X ima verjetnostno gostoto, podano po predpisu:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-a)} & , \ x \geq a \\ 0 & , \ \text{sicer} \end{cases}$$

   Po metodi momentov poiščite cenilki za parametra a in λ. Ocenite ju na osnovi naslednjega vzorca: 1˙0, 1˙5, 1˙3, 1˙4, 1˙7, 1˙5.

4. Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0˙05$ preizkusite hipotezo, da sta slučajni spremenljivki X in Y nekorelirani. Vzorec velikosti 6 je naslednji:

X:	12˙0	11˙0	12˙0	9˙5	11˙0	12˙5
Y:	7˙5	9˙5	8˙5	10˙0	12˙0	10˙0

Izpit iz verjetnosti in statistike (prepis)

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
6. 2. 1998

1. Stroj ima tri bistvene sestavne dele in deluje, če delujeta vsaj dva dela. Vsak del se lahko pokvari neodvisno od drugih delov. Verjetnost, da se pokvari prvi del, je 2%, verjetnost, da se pokvari drugi del, je 10%, verjetnost, da se pokvari tretji del, pa je 5%. Stroj se je pokvaril in radi bi popravili vse tri pokvarjene dele. Popravilo prvega stane 10.000 SIT, popravilo drugega 3.000 SIT in popravilo tretjega dela 7.000 SIT. Kolikšna je verjetnost, da bomo za popravilo plačali več kot 10.000 SIT?

2. Število tipkarskih napak v dolgem besedilu je porazdeljeno po Poissonovem zakonu Pois(λ). Verjetnost, da pri pregledu posamezno napako odkrijemo, je p.

   a) Kolikšna je verjetnost, da oddamo brezhiben izdelek?

   b) Kolikšno je pričakovano število odkritih napak?

3. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots X_n$ so med seboj neodvisne in porazdeljene standardizirano normalno. Izračunajte matematično upanje in disperzijo slučajne spremenljivke $Y = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2$.

   Namig: Pomagajte si s porazdelitvijo slučajne spremenljivke Y ali s sploščenostjo standardizirano normalne porazdelitve.

4. Število novorojenih otrok v neki državi se je v zadnjih letih spreminjalo takole:

1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
10.971	11.733	11.912	10.852	10.023	9.356	8.761

   Z linearno regresijsko analizo napovejte število novorojenih otrok leta 2000. Ali bi se podatek o 8.100 rojstvih leta 1998 značilno razlikoval od zgornjega modela?

Izpit iz verjetnosti in statistike (prepis)

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
3. 6. 1998

1. Študent se od 50 izpitnih vprašanj nauči le 30. Za vsako vprašanje, ki se ga nauči, je potem še 5% verjetnosti, da pozabi odgovor, za vsako vprašanje, ki se ga ne nauči, pa je še 2% verjetnosti, da odgovor ugane. Na izpitu na slepo izbere tri vprašanja iz izpit naredi, če pravilno odgovori na vsaj dve vprašanji. Kolikšna je verjetnost, da bo naredil izpit?

2. Slučajni vektor (X, Y) ima verjetnostno gostoto, podano po predpisu:

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-x-y} & , \ x, y > 0 \\ 0 & , \ \text{sicer} \end{cases}$$

Za $x > 0$ izračunajte robno gostoto $p_X(x)$ in določite pogojno matematično upanje $E(Y \mid X = x)$.

3. Slučajna spremenljivka X ima verjetnostno gostoto, podano po predpisu:

$$p_X(x) = \begin{cases} c\sin(ax+b) & , \ -b/a < x < (\pi - b)/a \\ 0 & , \ \text{sicer} \end{cases}$$

kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$ in $a > 0$. Izrazite konstanto c s parametroma a in b ter po metodi momentov poiščite cenilki za a in b.

4. Meritve neke količine, ki je porazdeljena normalno, dajo naslednje vrednosti:

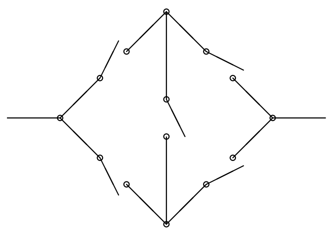
$$20{'}1 \quad 20{'}3 \quad 19{'}5 \quad 20{'}0 \quad 19{'}7 \quad 19{'}8 \quad 19{'}7 \quad 19{'}9 \quad 19{'}6$$

Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{'}01$ dvostransko testirajte hipotezo, da je povprečje enako 20.

Izpit iz verjetnosti in statistike (prepis)

Računalništvo in informatika – univerzitetni študij
14. 9. 1998

1. Med seboj neodvisna stikala so povezana v vezje, ki ga prikazuje spodnja skica. Vsako stikalo je vključeno z verjetnostjo p $(0 < p < 1)$. Kolikšna je verjetnost, da vezje prepušča električni tok?



2. Ministrstvo dobi vsak dan na mizo slučajno število prošenj, ki je porazdeljeno po Poissonovem zakonu $\mathrm{Pois}(\lambda)$. Dnevi so med seboj neodvisni. Ministrstvo vsak dan razreši eno prošnjo, če jo seveda ima, morebitne preostale pa pusti za kasneje. Kolikšna je verjetnost, da ministrstvu po dveh dneh dela preostaneta vsaj še dve nerazrešeni prošnji?

3. Neodvisni slučajni spremenljivki X in Y sta porazdeljeni enakomerno na intervalu $[0, 1]$. Določite verjetnostno gostoto slučajne spremenljivke $Z = XY$ ter izračunajte njeno matematično upanje $E(Z)$ in disperzijo $\mathrm{var}(Z)$.

4. Diskretna slučajna spremenljivka X ima naslednjo porazdelitveno shemo:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \theta/2 & 1-\theta & \theta/2 \end{pmatrix}$$

se pravi, da velja $P(X = x) = (1-\theta)^{1-|x|}(\theta/2)^{|x|}$ za $x \in \{-1, 0, 1\}$, pri čemer je $0 < \theta < 1$.

Poiščite najučinkovitejšo cenilko za parameter θ. Kako bi cenilko za θ poiskali po metodi momentov? Bi dobili isto cenilko?

1996/97

Izpit iz verjetnosti in statistike (prepis)

Računalništvo in informatika
27. 1. 1997

1. Iz posode A, v kateri je 5 na otip enakih kroglic, 3 bele in 2 črni, na slepo vzamemo tri kroglice in jih premestimo v prazno posodo B, ne da bi videli njihovo barvo. Nato trikrat zapored (z vračanjem) na slepo in neodvisno iz posode B izlečemo po eno kroglico. Pri tem smo dvakrat izvlekli belo in enkrat črno kroglico. Kolikšna je najverjetnejša sestava premeščenih kroglic in kolikšna je njena verjetnost?

2. Slučajna točka (X, Y) je porazdeljena po kvadratu $[0,1] \times [0,1]$ z naslednjo verjetnostno gostoto:
$$p(x,y) = \begin{cases} x+y & , 0 \le x, y \le 1 \\ 0 & , \text{sicer} \end{cases}$$
   a) Sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni? Sta nekorelirani?
   b) Izračunajte pogojni matematični upanji $E(Y \mid X = x)$ in $E(XY \mid X = x)$.

3. Zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka X ima gostoto verjetnosti, podano po predpisu:
$$p(x) = \begin{cases} ab^a x^{-a-1} & , x > b \\ 0 & , \text{sicer} \end{cases}$$
   pri čemer za parametra a in b velja $a > 2$ in $b > 0$. Po metodi momentov določite:
   a) cenilko za parameter a, če b poznamo,
   b) cenilki za oba parametra a in b, če nobenega ne poznamo.

   Je cenilka iz točke a) nepristranska? Je dosledna?

4. Prodajalec žarnic zagotavlja, da je njihova povprečna življenjska doba enaka 800 ur. Pred nakupom testiramo 36 primerkov žarnic in ugotovimo, da v povprečju trajajo 784 ur, vzorčna deviacija pa znaša 70 ur. Se to sklada s prodajalčevo napovedjo? Se lahko na osnovi preizkušenega vzorca s 5% tveganjem odločimo za nakup?

   Opomba. Ta naloga je popravljena. Na izpitu je prodajalec zagotavljal, da je življenjska doba žarnic večja od 800 ur, vzorčno povprečje pa je bilo 816 ur.

Izpit iz verjetnosti in statistike (prepis)

Računalništvo in informatika
10. 2. 1997

1. Na stranicah kvadrata $[0,1] \times [0,1]$, ki ne ležita na koordinatnih oseh, izberemo na slepo in neodvisno dve točki, X in Y, na vsaki stranici po eno. Kolikšna je verjetnost, da je ploščina trikotnika z oglišči O, X in Y manjša od $1/4$? Kolikšna je pričakovana vrednost dobljene ploščine?

2. Slučajni vektor (X, Y) ima kovariančno matriko:

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   Definirajmo:

$$\begin{aligned} X' &= aX + 2Y + Z \\ Y' &= X - Y + aZ \\ Z' &= 2X + Y - Z \end{aligned}$$

   Določite kovariančno matriko K', ki pripada slučajnemu vektorju (X', Y', Z'), in poiščite vse vrednosti parametra a, pri katerih sta slučajni spremenljivki X' in Y' nekorelirani.

3. Določen kromosom je tipa A z verjetnostjo $u/(u+1)$, tipa B pa z verjetnostjo $1/(u+1)$, kjer je u neznan parameter. Vsak osebek ima par neodvisnih kromosomov in je tako lahko tipa AA, AB ali pa BB.

   Izračunajte verjetnost, da bo v vzorcu velikosti n p osebkov tipa AA, q osebkov tipa AB in r osebkov tipa BB. To je ravno funkcija zanesljivosti L za spremenljivko, prirejeno poskusu s tremi možnimi izidi. Poiščite njen maksimum glede na parameter u in tako določite cenilko u po metodi maksimalne zanesljivosti.

4. Kovanec mečemo toliko časa, da prvič pade grb, in pri tem zabeležimo potrebno število metov. V 100 poskusih smo tako dobili naslednje rezultate: 45-krat je bil potreben samo en met, 30-krat dva meta, 15-krat trije meti, 6-krat štirje meti, 2-krat pet metov in 2-krat šest ali več metov.

   S testom hi-kvadrat pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ preizkusite hipotezo, da je porazdelitev potrebnih metov geometrijska:

$$p_k = 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

   in je tako kovanec simetričen.

Izpit iz verjetnosti in statistike (prepis)

Računalništvo in informatika

4. 6. 1997

1. Enakovredna teniška igralca A in B igrata srečanje na tri dobljene nize, vendar pa ga morata zaradi dežja prekiniti pri stanju 1 : 0 v nizih v korist igralca A. Kolikšna je v tem trenutku:

   a) verjetnost, da bo na koncu zmagal igralec A;

   b) pričakovano število nizov, ki jih morata še odigrati do konca dvoboja;

   c) pričakovani dobiček igralca A, če si nagradni sklad 3.000 dolarjev razdelita v razmerju dobljenih nizov?

2. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto verjetnosti:

$$p(x,y) = \begin{cases} 6xy & , \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le \sqrt{x} \\ 0 & , \ \text{sicer} \end{cases}$$

   a) Določite robni gostoti p_X in p_Y. Sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni? Sta nekorelirani?

   b) Poiščite gostoto verjetnosti slučajne spremenljivke $Z = Y - \sqrt{X}$.

3. V diskretni porazdelitvi z verjetnostno funkcijo

$$p_k = kp^2(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \ 0 < p < 1$$

   vzemimo za parameter število $c = 1/p$. Po metodi maksimalne zanesljivosti poiščite cenilko C parametra c in ugotovite, ali je nepristranska in dosledna. Izračunajte tudi njeno učinkovitost.

4. Pri šestih osebah v različni starosti so merili sistolični krvni tlak in dobili naslednje podatke:

X (starost v letih)	25	35	45	55	65	75
Y (krvni tlak v mmHg)	120	114	124	143	158	166

   a) Na osnovi podatkov ocenite regresijska koeficienta spremenljivke Y glede na spremenljivko X.

   b) Pri stopnji značilnosti $\alpha = 0{\cdot}05$ preizkusite hipotezo, da med X in Y ni korelacije.

Izpit iz verjetnosti in statistike I (prepis)

Računalništvo in informatika
4. 6. 1997

1. Enakovredna teniška igralca A in B igrata srečanje na tri dobljene nize, vendar pa ga morata zaradi dežja prekiniti pri stanju 1 : 0 v nizih v korist igralca A. Kolikšna je v tem trenutku:

   a) verjetnost, da bo na koncu zmagal igralec A;

   b) pričakovano število nizov, ki jih morata še odigrati do konca dvoboja;

   c) pričakovani dobiček igralca A, če si nagradni sklad 3.000 dolarjev razdelita v razmerju dobljenih nizov?

2. Dnevna proizvodnja znaša 1.000 izdelkov, verjetnost, da ima posamezen izdelek napako, pa je 0˙05 (neodvisno od drugih izdelkov). Defektni izdelki se izločijo in shranijo v posebno skladišče. Najmanj kako veliko mora biti skladišče, da lahko vanj z verjetnostjo 0˙9 spravimo vse defektne izdelke enega dne? Kolikšna je tedaj verjetnost, da z defektnimi izdelki napolnimo kvečjemu polovico skladišča?

3. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen zvezno z gostoto verjetnosti:

$$p(x,y) = \begin{cases} 6xy & , \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le \sqrt{x} \\ 0 & , \text{ sicer} \end{cases}$$

   a) Določite robni gostoti p_X in p_Y. Sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni? Sta nekorelirani?

   b) Poiščite gostoto verjetnosti slučajne spremenljivke $Z = Y - \sqrt{X}$.

4. Diskretni slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni in porazdeljeni po zakonu:

$$P(X = k) = P(Y = k) = 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

   Poiščite karakteristično funkcijo za X oziroma Y in z njeno pomočjo določite porazdelitev slučajne spremenljivke $Z = X + Y$.

Izpit iz verjetnosti in statistike (prepis)

Računalništvo in informatika
12. 9. 1997

1. Denimo, da je jutrišnje vreme odvisno le od današnjega: če je danes lepo, bo tudi jutri lepo z verjetnostjo 2/3; če pa je danes deževno, bo jutri dež z verjetnostjo 1/2. Konec tedna se je pričel z lepim vremenom v petek. Kolikšna je verjetnost,

   a) da bosta tudi sobota in nedelja lepi,

   b) da bo lepo vreme tudi v ponedeljek, ko se bomo vrnili na delo, ne glede na vreme v soboto in nedeljo?

2. V paraboličnem odseku $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y^2 \leq x\}$ na slepo izberemo poljubno točko (X, Y).

   a) Kako sta porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y? Sta neodvisni? Sta nekorelirani?

   b) Izračunajte pogojno matematično upanje $E(X \mid Y = y)$.

3. Po metodi momentov poiščite cenilko za parameter $a > 0$ v verjetnostni gostoti:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{a^2}(a - x) & , \ 0 < x < a \\ 0 & , \ \text{sicer} \end{cases}$$

4. Glede barvne slepote so testirali 1000 oseb, moške in ženske, in dobili naslednji rezultat:

	moški	ženske
normalni	442	514
barvno slepi	38	6

   a) Na osnovi teh podatkov pri stopnji značilnosti 0˙05 testirajte domnevo, da je barvna slepota neodvisna od spola.

   b) Ali dobljeni rezultati potrjujejo genetski model, ki predvideva naslednjo porazdelitev ($q = 1 - p$ je delež defektnih genov v populaciji):

	moški	ženske
normalni	$p/2$	$p^2/2 + pq$
barvno slepi	$q/2$	$q^2/2$

1995/96

Izpit iz verjetnosti in statistike

Računalništvo in informatika
12. 9. 1996

1. Na intervalu $[0,1]$ na slepo izberemo dve števili X in Y (neodvisno drugo od drugega). Kolikšna je verjetnost,

   a) da je manjše od obeh števil tudi manjše od $1/3$,

   b) da je tisto število, ki je bližje $1/3$, manjše od $1/3$,

   c) da je produkt obeh števil manjši od $1/3$?

2. Slučajna točka (X,Y) je porazdeljena po enotskem krogu $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$ z verjetnostno gostoto:

$$p(x,y) = \begin{cases} c(1-xy) & , x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & , \text{sicer} \end{cases}$$

   Določite konstanto c. Sta X in Y neodvisni? Sta nekorelirani? Določite še porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y.

3. Za diskretno porazdelitev:

$$p_k = \frac{(c-1)^{k-1}}{c^k}, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

   poiščite cenilko za parameter c po metodi momentov in po metodi maksimalne zanesljivosti. Prepričajte se, da obakrat dobimo isto cenilko C. Izračunajte njeno matematično upanje $E(C)$ in varianco $\mathrm{var}(C)$. Je cenilka C nepristranska? Je dosledna? Je najučinkovitejša?

4. Število nočitev v šestih turističnih sezonah se je gibalo takole:

Leto:	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Število nočitev:	75.240	23.150	25.400	38.760	46.980	60.120

   Z linearno regresijsko analizo na osnovi zgornjih podatkov ocenite, kolikšno število nočitev lahko pričakujemo v letih 1996 in 1997, če se trend (linearni model) ne bo spremenil. Določite tudi 95% interval zaupanja za pričakovano vrednost.

Izpit iz verjetnosti in statistike I (prepis)

Računalništvo in informatika
30. 9. 1996

1. Dva radarja odkrivata sovražna letala. Prvi radar odkrije sovražno letalo z verjetnostjo a, drugi pa z verjetnostjo b. Vsak radar odkrije posamezno letalo neodvisno od drugih letal in tudi neodvisno od drugega radarja. V območje radarskega nadzora priletijo tri sovražna letala.

   a) Kolikšna je verjetnost, da katerega od njih ne odkrije noben radar?

   b) Recimo, da so vsa letala odkrita. Kolikšna je pogojna verjetnost, da drugi radar ni odkril nobenega?

2. Dana je funkcija $F(x) = a + b \operatorname{arc\,tg}(x/2)$.

   a) Določite konstanti a in b tako, da bo F porazdelitvena funkcija neke zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke, in poiščite njeno verjetnostno gostoto.

   b) Pokažite, da slučajna spremenljivka iz točke a) nima matematičnega upanja, ter izračunajte njeno mediano in semiinterkvartilni razmik.

3. Slučajni vektor (X, Y) je porazdeljen diskretno, kot določa naslednja verjetnostna tabela:

	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 1$	$1/6$	$1/6$
$X = 2$	$1/3$	$1/3$

   a) Sta slučajni spremenljivki X in Y nekorelirani? Sta neodvisni?

   b) Izračunajte pogojno verjetnostno funkcijo in regresijo slučajne spremenljivke X glede na Y.

4. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ so neodvisne in vse porazdeljene eksponentno z naslednjo gostoto verjetnosti:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{sicer} \end{cases}$$

   Z uporabo karakterističnih funkcij poiščite porazdelitev slučajnih spremenljivk:

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

   in se prepričajte, da te porazdelitve pri $n \to \infty$ konvergirajo proti porazdelitvi neke konstantne slučajne spremenljivke. Določite jo.