KOLOKVIJI IN IZPITI IZ STATISTIKE

Praktična matematika

Zbral: Martin Raič

2020/21

1. KOLOKVIJ IZ STATISTIKE

Praktična matematika
19. april 2021

1. [30] Narišite prirejeno Lorenzovo krivuljo (lomljenko) in izračunajte Ginijev indeks porazdelitve:
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0{\cdot}2 & 0{\cdot}5 & 0{\cdot}2 & 0{\cdot}1 \end{pmatrix}.$$

2. [40] Statistična spremenljivka je porazdeljena zvezno z gostoto:
$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi x}}\, e^{2\sqrt{a}-x-a/x} & ; \; x > 0 \\ 0 & ; \; \text{sicer}, \end{cases}$$
kjer je $a > 0$ neznan parameter.
   a) Opazimo n neodvisnih vrednosti te spremenljivke. Poiščite cenilko za a po metodi največjega verjetja.
   b) Ocenite a na podlagi opaženih vrednosti:
   $$2{\cdot}48,\ 1{\cdot}27,\ 2{\cdot}88,\ 0{\cdot}95,\ 3{\cdot}24,\ 3{\cdot}13,\ 3{\cdot}32,\ 3{\cdot}47,\ 1{\cdot}66\,.$$

3. [30] Nacionalni laboratorij za okolje, zdravje in hrano je v januarju izvedel verifikacijo hitrega antigenskega testa (HAT) za dokazovanje antigenov SARS-Cov-2. Med preiskovanci, ki so bili okuženi z virusom, jih je imalo 165 pozitiven in 37 negativen izvid HAT testa. Določite 90% Waldov interval zaupanja za *občutljivost* HAT testa, torej verjetnost, da je ta test pri okuženem posamezniku pozitiven.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2. KOLOKVIJ IN IZPIT IZ STATISTIKE

Praktična matematika
1. junij 2021
Za kolokvij rešujete zadnje tri naloge, za izpit pa 1., 2., 3. in 5. nalogo.
Pri kolokviju se bodo točke pomnožile s 4/3.

1. [25] Napišite enačbo primerjalnega kvantilnega (Q–Q) grafikona med porazdelitvama z gostotama:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^2} & ; x > 3 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} \quad \text{in} \quad p_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{y^4} & ; y > 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   in ga narišite: na abscisni osi naj bo spremenljivka X, na ordinatni pa spremenljivka Y,

2. [25] Statistična spremenljivka je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} a\, e^{a+x-a\,e^x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer,} \end{cases}$$

   kjer je $a > 0$ neznan parameter.

   a) Opazimo n neodvisnih vrednosti te spremenljivke. Poiščite cenilko za a po metodi največjega verjetja.

   b) Ocenite a na podlagi opaženih vrednosti:

$$0\text{˙}49,\ 0\text{˙}11,\ 0\text{˙}47,\ 0\text{˙}1,\ 0\text{˙}016,\ 0\text{˙}44,\ 0\text{˙}12,\ 0\text{˙}038,\ 0\text{˙}74,\ 0\text{˙}67\,.$$

3. [25] V neki raziskavi[1] so pri 17 osebah preizkušali ravnotežje, medtem ko se so morali s pritiskom na gumb odzvati na nepričakovan zvok. Merili so, koliko so (v milimetrih) zanihali naprej ali nazaj. Določene osebe so bile stare, določene mlade. Rezultati so naslednji:

Stari:	19, 30, 20, 19, 29, 25, 21, 24, 50
Mladi:	25, 21, 17, 15, 14, 14, 22, 17

   Pri stopnji tveganja $\alpha = 0\text{˙}05$ preizkusite ničelno domnevo, da se starost pri ravnotežju ne pozna, proti alternativni domnevi, da imajo stari slabše ravnotežje, torej da bolj zanihajo.

[1] Vir: `http://www.statsci.org/data/general/balaconc.html`, ogled 28. 5. 2021

4. [25] V neki raziskavi[2] so 300 anketirancev obeh spolov povpraševali, katera lastnost avtomobila igra najpomembnejšo vlogo pri odločitvi za nakup. Rezultati so naslednji:

	varnost	zanesljivost	cena	zmogljivost	udobje	videz
ženske	58	25	13	15	24	15
moški	26	37	33	19	23	12

Pri stopnji tveganja $\alpha = 0{\cdot}01$ preizkusite domnevo, da so preference neodvisne od spola, proti alternativni domnevi, ki to zanika.

5. [25] V neki raziskavi[3] so na 10 cestah z različnimi širinami voznega pasu merili, koliko so bili avtomobili v povprečju bočno oddaljeni od kolesarjev, ki so jih prehitevali. Označimo širino voznega pasu z w, povprečno bočno oddaljenost pa z d. Podatki so naslednji:

w	12˙8	12˙9	12˙9	13˙6	14˙5	14˙6	15˙1	17˙5	19˙5	20˙8
d	5˙5	6˙2	6˙3	7˙0	7˙8	8˙3	7˙1	10˙0	10˙8	11˙0

(razdalje so v čevljih).

a) Izračunajte ocenjena koeficienta regresijske premice, če je širina voznega pasu pojasnjevalna, povprečna bočna oddaljenost pa odvisna spremenljivka.
b) Pri stopnji tveganja $\alpha = 0{\cdot}05$ preizkusite domnevo, da je svobodni člen v regresijski premici enak nič, proti alternativni domnevi, da je različen od nič.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja kolokvija je **80 minut**, čas reševanja izpita pa je **110 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

[2] Vir: `http://www.statsci.org/data/oz/carprefs.html`, ogled 28. 5. 2021

[3] Vir: B. J. Kroll: Effects of Bike Lanes on Driver and Bicyclist Behavior. *ASCE Transportation Eng. J.* **103** (1977), 243–256.

IZPIT IZ STATISTIKE

Praktična matematika
21. junij 2021

1. [25] Narišite Lorenzovo krivuljo in izračunajte Ginijev indeks porazdelitve z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} x & ;\ 0 < x < \sqrt{2} \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

2. [20] Spodaj so prikazane 14 ostrig v gramih:[4]

   9˙62, 12˙92, 5˙22, 14˙09, 12˙49, 7˙67, 15˙50, 17˙42, 7˙91, 10˙98,
   11˙27, 8˙09, 15˙50, 10˙64 .

   Ob predpostavki, da je teža ostrige porazdeljena normalno, poiščite 90% interval zaupanja za standardni odklon teže.

3. [30] V porodnišnici *Mater Mothers' Hospital* v Brisbanu v Avstraliji se je dne 18. decembra 1997 rodilo 44 dojenčkov. Spodaj so prikazani časi porodov:[5]

   00:05, 01:04, 01:18, 01:55, 02:57, 04:05, 04:07, 04:22, 04:31, 07:08, 07:35, 08:12, 08:14, 09:09, 10:35, 10:49, 10:53, 11:33, 12:09, 12:56, 13:05, 14:06, 14:07, 14:33, 14:46, 15:14, 16:31, 16:57, 17:42, 18:07, 18:25, 18:54, 19:09, 19:47, 19:49, 19:51, 20:10, 20:37, 20:51, 21:04, 21:23, 22:17, 23:27, 23:55.

   Preizkusiti želimo domnevo, ali se porodi dogajajo enakomerno čez dan (in noč). To storimo tako, da dan razdelimo na časovne intervale, dolge po m ur, kjer je m delitelj števila 24.

   a) Poiščite najmanjši m, pri katerem so pričakovane frekvence ob veljavnosti navedene domneve enake vsaj 5.
   b) Razdelite dan na časovne intervale z dolžino, ki ste jo dobili v prejšnji točki, in pri stopnji tveganja $\alpha = 0˙05$ preizkusite navedeno domnevo.

4. [25] Spodaj so prikazana števila na novo okuženih oseb v Združenem kraljestvu za obdobje od 30. maja do 19. junija letos (oba dneva vključena, vsaka vrstica predstavlja en teden):[6]

[4] Vir: `http://jse.amstat.org/jse_data_archive.htm`, podatki `30oysters`, ogled 20. 6. 2021.
[5] Vir: `http://jse.amstat.org/jse_data_archive.htm`, podatki `babyboom`, ogled 20. 6. 2021.
[6] Vir: `https://en.wikipedia.org/wiki/COVID-19_pandemic_in_the_United_Kingdom`, ogled 20. 6. 2021.

3111,	3283,	3099,	4261,	5179,	6140,	5651,
5223,	5584,	5966,	7312,	7232,	7958,	7550,
7319,	7606,	7587,	8808,	10809,	10270,	10075.

To modeliramo kot eksponentno rast z napakami, tj. $o = a\,e^{\lambda d+\varepsilon}$, kjer je d dan, o število okuženih, ε pa napaka. Prevedite to na enostavno linearno regresijo in točkovno napovejte število okuženih dne 25. junija.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ STATISTIKE

Praktična matematika
23. avgust 2021

1. [25] Narišite primerjalni kvantilni grafikon med standardno normalno porazdelitvijo in empirično porazdelitvijo podatkov:

$$2{\cdot}52,\ 1{\cdot}13,\ 2{\cdot}06,\ 1{\cdot}91,\ 1{\cdot}77,\ 2{\cdot}21,\ 2{\cdot}33,\ 1{\cdot}75,\ 1{\cdot}99$$

   s primerno izbranimi kvantili.

2. [25] Statistični model privzema zvezno porazdelitev z gostoto:

$$p(x) = \begin{cases} \big((1-p)\lambda + p\lambda^2 x\big)e^{-\lambda x} & ;\ x > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer}, \end{cases}$$

   kjer sta $\lambda > 0$ in $0 \le p \le 1$ neznana parametra. Na voljo imamo spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ki so neodvisne in imajo omenjeno porazdelitev. Po metodi momentov poiščite cenilki za λ in p.

   Pomoč: $\displaystyle\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}$.

3. [25] Spodaj so prikazane 15 ostrig v gramih:[7]

[7] Vir: `http://jse.amstat.org/jse_data_archive.htm`, podatki `30oysters`, ogled 23. 8. 2021.

$7{\cdot}91,\ 9{\cdot}66,\ 11{\cdot}40,\ 9{\cdot}62,\ 15{\cdot}50,\ 17{\cdot}42,\ 13{\cdot}63,\ 10{\cdot}73,\ 10{\cdot}64,\ 15{\cdot}50,$
$6{\cdot}79,\ 7{\cdot}02,\ 13{\cdot}68,\ 8{\cdot}87,\ 14{\cdot}09$

Ob predpostavki, da je teža ostrige porazdeljena normalno, poiščite 99% interval zaupanja za pričakovano težo ostrige.

4. [25] V neki raziskavi v ZDA[8] so 1754 mladih in že zaposlenih povprašali, kdo jih je zaposlil. Možnosti so 1: starši, 2: drug sorodnik, 3: prijatelj, 4: družinski prijatelj, 5: sosed, 6: znanec in 7: drugo. Poleg tega pa so gledali tudi regijo, od koder prihaja vprašani. Regije so 1: severovzhod, 2: sever, 3: jug in 4: zahod. Rezultati so naslednji:

regija\razmerje	1	2	3	4	5	6	7
1	65	46	54	47	11	27	64
2	113	67	95	57	7	59	91
3	134	102	117	76	11	55	70
4	98	59	74	53	7	45	50

Ali lahko rečemo, da so razmerja mladih zaposlenih do delodajalcev po regijah različna? Preizkusite pri stopnji tveganja $\alpha = 0{\cdot}05$.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

[8]Vir: `https://www.nlsinfo.org/content/cohorts/nlsy97`, spremenljivki `R1200300` (regija) in `R0102600` (relacija), ogled 23. 8. 2021.

2008/09

1. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
18. november 2008

1. V razredu je 12 deklet in 8 fantov. Na koliko načinov lahko izberemo ekipo za matematično tekmovanje, če morajo biti v ekipi tako dekleta kot fantje? Ekipa lahko šteje največ tri člane.

2. Pri pivu se gredo trije kolegi naslednjo igro: zaporedoma bo vsak med njimi povedal eno število od ena do tri, vendar vsak drugo. Prvi pove število od ena do tri popolnoma naključno. Drugi si želi reči "2", a če je to že rekel prvi, si izbere drugo število, popolnoma slučajno. Tretji pač reče, kar mu je ostalo. Kolikšna je verjetnost, da tretji reče "1"? Kaj pa, da reče "2"?

3. Najprej vržemo pošteno kocko. Nato vržemo toliko kovancev, kolikor je padlo pik na kocki. Kolikšna je verjetnost, da je na kocki padlo pet pik, če na treh kovancih pade cifra?

4. Vržemo štiri kocke hkrati. Z X označimo največje, z Y pa najmanjše število pik, ki padejo na posamezni kocki. Določite porazdelitev slučajnih spremenljivk X in $X - Y$.

2. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
28. januar 2009

1. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 1 \\ \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{5} & ; 1 \leq x < 2 \\ x/c & ; 2 \leq x < c \\ 1 & ; x \geq c \end{cases} .$$

   Določite konstanto c in verjetnost, da je X manjša od 2!

2. Naj bo X slučajna spremenljivka z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Določite kvantil, ki ustreza verjetnosti 1/6.

3. Naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{(3+x)^2} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Določite konstanto c. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $Y = 1/X$?

4. Za diskretno celoštevilsko slučajno spremenljivko X, ki zavzame vrednosti na množici $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, velja:

$$P(X = k) = \frac{k+3}{c}, \text{ za celo število } k, -2 \leq k \leq 2 .$$

   a) Naj bo $Y = \dfrac{2X^3 + 3X^2 - 11X + 6}{6}$. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke Y!

   b) Naj bo $Z = X + Y$. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke Z!

3. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
14. april 2009

1. Igralnica ponuja naslednjo igro: igralec vplača stavo v višini a, nato pa vrže tri kocke, rumeno, zeleno in zlato. Če na vseh treh kockah pade 1, dobi 200. Če na zlati pade 6, dobi 20. Če na zlati ne pade 6 in na rumeni pade več kot na zeleni, dobi 5. Koliko mora biti a, da bo igralnica na dolgi rok poslovala z dobičkom?

2. V posodi je šest kroglic: dve sta beli, dve črni in dve rdeči. Prvi igralec izvleče dve kroglici; če sta iste barve, ju vzame, sicer ju vrne v posodo. Nato je na vrsti drugi igralec, ki prav tako izvleče dve kroglici. Če sta iste barve, ju vzame in še enkrat izvleče dve kroglici. Tudi ti dve vzame, če sta iste brve, sicer ju vrne v posodo (prav tako prvi dve kroglici, če sta različne barve, vrne). S tem zaključi svoje žrebanje. Z X označimo število kroglic, ki jih je dobil prvi igralec, z Y pa število kroglic, ki jih je dobil drugi igralec. Določite korelacijski koeficient slučajnih spremenljivk X in Y! Presenetljivo ali ne?

3. Zavarovalnica je proti nezgodi zavarovala 2000 oseb. Vsako od njih doleti nezgoda z verjetnostjo 0˙0008 in osebe so med seboj neodvisne. Ocenite verjetnost, da se noben zavarovanec ne ponesreči. Kolikšna pa je verjetnost, da se ponesrečijo vsaj trije? (Namesto ocen seveda lahko izračunate prave verjetnosti.)

4. Ocenite verjetnost, da pri 3000 metih dveh kock vsaj 80-krat padeta hkrati dve enici.

4. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
9. junij 2009

1. Populacija X je porazdeljena diskretno po naslednji shemi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ a & b & 1-a-b \end{pmatrix}.$$

Na vzorcu velikosti n mladi statistik definira cenilki:

$$\hat{a} = \frac{\text{število enic v vzorcu}}{n} \quad \text{in} \quad \hat{b} = \frac{\text{število dvojk v vzorcu}}{n}.$$

Ali sta cenilki nepristranski?
Stari statistik definira cenilki:

$$\tilde{a} = \frac{-6\bar{x} + \overline{x^2} + 8}{3} \quad \text{in} \quad \tilde{b} = \frac{5\bar{x} - \overline{x^2} - 4}{2}.$$

Ali sta ti cenilki dosledni?
Koliko so vrednosti cenilk na vzorcu

$$2,\ 1,\ 4,\ 4,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 4\,?$$

2. V letu 2007 so v ZDA izrekli 115 smrtnih obsodb, izvedli pa 42. Določite interval zaupanja za delež izvršenih smrtnih kazni. Uporabite stopnjo zaupanja $\beta = 95\%$.

3. Ob raziskavi posledic finančne krize je agencija Bečovum povprašala naključno(!) izbranih 20 družin o dolžini počitnic v letih 2008 in 2009. Rezultati so zbrani v tabeli.

Družina	2008	2009	Družina	2008	2009
Arko	15	21	Jurc	16	12
Bevk	7	7	Kirn	3	15
Cerk	10	7	Lavš	14	12
Čokl	20	16	Mali	26	32
Dovč	15	0	Novi	30	23
Ekel	28	28	Obir	23	19
Fric	26	8	Pajk	27	12
Govc	15	10	Rajt	24	24
Hujs	20	9	Smet	10	7
Ivič	23	25	Šega	55	60

Testirajte hipotezo, da se dolžina počitnic kljub krizi ni spremenila. Alternativna hipoteza naj bo, da so se počitnice skrajšale. Uporabite stopnjo značilnosti $\alpha = 5\%$. Če boste predpostavili še kaj, to tudi napišite.

4. Ocene pri predmetu *Osnove vzorčenja*, dobljene v prvem tednu junija, so bile:

$$9,\ 10,\ 8,\ 8,\ 9,\ 10,\ 9,\ 6,\ 7,\ 10,\ 9,\ 7\,.$$

V istem tednu so pri predmetu *Slučajni procesi II* študenti dobili naslednje ocene:

$$7,\ 10,\ 6,\ 6,\ 8,\ 10,\ 8,\ 7,\ 6,\ 7\,.$$

Privzemite, da so oboje ocene porazdeljene normalno. Testirajte hipotezo, da je povprečna ocena pri OV enaka kot pri SP II. Vzemite $\alpha = 5\%$ ter alternativno hipotezo, da se povprečni oceni razlikujeta.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
23. junij 2009

1. V stranki *Naša prihodnost* imajo za evropske volitve evidentiranih 10 kandidatov, od tega šest moških in štiri ženske. Na listi za volitve je sedem oštevilčenih kandidatov, pri čemer morata biti poljubna dva zaporedna člana liste različnih spolov.

   Koliko različnih list lahko stranka sestavi iz svojih kandidatov?

2. Naj bo X slučajna spremenljivka z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} cx^2 & ; -1 < x < 2 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   a) Določite kvantil, ki ustreza verjetnosti 95%.

   b) Koliko je $E(X)$?

3. Dani sta neodvisni slučajni spremenljivki X in Y. Dopolnite tabelo njune navzkrižne porazdelitve:

$X \setminus Y$	1	2	3	
2	$\frac{1}{12}$			
4		$\frac{1}{6}$		
8	$\frac{1}{48}$		$\frac{1}{48}$	
16	$\frac{1}{48}$			

   in izračunajte še $\operatorname{cov}(X - Y, X + Y)$.

4. V turističnem kraju zagotavljajo, da v celem letu dežuje le petkrat. V sedmih dneh, kolikor trajajo počitnice družine Mlinar, dežuje dvakrat. Ali naj se gospod Mlinar pritoži turistični agenciji zaradi zavajanja?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
7. september 2009

1. Trije gusarji, Pepe, Robi in Sašo, najdejo zaklad, tri zlatnike. Razdelijo si jih na naslednji način: Pepe in Robi vržeta pošten kovanec. Če pade grb, dobi prvi zlatnik Pepe, sicer ga dobi Robi. Tako en gusar dobi prvi zlatnik, ostala dva gusarja pa nato mečeta kovanec za drugi zlatnik. Za tretji zlatnik se na isti način potegujeta tista dva gusarja, ki nista dobila drugega zlatnika.

   Kateri gusar ima bolj verjetno natanko en zlatnik, Pepe ali Sašo?

2. V skupini je 6 otrok, 4 dekleta in dva fanta. Vsak izmed njih je z verjetnostjo 1/2 okužen z virusom nove gripe, neodvisno od ostalih.

   Zdravniški pregled pokaže, da je natanko eden izmed njih res okužen. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so vsa dekleta zdrava?

3. Slučajna spremenljivka $X \propto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ ? & 1/7 & 2/7 & ? \end{pmatrix}$ ima pričakovano vrednost $E(X) = 2$. Dopolnite njeno porazdelitev! Narišite tudi graf njene porazdelitvene funkcije in izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

4. V dvanajstih zaporednih reklamnih blokih na določenem televizijskem programu se je odvrtelo naslednje število reklam:

   $$17,\ 12,\ 19,\ 14,\ 9,\ 16,\ 15,\ 18,\ 19,\ 14,\ 13,\ 8.$$

   Določite interval zaupanja za število reklam v enem reklamnem bloku. Uporabite stopnjo zaupanja $\beta = 95\%$. Če boste predpostavili še kaj, tudi napišite.

Izpit iz statistike (2008/09)

Praktična matematika
3. marec 2010

A

1. Na polico razporedimo šest leposlovnih knjig (z različnimi naslovi) ter dve matematični knjigi (tudi različni). Opazujemo le medsebojni vrstni red knjig (ne pa recimo njihovo orientacijo ali kaj podobnega).

   a) Na koliko različnih načinov lahko knjige razporedimo na polico?
   b) Koliko je takih načinov, kjer sta prva in zadnja knjiga matematični?
   c) Koliko je takih načinov, kjer sta prva in zadnja knjiga leposlovni?
   d) Koliko je takih načinov, kjer matematični knjigi ne stojita skupaj?

2. Igralec najprej vrže kocko. Če pade tri ali manj, je takoj izgubil. Sicer iz standardnega kupčka 52 dobro premešanih kart (od katerih so štirje asi) izbere toliko kart, kot je vrgel na kocki. V igri zmaga, če izvleče vse štiri ase.

   Martin nam pove, da je pred kratkim igral ter zmagal. Koliko je pogojna verjetnost, da je na kocki vrgel šest?

3. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 1 \\ \dfrac{x^2 - x}{4}, & ; 1 \le x < 2 \\ \dfrac{x}{c} & ; 2 \le x < c \\ 1 & ; x \ge c \end{cases} .$$

   a) Določite konstanto c.
   b) Določite verjetnost, da je X manjša od 2.
   c) Izračunajte kvantil, ki ustreza verjetnosti $\frac{3}{4}$.
   d) Določite $E(X)$.

4. Igralnica ponuja naslednjo igro na srečo: na vplačano stavo s z verjetnostjo 18/37 igralec zmaga, posledično mu igralnica izplača znesek s. Z verjetnostjo 19/37 pa izgubi, v tem primeru on plača igralnici s. Igralec se odloči, da bo v vsaki igri stavil 1.

   Ocenite n, za katerega velja: z verjetnostjo, manjšo od 1%, ima igralec po n igrah več denarja kot na začetku.

Izpit iz statistike (2008/09)

Praktična matematika
3. marec 2010

B

1. Na polico razporedimo dve leposlovni knjigi (z različnimi naslovi) ter šest matematičnih knjig (tudi različnih). Opazujemo le medsebojni vrstni red knjig (ne pa recimo njihovo orientacijo ali kaj podobnega).

   a) Kolikšna je verjetnost, da leposlovni knjigi ne stojita skupaj?
   b) Kolikšna je verjetnost, da sta prva in zadnja knjiga matematični?
   c) Kolikšna je verjetnost, da sta prva in zadnja knjiga leposlovni?

2. Igralec najprej vrže kocko. Nato iz standardnega kupčka 52 dobro premešanih kart (od katerih so štirje asi) izvleče toliko kart, da je vsota števila vrženih pik ter izvlečenih kart enaka 7. V igri zmaga, če izvleče vse štiri desetke.

   Gregor nam pove, da je pred kratkim igral ter zmagal. Koliko je pogojna verjetnost, da je na kocki vrgel ena?

3. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \dfrac{x^2 + x}{c} & ; 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{x + 1}{4} & ; 1 \leq x < 3 \\ 1 & ; x \geq 3 \end{cases} .$$

   a) Določite konstanto c.
   b) Določite verjetnost, da je X manjša od 1.
   c) Izračunajte kvantil, ki ustreza verjetnosti $\frac{3}{4}$.
   d) Določite $E(X)$.

4. Igralnica ponuja naslednjo igro na srečo: na vplačano stavo s z verjetnostjo 18/37 igralec zmaga, posledično mu igralnica izplača znesek s. Z verjetnostjo 19/37 pa izgubi, v tem primeru on plača igralnici s. Igralec se odloči, da bo v vsaki igri stavil 10.

   Ocenite n, za katerega velja: z verjetnostjo, večjo od 99%, ima igralec po n igrah manj denarja kot na začetku.

Izpit iz statistike (2008/09)

Praktična matematika
23. junij 2010

1. V trgovino pride mamica s tremi sinčki. Na prodajni polici je devet avtomobilčkov: trije modri, dva zelena, trije rdeči in en črn. Avtomobilov iste barve med seboj ne ločimo, sinčki pa so različni.

   a) Mamica se odloči, da bo vsak sinko dobil en avto, a vsak različnega. Na koliko načinov jih lahko izbere?

   b) Mamica se odloči, da bodo vsi sinčki dobili enake barve avto (vsak enega). Na koliko načinov jih lahko izbere?

   c) Mamica se odloči, da bo vsak sinko dobil en avto. Na koliko načinov jih lahko izbere?

2. Po podaji Novakoviča ima Ljubijankič v kazenskem prostoru tri enako verjetne možnosti: lahko poda nazaj Novakoviču, lahko strelja na gol ali pa pade in poskuša izsiliti enajstmetrovko. Če strelja, da gol z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Če pade, izsili enajstmetrovko z verjetnostjo $\frac{1}{5}$. Če poda Novakoviču, ta strelja in da gol z verjetnostjo $\frac{1}{4}$, sicer zgreši. Če pride do enajstmetrovke, jo z verjetnostjo $\frac{2}{3}$ izvaja Novakovič (in zadane z verjetnostjo $\frac{3}{4}$), z verjetnostjo $\frac{1}{3}$ pa enajstmetrovko izvaja Ljubijankič (in zadane z verjetnostjo $\frac{4}{5}$).

   Recimo, da je bil gol dosežen. Kolikšna je (pogojna) verjetnost, da ga je dal Novakovič? Kolikšna je (pogojna) verjetnost, da je bil dosežen iz enajstmetrovke?

3. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 1 \\ \dfrac{x^2 - x}{3} & ; 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{x}{c} & ; 2 \leq x < c \\ 1 & ; x \geq c \end{cases}.$$

   a) Določite konstanto c.

   b) Določite verjetnost, da je X manjša od $\frac{5}{2}$.

   c) Izračunajte kvantil, ki ustreza verjetnosti $\frac{1}{4}$.

   d) Določite $E(X)$.

4. Botanik upa, da je s križanjem dobi dve različni sorti orhidej. Meritve velikosti cvetov v eni ter drugi skupini so bile:

Prva skupina:	9.8, 9.0, 8.7, 8.8, 9.1, 9.2, 7.9, 9.7
Druga skupina:	7.8, 9.0, 8.7, 8.1, 9.1, 8.2, 9.1

Privzemite, da so velikosti cvetov porazdeljene normalno. Testirajte hipotezo, da je povprečna velikost cvetov v eni skupini enaka kot v drugi. Vzemite $\alpha = 5\%$ ter alternativno hipotezo, da se povprečni velikosti razlikujeta.

Izpit iz statistike (2008/09)

Praktična matematika
21. september 2010

1. Štirje igralci držijo v rokah vsak eno žogo. Ob pisku piščalke vsak izmed njih vrže žogo enemu izmed ostalih treh (enako verjetno), nato pa ulovi vse žoge, ki so letele proti njemu. Kolikšna je verjetnost, da po izvedenih metih nekdo drži tri žoge?

2. Imamo dve posodi. V prvi posodi so tri bele kroglice, tri črne in dve rdeči. V drugi posodi je pet belih kroglic in tri črne.

   Vržemo pošten kovanec. Če pade grb, izberemo prvo posodo, sicer izberemo drugo posodo. Iz izbrane posode izvlečemo dve kroglici.

   a) Kolikšna je verjetnost, da sta različne barve?
   b) Recimo, da sta izvlečeni kroglici iste barve. Koliko je pogojna verjetnost, da sta beli?

3. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x < -1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{c} & ;\ -1 \le x < 0 \\ 1 - \dfrac{(x-1)^2}{c} & ;\ 0 \le x < 1 \\ 1 & ;\ x \ge 1 \end{cases} .$$

   a) Določite konstanto c.
   b) Določite verjetnost, da je X manjša od $1/2$.
   c) Izračunajte kvantil, ki ustreza verjetnosti $3/4$.
   d) Določite $E(X)$.

4. Starost študenta ob diplomi je porazdeljena normalno s parametroma μ in $\sigma = 3$.

   a) Pri $\mu = 24$ določite verjetnost, da je naključno izbran diplomant starejši od 28 let.
   b) Določite 95% interval zaupanja za μ pri vzorcu

$$23'4\,,\ 24'7\,,\ 25'6\,,\ 21'7\,,\ 28'1\,,\ 25'4\,,\ 24'4\,,\ 24'2\,,\ 25'1\,,\ 23'1\,,\ 24'9\,,\ 25'8\,.$$

Izpit iz statistike (2008/09)

Praktična matematika
9. marec 2011

1. Najprej vržemo pošteno kocko. Nato vržemo toliko kovancev, kolikor je padlo pik na kocki. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je na kocki padlo pet pik, če na treh kovancih pade cifra?

2. Naj bo X slučajna spremenljivka z gostoto

$$p_X(x) = \begin{cases} cx^2 & ; -2 < x < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   a) Določite kvantil, ki ustreza verjetnosti 90%.
   b) Koliko je $E(X)$?

3. Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki. Dopolnite tabelo njune navzkrižne porazdelitve:

$X \setminus Y$	1	2	3	
2	$\frac{1}{12}$			$\frac{1}{2}$
4		$\frac{1}{6}$		
8	$\frac{1}{48}$		$\frac{1}{48}$	
16	$\frac{1}{48}$			

   Izračunajte še $\operatorname{cov}(X - Y, X + Y)$.

4. V dvanajstih zaporednih reklamnih blokih na določenem televizijskem programu se je odvrtelo naslednje število reklam:

$$14,\ 9,\ 16,\ 11,\ 6,\ 13,\ 12,\ 15,\ 16,\ 11,\ 10,\ 5\,.$$

   Določite interval zaupanja za število reklam v enem reklamnem bloku. Uporabite stopnjo zaupanja $\beta = 95\%$. Če boste predpostavili še kaj, to tudi napišite.

Izpit iz statistike (2008/09)

Praktična matematika
29. avgust 2011

1. V posodi so štiri kroglice, tri bele in ena črna. Najprej slučajno izberemo eno in jo, ne da bi jo pogledali, odstranimo iz posode. Nato slučajno izberemo eno izmed preostalih treh kroglic in jo pogledamo ter nato vrnemo v posodo. To ponovimo še enkrat. Kolikšna je verjetnost, da v drugem delu poskusa dvakrat vidimo belo kroglico?

   Recimo, da smo v drugem delu vedno videli belo kroglico. Kolikšna je pogojna verjetnost, da smo na začetku odstranili iz posode črno kroglico?

2. Naj bo X slučajna spremenljivka z gostoto:

$$p_X(x) = \begin{cases} c(x-1) & ; 1 < x < 2 \\ c & ; 2 < x < 3 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

   Določite kvantil, ki ustreza verjetnosti 80%. Koliko je $E(X)$?

3. Vržemo dve kocki. Z X označimo število padlih šestic. Nato vržemo X poštenih kovancev ter z Y označimo število padlih grbov. Zapišite tabelo njune navzkrižne porazdelitve! Izračunajte korelacijski koeficient ρ med X in Y!

4. Ocene pri predmetu *Osnove vzorčenja*, dobljene v prvem tednu junija, so bile:

$$9,\ 10,\ 8,\ 8,\ 9,\ 10,\ 9,\ 6,\ 7,\ 10,\ 9,\ 7\,.$$

   V istem tednu so pri predmetu *Slučajni procesi II* študenti dobili naslednje ocene:

$$7,\ 10,\ 6,\ 6,\ 8,\ 10,\ 8,\ 7,\ 6,\ 7\,.$$

   Predpostavite, da so oboje ocene porazdeljene normalno. Testirajte hipotezo, da je povprečna ocena pri OV enaka kot pri SP II. Vzemite $\alpha = 5\%$ ter alternativno hipotezo, da se povprečni oceni razlikujeta.

2007/08

1. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
27. november 2007

1. Na polici je deset različnih knjig, tri matematične in sedem romanov. Na koliko načinov so lahko razporejene, če

   - morajo biti matematične knjige skupaj?
   - morajo biti romani skupaj?
   - morajo biti matematične knjige skupaj ter romani tudi skupaj?

   Na koliko načinov lahko Alenka izmed teh knjig izbere eno matematično in dva romana?

2. Aleksander vrže pošteno kocko. Nato iz kupa 52 dobro premešanih kart izbere toliko kart, kolikor je padlo število pik na kocki, a ne več kot tri. Določite verjetnost, da Aleksander ne izbere nobenega asa.

3. Ana pošlje moža na trg po solato, ki jo prodajata dve branjevki, Francka in Micka. Verjetnost, da mož kupi solato pri Francki, je 40%, verjetnost, da kupi pri Micki, pa 60%. Francka ima 10%, Micka pa 20% nagnite solate. Mož prinese domov nagnito glavo solate in Ana ga nahruli: "Drugič raje glej solato, ne pa Micke!" Kolikšna je verjetnost, da je mož res kupil solato pri Micki?

4. Anton igra naslednjo igro na srečo: vrže dve kocki, in če na njiju pade isto število pik, dobi toliko evrov, kolikor je padlo na obeh kockah skupaj. Če na kockah padeta različni števili, mora plačati toliko evrov, kot znaša večje izmed obeh padlih števil. Z X označite Antonov dobiček.

   a) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

   b) Kolikšna je verjetnost, da Anton v petih ponovitvah te igre natanko dvakrat dobi?

2. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
25. januar 2008

1. Naj bo X slučajna spremenljivka, za katero velja $P(X = k) = c \cdot \frac{1}{3^k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Določite konstanto c. Določite verjetnost, da je X deljiva z 2!

2. Naj bo X slučajna spremenljivka z gostoto $p_X(x) = 2e^{-2x}, x > 0$. Določite kvantil, ki ustreza verjetnosti $\frac{1}{3}$. Kako je porazdeljena spremenljivka $Y = 3X$?

3. Naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto

$$p_X(x) = \begin{cases} x & ;\ 0 \le x < 1 \\ \dfrac{x^2}{7} & ;\ 1 \le x < 2 \\ c\,x^{-2} & ;\ 2 \le x < 4 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}.$$

   Določite konstanto c ter izračunajte $E(X)$ in $E\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

4. Za diskretni celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y velja:

$$P(X = k, Y = l) = \frac{k}{20} \text{ za celi števili } k, l, 1 \le k \le l \le 4\,.$$

   Naj bo $Z = Y - X$. Določite porazdelitev slučajne spremenljivke Z!

3. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
16. april 2008

1. Vržemo tri kovance: enega za 1€ in dva za 2€. Z X označimo **število** grbov, z Y pa **vsoto** cifer, ki padejo. Določite navzkrižno in robni porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y. Izračunajte $\mathrm{cov}(X, Y)$.

2. Za diskretni celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y velja:

$$P(X = k, Y = l) = k/20, \text{ za celi števili } k, l, 1 \leq k \leq l \leq 4\,.$$

   Izračunajte $E(X \mid Y = 3)$.

3. Dani sta zvezni slučajni spremenljivki, za kateri velja $E(X) = 2$, $E(Y) = 3$, $\mathrm{var}(X) = 9$, $\mathrm{var}(Y) = 25$ in $\mathrm{cov}(X, Y) = -6$. Določite konstanto a, za katero bosta $X + aY$ in Y nekorelirani.

4. Ocenite verjetnost, da je med 10.000 čebulicami tulipanov vsaj 1950 rdečih, če je verjetnost, da je posamezna čebulica rdeča, enaka 20%.

4. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
30. maj 2008

1. Lončar mora izdelati 50 lončenih posod. Peč ima majhno, tako da peče eno posodo naenkrat. Verjetnost, da posoda med pečenjem poči, je 10%. Ocenite verjetnost, da bo moral lončar peči vsaj 60-krat. Odgovor utemeljite!

   Namig: dogodek opišite s pomočjo ustrezne binomske slučajne spremenljivke, to pa aproksimirajte z ustrezno normalno!

2. Populacija X je porazdeljena diskretno po naslednji shemi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ a & b & 1-a-4b & 3b \end{pmatrix}$$

   Po metodi največjega verjetja iz vzorca:

$$2,\ 1,\ 4,\ 8,\ 8,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1,\ 8$$

   ocenite parametra a in b. Ali dobimo isto oceno kot po metodi momentov?

3. Raziskovalci z Univerze v Rochestru so študirali trenje, ki nastane v procesu zajemanja papirja iz kasete v fotokopirnem stroju (Journal of Engineering for Industry, May 1993). Poskus je vseboval opazovanje zamika posameznih listov papirja v kupu, s katerega je fotokopirni stroj zajemal. Posamezno zajemanje je označeno kot uspešno, če se noben list ni zamaknil za več kot 25% celotne predvidene dolžine premika. V kupu stotih listov je bilo zajemanje uspešno 95-krat. Določite 90% interval zaupanja za verjetnost, da je zajemanje enega lista uspešno!

4. Oblikovalec igrač želi oceniti povprečen čas sestavljanja igrače, ki bi jo prodajal pod blagovno znamko "Lahko za sestavit". Vzorec 9 časov sestavljanja (v minutah) je

   `25 22 33 23 33 14 28 18 20`

   Predpostavite, da so časi normalno porazdeljeni, ter pri stopnji značilnosti $\alpha = 0\dot{}05$ testirajte hipotezo, da je povprečen čas sestavljanja enak 20, proti alternativni hipotezi, da je povprečen čas večji od 20.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
23. junij 2008

1. Aleksander vrže pošteno kocko. Nato iz dobro premešanega kupa 52 standardnih kart izbere toliko kart, kolikor je padlo število pik na kocki, a ne več kot tri. Določite verjetnost, da Aleksander ne izbere nobene sedmice. Kolikšna pa je verjetnost, da ne izbere nobene številke (od 2 do 10)?

2. Naj bo X slučajna spremenljivka z gostoto $p_X(x) = c\,e^{-4x}, x > 0$.

   a) Določite kvantil, ki ustreza verjetnosti $1/4$.

   b) Kako je porazdeljena spremenljivka $Y = 4 \cdot X$?

3. Vsako leto na Zemljo pade 84.000 meteoritov. Verjetnost, da je posamezen meteorit težji od 10 gramov, znaša 0˙1%. Ocenite verjetnost, da v enem letu na Zemljo pade več kot 100 meteoritov, težjih od 10 gramov.

   Verjetnost, da je meteorit, ki pade na Zemljo, težji od ene tone, je 10^{-9}. Verjetnost, da v n letih zabeležimo vsaj en tak meteorit, je 50% – koliko približno je n?

4. Populacija X je porazdeljena diskretno po naslednji shemi:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ a & \star & 3a & 2b & b \end{pmatrix}$$

   Po metodi momentov iz vzorca:

$$-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ -2,\ 1,\ -2,\ 0$$

   ocenite parametra a in b. Ali dobimo isto oceno kot po metodi največjega verjetja?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
27. avgust 2008

1. Za okroglo mizo se usede šest ljudi, popolnoma naključno. Dva med njimi sta skregana. Kolikšna je verjetnost, da se ne usedeta skupaj?

   Druga dva sta velika prijatelja (morda tudi kaj več). Kolikšna je verjetnost, da se usedeta skupaj?

   Kolikšna pa je verjetnost, da hkrati skregana ne sedita skupaj ter velika prijatelja sedita skupaj?

2. Naj bo X slučajna spremenljivka z gostoto $p_X(x) = cx^4, 0 < x < 2$.

   a) Določite kvantil, ki ustreza verjetnosti $\frac{1}{4}$.
   b) Izračunajte $E(X)$, $\mathrm{var}(X)$ in $\mathrm{var}(1/X^2)$.

3. Ocenite verjetnost, da je med 10.000 čebulicami tulipanov vsaj 1950 rdečih, če je verjetnost, da je posamezna čebulica rdeča, enaka 20%.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

   $$36, 41, 38, 36, 42, 37, 41, 34, 37, 38\,.$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 5\%$ testirajte ničelno hipotezo, da je $\mu = 40$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu \neq 40$. Kaj pa, če bi za alternativno hipotezo vzeli, da je $\mu < 40$?

Izpit iz statistike

Praktična matematika

16. september 2008

1. Na šestih listkih imamo zapisane naslednje številke (na vsakem eno): $1, 2, 3, 3, 4, 5$. Naključno izberemo tri listke ter jih postavimo enega zraven drugega. Preberemo število. Kolikšna je verjetnost, da je tako prebrano število deljivo s pet? Kaj pa, da je deljivo s tri?

2. Naj bo X slučajna spremenljivka z gostoto $p_X(x) = \dfrac{c}{\sqrt{x}}$, $1 < x < 2$.

   a) Določite kvantil, ki ustreza verjetnosti $\frac{1}{4}$.

   b) Izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

3. Ocenite verjetnost, da je med 3.000 proizvedenimi baloni ne več kot 25 počenih, če proizvajalec zagotavlja, da naj bi bilo 99% vseh balonov brezhibnih.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

   $$16,\ 21,\ 18,\ 16,\ 22,\ 17,\ 21,\ 14,\ 17,\ 18\,.$$

   Pri stopnji značilnosti $\alpha = 5\%$ testirajte ničelno hipotezo, da je $\mu = 21$, proti alternativni hipotezi, da je $\mu \neq 21$. Kaj pa, če bi za alternativno hipotezo vzeli, da je $\mu < 21$?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
3. februar 2009

1. Za okroglo mizo se usedejo zakonca Ambrož, zakonca Barle in zakonca Cestnik, naključno, a tako, da vsaka ženska sedi med dvema moškima.

   a) Kolikšna je verjetnost, da zakonca Barle sedita skupaj, torej na sosednih stolih?

   b) Kolikšna je verjetnost, da vsaj kak par sedi skupaj?

2. Naj bo X zvezna slučajna spremenljivka s porazdelitveno funkcijo:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 1 \\ \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{5} & ; 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{x}{c} & ; 2 \leq x < c \\ 1 & ; x \geq c \end{cases} .$$

   a) Določite konstanto c.

   b) Določite kvantil, ki ustreza verjetnosti $1/5$.

   c) Izračunajte $E(X)$.

3. Ocenite verjetnost, da v 8.000 metih poštene kocke šestica ne pade več kot 1300–krat.

4. Meritve neke količine, porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$, dajo naslednje vrednosti:

$$7,\ 12,\ 9,\ 7,\ 13,\ 8,\ 12,\ 5,\ 8,\ 9\,.$$

   Določite interval zaupanja za μ. Stopnja zaupanja β naj bo 95%.

2006/07

1. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
30. november 2006

1. (25) Imamo 3 množice cifer: $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B := \{3, 5, 7\}$ in $C := \{0, 3, 9\}$.

   a. (5) Koliko je vseh različnih osemmestnih števil, sestavljenih iz cifer množic A in B? Vska cifra se lahko ponovi natanko tolikokrat, v kolikor množicah je vsebovana.

   b. (10) Koliko je vseh različnih enajstmestnih števil, sestavljenih iz cifer množic A, B in C? Pri tem se neka cifra lahko ponovi natanko tolikokrat, v kolikor množicah je vsebovana.

   c. (10) Koliko je vseh različnih tromestnih števil, sestavljenih iz cifer množic A in B? Pri tem se neka cifra lahko ponovi natanko tolikokrat, v kolikor množicah je vsebovana.

2. (25) Na letalo z n sedeži se bo vkrcalo n potnikov. Vsi imajo že določeno številko sedeža, na letalo pa bodo prišli v istem vrstnem redu, kot so njihove številke sedežev. Prva oseba, ki pride na letalo, naključno izbere sedež s številkami $2, 3, \ldots, n$, tako da je verjetnost izbire vsakega sedeža $1/(n-1)$. Ostali se vsedejo na svoj sedež, če je prost, če ne, pa naključno izberejo med sedeži, ki so še na voljo. Označite z A_i dogodek, da bo i-ti potnik, ki se bo vkrcal, sedel na svoj sedež.

   a. (10) Izračunajte $P(A_2)$ in $P(A_3)$.

   b. (15) Označite $H_k = \{\text{prvi potnik je izbral sedež } k\}$ za $k = 2, 3, \ldots, n$. Pokažite, da za $2 \le k < n$ velja

   $$P(A_n|H_k) = \frac{1}{n-k+1}\left(1 + P(A_n|H_{k+1}) + P(A_n|H_{k+2}) + \cdots + P(A_n|H_n)\right) .$$

3. (25) Naj bodo A, B in C med sabo neodvisni dogodki z verjetnostmi a, b in c.

   a. (10) Izračunajte verjetnost dogodka $A \cap B \cap C^c$.

   b. (15) Izračunajte verjetnost dogodka $A^c \cap B^c \cap C^c$.

4. (25) V posodi imamo b belih in r rdečih kroglic. Privzemite, da bomo kroglice izbirali eno po eno brez vračanja, tako da ima pri vsakem izbiranju vsaka kroglica enako verjetnost, da bo izbrana. Naj bo X število izbiranj do prve rdeče kroglice, vključno z izbrano rdečo.

   a. (15) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

   b. (10) Izračunajte verjetnost $P(X > k)$ za $k = 0, 1, \ldots, b$.

2. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
31. januar 2007

1. (25) V posodi je n belih in n rdečih kroglic. Kroglice izbiramo naključno po vrsti brez vračanja, dokler ne izberemo ali n belih ali n rdečih kroglic. Označimo število potrebnih izbiranj z X.

   a. (15) Poiščite verjetnost $P(X \leq k)$ za $k = n, n+1, \ldots, 2n-1$.

   b. (10) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

2. (25) Igralci A, B in C igrajo naslednjo igro: v posodi je a belih in b črnih kroglic. Igralci izbirajo kroglice naključno z vračanjem v vrstnem redu $ABCABC\ldots$ [9] Zmaga tisti igralec, ki prvi izbere belo kroglico.

   a. (15) Recimo, da je se začne nova "runda" vsakič, ko izbira A. Naj bo Y število rund, ki jih bodo igrali igralci, dokler nekdo od njih ne zmaga. Primer: če je bilo $ABCABCAB$ in je B prvi potegnil belo kroglico, je zmagal B v tretji rundi. Opišite porazdelitev Y.
   Namig: $(1-q)(1+q+q^2) = 1-q^3$.

   b. (10) Izračunajte verjetnosti za zmago za posamezne igralce.

3. (25) Na voljo vam je naslednja igra na srečo. Stavite \$ 1 na neko število, ki lahko pade na pošteni igralni kocki. Nato vržete 4 poštene kocke. Če se vaše stavljeno število ne pojavi na nobeni kocki, izgubite stavo, v nasprotnem primeru dobite toliko dolarjev, kolikor kock je padlo s to vrednostjo. Naj bo X dobiček ob koncu te igre.

   a. (10) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

   b. (15) Izračunajte pričakovani dobiček $E(X)$ ter varianco $\mathrm{var}(X)$ v tej igri.

4. (25) V nekem bloku živi n poročenih parov. V času zimskih obolenj naključno zboli m ljudi tega bloka ne glede na starost ali spol, pri čemer je $m \leq 2n$.

   a. (10) V bloku živita tudi zakonca Zupan. Določi verjetnost, da sta oba zakonca zdrava.

   b. (15) Z X označimo slučajno spremenljivko, ki nam pove število parov, v katerih sta obe osebi zdravi. Določi matematično upanje slučajne spremenljivke X.

[9] Problem iz knjige Christian Huygens *De Raciociinis in Ludo Aleae*, 1657. Christian Huygens (1629-1695), nizozemski matematik.

3. kolokvij iz statistike

Praktična matematika

11. april 2007

1. (25) V posodi je 6 belih in 4 rdeče kroglice. Kroglice iz posode izbiramo naključno po vrsti brez vračanja. Naj bo X število belih kroglic, preden dobimo prvo rdečo kroglico, Y pa število belih kroglic med prvo in drugo rdečo kroglico.

   a. (15) Poiščite večrazsežno porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.

   b. (10) Pokažite, da imata spremenljivki X in Y enako porazdelitev. Izračunajte porazdelitev Y.

   Namig: Porazdelitev X izračunajte posebej, ne kot robno porazdelitev. Nato uporabite simetrijo večrazsežne porazdelitve.

2. (25) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana z gostoto

$$p_{X,Y}(x,y) = cx^3y$$

   za $x, y \in [0,1]$.

   a. (5) Določite konstanto c.

   b. (10) Določite robni gostoti $p_X(x)$ ter $p_Y(y)$.

   c. (10) Izračunajte še $E(XY^3)$ ter $\mathrm{cov}(X,Y)$.

3. (25) Naj bo $n > 1$ dano naravno število. Slučajni spremenljivki X in Y imata porazdelitev dano z

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{n(n-k)}$$

   za $1 \le k < n$ in $1 \le l \le n-k$ in

$$P(X = n, Y = 0) = \frac{1}{n}\,.$$

   a. (10) Izračunajte $E(Y|X = k)$ za $k < n$.

   b. (15) Izračunajte še $E(Y|X = n)$ in $E(Y)$.

4. (25) Za proces razvejanja $Z_0, Z_1, \ldots$ naj velja

$$G(s) = G_{Z_1}(s) = \left(\frac{1}{2-s^2}\right)^{1/2}\,.$$

   a. (10) Izračunajte $E(Z_2)$.

   b. (15) Z matematično indukcijo pokažite, da je

$$G_n(s) = \left(\frac{n-(n-1)s^2}{n+1-ns^2}\right)^{1/2}$$

   in izračunajte $P(Z_n = 0)$ za $n = 1, 2, \ldots$.

4. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
16. maj 2007

1. (25) Kot znano upoštevajte, da je

$$\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

   za $|x| < 1$.

   a. (10) Naj za slučajno spremenljivko X velja

   $$P(X = k) = \frac{(1-p)^k}{k \log(1/p)}$$

   za $k = 1, 2, \ldots$ in $p \in (0, 1)$. Izračunajte rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X.

   b. (15) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne spremenljivke z enako porazdelitvijo kot spremenljivka X iz a. Naj bo N od njih neodvisna slučajna spremenljivka s Poissonovo porazdelitvijo s parametrom $\lambda = -m \log p$ za neko celo število $m \geq 1$. Naj bo

   $$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N\,.$$

   Izračunajte $P(Y = k)$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$. Kot znano upoštevajte Newtonovo formulo

   $$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

   za $|x| < 1$.

2. (25) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja. Slučajno število Y potomcev vsakega posameznika naj ima porazdelitev

$$P(Y = k) = 2^{-(k+1)}$$

   za $k = 0, 1, \ldots$.

   a. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je rodovna funkcija $G_n(s)$ spremenljivke Z_n enaka

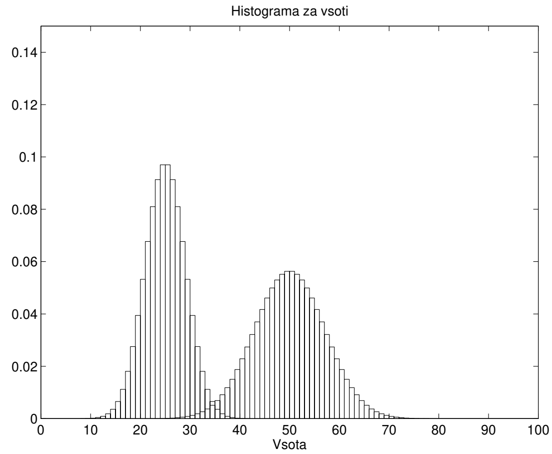
   $$G_n(s) = \frac{n - (n-1)s}{n + 1 - ns}\,.$$

   b. (15) Izračunajte $E(Y)$ in $P(Z_n = 0)$ in izračunajte $P(\text{proces izumre})$. Kako se to ujema s teorijo?

3. (25) Na sliki 1 sta histograma za porazdelitvi vsot 25 neodvisnih izbiranj iz ene od naslednjih dveh škatel:

(i) $\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{2}$

(ii) $\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}$



Sl. 1 Histograma za vsote neodvisnih izbiranj iz škatel (i) ali (ii).

a. (15) Kateri od zgornjih dveh histogramov pripada škatli (i) in kateri škatli (ii)? Utemeljite odgovor.

b. (10) Izračunajte približno verjetnost, da bo vsota 25 izbiranj iz škatle (ii) večja ali enaka 40.

4. (25) Dva strastna igralca na srečo igrata ruleto v neskončnost. Ruletni cilinder ima 37 izsekov, od katerih je 18 rdečih, 18 črnih in 1 zelen. Prvi igralec vedno stavi 1€ na rdeče, drugi pa vedno stavi 1€ na številko 17, ki je črna. Čisti dobiček po eni igri je v primeru zmage za prvega 1€, za drugega pa 35€, v nasprotnem primeru pa oba izgubita stavo v višini 1€.

a. (10) Ocenite verjetnost, da drugi igralec po 2000 igrah nima izgube.

b. (15) Označite z X_n čisti profit prvega igralca po n igrah, z Y_n pa profit drugega igralca po n igrah. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n > X_n) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n - X_n > 0)\,.$$

Utemeljite vaš razmislek.

Namigi: Napišite $Y_n - X_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k - V_k)$*, kjer je* V_k *čisti profit prvega igralca v* k*-ti igri in* U_k *čisti profit drugega igralca v isti igri. Slučajne spremenljivke* $U_k - V_k$ *so med sabo neodvisne z enako porazdelitvijo in* $\mathrm{var}(U_k - V_k) = 1368/37$.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
1. junij 2007

1. (20) Imamo 3 množice cifer: $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B := \{3, 5, 7\}$ in $C := \{0, 3, 9\}$.

   a. (5) Koliko je vseh različnih osemmestnih števil, sestavljenih iz cifer množic A in B? Vska cifra se lahko ponovi natanko tolikokrat, v kolikor množicah je vsebovana.

   b. (5) Koliko je vseh različnih enajstmestnih števil, sestavljenih iz cifer množic A, B in C? Pri tem se neka cifra lahko ponovi natanko tolikokrat, v kolikor množicah je vsebovana.

   c. (10) Koliko je vseh različnih tromestnih števil, sestavljenih iz cifer množic A in B? Pri tem se neka cifra lahko ponovi natanko tolikokrat, v kolikor množicah je vsebovana.

2. (20) Na srečelovu imajo srečke spravljene v dveh vrečkah. V prvi vrečki v vsakem trenutku zadene 30% srečk, v drugi pa 60%. Za vplačanim zneskom vedno najprej vržemo pošteno igralno kocko. Če pade enica, moramo izvleči dve srečki iz prve vrečke, če pade katerokoli drugo število pik, moramo izvleči dve srečki iz druge vrečke.

   a. (10) Določi verjetnost, da pri vplačanem znesku za dve srečki (in enem metu kocke), zadanemo na obe srečki.

   b. (10) Naš sosed na levi je izvlekel eno prazno in eno polno srečko. Določi verjetnost, da je na kocki vrgel enico.

3. (20) Užaljeni A je ljubimcu B svoje žene napovedal dvoboj. Pravila za dvoboj so naslednja: A in B bosta izmenično streljala eden na drugega, dokler ne bo nekdo od njiju zadet. Privzemite, da so posamezni streli med seboj neodvisni, A zadene z verjetnostjo a in B zadene z verjetnostjo b.

   a. (10) Recimo, da začne streljati A. Kolikšna je verjetnost, da se bo A uspešno maščeval?

      Namig: Izrazite dogodek, da A zmaga, z dogodki

      $$A_k = \{A \text{ zadene prvi v svojem } k\text{-tem poskusu}\}.$$

   b. (10) Naj bo X celotno število strelov, vključno z zadnjim. Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X in njeno matematično upanje. Privzemite, da je začel streljati A.

4. (20) Naj bo $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ proces razvejanja, in naj bo $\eta = P(\cup_n \{Z_n = 0\})$ verjetnost, da proces "izumre".

   a. (10) Porazdelitev slučajnega števila potomcev naj ima rodovno funkcijo $G(s) = q + ps^2$ z $0 < p < 1$ in $q = 1 - p$. S pomočjo rodovnih funkcij izračunajte verjetnost, da proces izumre pred 3. generacijo, torej da v 3. generaciji ni več nikogar.

   b. (10) Za katere $p \in (0, 1)$ ima proces pozitivno verjetnost, da preživi?

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
3	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{b}{24}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{a}{24}$	$\frac{c}{24}$

   a. (10) Določite število a tako, da bo $E(Y|X = 2) = 3$.

   b. (10) Določite števila a,b in c tako, da bo $E(Y|X) = X + 1$.

6. (20) Zdolgočaseni statistik je n-krat z vračanjem izbiral lističe iz spodnjih škatel. Števila na izbranih lističih je označil z $X_1, X_2, \ldots, X_n$, njihovo vsoto pa z S_n.

   (i) $\boxed{-1}\ \boxed{0}\ \boxed{1}$

   (ii) $\boxed{-1}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{1}$

   a. (10) Statistik je izračunal

$$P(-30 \leq S_{1000} \leq 30) \doteq 0{\cdot}96\,.$$

   Za katero od škatel je računal verjetnosti? Utemeljite odgovor.

   b. (10) Statistik je izračunal $P(S_{100} = 0) \doteq 0{\cdot}049$. Katero škatlo je obravnaval?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
29. junij 2007

1. (20) Imamo 3 množice cifer: $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B := \{3, 5, 7\}$ in $C := \{0, 3, 9\}$.

   a. (5) Koliko je vseh različnih osemmestnih števil, sestavljenih iz cifer množic A in B? Vska cifra se lahko ponovi natanko tolikokrat, v kolikor množicah je vsebovana.

   b. (5) Koliko je vseh različnih enajstmestnih števil, sestavljenih iz cifer množic A, B in C? Pri tem se neka cifra lahko ponovi natanko tolikokrat, v kolikor množicah je vsebovana.

   c. (10) Koliko je vseh različnih tromestnih števil, sestavljenih iz cifer množic A in B? Pri tem se neka cifra lahko ponovi natanko tolikokrat, v kolikor množicah je vsebovana.

2. (20) V vsakem zaboju breskev je 20% gnilih. Janez in Metka kupita 2 takšna zaboja s po 25 breskvami.

   a. (10) Janez preloži naključno 2 breskvi iz prvega v drugi zaboj. Metka naključno izbere breskev iz prvega (sedaj manjšega) zaboja. Določi verjetnost, da je njena breskev gnila.

   b. (10) Janez preloži 5 breskev naključno iz prvega v drugi zaboj. Določi verjetnost, da je v preostanku prvega zaboja vsaj ena gnila breskev.

3. (20) Picko in Packo igrata naslednjo igro. Najprej Picko plača Packu 9 evrov. Nato pa mečeta pošten kovanec, dokler ne pade cifra, vendar največ desetkrat. Če cifra pade v n-tem metu, plača Packo Picku 2^n evrov (če pa cifra v desetih metih ne pade, Packo ne plača ničesar).

   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da ima Packo izgubo?

   b. (10) Naj bo X Packov dobiček (če je negativen, ima Packo izgubo). Izračunajte $E(X)$.

4. (20) Naj bo $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ proces razvejanja, in naj bo $\eta = P(\cup_n \{Z_n = 0\})$ verjetnost, da proces "izumre".

   a. (10) Porazdelitev slučajnega števila potomcev naj ima rodovno funkcijo $G(s) = q + ps^2$ z $0 < p < 1$ in $q = 1 - p$. S pomočjo rodovnih funkcij izračunajte verjetnost, da proces izumre pred 3. generacijo, torej da v 3. generaciji ni več nikogar.

   b. (10) Za katere $p \in (0, 1)$ ima proces pozitivno verjetnost, da preživi?

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{a}{24}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{b}{24}$
3	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{c}{24}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{d}{24}$

a. (10) Določite število a tako, da bo $E(X|Y=1)=2$.

b. (10) Ali je možno določiti števila a,b, c in d tako, da bo $E(Y|X)=2$?

6. (20) Zdolgočaseni statistik je n-krat z vračanjem izbiral lističe iz spodnjih škatel. Števila na izbranih lističih je označil z $X_1, X_2, \ldots, X_n$, njihovo vsoto pa z S_n.

(i) $\boxed{-2}\quad\boxed{0}\quad\boxed{1}$

(ii) $\boxed{-1}\quad\boxed{-1}\quad\boxed{-1}\quad\boxed{-1}\quad\boxed{0}\quad\boxed{0}\quad\boxed{0}\quad\boxed{0}\quad\boxed{1}$

a. (10) Statistik je izračunal

$$P(-360 \leq S_{1000} \leq -300) \doteq 0{\cdot}84\,.$$

Za katero od škatel je računal verjetnosti? Utemeljite odgovor.

b. (10) Statistik je izračunal $P(S_{100}=-50) \doteq 0{\cdot}013$. Katero škatlo je obravnaval?

2005/06

1. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
6. december 2005

1. (25) V skupini otrok imamo n dečkov in n deklic. Otroke bi radi razmestili po parih, tako da dobimo n parov.

   a. (10) Na koliko načinom lahko otroke razmestimo po parih, tako da bodo pari mešani po spolu?

   b. (15) Prešteti želimo še vse razmestitve po parih ne glede na spol. Uporabite naslednji algoritem: $2n$ dečkov in deklic oštevilčite z $1, 2, \ldots, 2n$. Najprej otroku 1 izberite partnerja. V naslednjem koraku izberite partnerja otroku, ki še nima partnerja, ima pa najmanjšo stevilko med preostalimi otroci. Postopek nadaljujte, dokler vsem otrokom ne dodelite partnerja. Primer izbire s takim algoritmom:
   $$(1, 5), (2, 3), (4, 8), \ldots$$
   Preštejte vse razmestitve.

2. (20) Na mizi sta dve posodi. V eni je 20 raznobarvnih kroglic: 10 belih, 5 črnih in 5 zelenih, druga pa je še prazna. Iz polne posode sočasno izvlečemo dve kroglici. Najključno izberemo eno izmed njiju in jo pogledamo. Nato spustimo kroglici v prazno posodo. Posodo pretresemo in iz nje naključno izvlečemo kroglico.

   a. (10) Dokažite formulo
   $$P(A|B) = P(A|B \cap C) \cdot P(C|B) + P(A|B \cap C^c) \cdot P(C^c|B)\,.$$

   b. (10) Izračunajte pogojno verjetnost, da bo kroglica izvlečena iz druge posode bela pri pogoju, da je bila kroglica, ki smo jo pogledali bela.

3. (25) Iz kraja A v kraj B peljeta dve cesti. Iz kraja B v kraj C tudi peljeta dve cesti. Vsaka od cest je neprehodna z verjetnostjo p neodvisno od stanja ostalih cest.

   a. (10) Izračunajte verjetnost, da ni prehodne poti iz kraja A v kraj C.

   b. (15) Izračunajte verjetnost, da lahko pridemo iz kraja A v kraj B pri pogoju, da ni prehodne poti iz kraja A do kraja C.

4. (25) V skupini $2n$ otrok je n dečkov in n deklic. Privzemite, da je $n = 2m$ za neko celo število m. Kot znano upoštevajte, da lahko $2n$ otrok razmestimo v n parov na
   $$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$
   načinov. Če $2n$ otrok povsem naključno razmestimo po parih, bo število parov, v katerih sta dva dečka, slučajna spremenljivka. Označimo jo z X. "Povsem naključno" pomeni, da je vsaka razmestitev po parih enako verjetna.

a. (15) Preštejte, koliko je takih razmestitev po parih, v katerih je natanko k parov, v katerih sta dečka.

   Namig: V takih razmestitvah mora biti tudi točno k parov iz deklic in $4m - 4k$ mešanih parov.

b. (10) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

2. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
26. januar 2006

1. (25) V posodi je B belih in R redečih kroglic. Iz posode izbiramo kroglice po vrsti povsem naključno, dokler ne izberemo vseh B belih kroglic. Označite z X število vseh izbiranj vključno z zadnjim izbiranjem.

   a. (15) Izračunajte verjetnost $P(X \leq k)$ za vse $k = B, B+1, \ldots, B+R$.

   b. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X.

2. (25) Spomladi na vrtu raste n marjetic, n zvončkov in n telohov, kjer je n neko naravno število. Naključno sestavimo šopek $2n$ cvetlic. Pri tem nam naj slučajne spremenljivke X, Z in T zaporedoma povejo število marjetic, zvončkov in telohov v šopku.

   a. (10) Določite verjetnost, da je v šopku toliko marjetic kot zvončkov in telohov skupaj.

   b. (15) Določite porazdelitve slučajnih spremenljivk X, Z in T ter njihova upanja.

3. (20) Kovanec mečemo, dokler ne pade vsaj en grb in vsaj ena številka. Označimo število potrebnih metov z X. Meti so med sabo neodvisni in verjetnost za grb v vsakem metu je p.

   a. (10) Poiščite $P(X = k)$ za $k = 2, 3, \ldots$.

   b. (10) Izračunajte $E(X)$.
   Namig: Če je $Y \propto \mathrm{Geom}(\rho)$, *je* $E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\rho)^{k-1}\rho = 1/\rho$.

4. (20) Daniel Bernoulli je leta 1768 zastavil naslednji problem: Imamo $2n$ zakonskih parov in naj bo $m \leq 2n$ dano naravno število. Privzemite, da Bog naključno izbere m izmed $2n$ ljudi in jih pokliče k sebi (to je znano tudi kot to, da izbranih m ljudi umre). Naj bo X slučajno število še živečih parov.

   a. (10) Izberite nek par in izračunajte verjetnost, da par preživi.

   b. (15) Izračunajte $E(X)$.

3. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
18. april 2006

1. (25) V zavarovalništvu prihodnjo življenjsko dobo zavarovanca razumemo kot slučajno spremenljivko T z zvezno porazdelitvijo z gostoto $p_T(t)$. Ena od pogosto privzetih gostot je *Gompertzova*, dana z

$$p_T(t) = c^t \exp\left(-\frac{c^t - 1}{\log c}\right)$$

za konstanto $c > 1$ za $t \geq 0$.

   a. (15) Izračunajte verjetnost $P(k \leq T < k + 1)$ za celo število $k \geq 0$.
   b. (10) Izračunajte matematično upanje $E(c^T)$.

2. (25) Naj bo $X \propto \mathrm{Bi}(n, 1/2)$. Za slučajni spremenljivki X in Y naj za $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ velja

$$P(X = k, Y = k + 1) = P(X = k) \cdot \frac{n - k}{n},$$

$$P(X = k, Y = k - 1) = P(X = k) \cdot \frac{k}{n}$$

in $P(X = k, Y = l) = 0$ za $|k - l| > 1$.

   a. (10) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke Y in jo poimenujte.
   b. (15) Izračunajte $\mathrm{cov}(X, Y)$.

3. (25) V matematični genetiki se pojavi naslednja naloga: vsak od $N = \alpha + \beta + \gamma$ posameznikov je tipa AA, AB ali BB (tipa AB in BA obravnavamo kot enaka). Pri tem jih je α tipa AA, β tipa AB in γ tipa BB, pri čemer tip BA obravnavamo kot AB. Ko pride do naslednje generacije, se geni vsakega od N posameznikov razbijejo na sestavna dela A in B in se povsem naključno spet sestavijo po parih. Bolj natančno, imamo $2\alpha + \beta$ genov A in $\beta + 2\gamma$ genov tipa B. Vseh teh $2N$ genov se povsem naključno skombinira v N novih posameznikov s po dvema genoma.

   a. (10) Označite novo nastale posameznike s številkami $1, 2, \ldots, N$. Izračunajte verjetnosti $P(\text{posameznik 1 je tipa AA})$ in $P(\text{posameznika 1 in 2 sta tipa AA})$.
   b. (15) Naj bo X število posameznikov tipa AA, ki so nastali z naključnimi kombinacijami. Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

      Namig: Indikatorji.

4. (25) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ nenegativne celoštevilske slučajne spremenljivke, za katere velja

$$P(X_1 = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

za $k \geq 0$ in

$$P(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) = P(X_1 = k_1, \ldots, X_{n-1} = k_{n-1}) \cdot \frac{(k_{n-1})_{k_n}}{2^{k_{n-1}+k_n} \cdot k_n!},$$

kjer za poljuben a velja $(a)_0 = 1$ in $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ za $k > 0$.

a. (15) Poiščite porazdelitev vsote $X_1 + X_2$.

b. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da za slučajno spremenljivko X_n velja

$$P(X_n = l) = \frac{n^{l-1}}{(1+n)^{l+1}}$$

za $l = 1, 2, \ldots$ in

$$P(X_n = 0) = \frac{n}{n+1}$$

Namig: Za $|x| < 1$ *velja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k)_l x^k = \frac{l! \cdot x}{(1-x)^{l+1}}.$$

4. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
9. junij 2006

1. (25) Za celoštevilske slučajne spremenljivke $X_0, X_1, \ldots$ naj velja

$$P(X_{n+1} = k+1 | X_n = k) = P(X_{n+1} = k-1 | X_n = k) = \frac{1}{2}$$

za vse $k \in \mathbb{Z}$. Predpostavite, da je $P(X_0 = 0) = 1$.

   a. (10) Izračunajte

   $$E\left(|X_{n+1}| \big| X_n = k\right)$$

   za $k \in \mathbb{Z}$.

   b. (15) Pokažite, da velja

   $$E\left(|X_n|\right) = P(X_{n-1} = 0) + P(X_{n-2} = 0) + \cdots + P(X_0 = 0)\,.$$

2. (25) Naj bodo X, Y in Z med sabo neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene geometrijsko: $X \propto \text{Geom}(1/2)$, $Y \propto \text{Geom}(1/3)$ in $Z \propto \text{Geom}(1/4)$.

   a. (10) Izračunajte rodovno funkcijo vsote $W = X + Y + Z$.

   b. (15) Pokažite, da je

   $$G_W(s) = \frac{s^3}{4(1-s/2)} - \frac{4s^3}{3(1-2s/3)} + \frac{9s^3}{8(1-3s/4)}$$

   in dokažite, da je za $k = 0, 1, \ldots$

   $$P(W = k+3) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

   Namig: Za $|x| < 1$ je

   $$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\,.$$

3. (25) Naj bo $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ proces razvejanja, za katerega velja

$$G(s) = G_{Z_1}(s) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}s^2\,.$$

   a. (15) Izračunajte verjetnost, da proces razvejanja izumre najkasneje v tretji generaciji. Bolj točno to pomeni, da iščemo verjetnost, da je že tretja generacija prazna.

b. (10) Izračunajte

$$E\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_n}\right).$$

Namig: Upoštevajte, da je

$$E\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_n}\right) = G_n\left(\frac{1}{2}\right) \quad \textit{in} \quad G_n = G_{n-1} \circ G\,.$$

4. (25) Znani angleški statistik M. G. Kendall v svojem obsežnem članku *The Random Character of Stock Market Prices* pravi:

> … dnevno zaporedje cen delnic zgleda "blodeče", kot da bi nek škrat vsak dan naključno izbral število iz velike škatle, ki ima povprečje 0 in nek standardni odklon, in to izbrano število prištel ceni delnice prejšnega dne.

Predpostavite, da je povprečje škatle res 0, standardni odklon pa 1. Razlika cene delnice na začetku leta in na koncu leta je tako enaka vsoti 365 naključno izbranih števil iz te škatle.

a. (15) Recimo, da je bila cena delnice na začetku leta enaka 150 (v ustreznih enotah). Kolikšna je približno verjetnost, da bo na koncu vredna 160 ali več?

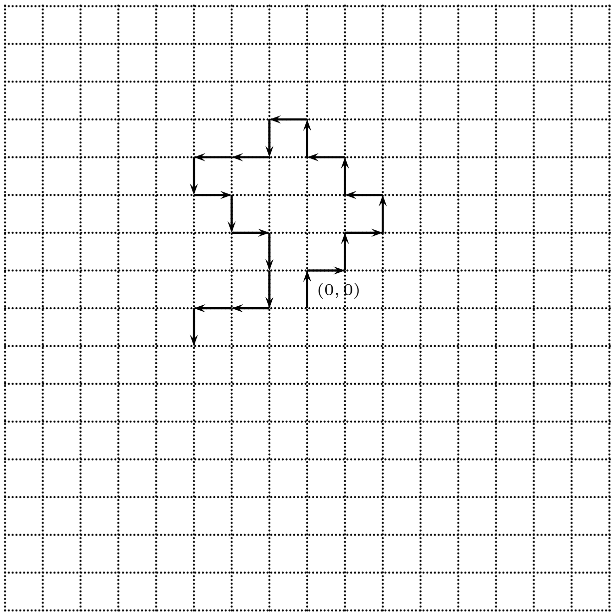
b. (10) Nekdo vam ponuja naslednjo stavo: če bo cena delnice na koncu leta 110 ali več, ti plačam 20 enot, če ne pa ti meni plačaš 5 enot. Na začetku leta je vrednost delnice 100. Kaj menite o tej stavi?

Namig: Kolikšen je vaš pričakovan dobiček?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
19. junij 2006

1. (50) Sprehod po celoštevilski mreži je pot, ki se začne v $(0,0)$, na vsakem koraku pa lahko gremo za enoto na desno, levo, gor ali dol. Primer take poti je na sliki 1a.



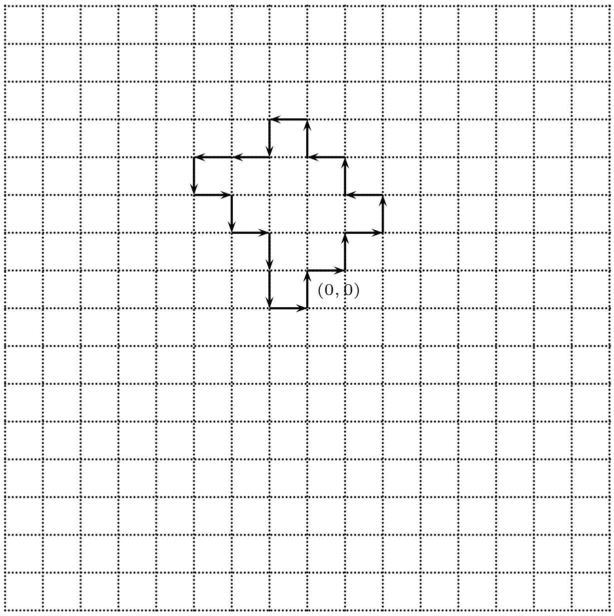
Slika 1a Primer sprehoda po $\mathbb{Z}^2$.

a. (5) Koliko je vseh sprehodov po $\mathbb{Z}^2$, ki imajo natanko n korakov?

b. (5) Koliko je sprehodov z natanko n koraki, ki gredo k_1-krat desno, k_2-krat levo, k_3-krat gor in k_4-krat dol? Pri tem je seveda $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = n$ in $k_i \geq 0$ za $i = 1, 2, 3, 4$.

c. (5) Na sliki 1b je sprehod dolžine $2n$, ki se začne in konča v točki $(0,0)$. Pokažite, da je sprehodov, ki se začno in končajo v točki $(0,0)$, in gredo natanko $2k$-krat "levo" ali "desno", natanko $(2n-2k)$-krat pa "gor" ali "dol" točno

$$\binom{2n}{n}\binom{n}{k}^2.$$



Slika 1b Primer sprehoda po $\mathbb{Z}^2$, ki se začne in konča v $(0,0)$.

d. (10) Kot znano upoštevajte, da je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Pokažite, da je vseh sprehodov z natanko $2n$ koraki, ki se začno in končajo v točki $(0,0)$, natanko

$$\binom{2n}{n}^2.$$

Namig: Uporabite c., tudi če ne znate dokazati!

2. (20) V prvi posodi imamo n belih, v drugi pa n črnih kroglic. Naključno izberemo eno od posod in kroglico iz nje prestavimo v drugo posodo. Verjetnost izbire posamezne posode je $1/2$. Postopek ponovimo dvakrat. Privzemite, da je $n > 2$.

   a. (10) Izračunajte verjetnost, da bo po dveh izbiranjih stanje enako kot na začetku, torej da bo v eni posodi n belih, v drugi pa n črnih kroglic.

   b. (10) Naj bo A dogodek, da je stanje na koncu enako kot na začetku. Izračunajte pogojno verjetnost dogodka, da smo dvakrat prestavljali belo kroglico, pogojno na dogodek A.

3. (20) Imamo r škatlic, v katere mečemo n kroglic. Meti so neodvisni, v vsakem poskusu pa zadenemo vsako škatlo z enako verjetnostjo $1/r$. Naj bo X število praznih škatlic po vseh n metih.

a. (10) Izračunajte $E(X)$.
b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

4. (20) Naj bo $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ proces razvejanja, za katerega velja

$$G(s) = G_{Z_1}(s) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}s^2 \,.$$

a. (10) Izračunajte verjetnost, da proces razvejanja izumre najkasneje v tretji generaciji. Bolj točno to pomeni, da iščemo verjetnost, da je že tretja generacija prazna.
b. (10) Izračunajte

$$E\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_n}\right) \,.$$

Namig: Upoštevajte, da je

$$E\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{Z_n}\right) = G_n\left(\frac{1}{2}\right) \quad in \quad G_n = G_{n-1} \circ G \,.$$

5. (20) Naj bo $n > 1$ dano naravno število. Slučajni spremenljivki X in Y imata porazdelitev dano z

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{n(n-k)}$$

za $1 \leq k < n$ in $l \leq n - k$ in

$$P(X = n, Y = 0) = \frac{1}{n} \,.$$

a. (10) Izračunajte $E(Y|X = k)$ za $k < n$.
b. (10) Izračunajte še $E(Y|X = n)$ in $E(Y)$.

6. (20) Znani angleški statistik M. G. Kendall v svojem obsežnem članku *The Random Character of Stock Market Prices* pravi:

> … dnevno zaporedje cen delnic zgleda "blodeče", kot da bi nek škrat vsak dan naključno izbral število iz velike škatle, ki ima povprečje 0 in nek standardni odklon, in to izbrano število prištel ceni delnice prejšnega dne.

Predpostavite, da je povprečje škatle res 0, standardni odklon pa 1. Razlika cene delnice na začetku leta in na koncu leta je tako enaka vsoti 365 naključno izbranih števil iz te škatle.

a. (10) Recimo, da je bila cena delnice na začetku leta enaka 150 (v ustreznih enotah). Kolikšna je približno verjetnost, da bo na koncu vredna 160 ali več?

b. (10) Nekdo vam ponuja naslednjo stavo: če bo cena delnice na koncu leta 110 ali več, ti plačam 20 enot, če ne pa ti meni plačaš 5 enot. Na začetku leta je vrednost delnice 100. Kaj menite o tej stavi?

Namig: Kolikšen je vaš pričakovan dobiček?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
30. junij 2006

1. (20) V ravnini so dane točke A, B, C, D, E in F, od katerih nobena trojica ne leži na isti premici.

   a. (5) Koliko različnih premic določajo te točke?

   b. (5) Koliko različnih trikotnikov določajo te točke?

   c. (5) Koliko med temi trikotniki je takih, ki imajo točko C za oglišče?

   d. (5) Koliko je med temi trikotniki takšnih, ki imajo daljico AF za eno od stranic?

2. (20) Abraham de Moivre v svoji "*The Doctrine of Chances (1756)*" kot nalogo 94 predlaga naslednje: Igralci A,B,C igrajo isto igro na srečo po naslednjih pravilih: Najprej igrata dva od treh igralcev. Tisti, ki izgubi, preda svoje mesto tretjemu, ki je čakal in to pravilo velja v naslednjih igrah. Zmaga tisti, ki mu uspe premagati ostala dva v dveh zaporednih igrah. Predpostavljamo, da so igre med sabo neodvisne in je verjetnost za zmago kogarkoli v posamezni igri enaka 1/2.

   a. (10) Predpostavite, da najprej igrata igralca A in B. Definirajte naslednje dogodke

      – $C = \{\text{zmaga A}\}$.
      – $A_1 = \{\text{A zmaga v prvi in drugi igri}\}$.
      – $A_2 = \{\text{A zmaga v prvi igri in izgubi v drugi, C izgubi v tretji igri}\}$.
      – $A_3 = \{\text{A izgubi v prvi igri, B izgubi v drugi igri}\}$.

      Naj bo α verjetnost za zmago igralca A, če najprej igrata A in B, in β verjetnost za zmago A, če najprej igrata igralca A in C. Izrazite

      $$P(C|A_i)$$

      z α in β za vsak $i = 1, 2, 3$.

   b. (10) Naj bo spet α verjetnost za zmago igralca A, če najprej igrata A in B, in β verjetnost za zmago A, če najprej igrata igralca A in C. Utemeljite zvezi

      $$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{8}\alpha$$

      in

      $$\beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{8}\beta$$

      in izračunajte α.

      Namig: $C \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

3. (20) V posodi naj bosta črna kroglica in kroglica z oznako 1. Na vsakem koraku iz posode naključno izberemo kroglico. Če ima izbrana kroglica oznako k, jo vrnemo in dodamo še eno kroglico z oznako k. Če je kroglica črna, jo vrnemo v posodo in dodamo kroglico z oznako $n+1$, kjer je n največja oznaka do tik pred izbiranjem. Primer: Prvih nekaj korakov lahko izgleda kot $\boxed{\bullet \quad \textcircled{1}} \to \boxed{\bullet \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{2}} \to \boxed{\bullet \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{1}} \to \boxed{\bullet \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{3}} \to \boxed{\bullet \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{1}} \to \boxed{\bullet \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{1}$ $\to \cdots$

   a. (10) Naj bo X število različno označenih kroglic takrat, ko je po $(n-1)$-em izbiranju v posodi vključno s črno natanko $n+1$ kroglic. Črne kroglice ne štejemo. Izračunajte

   $$P(\text{pri } k\text{-tem izbiranju smo izbrali črno kroglico})$$

   za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ in potem $E(X)$.

   Namig: Indikatorji.

   b. (10) Naj bo Y število kroglic z oznako 1 v posodi takrat, ko je po $(n-1)$-em izbiranju v posodi vključno s črno natanko $n+1$ kroglica. Izračunajte $P(Y=k)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$.

4. (20) Oglejte si naslednjo varianto procesa razvejanja: na začetku imamo eno celico. Po geometrijskem času s parametrom p se bo ta celica razdelila na dve neodvisno od ostalih celic. Vse celice se bodo potem delile naprej po enakem načelu. Označite število celic v trenutku n z Z_n in rodovno funkcijo slučajne spremenljivke Z_n z $G_n(s)$. Velja $G_0(s) = s$ in

   $$G_{n+1}(s) = G_n\big(s(q+ps)\big)\,,$$

   kjer je $q = 1-p$.

   a. (10) Pokažite, da je $E(Z_n) = (1+p)^n$.

   b. (10) Izračunajte $P(Z_3 = 8)$.

5. (20) Naj bo $n > 1$ dano naravno število. Slučajni spremenljivki X in Y imata porazdelitev dano z

   $$P(X=k, Y=l) = \frac{1}{n(n-k)}$$

   za $1 \le k < n$ in $l \le n-k$ in

   $$P(X=n, Y=0) = \frac{1}{n}\,.$$

   a. (10) Izračunajte $E(Y|X=k)$ za $k<n$.

   b. (10) Izračunajte še $E(Y|X=n)$ in $E(Y)$.

6. (20) Znani angleški statistik M. G. Kendall v svojem obsežnem članku *The Random Character of Stock Market Prices* pravi:

> … dnevno zaporedje cen delnic zgleda “blodeče”, kot da bi nek škrat vsak dan naključno izbral število iz velike škatle, ki ima povprečje 0 in nek standardni odklon, in to izbrano število prištel ceni delnice prejšnega dne.

Predpostavite, da je povprečje škatle res 0, standardni odklon pa 1. Razlika cene delnice na začetku leta in na koncu leta je tako enaka vsoti 365 naključno izbranih števil iz te škatle.

a. (10) Recimo, da je bila cena delnice na začetku leta enaka 150 (v ustreznih enotah). Kolikšna je približno verjetnost, da bo na koncu vredna 160 ali več?

b. (10) Nekdo vam ponuja naslednjo stavo: če bo cena delnice na koncu leta 110 ali več, ti plačam 20 enot, če ne pa ti meni plačaš 5 enot. Na začetku leta je vrednost delnice 100. Kaj menite o tej stavi?

   Namig: Kolikšen je vaš pričakovan dobiček?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
5. september 2006

1. (20) V skupini otrok imamo n dečkov in n deklic. Otroke bi radi razmestili po parih, tako da dobimo n parov.

   a. (10) Na koliko načinom lahko otroke razmestimo po parih, tako da bodo pari mešani po spolu?

   b. (10) Prešteti želimo še vse razmestitve po parih ne glede na spol. Uporabite naslednji algoritem: $2n$ dečkov in deklic oštevilčite z $1, 2, \ldots, 2n$. Najprej otroku 1 izberite partnerja. V naslednjem koraku izberite partnerja otroku, ki še nima partnerja, ima pa najmanjšo stevilko med preostalimi otroci. Postopek nadaljujte, dokler vsem otrokom ne dodelite partnerja. Primer izbire s takim algoritmom:
   $$(1, 5), (2, 3), (4, 8), \ldots$$
   Preštejte vse razmestitve.

2. (20) Dogodki A, B in C naj bodo neodvisni z verjetnostmi p_1, p_2 in p_3.

   a. (10) Izračunajte verjetnost, da se zgodita natanko dva od treh dogodkov.

   b. (10) Izračunajte pogojno verjetnost, da se zgodita natanko dva dogodka pri pogoju, da se niso zgodili vsi trije dogodki hkrati.

3. (20) Srečke pri loteriji so oštevilčene od 000000 do 999999. Izžrebana bo natanko ena številka, vse možne številke pa imajo enako verjetnost, da bodo izbrane. Vse srečke zadenejo, dobitek pa je odvisen od števila števk, ki se na istih mestih ujemajo. Če je bila, recimo, izžrebana številka 431515, naša srečka pa ima številko 451038, se ujemata dve števki (prva in tretja). Vsaka števka več, ki se ujema, pomeni desetkrat višji dobitek. Najnižji dobitek pri neujemanju vseh števk je a.

   a. (10) Ko kupite srečko, bo vaš dobitek slučajna spremenljivka X. Izračunajte porazdelitev X.

   b. (10) Izračunajte matematično upanje $E(X)$.

4. (20) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja z
   $$G(s) = \frac{1+s}{2}\,.$$
   Definirajte $W_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$. Označite
   $$H_n(s) = G_{W_n}(s)\,.$$

Za rodovne funkcije H_n velja rekurzija

$$H_{n+1}(s) = sG(H_n(s))\,.$$

a. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da za $n \geq 1$ velja

$$H_n(s) = \frac{s}{2^n}\left(2^{n-1} + 2^{n-2}s + 2^{n-3}s^2 + \cdots + 2s^{n-2} + s^{n-1} + s^n\right)\,.$$

b. (10) Izračunajte $E(W_n)$.
Namig: Matematično upanje je linearno.

5. (20) Za celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y naj velja

$$P(X = k, Y = l) = \begin{cases} \frac{n}{1+n} & \text{če je } k = l = 0 \\ \frac{n^{k-1}}{(1+n)^{k+1}} \cdot \frac{k(k+1)\cdots(k+l-1)}{l!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k+l} & \text{če je } k > 0 \text{ in } l \geq 0 \end{cases}$$

Če je $l = 0$, interpretiramo izraz $k(k+1)\cdots(k+l-1)$ kot 1. Kot znano privzemite, da je

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{k(k+1)\cdots(k+l-1)}{l!}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+l} x^k = \left(\frac{1}{2-x}\right)^k$$

za $|x| \leq 1$.

a. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X.
b. (10) Izračunajte $E(Y|X = k)$ za vse $k = 0, 1, 2, \ldots$.

6. (20) Dva strastna igralca na srečo igrata ruleto v neskončnost. Ruletni cilinder ima 37 izsekov, od katerih je 18 rdečih, 18 črnih in 1 zelen. Prvi igralec vedno stavi \$1 na rdeče, drugi pa vedno stavi \$1 na številko 17, ki je črna. Čisti dobiček po eni igri je v primeru zmage za prvega \$1, za drugega pa \$35, v nasprotnem primeru pa oba izgubita stavo.

a. (10) Aproksimirajte verjetnost, da drugi igralec po 1000 igrah nima izgube.
b. (10) Označite z X_n čisti profit prvega igralca po n igrah, z Y_n pa profit drugega igralca po n igrah. Izračunajte

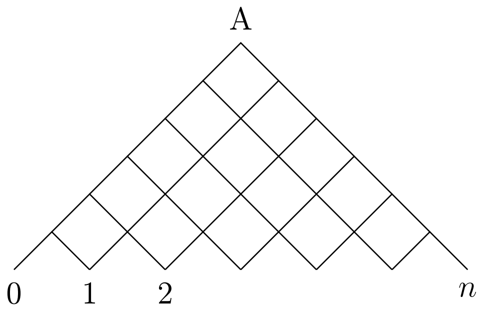
$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n > X_n) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n - X_n > 0)\,.$$

Utemeljite vaš razmislek.
Namigi: Napišite $Y_n - X_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k - V_k)$, *kjer je* U_k *čisti profit prvega igralca v* k*-ti igri in* V_k *čisti profit drugega igralca v isti igri. Slučajne spremenljivke* $U_k - V_k$ *so med sabo neodvisne z enako porazdelitvijo in* $\mathrm{var}(U_k - V_k) = 1368/37$.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
19. december 2006

1. (20) Mesto T ima ulice v obliki trikotnika kot na sliki 1a. Hiše na spodnji strani trikotnika imajo številke $0, 1, 2, \ldots, n$. Avtobusna postaja je v točki A.

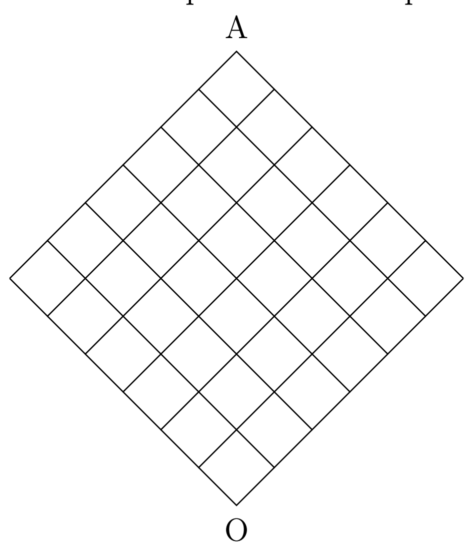


Slika 1a Tloris mesta T

   a. (10) Na koliko načinov lahko pridemo z avtobusne postaje A do hiše s števiko k tako, da gremo vsakič le levo ali desno in se nikoli ne vračamo proti avtobusni postaji?

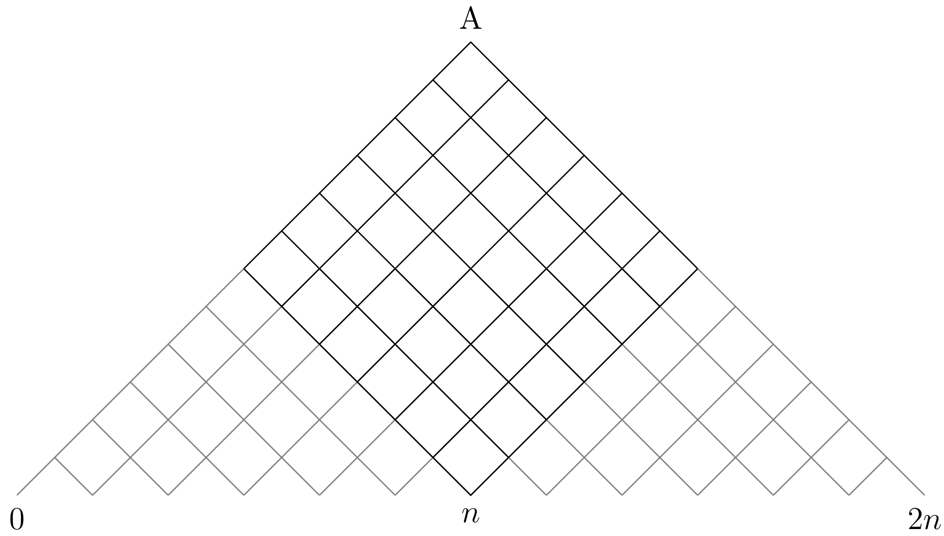
      Namig: Razmislite, kolikokrat morate iti na levo, da pridete do hiše s števiko k.

   b. (10) Mesto K ima obliko kvadrata kot na sliki 1b. Avtobusna postaja je v točki A, profesor pa stanuje v hiši O. Vzporednih ulic je $n + 1$. Na koliko načinov lahko profesor pride z avtobusne postaje do svoje hiše tako, da gre vedno le levo ali desno in se nikoli ne vrača proti avtobusni postaji?



Slika 1b Tloris mesta K

Namig: V mislih dogradite mesto do trikotnega mesta kot na sliki 1c. V dograjenem mestu ima profesorjeva hiša hišno številko n od številk $0, 1, \ldots, 2n$.



Slika 1c Mesto K dograjeno v trikotnik

2. (20) Na mizi sta dve posodi. V eni je 20 raznobarvnih kroglic: 10 belih, 5 črnih in 5 zelenih, druga pa je še prazna. Iz polne posode sočasno izvlečemo dve kroglici. Najključno izberemo eno izmed njiju in jo pogledamo. Nato spustimo kroglici v prazno posodo. Posodo pretresemo in iz nje naključno izvlečemo kroglico.

   a. (10) Dokažite formulo

   $$P(A|B) = P(A|B \cap C) \cdot P(C|B) + P(A|B \cap C^c) \cdot P(C^c|B)\,.$$

   b. (10) Izračunajte pogojno verjetnost, da bo kroglica izvlečena iz druge posode bela pri pogoju, da je bila kroglica, ki smo jo pogledali bela.

3. (20) Slučajne spremenljivke X, Y in Z naj imajo porazdelitev dano z

   $$P(X = i, Y = j, Z = k) = \frac{b(b+1)\cdots(b+n-1)r(r+1)\cdots(r+3-n-1)}{(b+r)(b+r+1)(b+r+2)}$$

   za pozitvni števili b in r, $i, j, k \in \{0, 1\}$ in je $n = i + j + k$. Če je $n = 0$, je $b(b+1)\cdots(b+n-1) = 1$.

   a. (10) Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke Z.

   b. (10) Izračunajte porazdelitev vsote $W = X + Y + Z$.

4. (20) Naj bo $m > 0$ celo število. Naj bo $p \in (0,1)$ in naj velja $q = 1 - p$. Za proces razvejanja $Z_0, Z_1, \ldots$ naj velja

$$G(s) = G_{Z_1}(s) = \left(\frac{1}{2 - s^m}\right)^{1/m} .$$

   a. (10) Izračunajte $E(Z_2)$.
   b. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je

   $$G_n(s) = \left(\frac{n - (n-1)s^m}{n + 1 - ns^m}\right)^{1/m}$$

   in izračunajte $P(Z_n = 0)$ za $n = 1, 2, \ldots$.

5. (20) Predpostavite, da je število otrok v naključno izbrani družini slučajna spremenljivka N s porazdelitvijo

$$P(N = n) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

za $n = 1, 2, \ldots$. Predpostavite, da je spol vsakega otroka moški ali ženski z verjetnostjo $1/2$ neodvisno od ostalih otrok. Naj bo X število otrok moškega spola in Y število otrok ženskega spola v naključno izbrani družini.

   a. (10) Izračunajte

   $$P(X = k, Y = l | N = n)$$

   za $n \geq 1$ in $k, l \geq 0$ in $k + l = n$.
   b. (10) Izračunajte večrazsežno porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.
   c. (10) Izračunajte $E(X|Y = 0)$.

6. (20) Dva strastna igralca na srečo igrata ruleto v neskončnost. Ruletni cilinder ima 37 izsekov, od katerih je 18 rdečih, 18 črnih in 1 zelen. Prvi igralec vedno stavi \$1 na rdeče, drugi pa vedno stavi \$1 na številko 17, ki je črna. Čisti dobiček po eni igri je v primeru zmage za prvega \$1, za drugega pa \$35, v nasprotnem primeru pa oba izgubita stavo.

   a. (10) Aproksimirajte verjetnost, da drugi igralec po 1000 igrah nima izgube.
   b. (10) Označite z X_n čisti profit prvega igralca po n igrah, z Y_n pa profit drugega igralca po n igrah. Izračunajte

   $$\lim_{n\to\infty} P(Y_n > X_n) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n - X_n > 0) .$$

   Utemeljite vaš razmislek.
   Namigi: Napišite $Y_n - X_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k - V_k)$, *kjer je* U_k *čisti profit prvega igralca v* k*-ti igri in* V_k *čisti profit drugega igralca v isti igri. Slučajne spremenljivke* $U_k - V_k$ *so med sabo neodvisne z enako porazdelitvijo in* $\mathrm{var}(U_k - V_k) = 1368/37$.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
13. februar 2007

1. (25) V skupini otrok imamo n dečkov in n deklic. Otroke bi radi razmestili po parih, tako da dobimo n parov.

   a. (10) Na koliko načinov lahko otroke razmestimo po parih, tako da bodo pari mešani po spolu?

   b. (15) Prešteti želimo še vse razmestitve po parih ne glede na spol. Uporabite naslednji algoritem: $2n$ dečkov in deklic oštevilčite z $1, 2, \ldots, 2n$. Najprej otroku 1 izberite partnerja. V naslednjem koraku izberite partnerja otroku, ki še nima partnerja, ima pa najmanjšo stevilko med preostalimi otroci. Postopek nadaljujte, dokler vsem otrokom ne dodelite partnerja. Primer izbire s takim algoritmom:
   $$(1, 5), (2, 3), (4, 8), \ldots$$
   Preštejte vse razmestitve.

2. (25) Na letalo z n sedeži se bo vkrcalo n potnikov. Vsi imajo že določeno številko sedeža, na letalo pa bodo prišli v istem vrstnem redu, kot so njihove številke sedežev. Prva oseba, ki pride na letalo, naključno izbere sedež s številkami $2, 3, \ldots, n$, tako da je verjetnost izbire vsakega sedeža $1/(n-1)$. Ostali se vsedejo na svoj sedež, če je prost, če ne, pa naključno izberejo med sedeži, ki so še na voljo. Označite z A_i dogodek, da bo i-ti potnik, ki se bo vkrcal, sedel na svoj sedež.

   a. (10) Izračunajte $P(A_2)$ in $P(A_3)$.

   b. (15) Označite $H_k = \{\text{prvi potnik je izbral sedež } k\}$ za $k = 2, 3, \ldots, n$. Pokažite, da za $2 \le k < n$ velja
   $$P(A_n|H_k) = \frac{1}{n-k+1}\left(1 + P(A_n|H_{k+1}) + P(A_n|H_{k+2}) + \cdots + P(A_n|H_n)\right) .$$

3. (20) V posodi je B belih, R rdečih in G zelenih kroglic. Kroglice začnemo izbirati **z vračanjem** povsem naključno, tako da ima vsaka kroglica enako verjetnost, da jo izberemo. Označimo z X število izbiranj dokler ne izberemo bele kroglice, vključno z zadnjim izbiranjem. Podobno označimo z Y število izbiranj dokler ne izberemo prvič rdeče kroglice in Z število izbiranj, dokler ne izberemo prvič zelene kroglice.

   a. (10) Izračunajte $P(X = 1, Y = l, Z = m)$ za $1 < l < m$.
   Namig: Pomislite, v kakšnem vrstnem redu morate dobiti kroglice razlicnih barv, da se zgodi dogodek $\{X = 1, Y = l, Z = m\}$.

b. (10) Poiščite večrazsežno porazdelitev spremenljivk Y in Z.

4. (25) Naj bodo X, Y in Z med sabo neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeeljene geometrijsko: $X \propto \mathrm{Geom}(1/2)$, $Y \propto \mathrm{Geom}(1/3)$ in $Z \propto \mathrm{Geom}(1/4)$.

   a. (10) Izračunajte rodovno funkcijo vsote $W = X + Y + Z$.

   b. (15) Pokažite, da je

$$G_W(s) = \frac{s^3}{4(1-s/2)} - \frac{4s^3}{3(1-2s/3)} + \frac{9s^3}{8(1-3s/4)}$$

   in dokažite, da je za $k = 0, 1, \ldots$

$$P(W = k+3) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^k .$$

   Namig: Za $|x| < 1$ *je*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k .$$

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{4}{45}$	$\frac{8}{45}$	$*$
2	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
3	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
4	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$

   a. (10) Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

   b. (10) Neodvisno od a. dela naloge dopolnite tabelo tako, da bo veljalo $P(X = 3, Y = k) = \frac{k}{45}$, $E(X|Y=3) = \frac{21}{10}$ in $E(X|Y=4) = \frac{24}{11}$.

6. (20) V podjetju HIT so v letu 1999 gostje igrali igro *Colore* 440.000-krat. Verjetnost za dobitek pri tej igri je $p \doteq 0\text{'}00198079$.

   a. (10) Zanima nas število S_n dobitkov v 440.000 igrah. To število je kot vsota 440.000 neodvisnih slučajnih spremenljivk z vrednostma 0 in 1, torej $S_n = X_1 + \cdots X_n$, kjer je $P(X_i = 1) = p$ in $P(X_i = 0) = 1 - p$. Z uporabo centralnega limitnega izreka izračunajte približno verjetnost, da bo dobitkov 920 ali več. *Upoštevajte:* $\Phi(1\text{'}64) \doteq 0\text{'}95$.

   b. (10) Recimo, da je izplačilo pri dobitku enako $x > 0$. Če gost stavi enoto in stavo dobi, mu to enoto vrnejo in dodajo še x enot. Pokažite, da je ta dobitek lahko največ $x = 502$, če naj bo verjetnost, da bo hiša po 440.000 igrah imela izgubo, največ 0'01? *Upoštevajte:* $\Phi(-2\text{'}33) \doteq 0\text{'}01$.

2004/05

1. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
8. december 2004

1. (25) Od vsake od črk a, b in c imamo po n primerkov. Sprva so črke v leksikografskem redu, torej

$$aaaaa \ldots abbbb \ldots bbcc \ldots c$$

Črke lahko poljubno permutiramo, kar lahko naredimo na $(3n)!$ načinov. [10]

   a. (10) Koliko je različnih permutacij, če enakih črk ne razlikujemo med sabo?
   b. (10) Preštejte permutacije $3n$ črk, pri katerih po permutaciji nobena črka a ni na mestu, kjer je bila pred permutacijo črka a. Primer: če je $n = 3$ je

   $$bcbacbcaa$$

   taka permutacija.
   c. (10) Preštejte permutacije $3n$ črk, pri katerih po permutaciji nobena od črk a ni na mestu, kjer je bila prej črka a in nobena od črk b ni na mestu, kjer je bila prej črka b. Primer: če je $n = 3$, je

   $$cbcaacbab$$

   taka permutacija.

   Namig: Odgovor bo izražen z vsoto.
   d. (10) Preštejte permutacije $3n$ črk, pri katerih po permutaciji nobena od črk ni na mestu, kjer je bila pred permutacijo črka istega tipa. Primer: če je $n = 3$ je

   $$bcbaccaba$$

   taka permutacija.

   Namig: Odgovor bo izražen z vsoto.

2. (25) Ob začetku pisanja izpitov je v predavalnici M2 sedelo 16 študentov matematike in 20 študentov računalništva, v predavalnici M3 pa 10 študentov matematike in 14 študentov računalništva. Z malo zamude sta na izpit prišla še dva študenta računalništva in vsak od njiju je neodvisno od drugega na slepo izbral eno od obeh predavalnic. Študenti bodo končali s pisanjem v naključnem vrstnem redu, tako da bo vsak od študentov z enako verjetnostjo prvi zaključil.

[10] Povzeto po A. De Moivre, *Doctrine of Chances*, Frank Cass and Company, 1738, Problem XXXV, str. 98.

a. (10) Določi verjetnost, da je prvi študent, ki konča z izpitom, pisal izpit v M2.

b. (15) Določi pogojno verjetnost, da je prvi, ki zapusti predavalnico M2, študent matematike.

3. (25) V posodi sta na začetku bela in rdeča kroglica. Na vsakem koraku naključno izberemo kroglico med vsemi možnimi. Če je kroglica bela, jo vrnemo in dodamo še eno belo kroglico, če je rdeča, pa jo vrnemo in dodamo še eno rdečo kroglico. Število kroglic v posodi tako na vsakem koraku narase za 1.

   a. (10) Izračunajte verjetnost, da v n izbirah najprej k-krat izberete belo kroglico nato na $(n-k)$-krat rdečo.

   b. (15) Naj bo X število belih kroglic v posodi tik po n tem izbiranju, ko je v posodi $n+2$ kroglic. Izračunajte porazdelitev X.

   Namig: Preštejte, na koliko načinov se lahko zgodi dogodek $\{X = k\}$. *Kolikšne so verjetnosti posameznih načinov?*

4. (25) Igralci A, B in C igrajo naslednjo igro: v posodi je a belih in b črnih kroglic. Igralci izbirajo kroglice naključno z vračanjem v vrstnem redu $ABCABC\ldots$ [11] Zmaga tisti igralec, ki prvi izbere belo kroglico.

   a. (15) Recimo, da je se začne nova "runda" vsakič, ko izbira A. Naj bo Y število rund, ki jih bodo igrali igralci, dokler nekdo od njih ne zmaga. Primer: če je bilo $ABCABCAB$ in je B prvi potegnil belo kroglico, je zmagal B v tretji rundi. Opišite porazdelitev Y.

   Namig: $(1-q)(1+q+q^2) = 1-q^3$.

   b. (10) Izračunajte verjetnosti za zmago za posamezne igralce.

[11] Problem iz knjige Christian Huygens *De Raciociinis in Ludo Aleae*, 1657. Christian Huygens (1629-1695), nizozemski matematik.

2. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
24. januar 2005

1. (25) V teoriji zalog nastopi naslední problem: pričakujemo, da bo povpraševanje po nekem izdelku celoštevilska slučajna spremenljivka X. V pričakovanju povpraševanja naročimo n izdelkov, kjer je n fiksno celo število. Če vse izdelke na zalogi prodamo, smo naredili cn prometa, kjer je c cena izdelka. Če je povpraševanje manjše od n, recimo $k < n$, naredimo ck prometa, vendar moramo za skladiščenje neprodanih izdelkov plačati $s(n-k)$, kjer je s cena za skladiščenje enega izdelka, tako da je celoten promet $ck - s(n-k)$.

   a. (10) Predpostavite, da je $P(X = k) = pq^k$, kjer je $q = 1 - p$ in je $p \in (0, 1)$. Označite z Y celoten promet po zgornjem opisu. Opišite porazdelitev Y.

   b. (15) Izračunajte $E(X)$. Kot znano uporabite, da je

$$\sum_{k=0}^{n-1} kq^k = \frac{q - (np + q)\, q^n}{p^2}\,.$$

2. (25) Kovanec mečemo tako dolgo, da dobimo dva grba zapovrstjo. Označimo z X potrebno število metov vključno z zadnjim grbom. Slučajna spremenljivka X zavzame lahko vrednosti $k = 2, 3, \ldots$, pri tem pa velja $P(X = 0) = P(X = 1) = 0$, $P(X = 2) = 1/4$ in za $k \geq 3$

$$P(X = k) = \frac{1}{2}\, P(X = k - 1) + \frac{1}{4}\, P(X = k - 2)\,.$$

   a. (10) Izračunajte $E(X)$.
   Namig: Množite levo in desno stran s k in seštejte po $k \geq 3$.

   b. (15) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.
   Namig: Pišite $k^2 = (k-1)^2 + 2(k-1) + 1$ in $k^2 = (k-2)^2 + 4(k-1) + 4$.

3. (25) Generatorji slučajnih števil generirajo zaporedja ničel in enk. Privzemamo, da so posamezne številke neodvisne kot so neodvisni meti kovanca in je za vsako generirano število verjetnost $1/2$, da bo enako 1.

   a. (10) Pri preverjanju kvalitete generatorja slučajnih števil definiramo slučajno spremenljivko Y, ki šteje, kolikokrat sta se v nizu n generiranih slučajnih ničel in enk pojavili dve enki zapovrstjo. Pri tem dopuščamo prekrivanje v smislu, da sta se v nizu 1011011110111 dve enki zapovrstjo pojavili šestkrat. Izračunajte $E(Y)$.

b. (15) Naj bo Z število pojavljanj zaporedja 011 v nizu n generiranih slučajnih števil, pri čemer ne dopuščamo prekrivanja. Izračunajte $E(Z)$.

4. (25) Na krožnici s polmerom $R = 1$ izberemo fiksno točko A. Nato na krožnici povsem naključno izberemo točko. Naj bo X razdalja med naključno izbrano točko in točko A. Za $0 \leq x \leq 2$ velja

$$P(X \leq x) = c \cdot \arccos\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

kjer je c ustrezna konstanta.

   a. (10) Določite konstanto c in izračunajte gostoto slučajne spremenljivke X.

   b. (15) Izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.
   Namig: Lahko uporabite zvezo med funkcijo beta in funkcijo gama.

3. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
18. april 2005

1. (25) V posodi je 7 belih in 3 rdeče kroglice. Kroglice iz posode izbiramo naključno po vrsti brez vračanja. Naj bo X število belih kroglic, preden dobimo prvo rdečo kroglico, Y pa število belih kroglic med prvo in drugo rdečo kroglico.

   a. (15) Poiščite večrazsežno porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y.

   b. (10) Pokažite, da imata spremenljivki X in Y enako porazdelitev. Izračunajte porazdelitev Y.

      Namig: Porazdelitev X izračunajte posebej, ne kot robno porazdelitev. Nato uporabite simetrijo večrazsežne porazdelitve.

2. (25) Generatorji slučajnih števil generirajo zaporedje ničel in enk, ki jih lahko razumemo kot zaporedje med seboj neodvisnih Bernoullijevih slučajnih spremenljivk s parametrom $p = 1/2$. Predpostavimo, da je generator izpisal n slučajnih števil, nas pa zanima slučajno število pojavitev niza 111. Označimo to slučajno število z X. V nizu

$$11011110110111011111011011\,,$$

   recimo, je takšnih pojavljanj 6. Označimo generirane ničle in enke z $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

   a. (10) Za $k = 1, 2, \ldots, n-2$ definirajmo indikatorje

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } \xi_k = \xi_{k+1} = \xi_{k+2} = 1 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

      Izračunajte $\mathrm{cov}(I_1, I_2)$, $\mathrm{cov}(I_1, I_3)$ in $\mathrm{cov}(I_1, I_4)$.

   b. (15) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

      Namig: Bodite skrbni pri preštevanju kovarianc in upoštevanju tega, katere kovariance so enake 0.

3. (25) V posodi imamo b belih kroglic oštevilčenih s števili $1, 2, \ldots, b$ in r rdečih kroglic oštevilčenih s števili $1, 2, \ldots, r$. Označimo $n = b + r$. Kroglice iz posode izbiramo po vrsti, naključno in brez vračanja. Naj bo X število na prvi beli kroglici, ki jo izberemo, Y pa število na prvi rdeči kroglici, ki jo izberemo.

   a. (10) Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

   b. (15) Spremenimo besedilo tako, da kroglice izbiramo tako dolgo, da dobimo ali zapovrstjo belo in rdečo kroglico ali zapovrstjo rdeči in belo kroglico. Naj bo X število na beli, Y pa število na rdeči kroglici. Sta X in Y neodvisni?

4. (25) Naj bo $n > 1$ dano naravno število. Slučajni spremenljivki X in Y imata porazdelitev dano z

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{n(n-k)}$$

za $1 \leq k < n$ in $l \leq n - k$ in

$$P(X = n, Y = 0) = \frac{1}{n}\,.$$

a. (10) Izračunajte $E(Y|X = k)$ za $k < n$.

b. (15) Izračunajte še $E(Y|X = n)$ in $E(Y)$.

4. kolokvij iz statistike

Praktična matematika

3. junij 2005

1. (25) V modelu telefonskega omrežja predpostavljamo, da je število zasedenih enot v trenutku n neka slučajna spremenljivka X_n z rodovno funkcijo G_n. Naj bo $Y \propto \text{Po}(\lambda)$. Za rodovne funkcije $G_0, G_1, \ldots$ velja $G_0(s) = 1$ in

$$G_{n+1}(s) = G_n((1-p) + ps)\, G_Y(s)\,,$$

   kjer je G_Y rodovna funkcija spremenljivke Y in velja $p \in (0,1)$.

   a. (15) Izračunajte $P(X_3 = 0)$.

   b. (10) Kakšna je porazdelitev spremenljivke X_n?

2. (25) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja. Slučajno število Y potomcev vsakega posameznika naj ima porazdelitev

$$P(Y = k) = 2^{-(k+1)}$$

   za $k = 0, 1, \ldots$.

   a. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je rodovna funkcija $G_n(s)$ spremenljivke Z_n enaka

$$G_n(s) = \frac{n - (n-1)s}{n + 1 - ns}\,.$$

   b. (10) Izračunajte $E(Y)$ in $P(Z_n = 0)$ in izračunajte $P(\text{proces izumre})$. Kako se to ujema s teorijo?

3. (25) V podjetju HIT so v letu 1999 gostje igrali igro *Colore* 440.000-krat. Verjetnost za dobitek pri tej igri je $p \doteq 0\text{'}00198079$.

   a. (5) Zanima nas število S_n dobitkov v 440.000 igrah. To število je kot vsota 440.000 neodvisnih slučajnih spremenljivk z vrednostma 0 in 1, torej $S_n = X_1 + \cdots X_n$, kjer je $P(X_i = 1) = p$ in $P(X_i = 0) = 1 - p$. Z uporabo centralnega limitnega izreka izračunajte približno verjetnost, da bo dobitkov 920 ali več. *Upoštevajte:* $\Phi(1\text{'}64) \doteq 0\text{'}95$.

   b. (15) Recimo, da je izplačilo pri dobitku enako $x > 0$. Če gost stavi enoto in stavo dobi, mu to enoto vrnejo in dodajo še x enot. Pokažite, da je ta dobitek lahko največ $x = 502$, če naj bo verjetnost, da bo hiša po 440.000 igrah imela izgubo, največ $0\text{'}01$? *Upoštevajte:* $\Phi(-2\text{'}33) \doteq 0\text{'}01$.

4. (25) Dva strastna igralca na srečo igrata ruleto v neskončnost. Ruletni cilinder ima 37 izsekov, od katerih je 18 rdečih, 18 črnih in 1 zelen. Prvi igralec vedno stavi \$1 na rdeče, drugi pa vedno stavi \$1 na številko 17, ki je črna. Čisti dobiček po eni igri je v primeru zmage za prvega \$1, za drugega pa \$35, v nasprotnem primeru pa oba izgubita stavo.

   a. (10) Izračunajte približek verjetnosti, da drugi igralec po 1000 igrah nima izgube.

   b. (10) Označite z X_n čisti profit prvega igralca po n igrah, z Y_n pa profit drugega igralca po n igrah. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n > X_n) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n - X_n > 0)\,.$$

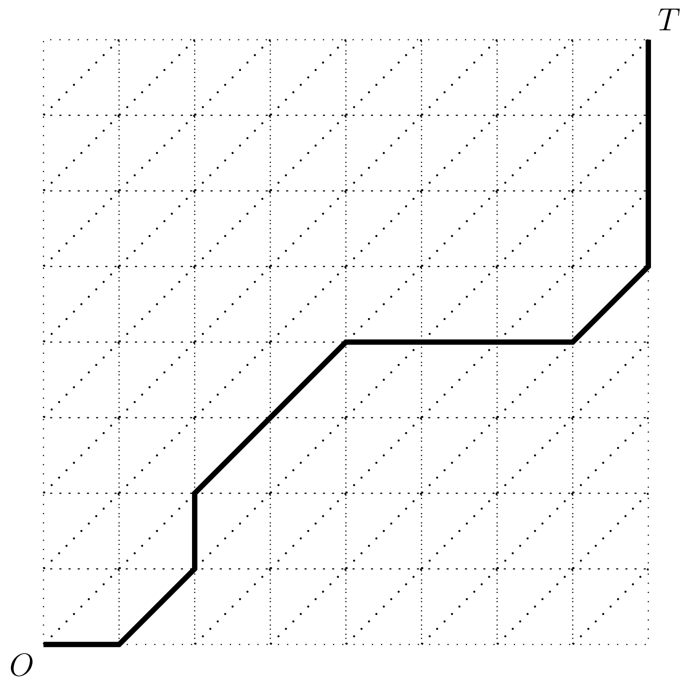
   Utemeljite vaš razmislek.

   Namigi: Napišite $Y_n - X_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k - V_k)$*, kjer je* U_k *čisti profit prvega igralca v* k*-ti igri in* V_k *čisti profit drugega igralca v isti igri. Slučajne spremenljivke* $U_k - V_k$ *so med sabo neodvisne z enako porazdelitvijo in* $\mathrm{var}(U_k - V_k) = 1368/37$.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
15. junij 2005

1. (20) Mesto A ima obliko kvadrata in je razdeljeno na n vzporednih in n navpičnih ulic, poleg tega pa je v vsakem od kvadratkov še ulica, ki poteka diagonalno, kot na Sliki 1.



Slika 1 Mesto A s svojimi ulicami. Na sliki je primer možne poti iz točke O v točko T.

   a. (10) V mestu A želimo priti iz točke O na spodnjem levem oglišču v točko T na zgornjem desnem oglišču. Na vsakem koraku lahko gremo desno ali gor ali pa po diagonali desno gor. Koliko je možnih poti iz O v A, ki vsebujejo natanko k diagonal, za $k = 0, 1, 2, \ldots, n$?

      Namig: Preštejte, kolikšno je skupno število ulic, po katerih boste šli.

   b. (10) Koliko je poti, pri katerih gremo po natanko m ulicah, za $m = n, n + 1, \ldots, 2n$?

2. (20) V prvi posodi se nahajo tri bele, štiri modre in pet črnih kroglic, v drugi pa šest belih, deset modrih in osem črnih kroglic.

a. (10) Za katero posodo je verjetnost, da potegnemo dve enaki kroglici, večja?

b. (10) Iz druge posode na slepo prestavimo neko kroglico v prvo posodo. Nato iz prve posode naključno izvlečemo kroglico ter opazimo, da je črne barve. Kolikšna je verjetnost, da je bila tudi prestavljena kroglica črne barve?

3. (20) Daniel Bernoulli je leta 1768 zastavil naslednji problem: Imamo $2n$ zakonskih parov in naj bo $m \leq 2n$ dano naravno število. Privzemite, da Bog naključno izbere m izmed $2n$ ljudi in jih pokliče k sebi (to je znano tudi kot to, da izbranih m ljudi umre). Naj bo X slučajno število še živečih parov.

   a. (10) Izračunajte $E(X)$.

   Namig: Indikatorji.

   b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

4. (20) Kot znano upoštevajte, da je

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

za $|x| < 1$.

   a. (10) Naj za slučajno spremenljivko X velja

$$P(X = k) = \frac{(1-p)^k}{k \log(1/p)}$$

   za $k = 1, 2, \ldots$ in $p \in (0,1)$. Izračunajte rodovno funkcijo slučajne spremenljivke X.

   b. (10) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ neodvisne spremenljivke z enako porazdelitvijo kot spremenljivka X iz a. Naj bo N od njih neodvisna slučajna spremenljivka s Poissonovo porazdelitvijo s parametrom $\lambda = -m \log p$ za neko celo število $m \geq 1$. Izračunajte $P(Y = k)$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$. Kot znano upoštevajte Newtonovo formulo

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

   za $|x| < 1$.

5. (20) Slučajne spremenljivke X, Y in Z naj imajo porazdelitev

$$P(X = i, Y = j, Z = k) = \frac{(a)_{i+j+k}(b)_{3-i-j-k}}{c(c+1)(c+2)},$$

kjer so a,b in c pozitivna števila, $i, j, k \in \{0, 1\}$ in velja definicija

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_1 = \alpha \quad \text{in} \quad (\alpha)_m = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1) \quad \text{za } m \geq 1.$$

a. (10) Poiščite porazdelitev spremenljivk X in Y.

b. (10) Izračunajte $P(Z|X+Y=1)$.

6. (20) Dva strastna igralca na srečo igrata ruleto v neskončnost. Ruletni cilinder ima 37 izsekov, od katerih je 18 rdečih, 18 črnih in 1 zelen. Prvi igralec vedno stavi \$1 na rdeče, drugi pa vedno stavi \$1 na številko 17, ki je črna. Čisti dobiček po eni igri je v primeru zmage za prvega \$1, za drugega pa \$35, v nasprotnem primeru pa oba izgubita stavo.

   a. (10) Aproksimirajte verjetnost, da drugi igralec po 1000 igrah nima izgube.

   b. (10) Označite z X_n čisti profit prvega igralca po n igrah, z Y_n pa profit drugega igralca po n igrah. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n > X_n) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n - X_n > 0)\,.$$

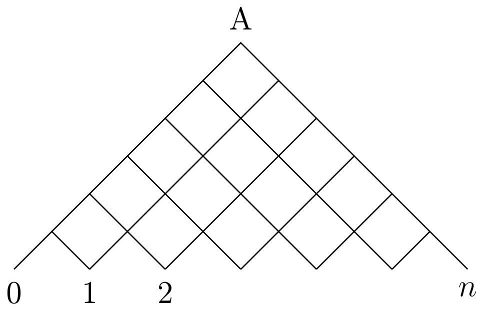
   Utemeljite vaš razmislek.

   Namigi: Napišite $Y_n - X_n = \sum_{k=1}^{n}(U_k - V_k)$, *kjer je* U_k *čisti profit prvega igralca v* k*-ti igri in* V_k *čisti profit drugega igralca v isti igri. Slučajne spremenljivke* $U_k - V_k$ *so med sabo neodvisne z enako porazdelitvijo in* $\mathrm{var}(U_k - V_k) = 1368/37$.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
27. junij 2005

1. (20) Mesto T ima ulice v obliki trikotnika kot na sliki 1a. Hiše na spodnji strani trikotnika imajo številke $0, 1, 2, \ldots, n$. Avtobusna postaja je v točki A.

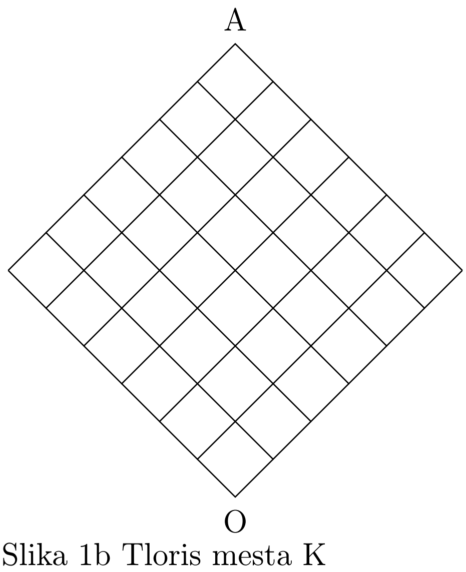


Slika 1a Tloris mesta T

   a. (10) Na koliko načinov lahko pridemo z avtobusne postaje A do hiše s števiko k tako, da gremo vsakič le levo ali desno in se nikoli ne vračamo proti avtobusni postaji?

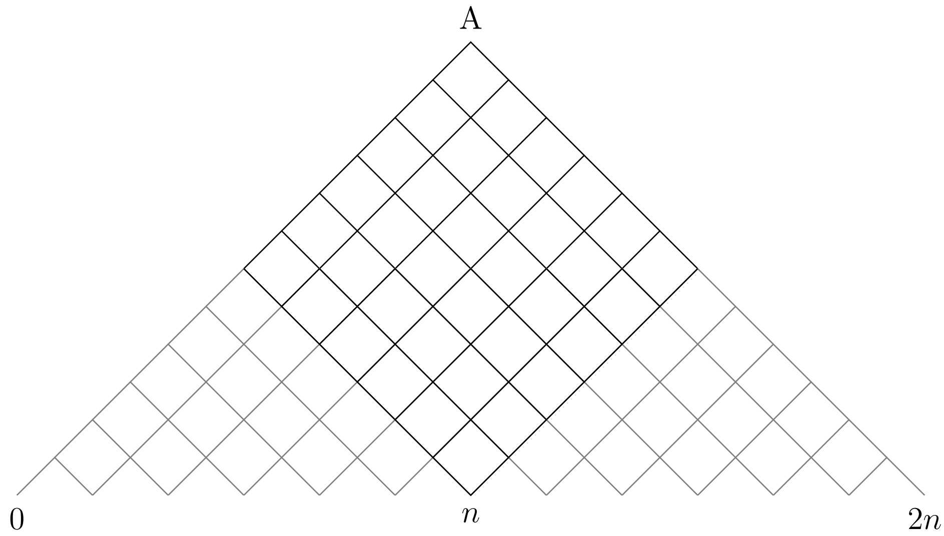
      Namig: Razmislite, kolikokrat morate iti na levo, da pridete do hiše s števiko k.

   b. (10) Mesto K ima obliko kvadrata kot na sliki 1b. Avtobusna postaja je v točki A, profesor pa stanuje v hiši O. Vzporednih ulic je $n + 1$. Na koliko načinov lahko profesor pride z avtobusne postaje do svoje hiše tako, da gre vedno le levo ali desno in se nikoli ne vrača proti avtobusni postaji?



Slika 1b Tloris mesta K

Namig: V mislih dogradite mesto do trikotnega mesta kot na sliki 1c. V dograjenem mestu ima profesorjeva hiša hišno številko n od številk $0, 1, \ldots, 2n$.



Slika 1c Mesto K dograjeno v trikotnik

2. (25) Janez pošilja Katarini kodirana sporočilca v obliki črt in pik. Na poti se spremeni v črtico $\frac{2}{5}$ oddanih pik in se spremeni v piko $\frac{1}{3}$ oddanih črt. V zadnjem sporočilu je Janez oddal 62˙5% pik.

   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da je prvi znak v prejetem sporočilu črta?

   b. (10) Katarina je kot prvi znak prejela piko. Kolikšna je verjetnost, da je Janez piko tudi oddal?

3. (20) V nekem bloku živi n poročenih parov. V času zimskih obolenj naključno zboli m ljudi tega bloka ne glede na starost ali spol, pri čemer je $m \leq 2n$.

   a. (10) V bloku živita tudi zakonca Zupan. Določi verjetnost, da sta oba zakonca zdrava.

   b. (10) Z X označimo slučajno spremenljivko, ki nam pove število parov, v katerih sta obe osebi zdravi. Določi matematično upanje slučajne spremenljivke X.

      Namig: Indikatorji.

4. (20) Naj bodo X, Y in Z med sabo neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene geometrijsko: $X \propto \text{Geom}(1/2)$, $Y \propto \text{Geom}(1/3)$ in $Z \propto \text{Geom}(1/4)$.

   a. (10) Izračunajte rodovno funkcijo vsote $W = X + Y + Z$.

b. (10) Pokažite, da je

$$G_W(s) = \frac{s^3}{4(1-s/2)} - \frac{4s^3}{3(1-2s/3)} + \frac{9s^3}{8(1-3s/4)}$$

in dokažite, da je za $k = 0, 1, \ldots$

$$P(W = k+3) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^k .$$

Namig: Za $|x| < 1$ *je*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k .$$

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{4}{45}$	$\frac{8}{45}$	$*$
2	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
3	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
4	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$

a. (10) Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

b. (10) Neodvisno od a. dela naloge dopolnite tabelo tako, da bo veljalo $P(X = 3, Y = k) = \frac{k}{45}$, $E(X|Y = 3) = \frac{21}{10}$ in $E(X|Y = 4) = \frac{24}{11}$.

6. (20) Čarovnik ima dve škatli: prvo s povprečjem 1 in standardnim odklonom 10, drugo pa s povprečjem -1 in standardnim odklonom 10. Ponuja nam naslednjo igro na srečo: naskrivaj bo izbral eno izmed škatel, vsako z verjetnostjo 1/2. Nato bo iz izbrane škatle izbral $n = 100$ listkov s ponavljanjem in nam povedal vsoto. Če prav uganemo, katero škatlo je izbral, dobimo nagrado. Odločimo se, da bomo uganjevali na naslednji način: če je vsota pozitivna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem 1, če pa bo vsota negativna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem -1.

a. (10) Recimo, da čarovnik izbere škatlo s povprečjem 1, vendar vam tega ne pove. Kolikšna približno je verjetnost, da boste prav uganili na podlagi vsote števil na 100 naključno izbranih lističih.

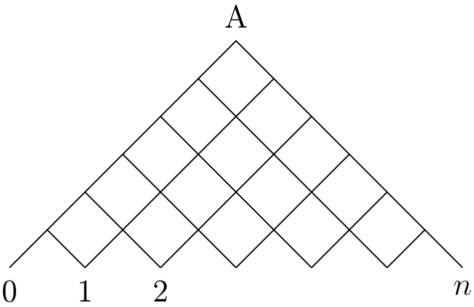
Namig: Računate $P(S_{100} > 0)$.

b. (10) Recimo spet, da je čarovnik izbral škatlo s povprečjem 1. Kolikokrat bi moral izbirati lističe in nam povedati vsoto, da bi uganili prav z verjetnostjo približno 0˙99?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
23. september 2005

1. (20) Mesto T ima ulice v obliki trikotnika kot na sliki 1a. Hiše na spodnji strani trikotnika imajo številke $0, 1, 2, \ldots, n$. Avtobusna postaja je v točki A.

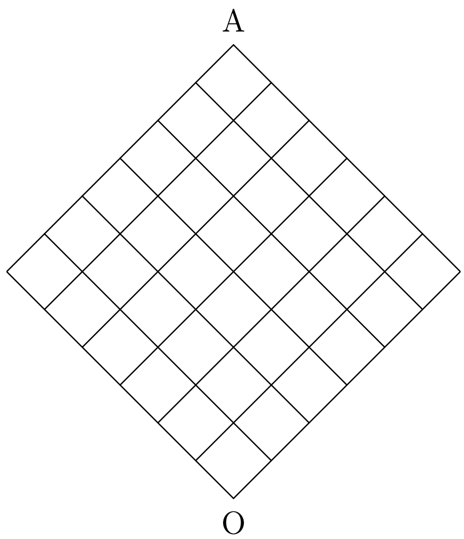


Slika 1a Tloris mesta T

   a. (10) Na koliko načinov lahko pridemo z avtobusne postaje A do hiše s števiko k tako, da gremo vsakič le levo ali desno in se nikoli ne vračamo proti avtobusni postaji?

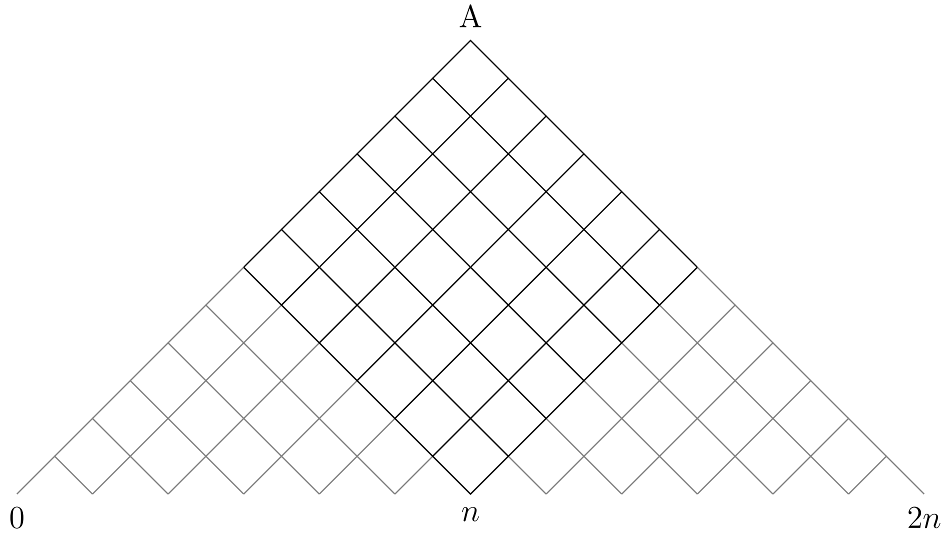
   Namig: Razmislite, kolikokrat morate iti na levo, da pridete do hiše s števiko k.

   b. (10) Mesto K ima obliko kvadrata kot na sliki 1b. Avtobusna postaja je v točki A, profesor pa stanuje v hiši O. Vzporednih ulic je $n + 1$. Na koliko načinov lahko profesor pride z avtobusne postaje do svoje hiše tako, da gre vedno le levo ali desno in se nikoli ne vrača proti avtobusni postaji?



Slika 1b Tloris mesta K

Namig: V mislih dogradite mesto do trikotnega mesta kot na sliki 1c. V dograjenem mestu ima profesorjeva hiša hišno številko n od številk $0, 1, \ldots, 2n$.



Slika 1c Mesto K dograjeno v trikotnik

2. (25) Janez pošilja Katarini kodirana sporočilca v obliki črt in pik. Na poti se spremeni v črtico $\frac{2}{5}$ oddanih pik in se spremeni v piko $\frac{1}{3}$ oddanih črt. V zadnjem sporočilu je Janez oddal $62\dot{}5\%$ pik.

   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da je prvi znak v prejetem sporočilu črta?

   b. (10) Katarina je kot prvi znak prejela piko. Kolikšna je verjetnost, da je Janez piko tudi oddal?

3. (20) V nekem bloku živi n poročenih parov. V času zimskih obolenj naključno zboli m ljudi tega bloka ne glede na starost ali spol, pri čemer je $m \leq 2n$.

   a. (10) V bloku živita tudi zakonca Zupan. Določi verjetnost, da sta oba zakonca zdrava.

   b. (10) Z X označimo slučajno spremenljivko, ki nam pove število parov, v katerih sta obe osebi zdravi. Določi matematično upanje slučajne spremenljivke X.

      Namig: Indikatorji.

4. (20) Naj bodo X, Y in Z med sabo neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene geometrijsko: $X \propto \text{Geom}(1/2)$, $Y \propto \text{Geom}(1/3)$ in $Z \propto \text{Geom}(1/4)$.

   a. (10) Izračunajte rodovno funkcijo vsote $W = X + Y + Z$.

b. (10) Pokažite, da je

$$G_W(s) = \frac{s^3}{4(1-s/2)} - \frac{4s^3}{3(1-2s/3)} + \frac{9s^3}{8(1-3s/4)}$$

in dokažite, da je za $k = 0, 1, \ldots$

$$P(W = k+3) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^k .$$

Namig: Za $|x| < 1$ *je*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k .$$

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y\backslash X$	1	2	3
1	$\frac{4}{45}$	$\frac{8}{45}$	$*$
2	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
3	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
4	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$

a. (10) Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

b. (10) Neodvisno od a. dela naloge dopolnite tabelo tako, da bo veljalo $P(X = 3, Y = k) = \frac{k}{45}$, $E(X|Y = 3) = \frac{21}{10}$ in $E(X|Y = 4) = \frac{24}{11}$.

6. (20) Čarovnik ima dve škatli: prvo s povprečjem 1 in standardnim odklonom 10, drugo pa s povprečjem -1 in standardnim odklonom 10. Ponuja nam naslednjo igro na srečo: naskrivaj bo izbral eno izmed škatel, vsako z verjetnostjo 1/2. Nato bo iz izbrane škatle izbral $n = 100$ listkov s ponavljanjem in nam povedal vsoto. Če prav uganemo, katero škatlo je izbral, dobimo nagrado. Odločimo se, da bomo uganjevali na naslednji način: če je vsota pozitivna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem 1, če pa bo vsota negativna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem -1.

a. (10) Recimo, da čarovnik izbere škatlo s povprečjem 1, vendar vam tega ne pove. Kolikšna približno je verjetnost, da boste prav uganili na podlagi vsote števil na 100 naključno izbranih lističih.

Namig: Računate $P(S_{100} > 0)$.

b. (10) Recimo spet, da je čarovnik izbral škatlo s povprečjem 1. Kolikokrat bi moral izbirati lističe in nam povedati vsoto, da bi uganili prav z verjetnostjo približno 0˙99?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
1. december 2005

1. (30) Stirlingovo število S_k^n pove, na koliko načinov lahko razdelimo množico z n elementi na k disjunktnih, nepraznih podmnožic, katerih unija je enaka dani množici. Taki razdelitvi pravimo *particija*. Primer: Recimo, da je dana množica $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, torej $n = 5$. Razdeliti jo želimo na 4 neprazne, disjunktne podmnožice. Možne particije so:

$$\begin{gathered}
\{1\},\{2\},\{3\},\{4,5\} \\
\{1\},\{2\},\{4\},\{3,5\} \\
\{1\},\{2\},\{5\},\{3,4\} \\
\{1\},\{3\},\{4\},\{2,5\} \\
\{1\},\{3\},\{5\},\{2,4\} \\
\{1\},\{4\},\{5\},\{2,3\} \\
\{2\},\{3\},\{4\},\{1,5\} \\
\{2\},\{3\},\{5\},\{1,4\} \\
\{2\},\{4\},\{5\},\{1,3\} \\
\{3\},\{4\},\{5\},\{1,2\}
\end{gathered}$$

   Torej je $S_4^5 = 10$.

   a. (10) Pokažite, da je $S_2^n = 2^{n-1} - 1$ in $S_{n-1}^n = \binom{n}{2}$ za vsak n.

   b. (10) Utemeljite, da je za $k \geq 2$

   $$S_k^{n+1} = S_{k-1}^n + kS_k^n\,.$$

   Namig: Element $n+1$ lahko ali dodate v že obstoječo podmnožico ali pa ostane sam v svoji podmnožici.

   c. (10) Na razpolago imate 4 različne barve, s katerimi bi radi pobarvali 7 hiš. Na koliko različnih načinov lahko to naredite, s tem, da vsako barvo uporabite *vsaj enkrat*.

   Namig: Upoštevajte b.

2. (20) V r škatel mečemo n kroglic. Meti so med sabo neodvisni, posamezno škatlico pa zadenemo z verjetnostjo $1/r$. Privzemite, da je $n \geq r$. Naj bo A_k dogodek, da je po n metih v k-ti škatlici vsaj ena kroglica za $k = 1, 2, \ldots, n$.

   a. (10) Izračnajte $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)$.

b. (10) Izračunajte

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_r)\,.$$

Namig: Uporabite formulo za vključitve in izključitve.

3. (20) Naj bo $X \propto \mathrm{Bi}(n, 1/2)$. Za slučajni spremenljivki X in Y naj za $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ velja

$$P(X = k, Y = k+1) = P(X = k) \cdot \frac{n-k}{n}\,,$$

$$P(X = k, Y = k-1) = P(X = k) \cdot \frac{k}{n}$$

in $P(X = k, Y = l) = 0$ za $|k - l| > 1$.

a. (10) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

b. (10) Izračunajte $\mathrm{cov}(X, Y)$.

4. (20) Pri sortiranju z algoritmom `QuickSort` je za sortiranje n elementov potrebno X_n primerjav, kjer je X_n slučajna spremenljivka. Označimo z G_n rodovno funkcijo spremenljivke X_n. Velja zveza

$$G_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s^{n-1} G_{k-1}(s) G_{n-k-1}(s)\,,$$

kjer je $G_1(s) = 1$, $G_2(s) = s$ in interpretiramo $G_{-1}(s) = 1$.

a. (10) Izračunajte porazdelitev X_4.

b. (10) Označite $\mu_n = E(X_n)$. Pokažite, da za $n > 2$ velja

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{n} \left((n-2) + \mu_{k-1} + \mu_{n-k-1}\right)\,.$$

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{4}{45}$	$\frac{8}{45}$	$*$
2	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
3	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
4	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$

a. (10) Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

b. (10) Dopolnite tabelo tako, da bo veljalo $P(X = 3, Y = k) = \frac{k}{45}$, $E(X|Y = 3) = \frac{21}{10}$ in $E(X|Y = 4) = \frac{24}{11}$.

6. (20) Čarovnik ima dve škatli: prvo s povprečjem 1 in standardnim odklonom 10, drugo pa s povprečjem -1 in standardnim odklonom 10. Ponuja nam naslednjo igro na srečo: naskrivaj bo izbral eno izmed škatel, vsako z verjetnostjo 1/2. Nato bo iz izbrane škatle izbral $n = 100$ listkov s ponavljanjem in nam povedal vsoto. Če prav uganemo, katero škatlo je izbral, dobimo nagrado. Odločimo se, da bomo uganjevali na naslednji način: če je vsota pozitivna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem 1, če pa bo vsota negativna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem -1.

   a. (10) Recimo, da čarovnik izbere škatlo s povprečjem 1, vendar vam tega ne pove. Kolikšna približno je verjetnost, da boste prav uganili na podlagi vsote števil na 100 naključno izbranih lističih.

      Namig: Računate $P(S_{100} > 0)$.

   b. (10) Recimo spet, da je čarovnik izbral škatlo s povprečjem 1. Kolikokrat bi moral izbirati lističe in nam povedati vsoto, da bi uganili prav z verjetnostjo približno 0˙99?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
3. februar 2006

1. (20) Na listku običajne Športne napovedi je zapisanih 13 parov, običajno nogometnih derbijev. Pri vsakem paru moramo zapisati enega od treh možnih izidov, in sicer zmago prvega tekmovalnega moštva napovemo z označeno številko 1, neodločen izid z označeno številko 0 in zmago drugega tekmovalnega moštva z označeno številko 2. Denimo, da vedno izpolnjujemo celotni listek vseh 13 tekem.

   a. (5) Na koliko načinov je mogoče izpolniti listek?
   b. (5) Na koliko načinov lahko uganemo 12 izidov tekem?
   c. (5) Na koliko načinov lahko uganemo vsaj 10 izidov tekem?
   d. (5) Koliko listkov moramo najmanj izpolniti, da imamo med njimi vsaj 4 pravilno napovedane izide tekem?

2. (20) Abraham de Moivre v svoji "*The Doctrine of Chances (1756)*" kot nalogo 94 predlaga naslednje: Igralci A,B,C igrajo isto igro na srečo po naslednjih pravilih: Najprej igrata dva od treh igralcev. Tisti, ki izgubi, preda svoje mesto tretjemu, ki je čakal in to pravilo velja v naslednjih igrah. Zmaga tisti, ki mu uspe premagati ostala dva v dveh zaporednih igrah. Predpostavljamo, da so igre med sabo neodvisne in je verjetnost za zmago kogarkoli v posamezni igri enaka 1/2.

   a. (10) Predpostavite, da najprej igrata igralca A in B. Definirajte naslednje dogodke

      – $C = \{\text{zmaga A}\}$.
      – $A_1 = \{\text{A zmaga v prvi in drugi igri}\}$.
      – $A_2 = \{\text{A zmaga v prvi igri in izgubi v drugi, C izgubi v tretji igri}\}$.
      – $A_3 = \{\text{A izgubi v prvi igri, B izgubi v drugi igri}\}$.

      Naj bo α verjetnost za zmago igralca A, če najprej igrata A in B, in β verjetnost za zmago A, če najprej igrata igralca A in C. Izrazite

      $$P(C|A_i)$$

      z α in β za vsak $i = 1, 2, 3, 4$.

   b. (10) Naj bo spet α verjetnost za zmago igralca A, če najprej igrata A in B, in β verjetnost za zmago A, če najprej igrata igralca A in C. Utemeljite zvezi

      $$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\beta + \frac{1}{8}\alpha$$

in

$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{8}\beta$$

in izračunajte α.

Namig: $C \subset A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

3. (20) Naj bo $X \propto \mathrm{Bi}(n, 1/2)$. Za slučajni spremenljivki X in Y naj za $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ velja

$$P(X = k, Y = k+1) = P(X = k) \cdot \frac{n-k}{n},$$

$$P(X = k, Y = k-1) = P(X = k) \cdot \frac{k}{n}$$

in $P(X = k, Y = l) = 0$ za $|k - l| > 1$.

   a. (10) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke Y.

   b. (10) Izračunajte $\mathrm{cov}(X, Y)$.

4. (20) Pri sortiranju z algoritmom `QuickSort` je za sortiranje n elementov potrebno X_n primerjav, kjer je X_n slučajna spremenljivka. Označimo z G_n rodovno funkcijo spremenljivke X_n. Velja zveza

$$G_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s^{n-1} G_{k-1}(s) G_{n-k-1}(s),$$

kjer je $G_1(s) = 1$, $G_2(s) = s$ in interpretiramo $G_{-1}(s) = 1$.

   a. (10) Izračunajte porazdelitev X_4.

   b. (10) Označite $\mu_n = E(X_n)$. Pokažite, da za $n > 2$ velja

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{n} \left((n-2) + \mu_{k-1} + \mu_{n-k-1}\right).$$

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{4}{45}$	$\frac{8}{45}$	$*$
2	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
3	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
4	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$

   a. (10) Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

b. (10) Dopolnite tabelo tako, da bo veljalo $P(X = 3, Y = k) = \frac{k}{45}$, $E(X|Y = 3) = \frac{21}{10}$ in $E(X|Y = 4) = \frac{24}{11}$.

6. (20) Čarovnik ima dve škatli: prvo s povprečjem 1 in standardnim odklonom 10, drugo pa s povprečjem -1 in standardnim odklonom 10. Ponuja nam naslednjo igro na srečo: naskrivaj bo izbral eno izmed škatel, vsako z verjetnostjo 1/2. Nato bo iz izbrane škatle izbral $n = 100$ listkov s ponavljanjem in nam povedal vsoto. Če prav uganemo, katero škatlo je izbral, dobimo nagrado. Odločimo se, da bomo uganjevali na naslednji način: če je vsota pozitivna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem 1, če pa bo vsota negativna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem -1.

   a. (10) Recimo, da čarovnik izbere škatlo s povprečjem 1, vendar vam tega ne pove. Kolikšna približno je verjetnost, da boste prav uganili na podlagi vsote števil na 100 naključno izbranih lističih.

      Namig: Računate $P(S_{100} > 0)$.

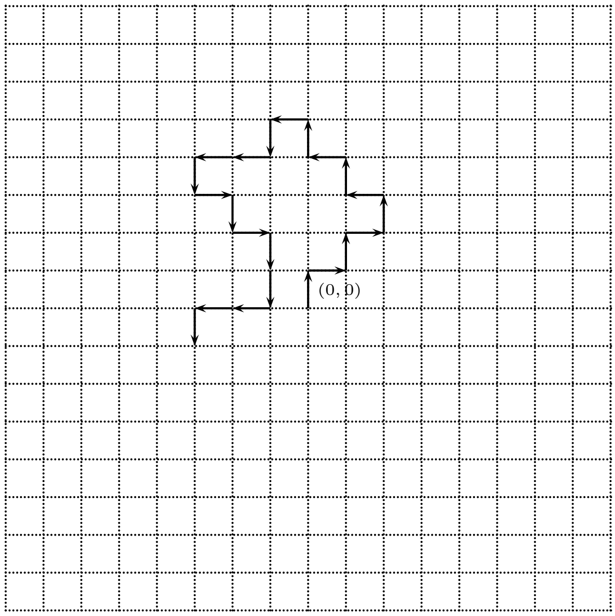
   b. (10) Recimo spet, da je čarovnik izbral škatlo s povprečjem 1. Kolikokrat bi moral izbirati lističe in nam povedati vsoto, da bi uganili prav z verjetnostjo približno 0'99?

2003/04

1. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
4. december 2003

1. (50) Sprehod po celoštevilski mreži je pot, ki se začne v $(0,0)$, na vsakem koraku pa lahko gremo za enoto na desno, levo, gor ali dol. Primer take poti je na sliki 1a.



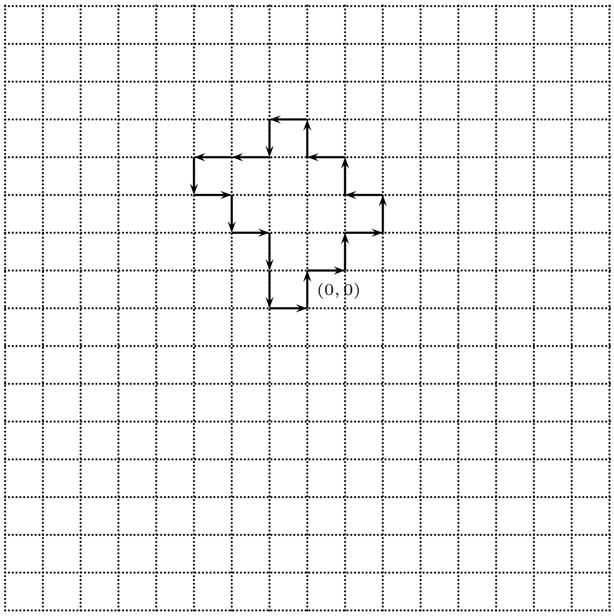
Slika 1a Primer sprehoda po $\mathbb{Z}^2$.

a. (5) Koliko je vseh sprehodov po $\mathbb{Z}^2$, ki imajo natanko n korakov?

b. (5) Koliko je sprehodov z natanko n koraki, ki gredo k_1-krat desno, k_2-krat levo, k_3-krat gor in k_4-krat dol? Pri tem je seveda $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = n$ in $k_i \geq 0$ za $i = 1, 2, 3, 4$.

c. (5) Na sliki 1b je sprehod dolžine $2n$, ki se začne in konča v točki $(0,0)$. Pokažite, da je sprehodov, ki se začno in končajo v točki $(0,0)$, in gredo natanko $2k$-krat "levo" ali "desno", natanko $(2n-2k)$-krat pa "gor" ali "dol" točno

$$\binom{2n}{n}\binom{n}{k}^2.$$



Slika 1b Primer sprehoda po $\mathbb{Z}^2$, ki se začne in konča v $(0, 0)$.

d. (10) Kot znano upoštevajte, da je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Pokažite, da je vseh sprehodov z natanko $2n$ koraki, ki se začno in končajo v točki $(0, 0)$, natanko

$$\binom{2n}{n}^2.$$

Namig: Uporabite c., tudi če ne znate dokazati!

2. (25) Na izpit iz Statistike je prišlo 50 študentov, od katerih jih je 38 preštudiralo poglavji iz kombinatorike in verjetnosti, ostalih 12 pa ne. Verjetnost, da izpit opravi študent, ki je poglavji preštudiral, je 0˙8, verjetnost, da izpit opravi nepripravljen študent, pa je 0˙15.

   a. (15) Kolikšna je verjetnost, da slučajno izbrani študent opravi izpit?

   b. (10) Na slepo izberemo enega študenta in ugotovimo, da je opravil izpit. Kolikšna je verjetnost, da se izbrani študent (kljub zanj ugodnemu razpletu) ni naučil poglavij iz kombinatorike in verjetnosti?

3. (25) Stojim pod šestimi stopnicami, ki so zaporedoma pobarvane z belo, rdečo, zeleno, belo, rdečo in zeleno barvo. V rokah držim kocko, na kateri sta dve ploskvi bele, dve rdeče in dve zelene barve. Meti kocke so med seboj neodvisni in vsi izidi so enako verjetni. Da lahko stopim na naslednjo stopnico, moram na kocki vreči ustrezno barvo. V nasprotnem primeru obstojim na isti stopnici. Tako moram naprej vreči na kocki belo barvo, da lahko stopim na prvo stopnico, ko sem na njej, rdečo za na drugo stopnico in tako do vrha.

   a. (10) Določite verjetnost, da uspem priti na zgornjo stopnico po natanko šestih metih.

   b. (15) Določite verjetnost, da uspem priti na zgornjo stopnico v natanko trinajstih metih.

4. (25) Čarovnik iz dežele matematičnih čudes ima rad kocke. V njegovi zbirki so le čudne kocke s $p \geq 3$ ploskvami, kjer je p vedno praštevilo. Ko čarovnik tako kocko vrže, se z enako verjetnostjo pojavi katerakoli števillka.

   a. (10) Čarovnik izbere kocko s $p = 11$ in jo vrže. Naj bo A dogodek, da je število pik deljivo z 2 in B dogodek, da je število deljivo s 3. Ali sta dogodka A in B neodvisna?

   b. (15) Čarovnik izbere nek p in vrže pripadajočo kocko. Pokažite, da je v primeru, ko sta poljubna dogodka A in B neodvisna, vsaj eden od dogodkov ali $\emptyset$ ali Ω.

2. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
19. januar 2004

1. (25) Iz množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 3)$ naključno izberemo tri števila. Vsaka podmnožica treh števil naj bo enako verjetna. Označimo najmanjše od izbranih treh števil z X, srednje z Y in največje z Z.

   a. (10) Izračunajte $P(X = k)$ za $k = 1, 2, \ldots, n-2$.
   b. (15) Izračunajte $P(Y = k)$ za $k = 2, 3, \ldots, n-1$.

2. (25) Kovanec mečemo, dokler ne dobimo ali m grbov ali m številk, kjer je $m > 1$ dano celo število. Označite z X število potrebnih metov. Privzemamo, da so meti med sabo neodvisni in je verjetnost za grb enaka verjetnosti za številko, torej $1/2$.

   a. (10) Izračunajte $P(X = k)$ za vse $k = m, m+1, \ldots, 2m-1$.
   b. (15) Izračunajte $E(X)$.
   Namig: Upoštevajte, da je
   $$\sum_{k=m}^{2m-1} P(X = k) = 1$$
   za vsak m, torej tudi za $m + 1$. Preverite, da je
   $$k\binom{k-1}{m-1} = m\binom{k}{m}.$$

3. (25) Na voljo vam je naslednja igra na srečo. Stavite \$ 1 na neko število, ki lahko pade na pošteni igralni kocki. Nato vržete 4 poštene kocke. Če se vaše stavljeno število ne pojavi na nobeni kocki, izgubite stavo, v nasprotnem primeru dobite toliko dolarjev, kolikor kock je padlo s to vrednostjo. Naj bo X dobiček ob koncu te igre.

   a. (10) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke X.
   b. (15) Izračunajte pričakovani dobiček $E(X)$ ter varianco $\mathrm{var}(X)$ v tej igri.

4. (25) Naj bosta n in k dani števili z $n > k > 1$. V genetiki nastopi naslednji problem: V dve vzporedni vrsti napišemo $2n$ znakov, tako da je v vsaki vrsti n znakov. Znake povsem naključno izbiramo med črkama A,C,T in G, tako da so izbire neodvisne, vsak znak pa bo izbran z verjetnostjo $1/4$. Prvimo, da imamo ujemanje na segmentu od i do $i+k$, kjer je $i = 1, 2, \ldots, n-k$, če so na pozicijah $i, i+1, \ldots, i+k$ v prvi in drugi vrsti enaki znaki.

   a. (10) Izračunajte verjetnost ujemanja na segmentu od i do $i+k$.
   b. (15) Naj bo X število segmentov, kjer imamo ujemanje. Segmentov dolžine k je $n-k$. Izračunajte $E(X)$.

3. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
7. april 2004

1. (25) V posodi je B belih, R rdečih in G zelenih kroglic. Kroglice začnemo izbirati **z vračanjem** povsem naključno, tako da ima vsaka kroglica enako verjetnost, da jo izberemo. Označimo z X število izbiranj dokler ne izberemo bele kroglice, vključno z zadnjim izbiranjem. Podobno označimo z Y število izbiranj dokler ne izberemo prvič rdeče kroglice in Z število izbiranj, dokler ne izberemo prvič zelene kroglice.

   a. (10) Izračunajte $P(X = 1, Y = l, Z = m)$ za $1 < l < m$.
      Namig: Pomislite v kakšnem vrstnem redu morate dobiti kroglice razlicnih barv, da se zgodi dogodek $\{X = 1, Y = l, Z = m\}$.

   b. (15) Poiščite večrazsežno porazdelitev spremenljivk Y in Z.

2. (25) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{4}{45}$	$\frac{8}{45}$	$*$
2	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
3	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
4	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$

   a. (10) Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

   b. (15) Neodvisno od a. dela naloge dopolnite tabelo tako, da bo veljalo $P(X = 3, Y = k) = \frac{k}{45}$, $E(X|Y = 3) = \frac{21}{10}$ in $E(X|Y = 4) = \frac{24}{11}$.

3. (25) Slučajni spremenljivki X in Y imata porazdelitev dano s predpisom

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{2004(2004 - k)}$$

   za $k = 1, \ldots, 2003$ in $l = 1, \ldots, 2004 - k$ in

$$P(X = 2004, Y = 0) = \frac{1}{2004}.$$

   a. (5) Izračunajte robno porazdelitev slučajne spremenljvike X.

   b. (10) Izračunajte $E(Y|X = k)$ za vse $k = 1, \ldots, 2003, 2004$.

   c. (10) Izračunajte še $E(Y)$.

4. (25) Naj bodo X, Y in Z med sabo neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene geometrijsko: $X \propto \text{Geom}(1/2)$, $Y \propto \text{Geom}(1/3)$ in $Z \propto \text{Geom}(1/4)$.

   a. (10) Izračunajte rodovno funkcijo vsote $W = X + Y + Z$.

   b. (15) Pokažite, da je

$$G_W(s) = \frac{s^3}{4(1-s/2)} - \frac{4s^3}{3(1-2s/3)} + \frac{9s^3}{8(1-3s/4)}$$

   in dokažite, da je za $k = 0, 1, \ldots$

$$P(W = k+3) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^k .$$

   Namig: Za $|x| < 1$ *je*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k .$$

4. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
3. junij 2004

1. (30) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja z rodovno funkcijo

$$G_{Z_1}(s) = G(s) = \frac{1}{2}(1 + s^2)\,.$$

Označite $W_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$. Slučajna spremenljivka W_n je število vseh posameznikov, ki so živeli do vključno generacije n. Označite rodovno funkcijo spremenljivke W_n s H_n. Za rodovne funkcije $H_0, H_1, H_2, \ldots$ velja rekurzivna zveza

$$H_0(s) = s \qquad \text{in} \qquad H_{n+1}(s) = s\,G(H_n(s))\,.$$

a. (10) Poiščite porazdelitev spremenljivke W_2.

b. (10) Označite $\mu_n = E(W_n)$. Izpeljite rekurzivno formulo za μ_n in pokažite, da je $\mu_n = n + 1$.

c. (10) Naj bo $W_\infty = Z_0 + Z_1 + \cdots$ celotno število posameznikov, ki so kdajkoli živeli. Ker ta proces razvejanja izumre, bo W_∞ končna slučajna spremenljivka. Označite njeno rodovno funkcijo z $H(s)$. Ta bo ustrezala enačbi

$$H(s) = s\,G(H(s))\,.$$

Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke W_∞.
Namig: Iz zgornje enačbe izračunajte $H(s)$ in upoštevajte, da je

$$\sqrt{1-x} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k-1}{k-1} \frac{x^k}{(2k-1)2^{2k-1}}$$

za $|x| < 1$.

2. (35) Pri šifriranju sporočil so pomembni računalniški generatorji slučajnih števil. To so programi, ki generirajo naključna zaporedja ničel in enic, kot da bi izbirali z vračanjem iz škatle $\boxed{\boxed{0}\ \ \boxed{1}}$. Za potrebe kontrole kvalitete je program generiral zaporedje 100.000 slučajnih ničel in enic.

a. (10) Izračunajte približno verjetnost, da bo med temi 100.000 naključnimi števili 50.260 enic ali manj.

b. (5) Kolikšna je verjetnost, da bo enic med 48.740 in 50.260?

c. (10) Določite tak a, da bo verjetnost, da dobimo a enic ali manj, enaka 99%.

d. (10) Privzemite, da je bilo med 100.000 računalniško generiranimi slučajnimi števili 50.608 enic. Bi verjeli, da je tak generator slučajnih števil “kvaliteten”? Izračunajte verjetnost, da dobimo 50.608 enic ali več in utemeljite odgovor.

3. (25) V vinski kleti stoji sod, ki drži 100 l (1000 dl). Ko ga do vrha napolnimo, ne opazimo, da pušča. V povprečju pa na dan ”odkaplja” iz njega 0˙1 dl vina, s standardnim odklonom 0˙09 dl.

   a. (15) Ali je mogoče, da je po enem letu v sodu manj kot 95 l vina kljub temu, da soda tekom leta nismo odpirali?

   b. (10) Po kolikšnem času bomo lahko z več kot 50 % gotovostjo trdili, da je v sodu manj kot 90 l vina?

4. (30) V eni od zadnjih anket pred referendumom 23. marca 2003 se je za vstop Slovenije v zvezo NATO izreklo 58% volivcev, proti se je izreklo 25%, neopredeljenih pa je bilo 17%. Privzemite, da je bil izbran vzorec enostavni slučajni velikosti $n = 900$. Privzemite tudi, da si tisti, ki se v anketi izrečejo za ali proti, ne premislijo.

   a. (10) Na referendumu se je za vstop v zvezo NATO izreklo 66˙4% volivcev. Razmišljajte, kot da bi bila udeležba dovolj visoka, da je 66˙4% pravi odstotek za celotno populacijo volivcev. Lahko rezultat 58% na predvolilni anketi pripišemo samo naključnosti pri izbiri vzorca, ali je bolj smiselno trditi, da je za glasovalo tudi nekaj tistih, ki so se anketarjem izrekli kot neopredeljeni? Utemeljite vaš odgovor! Pomagajte si s standardno napako!

   b. (10) Kolikšna je približno verjetnost, da se vzorčni odstotek pri takšni anketi, kot smo jo opisali, od pravega odstotka razlikuje za 1% ali več?

   c. (10) Postavite se v čas pred referendumom. Ali bi pred referendumom napovedali, da bo rezultat referenduma gotovo za vstop v zvezo NATO? Zakaj? Utemeljite odgovor!

Izpit iz statistike

Praktična matematika
10. junij 2004

1. (20) Na šahovsko ploščo, ki obsega 8×8 polj, mora vsak igralec postaviti 16 figur (in sicer po osem enakih kmetov, dva enaka skakača, dva lovca, dve trdnjavi ter po eno damo in kralja). Enakih figur ne razlikujemo med sabo.

   a. (5) Na koliko načinov lahko nevednež postavi teh 16 figur v prvi dve vrsti šahovnice?

   b. (5) Na koliko načinov lahko zgoraj omenjeni postavi 16 figur v dve dani vrsti na šahovnici (torej, da sta postavitvi figur v vrstah enaki), pri čemer enačimo damo s kraljem?

   c. (5) Na koliko načinov je moč teh 16 figur poljubno postaviti na šahovnico?

   d. (5) Na koliko načinov je mogoče 8 kmetov tako postaviti na šahovnico, da je v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu po en kmet?

2. (20) Dani sta dve pošteni igralni kocki. Njuna meta sta med seboj neodvisna. Za vsako naravno število n označimo z A_n dogodek, da je vsota pik na kockah deljiva z n.

   a. (10) Izračunajte verjetnost dogodka A_5. Ali sta dogodka A_2 in A_5 neodvisna?

   b. (10) Določite pogojno verjetnost, da sta na prvi kocki padli dve piki, če veste, da je vsota pik deljiva s 5. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so na prvi kocki padle štiri pike, če je vsota pik deljiva s 5.

3. (20) Dani sta vam naslednji igri na srečo:

IGRA A Vržete pošteni igralni kocki in iz njiju sestavite večje od možnih dvomestnih števil ter stavite 1 \$. V primeru, da bo tako sestavljeno število večje ali enako 54, prejmete poleg povrnjene stave še 1 \$, v nasprotnem primeru ga izgubite.

IGRA B Vržete pošteni igralni kocki in stavite 1 \$ na to, da bo vsota pik na kockah enaka 5. Če stavo dobite, prejmete 8 \$ (torej poleg vloženega še 7 \$), v nasprotnem izgubite vloženi dolar.

   a. (5) Kolikšna je verjetnost, da bo sestavljeno število iz igre A večje ali enako 54? Kolikšna je verjetnost, da bo vsota pik enaka 5 v igri B?

   b. (15) Katero izmed obeh iger bi raje igrali? Odgovor utemeljite.

4. (20) Pri prvi izdaji knjige se na vsaki od strani z verjetnostjo 0˙1 pojavi tiskarska napaka, neodvisno od ostalih strani v knjigi. Naj bo I_i indikator, ki pove, če se je na posamezni strani v knjigi pojavila napaka, torej

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{če je na } i\text{–ti strani v knjigi napaka,} \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

   a. (5) Določite $E(I_1)$ in $\mathrm{var}(I_1)$.

   b. (5) Določite rodovno funkcijo slučajne spremenljivke, ki pove število tiskarskih napak v knjigi s 400 stranmi.

   c. (10) S pomočjo centralnega limitnega izreka določite verjetnost, da se v tej knjigi pojavi vsaj 35 napak.

5. (20) Slučajni spremenljivki X in Y imata porazdelitev dano s predpisom

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{2004(2004 - k)}$$

za $k = 1, \ldots, 2003$ in $l = 1, \ldots, 2004 - k$ in

$$P(X = 2004, Y = 0) = \frac{1}{2004}\,.$$

   a. (5) Izračunajte robno porazdelitev slučajne spremenljvike X.

   b. (5) Izračunajte $E(Y|X = k)$ za vse $k = 1, \ldots, 2003, 2004$.

   c. (10) Izračunajte še $E(Y)$.

6. (20) Iz populacije vseh zaposlenih ljudi v Sloveniji smo izbrali enostavni slučajni vzorec velikosti $n = 400$. V vzorcu je bilo 27 % ljudi, ki še nikoli niso zamenjali delovnega mesta.

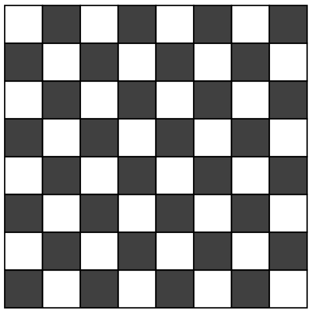
   a. (10) Določite verjetnost, da dejansko manj kot 25 % ljudi v Sloveniji še nikoli ni menjalo delovnega mesta. Korekcijski faktor zanemarite.

   b. (10) Določite še verjetnost, da se dejanski odstotek ljudi, ki še niso menjali delovnega mesta, razlikuje od dobljenega odstotka za več kot 3 %.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
24. junij 2004

1. (20) Predpostavite, da se trdnjava na šahovnici na sliki lahko giblje samo po eno polje v desno ali po eno polje navzgor. Trdnjava začne v levem spodnjem kotu.



   a. (10) Na koliko načino lahko trdnjava pride iz spodnjega levega kota v zgornji desni kot, če se lahko, kot rečeno, vsakič premakne le za eno polje v desno ali eno polje navzgor?

   b. (10) Privzemite, da se trdnjava lahko giblje samo v desno ali navzgor, vendar s poljubno velikimi koraki (ne samo vsakič za eno polje). Na vsakem koraku se mora trdnjava premakniti za vsaj eno polje. Na koliko načinov lahko pride iz spodnjega levega v zgornji deni kot?

   Namig: Računajte najprej za k premikov v desno in l navzgor, kjer je $1 \leq k \leq 7$ *in* $1 \leq l \leq 7$.

2. (20) Igralec A vrže pošteno igralno kocko. Zatem igralec B vrže kocko tolikokrat, kolikor pik je padlo igralcu A.

   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da je med vsemi meti padla vsaj ena šestica?

   b. (10) Kolikšna je verjetnost, da je igralcu A padla trojka, če je skupno število točk, ki jih je zbral B v svojih metih, enako 4.

3. (20) V bobnu se nahaja n rdečih, n zelenih in n belih kroglic, $n \in \mathbb{N}$. Na slepo iz dobro premešanega bobna izberemo $2n$ kroglic. Pri tem nam naj slučajne spremenljivke X, Z in Y zaporedoma povejo število rdečih, zelenih in belih kroglic v našem izboru.

   a. (10) Določite $P(Z = X + Y)$.

b. (10) Določite porazdelitve slučajnih spremenljivk X, Z in Y ter njihova matematična upanja.

4. (20) Oglejte si naslednjo varianto procesa razvejanja: na začetku imamo eno celico. Po geometrijskem času s parametrom p se bo ta celica razdelila na dve neodvisno od ostalih celic. Vse celice se bodo potem delile naprej po enakem načelu. Označite število celic v trenutku n z Z_n in rodovno funkcijo slučajne spremenljivke Z_n z $G_n(s)$. Velja $G_0(s) = s$ in

$$G_{n+1}(s) = G_n\big(s(q + ps)\big)\,,$$

kjer je $q = 1 - p$.

   a. (10) Izračunajte $P(Z_2 = 3)$.

   b. (10) Pokažite, da je $E(Z_0) = 1$ in $E(Z_n) = (1 + p)^n$.

5. (20) Na razpolago imamo pošteno igralno kocko in vrečo enakih nepoštenih kovancev, za katere je verjetnost, da na njih pade grb, enaka p. Najprej vržemo kocko in označimo z X število padlih pik. Nato iz vreče vzamemo X kovancev in jih vržemo na mizo. Pri tem so meti kovancev med seboj neodvisni. Naj slučajna spremenljivka Y pove število grbov, ki jih vidimo na mizi.

   a. (10) Zapišite tabelo porazdelitve vektorja (X, Y).

   b. (10) Izračunajte $E(X)$ ter $E(X|Y = 0)$.

6. (20) Vržete pošteni igralni kocki in iz njiju sestavite večje od možnih dvomestnih števil (z drugimi besedami, večje od obeh padlih pik postavite za desetice, manjše za enice) in stavite 1 \$. V primeru, da bo tako sestavljeno število večje ali enako 54, prejmete poleg povrnjene stave še 1 \$, v nasprotnem primeru ga izgubite.

   Označimo z X_1 slučajno spremenljivko, ki pove dobiček pri eni sami opisani igri.

   a. (10) Določite $E(X_1)$ in $\mathrm{var}(X_1)$.

   b. (10) Določite verjetnost, da imate po 300 odigranih igrah dobiček.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
1. september 2004

1. (20) V ravnini so dane točke A, B, C, D, E in F, od katerih nobena trojica ne leži na isti premici.

   a. (5) Koliko različnih premic določajo te točke?

   b. (5) Koliko različnih trikotnikov določajo te točke?

   c. (5) Koliko med temi trikotniki je takih, ki imajo točko C za oglišče?

   d. (5) Koliko je med temi trikotniki takšnih, ki imajo daljico AF za eno od stranic?

2. (20) Dva radarja odkrivata sovražna letala. Prvi radar odkrije sovražno letalo z verjetnostjo p, drugi pa z verjetnostjo q. Vsak radar odkrije posamezno letalo neodvisno od drugih letal in tudi neodvisno od drugega radarja. V območje radarskega nadzora priletijo tri sovražna letala.

   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da je neko letalo odkrito z radarjema? Kolikšna je verjetnost, da vsaj enega izmed letal ne odkrije noben radar?

   b. (10) Recimo, da so vsa letala odkrita. Kolikšna je pogojna verjetnost, da drugi radar ni odkril nobenega?

3. (20) V posodi naj bosta črna kroglica in kroglica z oznako 1. Na vsakem koraku iz posode naključno izberemo kroglico. Če ima izbrana kroglica oznako k, jo vrnemo in dodamo še eno kroglico z oznako k. Če je kroglica črna, jo vrnemo v posodo in dodamo kroglico z oznako $n+1$, kjer je n največja oznaka do tik pred izbiranjem. Primer: Prvih nekaj korakov lahko izgleda kot $\boxed{\bullet\ ①}$ → $\boxed{\bullet\ ①\ ②}$ → $\boxed{\bullet\ ①\ ②\ ①}$ → $\boxed{\bullet\ ①\ ②\ ①\ ③}$ → $\boxed{\bullet\ ①\ ②\ ①\ ③\ ①}$ → $\boxed{\bullet\ ①\ ②\ ①\ ③\ ①}$ → ⋯

   a. (10) Naj bo X število različno označenih kroglic takrat, ko je po $(n-1)$-em izbiranju v posodi vključno s črno natanko $n+1$ kroglic. Črne kroglice ne štejemo. Izračunajte

   $$P(\text{pri } k\text{-tem izbiranju smo izbrali črno kroglico})$$

   za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ in potem $E(X)$.

   Namig: Indikatorji.

   b. (10) Naj bo Y število kroglic z oznako 1 v posodi takrat, ko je po $(n-1)$-em izbiranju v posodi vključno s črno natanko $n+1$ kroglica. Izračunajte $P(Y = k)$ za $k = 1, 2, \ldots, n$.

4. (20) Naj bo K kvadrat s stranico 1 in naključno izberimo točko T v kvadratu. Naj bo slučajna spremenljivka X razdalja točke T do njej najbližje stranice.

   a. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke X.

   b. (10) Določite še upanje slučajne spremenljivke X in tak z, da bo $P(X \leq z) = P(X \geq z)$.

5. (20) Za rodovne funkcije $G_0, G_1, G_2, \ldots$ slučajnih spremenljivk $X_0, X_1, X_2, \ldots$ naj velja rekurzivna zveza

$$G_0(s) = s \qquad \text{in} \qquad G_{n+1}(s) = s\, F(G_n(s))\,,$$

   kjer je $F(s) = \frac{1}{2}(1 + s^2)$.

   a. (10) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke X_2.

   b. (10) Pokažite, da velja rekurzivna formula $E(X_{n+1}) = E(X_n) + 1$ in nato z indukcijo pokažite, da velja $E(X_{n+1}) = n + 1$.

6. (20) Zavarovalnice pri avtomobilskem zavarovanju razmišljajo na sledeč način: recimo, da zavarujemo 100.000 ljudi. Vemo, da bo 19% od teh, torej 19.000, vložilo zahtevke. Zahtevki bodo različno visoki in jih vnaprej ne moremo napovedati. Lahko pa si predstavljamo, da bo celotna vsota zahtevkov kot vsota 19.000 naključno izbranih števil iz velike škatle, katere povprečje je enako £1.200 in standardni odklon £900.

   a. (10) Izračunajte verjetnost, da bo vsota 19.000 naključno izbranih števil iz škatle večja od £23.085.329.

   b. (10) Če zavarovalnica postavi premijo na £200, bo 100.000 zavarovancev skupno plačalo £20.000.000. Izračunajte verjetnost, da bo vsota 19.000 naključno izbranih števil večja od £20.000.000, torej verjetnost, da bo zavarovalnica imela izgubo.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
15. september 2004

1. (20) Na listku običajne Športne napovedi je zapisanih 13 parov, običajno nogometnih derbijev. Pri vsakem paru moramo zapisati enega od treh možnih izidov, in sicer zmago prvega tekmovalnega moštva napovemo z označeno številko 1, neodločen izid z označeno številko 0 in zmago drugega tekmovalnega moštva z označeno številko 2. Denimo, da vedno izpolnjujemo celotni listek vseh 13 tekem.

   a. (5) Na koliko načinov je mogoče izpolniti listek?

   b. (5) Na koliko načinov lahko uganemo 12 izidov tekem?

   c. (5) Na koliko načinov lahko uganemo vsaj 10 izidov tekem?

   d. (5) Koliko listkov moramo najmanj izpolniti, da imamo med njimi vsaj 4 pravilno napovedane izide tekem?

2. (20) Dva radarja odkrivata sovražna letala. Prvi radar odkrije sovražno letalo z verjetnostjo p, drugi pa z verjetnostjo q. Vsak radar odkrije posamezno letalo neodvisno od drugih letal in tudi neodvisno od drugega radarja. V območje radarskega nadzora priletijo tri sovražna letala.

   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da je neko letalo odkrito z radarjema? Kolikšna je verjetnost, da vsaj enega izmed letal ne odkrije noben radar?

   b. (10) Recimo, da so vsa letala odkrita. Kolikšna je pogojna verjetnost, da drugi radar ni odkril nobenega?

3. (20) Kot vložek v igro morate plačati 1000 SIT. Nato vam vržejo 3 poštene igralne kocke. V primeru, da pade ena petica, vam izplačajo 1000 SIT, če padeta dve petici, vam izplačajo 2000 SIT, v primeru, da na vseh treh kockah padejo petice, pa vam izplačajo x SIT. Označite z X dobiček v eni igri.

   a. (10) Denimo, da je $x = 7000$. Določite porazdelitev in matematično upanje slučajne spremenljivke X.

   b. (10) Kakšen mora biti x, da bo igra za vas ugodna?

4. (20) Naj bo K kvadrat s stranico 1 in naključno izberimo točko T v kvadratu. Naj bo slučajna spremenljivka X razdalja točke T do njej najbližje stranice.

   a. (10) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke X.

   b. (10) Določite še upanje slučajne spremenljivke X in tak z, da bo $P(X \leq z) = P(X \geq z)$.

5. (20) Za rodovne funkcije $G_0, G_1, G_2, \ldots$ slučajnih spremenljivk $X_0, X_1, X_2, \ldots$ naj velja rekurzivna zveza

$$G_0(s) = s \qquad \text{in} \qquad G_{n+1}(s) = s\,F(G_n(s))\,,$$

kjer je $F(s) = \frac{1}{2}(1 + s^2)$.

a. (10) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke X_2.

b. (10) Pokažite, da velja rekurzivna formula $E(X_{n+1}) = E(X_n) + 1$ in nato z indukcijo pokažite, da velja $E(X_{n+1}) = n + 1$.

6. (20) Zdolgočaseni statistik je n-krat z vračanjem izbiral lističe iz spodnjih škatel. Števila na izbranih lističih je označil z $X_1, X_2, \ldots, X_n$, njihovo vsoto pa z S_n.

(i) $\boxed{-1}\ \boxed{0}\ \boxed{1}$

(ii) $\boxed{-1}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{1}$

a. (10) Statistik je izračunal

$$P(-30 \le S_{1000} \le 30) \doteq 0\text{˙}96\,.$$

Za katero od škatel je računal verjetnosti? Utemeljite odgovor.

b. (10) Statistik je izračunal $P(S_{100} = 0) \doteq 0\text{˙}049$. Katero škatlo je obravnaval?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
23. februar 2005

1. (20) Med $2N$ športniki je N moških in N žensk.

   a. (10) Športnike moramo razdeliti na N skupin po 2 tako, da je v vsaki skupini en moški in ena ženska. Na koliko načinov lahko to naredimo?

   b. (10) Za naslednje tekmovanje moramo $2N$ športnikov spet razdeliti na N skupin po 2, le da zdaj spol ni pomemben. V skupini sta lahko športnika istega spola. Na koliko načinov lahko to naredimo?

      Namig: Izbirajte pare po vrsti. Preverite rezultat za $N = 2$.

2. (20) V prvi posodi se nahajo tri bele, štiri modre in pet črnih kroglic, v drugi pa šest belih, deset modrih in osem črnih kroglic.

   a. (10) Za katero posodo je verjetnost, da potegnemo dve enaki kroglici, večja?

   b. (10) Iz druge posode na slepo prestavimo neko kroglico v prvo posodo. Nato iz prve posode naključno izvlečemo kroglico ter opazimo, da je črne barve. Kolikšna je verjetnost, da je bila tudi prestavljena kroglica črne barve?

3. (20) Iz množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 3)$ naključno izberemo tri števila. Vsaka podmnožica treh števil naj bo enako verjetna. Označimo najmanjše od izbranih treh števil z X, srednje z Y in največje z Z.

   a. (10) Izračunajte $P(X = k)$ za $k = 1, 2, \ldots, n-2$.

   b. (10) Izračunajte $P(Y = k)$ za $k = 2, 3, \ldots, n-1$.

4. (20) Kovanec mečemo, dokler se ne pojavita dva grba zapovrstjo. Označimo potrebno število metov, vključno z zadnjim, z X. Rodovna funkcija $G(s)$ slučajne spremenljivke X je enaka

$$G(s) = \frac{s^2}{4 - 2s - s^2}\,.$$

   a. (10) Izračunajte še $E(X)$.

   b. (10) Označite $a = -1 - \sqrt{5}$ in $b = -1 + \sqrt{5}$. Kot znano privzemite, da velja

$$G(s) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{s^2}{b(1-\frac{s}{b})} - \frac{s^2}{a(1-\frac{s}{a})}\right)\,.$$

   Poiščite porazdelitev X.

5. (30) Nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki X in Y naj imata porazdelitev

$$P(X=k, Y=l) = p^2 q^l$$

za $0 \leq k \leq l$.

   a. (10) Izračunajte $E(X|Y=l)$.

   b. (10) Pokažite, da je
   $$P(Y=l|X=k) = pq^{l-k}$$
   za $l = k, k+1, \ldots$.

   c. (10) Izračunajte $E(Y|X=k)$.

6. (20) Predlagana je naslednja igra na srečo: nasprotnika A in B bosta vsak zase vrgla pošten kovanec 1000-krat. Naj bo X število grbov igralca A in Y število grbov igralca B. Če je $|X-Y| \leq 15$, zmaga A, sicer zmaga B.

   a. (10) Pri metu dveh kovancev so 4 možni izidi: GG, GŠ, ŠG, ŠŠ. Vsak izid ima verjetnost 1/4. Dopolnite stavek: Razlika $X-Y$ je kot vsota _____ slučajnih števil, ki jih dobimo z naključnim izbiranjem z vračanjem iz škatle

   $$\boxed{?}\quad\boxed{?}\quad\boxed{?}\quad\boxed{?}$$

   Namig: Kaj se zgodi z razliko grbov igralca A in igralca B pri vsakem metu kovanca?

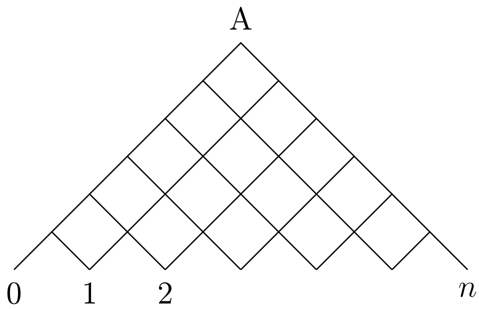
   b. (10) Izračunajte približno verjetnost, da zmaga igralec A.

2002/03

1. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
4. december 2002

1. (25) Mesto T ima ulice v obliki trikotnika kot na sliki 1a. Hiše na spodnji strani trikotnika imajo številke $0, 1, 2, \ldots, n$. Avtobusna postaja je v točki A.

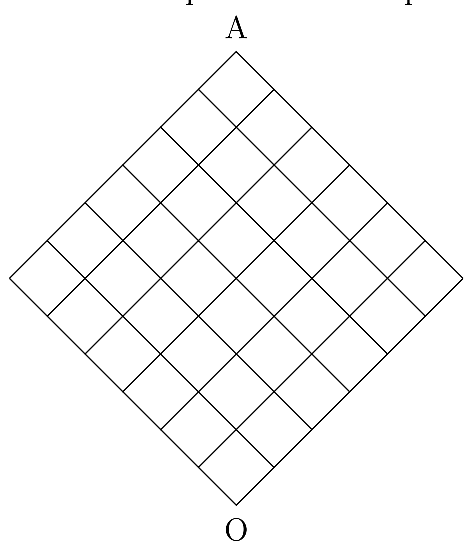


Slika 1a Tloris mesta T

   a. (10) Na koliko načinov lahko pridemo z avtobusne postaje A do hiše s števiko k tako, da gremo vsakič le levo ali desno in se nikoli ne vračamo proti avtobusni postaji?

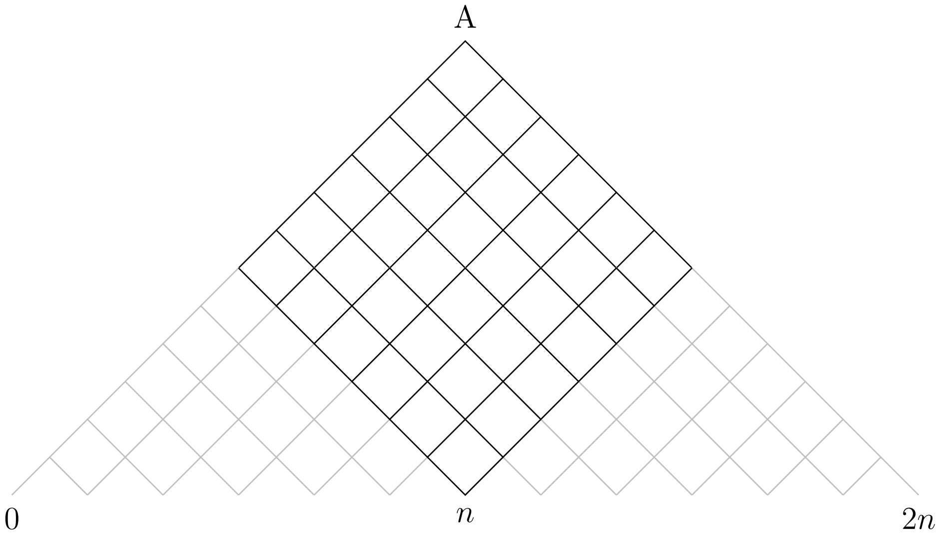
      Namig: Razmislite, kolikokrat morate iti na levo, da pridete do hiše s števiko k.

   b. (15) Mesto K ima obliko kvadrata kot na sliki 1b. Avtobusna postaja je v točki A, profesor pa stanuje v hiši O. Vzporednih ulic je $n+1$. Na koliko načinov lahko profesor pride z avtobusne postaje do svoje hiše tako, da gre vedno le levo ali desno in se nikoli ne vrača proti avtobusni postaji?



Slika 1b Tloris mesta K

Namig: V mislih dogradite mesto do trikotnega mesta kot na sliki 1c. V dograjenem mestu ima profesorjeva hiša hišno številko n od številk $0, 1, \ldots, 2n$.



Slika 1c Mesto K dograjeno v trikotnik

2. (25) V posodi naj bosta črna kroglica in kroglica z oznako 1. Na vsakem koraku iz posode naključno izberemo kroglico. Če ima izbrana kroglica oznako k, jo vrnemo in dodamo še eno kroglico z oznako k. Če je kroglica črna, jo vrnemo v posodo in dodamo kroglico z oznako $n + 1$, kjer je n največja oznaka do tik pred izbiranjem. Primer: Prvih nekaj korakov lahko zgleda kot [● ①] → [● ① ②] → [● ① ② ①] → [● ① ② ① ③] → [● ① ② ① ③ ①] → [● ① ② ① ③ ① → ⋯

   a. (5) Kolikšna je verjetnost, da bo kroglica, ko izbirate četrtič, črna?

   b. (5) Kolikšna je verjetnost, da bomo na začetku štirkrat zapovrstjo izbrali belo kroglico?

   c. (5) Kolikšna je verjetnost, da bodo po prvih štirih izbiranjih v posodi vse kroglice z različnimi oznakami?

   d. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo kroglica, ki jo izberemo pri tretjem izbiranju iz posode, bela?

   Namig: Vse možnosti v posodi, ko je kroglic 5 in ima zadnja dodana oznako 1 *so*

   [● ① ① ① ①] [● ① ① ② ①]

   [● ① ② ① ①] [● ① ② ② ①]

   [● ① ② ③ ①]

3. (25) André, Carlos, Lleyton in Marat igrajo tenis v dvojicah. Igrajo šest nizov zapored, pri čemer pred začetkom vsakega niza naključno izžrebajo para, ki bosta ta niz igrala skupaj. Verjetnost, da André in Carlos zmagata proti Lleytonu in Maratu posamezen niz, je enaka 0˙45, verjetnost, da André in Lleyton zmagata proti Carlosu in Maratu je enaka 0˙55 ter verjetnost, da André in Marat zmagata proti Lleytonu in Carlosu v posameznem nizu, je enaka 0˙8. Dogodki, povezani s posameznimi nizi, so med sabo neodvisni.

   a. (5) Kolikšna je verjetnost, da prvi niz igrata André in Carlos proti Lleytonu in Maratu?
   b. (10) Kolikšna je verjetnost, da André izgubi prvi niz?
   c. (10) Kolikšna je verjetnost, da André izgubi največ en niz v rundi šestih nizov?

4. (25) Čarovnik iz dežele matematičnih čudes ima rad kocke. V njegovi zbirki so le čudne kocke z n ploskvami, kjer je n neko naravno število. Označimo s K_n kocko z n ploskvami, na katerih so zapisana vsa števila od 1 do n. Ko čarovnik takšno kocko vrže, se z enako verjetnostjo pojavi katerakoli številka.

   a. (5) Čarovnik izbere kocko K_{6m} in jo vrže. Naj bo A dogodek, da je število pik deljivo z 2 in B dogodek, da je število deljivo s 3. Ali sta dogodka A in B neodvisna?
   b. (10) Čarovnik izbere kocko K_{111} in jo vrže. Naj bo C dogodek, da je število pik deljivo s 5, D dogodek, da je število deljivo s 3 ter E dogodek, da je vsota cifer števila padlih pik enako 3. Ali je kateri izmed parov dogodkov neodvisen?
   c. (10) Čarovnik si iz množice čudnih kock izbere kocke K_{11}, K_{12} in K_{13} ter jih spravi v žep. Nato iz tega žepa izvleče kocko, pri čemer je verjetnost potega posamezne kocke sorazmerna s številom ploskev na kocki. Ko vrže to kocko, na njej pade število, ki je deljivo s 6. Določi verjetnost, da je bila izbrana kocka K_{11}.

2. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
5. februar 2003

1. (25) Na voljo vam je naslednja igra na srečo. Pred vsakim metom dveh poštenih igralnih kock stavimo \$1. Če pade na obeh kockah število 6, potem prejmemo \$5 (torej poleg vložene stave še 4\$). V primeru da sta obe cifri na kockah enaki, vendar ne šestici, se nam izplačajo \$3, v primeru, ko pade natanko ena šestica, pa \$2. Sicer ne prejmemo ničesar. Meti kock so med seboj neodvisni. Naj bo X dobiček ob koncu igre.

   a. (10) Določite pričakovani dobiček v tej igri, torej $E(X)$.

   b. (15) Izračunajte še $\mathrm{var}(X)$.

2. (25) Užaljeni A je ljubimcu B svoje žene napovedal dvoboj. Pravila za dvoboj so naslednja: A in B bosta izmenično streljala eden na drugega, dokler ne bo nekdo od njiju zadet. Privzemite, da so posamezni streli med seboj neodvisni, A zadene z verjetnostjo a in B zadene z verjetnostjo b.

   a. (10) Recimo, da začne streljati A. Kolikšna je verjetnost, da se bo A uspešno maščeval?

   b. (15) Naj bo X celotno število strelov vključno z zadnjim. Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X in njeno matematično upanje. Privzemite, da je začel streljati A.

   Namig: Obravnavajte $P(X = n)$ za sode in lihe n posebej.

3. (25) Naj bo X slučajna spremenljivka z vrednostmi $k = 0, 1, 2, \ldots$, za katero velja

$$P(X = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(X = k - 1)$$

   za $k = 1, 2, \ldots$ in konstanti $a \neq 1$ in b.

   a. (15) Pokažite, da velja $E(X) = \frac{a+b}{1-a}$.

   b. (10) Naj bo $p \in (0, 1)$ in $q = 1 - p$. Naj velja

$$P(X = k) = \binom{m + k - 1}{m - 1} p^m q^k$$

   za $k = 0, 1, 2, \ldots$. Izračunajte $E(X)$.

   Namig: Lahko uporabite a.

4. (25) V matematični genetiki se pojavi naslednja naloga: vsak od $N = \alpha + \beta + \gamma$ posameznikov je tipa AA, AB ali BB (tipa AB in BA obravnavamo kot enaka). Pri tem jih je α tipa AA, β tipa AB in γ tipa BB, pri čemer tip BA obravnavamo kot AB. Ko pride do naslednje generacije, se geni vsakega od N posameznikov razbijejo na sestavna dela A in B in se povsem naključno spet sestavijo po parih. Bolj natančno, imamo $2\alpha + \beta$ genov A in $\beta + 2\gamma$ genov tipa B. Vseh teh $2N$ genov se povsem naključno skombinira v N novih posameznikov s po dvema genoma.

   a. (10) Označite novo nastale posameznike z številkami $1, 2, \ldots, N$. Izračunajte verjetnosti $P(\text{posameznik } k \text{ je tipa } *)$ za $* \in \{\text{AA,AB,BB}\}$.

   b. (15) Naj bo X število posameznikov tipa AA, ki so nastali z naključnimi kombinacijami, Y število posameznikov tipa AB in Z število posameznikov tipa BB. Izračunajte $E(X)$, $E(Y)$ in $E(Z)$.

3. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
9. april 2003

1. (25) V matematični genetiki se pojavi naslednja naloga: vsak od $N = \alpha + \beta + \gamma$ posameznikov je tipa AA, AB ali BB (tipa AB in BA obravnavamo kot enaka). Pri tem jih je α tipa AA, β tipa AB in γ tipa BB, pri čemer tip BA obravnavamo kot AB. Ko pride do naslednje generacije, se geni vsakega od N posameznikov razbijejo na sestavna dela A in B in se povsem naključno spet sestavijo po parih. Bolj natančno, imamo $2\alpha + \beta$ genov A in $\beta + 2\gamma$ genov tipa B. Vseh teh $2N$ genov se povsem naključno skombinira v N novih posameznikov s po dvema genoma.

   a. (10) Označite novo nastale posameznike z številkami $1, 2, \ldots, N$. Izračunajte verjetnosti P(posameznik 1 je tipa AA) in P(posameznika 1 in 2 sta tipa AA).

   b. (15) Naj bo X število posameznikov tipa AA, ki so nastali z naključnimi kombinacijami. Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.

      Namig: Indikatorji.

2. (25) V rokah držimo imamo dva nepoštena kovanca, enega za 5 SIT in drugega za 10 SIT. Oba vržemo v zrak, pri čemer sta meta posameznih kovancev neodvisna. Verjetnost grba na posameznem kovancu je enaka $p \in (0, 1)$, verjetnost cifre pa $q = 1 - p$. Definirajmo slučajni spremenljivki

$$X = \begin{cases} 1, & \text{če pade na prvem kovancu cifra (torej 5),} \\ 0, & \text{če pade na prvem kovancu grb,} \end{cases}$$

   Y pa naj bo vsota vrednosti na obeh kovancih (pri tem je vrednost nekega kovanca 0, če na njem pade grb).

   a. (10) Izdelajte tabelo porazdelitve slučajnih spremenljivk X in Y.

   b. (5) Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni?

   c. (10) Izračunajte še $E(XY)$.

3. (25) V temni škatli je 10 kock, Od tega je 9 običajnih poštenih igralnih kock (torej s številkami 1, 2, 3, 4, 5 in 6), deseta pa je sicer poštena, ampak so na njej zapisana števila 0, 1, 2, 4, 8 in 16.

   a. (10) Na slepo izvlečemo kocko iz škatle in jo vržemo. Naj bo X število pik, ki jih zagledamo na kocki. Izračunajte pričakovano vrednost slučajne spremenljivke X.

b. (15) Denimo, da v rokah držimo dve različni zgoraj opisani kocki in ju vržemo. Naj bo Y število pik na običajni kocki, z A pa označimo dogodek, da na njej pade (strogo) več pik kot na nenevadni deseti kocki. Izračunajte pogojno matematično upanje $E(Y|A)$.

4. (25) Statistika A in B sta vsak 100-krat vrgla kovanec. Predpostavljajte, da so vsi meti med sabo neodvisni, verjetnost za grb pri metu kovanca pa je za oba statistika enaka $p \in (0, 1)$. Označite z X število grbov, ki jih dobi statistik A, z Y pa število grbov, ki jih dobi statistik B. Naj bo $Z = X + Y$ skupno število grbov.

   a. (10) Izračunajte $P(X = k|Z = n)$ za dan $0 \leq n \leq 200$ in $\max(0, n - 100) \leq k \leq \min(100, k)$.

      Namig: Namesto, da A in B vržeta vsak svoj kovanec 100*-krat, si lahko predstavljate, da vrže najprej A kovanec* 100*-krat, potem pa še B isti kovanec* 100*-krat.*

   b. (15) Izračunajte $E(X|Z = n)$ in $E(X^2|Z = n)$ za dan $0 \leq n \leq 200$.

      Namig: Poskusite prepoznati pogojno porazdelitev X glede na dogodek $\{Z = n\}$.

4. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
4. junij 2003

1. (25) Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki z $X \propto \mathrm{Bi}(m,p)$ in $Y \propto \mathrm{Bi}(n,p)$. Označite $Z = X + Y$.

   a. (10) Določite rodovno funkcijo slučajne spremenljivke Z. Kako je porazdeljena Z?

   b. (15) Izračunajte $E(X|Z=z)$.

2. (25) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana z gostoto

$$p_{X,Y}(x,y) = cx^2y$$

   za $x, y \in [0,1]$.

   a. (5) Določite konstanto c.

   b. (10) Določite robni gostoti $p_X(x)$ ter $p_Y(y)$.

   c. (10) Izračunajte še $E(XY^2)$ ter $\mathrm{cov}(X,Y)$.

3. (25) Naj bo $m > 0$ celo število. Naj bo $p \in (0,1)$ in naj velja $q = 1 - p$. Za proces razvejanja $Z_0, Z_1, \ldots$ naj velja

$$G(s) = G_{Z_1}(s) = \left(\frac{1}{2 - s^m}\right)^{1/m} .$$

   a. (10) Izračunajte $E(Z_2)$.

   b. (15) Z matematično indukcijo pokažite, da je

$$G_n(s) = \left(\frac{n - (n-1)s^m}{n + 1 - ns^m}\right)^{1/m}$$

   in izračunajte $P(Z_n = 0)$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$.

4. (25) Čarovnik ima dve škatli: prvo s povprečjem 1 in standardnim odklonom 10, drugo pa s povprečjem -1 in standardnim odklonom 10. Ponuja nam naslednjo igro na srečo: naskrivaj bo izbral eno izmed škatel, vsako z verjetnostjo 1/2. Nato bo iz izbrane škatle izbral $n = 100$ listkov s ponavljanjem in nam povedal vsoto. Če prav uganemo, katero škatlo je izbral, dobimo nagrado. Odločimo se, da bomo uganjevali na naslednji način: če je vsota pozitivna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem 1, če pa bo vsota negativna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem -1.

a. (10) Recimo, da čarovnik izbere škatlo s povprečjem 1, vendar vam tega ne pove. Kolikšna približno je verjetnost, da boste prav uganili na podlagi vsote števil na 100 naključno izbranih lističih.

   Namig: Računate $P(S_{100} > 0)$.

b. (15) Recimo spet, da je čarovnik izbral škatlo s povprečjem 1. Kolikokrat bi moral izbirati lističe in nam povedati vsoto, da bi uganili prav z verjetnostjo približno 0˙99?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
12. junij 2003

1. (20) Naj bo r fiksno pozitivno celo število. Z $x_1, x_2, \ldots, x_r$ označimo nenegativna cela števila.

   a. (10) Pokažite, da je različnih r-teric oblike $(x_1, \ldots, x_r)$, takih da je

   $$x_1 + x_2 + \cdots + x_r \leq n$$

   za dano pozitivno celo število n, enako

   $$\binom{n+r}{r}.$$

   Namig: Zapišite n enic kot $|1|1|1|\cdots|1|$ in izbirajte r pregrad s ponavljanjem.

   b. (10) Uporabite a. za dokaz identitete

   $$n + rn = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+r-1}{r-1}.$$

   Namig: Preštejte vse rešitve v a. na drug način tako, da najprej preštejete vse možnosti, ki dajo vsoto natanko $0 \leq r \leq n$.

2. (20) Pipi in Melhijad, mali in veliki pujs, se igrata nenavadno igrico. Pipi stoji na stolu in vrže bučo v Melihijada. Buča se razleti na velike, srednje in male kose, pri čemer je velikih kosov 10 %, srednjih 30 %, majhnih kosov pa je 60 %. Koščki buče se odbijejo nazaj proti Pipiju. Ob zadetku veliki kos prevrne Pipija z verjetnostjo 0,9, srednji kos ga prevrne z verjetnostjo 0,2, majhni kos pa z verjetnostjo 0˙05.

   a. (10) Pipija zadane natanko en kos buče in nesrečni Pipi se zvrne s stola. Kolikšna je verjetnost, da ga je prevrnil srednje velik kos buče? [12]

   b. (10) Določite še verjetnost dogodka, da se je Pipi uspel obdržati na stolu pri pogoju da sta v Pipija priletela dva kosa buče, od katerih je bil eden zagotovo velik.

3. (20) V posodi je b belih, r rdečih in m modrih kroglic. Dva igralca izmenično izbirata kroglico, ki jo nato vrneta v posodo. Zmaga tisti, ki prvi potegne belo kroglico. Z X označimo število potegov do zmage kateregakoli igralca.

[12] V poskusu ni bila poškodovana nobena žival. Oba sta srečno odpujsala domov.

a. (10) Navedite $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

b. (10) Izračunajte verjetnost, da zmaga prvi igralec na potezi.

4. (20) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja z

$$G(s) = G_{Z_1}(s) = 1 - \log(2 - e^{s-1}) \,.$$

a. (10) Izračunajte $P(Z_3 = 0)$.

b. (10) Z matematično indukcijo dokažite, da velja

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{4}{45}$	$\frac{8}{45}$	$*$
2	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
3	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
4	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$

a. (10) Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

b. (10) Dopolnite tabelo tako, da bo veljalo $P(X = 3, Y = k) = \frac{k}{45}$, $E(X|Y = 3) = \frac{21}{10}$ in $E(X|Y = 4) = \frac{24}{11}$.

6. (20) Recimo, da imate namen n-krat igrati ruleto v HIT-u. Izberete si lahko dve različni strategiji:

- Vedno stavite 1 EURO na številko. Če dobite, vam povrnejo stavo in izplačajo dodatnih 35 EURO. Če ne dobite, ste izgubili tudi stavo. Verjetnost, da dobite, je 1/37.
- Vedno stavite 1 EURO na rdeče. Če dobite, vam povrnejo stavo in izplačajo dodaten 1 EURO. Če ne dobite, ste izgubili tudi stavo. Verjetnost, da dobite, je 18/37.

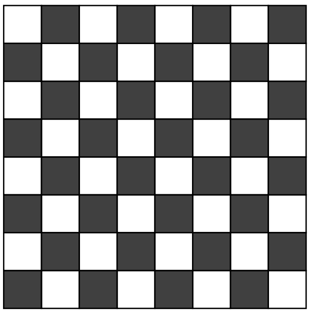
a. (10) Za obe strategiji izračunajte verjetnost, da po $n = 10.000$ igrah rulete nimate izgube.

b. (10) Izračun v a. pokaže, da je s prvo strategijo verjetnost, da ne bomo na izgubi, večja kot pri drugi strategiji. Vendar ima vsaka stvar svojo ceno. Izračunajte verjetnost, da bo vaša izguba po $n = 10.000$ igrah 500 EURO ali več za obe strategiji. Na kratko komentirajte.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
26. junij 2003

1. (20) Predpostavite, da se trdnjava na šahovnici na sliki lahko giblje samo po eno polje v desno ali po eno polje navzgor. Trdnjava začne v levem spodnjem kotu.



   a. (10) Na koliko načino lahko trdnjava pride iz spodnjega levega kota v zgornji desni kot, če se lahko, kot rečeno, vsakič premakne le za eno polje v desno ali eno polje navzgor?

   b. (10) Privzemite, da se trdnjava lahko giblje samo v desno ali navzgor, vendar s poljubno velikimi koraki (ne samo vsakič za eno polje). Na vsakem koraku se mora trdnjava premakniti za vsaj eno polje. Na koliko načinov lahko pride iz spodnjega levega v zgornji deni kot?

      Namig: Računajte najprej za k premikov v desno in l v levo, kjer je $1 \leq k \leq 7$ *in* $1 \leq l \leq 7$.

2. (20) V zgornjem predalu Borutove omare se nahajo tri bele, štiri modre in pet črnih nogavic, v spodnjem pa šest belih, deset modrih in osem črnih nogavic.

   a. (10) Zjutraj še v temi mora Borut iz poljubnega predala izvleči dve nogavici. Seveda upa, da bosta enake barve. Kateri predal si bo izbral? Odgovor utemelji.

   b. (10) Nekdo je Borutu prejšnji večer prestavil iz zgornjega v spodnji predal eno nogavico. Borut zjutraj potegne iz spodnjega predala črno nogavico. Kolikšna je verjetnost, da je bila tudi prestavljena nogavica črna?

3. (20) V bobnu se nahaja n rdečih, n zelenih in n belih kroglic, $n \in \mathbb{N}$. Na slepo iz dobro premešanega bobna izberemo $2n$ kroglic. Pri tem nam naj slučajne spremenljivke X, Z in T zaporedoma povejo število rdečih, zelenih in belih kroglic v našem izboru.

a. (10) Določite $P(Z = X + Y)$.

b. (10) Določite porazdelitve slučajnih spremenljivk X, Z in T ter njihova upanja.

4. (20) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ zaporedje nenegativnih slučajnih spremenljivk, kjer velja $E(Z_0) = 1$. Naj bo
$$G_{Z_n}(s) = G_{Z_{n-1}}(1 - p + ps^2)\,,$$
kjer je $p \in (0, 1)$.

   a. (10) Pokažite, da je $E(Z_n) = 2^n p^n$ za vsako naravno število n.
   Namig: Vemo, da je $E(X) = \lim_{s\uparrow 1} G'_X(s)$.

   b. (10) Pokažite, da za $n \in \mathbb{N}$ velja zveza $E(Z_n^2) = 2^{n+1} p^n (1 - p) + 4p^2\, E(Z_{n-1}^2)$.

5. (20) Naj bo $n > 1$ dano naravno število. Slučajni spremenljivki X in Y imata porazdelitev dano z
$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{n(n-k)}$$
za $1 \leq k < n$ in $l \leq n - k$ in
$$P(X = n, Y = 0) = \frac{1}{n}\,.$$

   a. (10) Izračunajte $E(Y|X = k)$ za $k < n$.

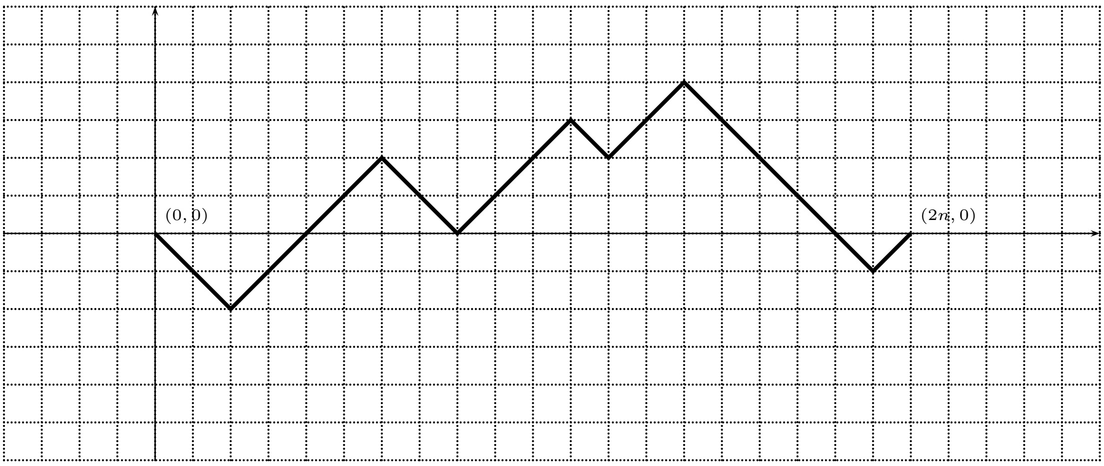
   b. (10) Izračunajte še $E(Y|X = 0)$ in $E(Y)$.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
28. avgust 2003

1. (40) Dyckove poti v $\mathbb{Z}^2$ se vedno začno v točki (k, l), kjer sta k in l celi števili. Vsak korak poti gre iz točke (m, n) ali v točko $(m+1, n+1)$ ali točko $(m+1, n-1)$, kjer sta vedno m in n celi števili.

   a. (10) Preštejte vse Dyckove poti iz točke $(0,0)$ do točke $(0, 2n)$. Primer take poti je na sliki 1a.

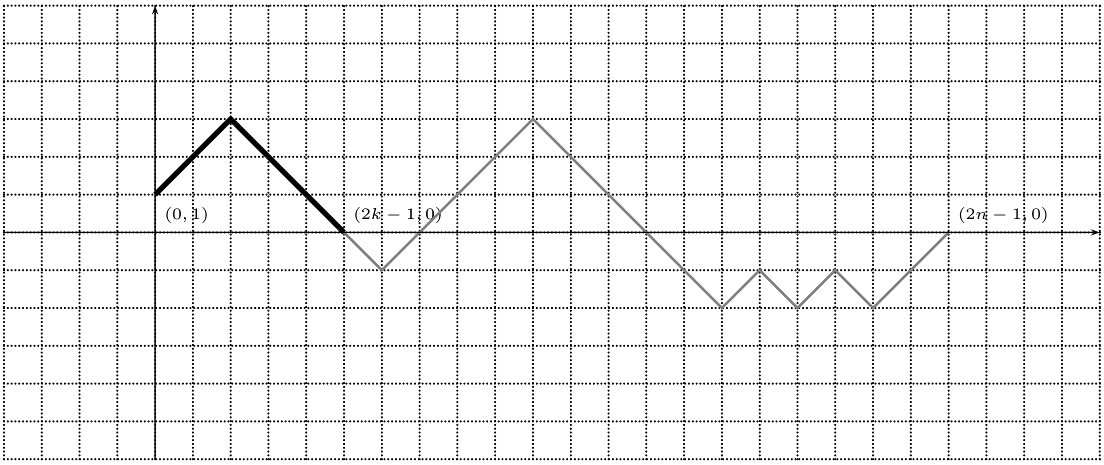


Slika 1a Primer Dyckove poti iz $(0,0)$ v $(2n, 0)$.

   b. (10) Število vseh Dyckovih poti iz točke $(0,1)$ do točke $(2n-1, 0)$ je $\binom{2n-1}{n}$. Naj bo u_{2k-1} število Dyckovih poti iz točke $(0,1)$ do $(2k-1, 0)$, ki se prvič dotaknejo abscisne osi v točki $(2k-1, 0)$. Primer take poti je izrisan s polno črto na sliki 1b. Pokažite, da velja

$$\binom{2n-1}{n} = \sum_{k=1}^{n} u_{2k-1} \binom{2n-2k}{n-k}.$$

Namig: Pot od $(2k-1, 0)$ do $(2n-1, 0)$ je Dyckova pot dolžine $2n-2k$.



Slika 1b Primer Dyckove poti iz $(0,1)$ v $(2n-1,0)$, ki se prvič dotakne abscise v točki $(2k-1,0)$.

c. (10) Kot znano privzemite, da je

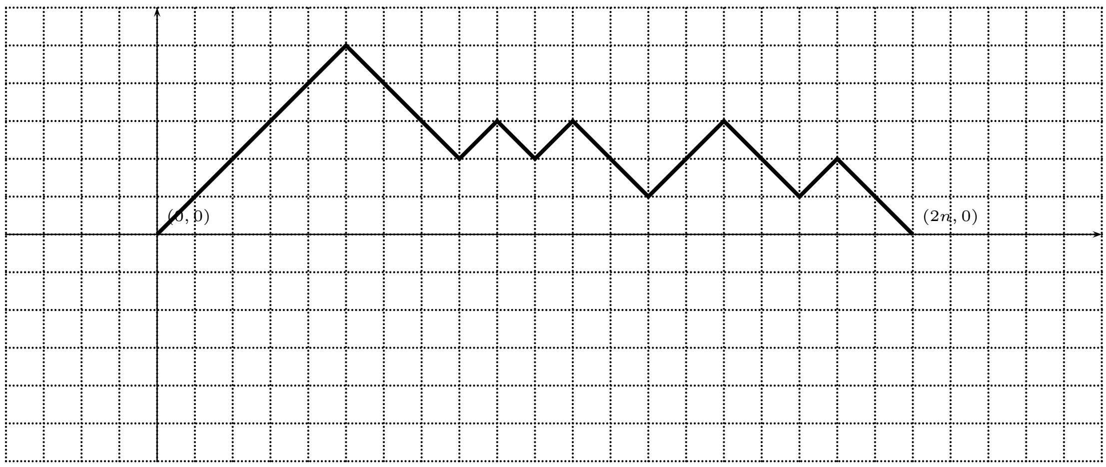
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k-1}\binom{2k-1}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \binom{2n-1}{n}\frac{2n-2}{2n-1}\,.$$

Z uporabo b. in matematične indukcije dokažite, da je

$$u_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}\binom{2k-1}{k}\,.$$

d. (10) Enostranske Dyckove poti iz točke $(0,0)$ v točko $(0,2n)$ so take, ki nikoli ne zdrsnejo pod abscisno os. Primer take poti je na sliki 1c. Označimo število takih pot z v_{2n}. Pokažite, da velja

$$v_{2n} = \sum_{k=1}^{n} u_{2k-1}v_{2n-2k}\,.$$



Slika 1c Primer enostranske Dyckove poti iz $(0, 0)$ v $(2n, 0)$.

2. (20) Na vesoljski postaji se mora v vsakem trenutku nahajati 5 astronavtov, trije izkušeni in dva neizkušena. V primeru, da pride do zunanje napake na postaji, naključno izberejo astronavta, ki naj bi napako odpravil. Pri tem je verjetnost, da pošljejo na delo izkušenega astronavta enaka 0˙25, verjetnost, da izberejo neizkušenega pa dvakrat manjša. Verjetnost, da astronavt zabrede v še večje težave, medtem ko poskuša odpraviti napako, je enaka 0˙1 za izkušenega astronavta, za neizkušenega pa 0˙25.

   a. (10) Določite verjetnost, da ob zunanji napaki vesoljske postaje astronavti zabredejo v še hujše težave, kot tiste, v katerih so trenutno.

   b. (10) Nekega nesrečnega dne na zemeljski postaji, ki nadzira vesoljsko postajo, dobijo sporočilo, da so med odpravljanjem napak zabredli v težave. Kolikšna je verjetnost, da so v akcijo poslali neizkušenega astronavta?

3. (20)Dani sta dve pošteni igralni kocki. Njuna meta sta med seboj neodvisna. Označimo z X slučajno spremenljivko, ki pove vsoto pik na obeh kockah, z Y pa slučajno spremenljivko, ki pove večje število pik.

   a. (5) Določite porazdelitvi slučajnih spremenljivk X ter Y.

   b. (5) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke $X - Y$.

   c. (5) Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni?

   d. (5) Določite še $E(X)$ in $E(Y)$.

4. (20) V genetiki imamo naslednjo nalogo: na začetku imamo eno bakterijo. V trenutkih $n = 0, 1, \ldots$ se lahko zgodi dvoje: vse bakterije se razdelijo v dve z verjetnostjo

p, ali pa se ne zgodi nič z verjetnostjo $q = 1 - p$. Označimo z Z_n slučajno število bakterij v trenutku n. Z $G_n(s)$ označimo rodovno funkcijo slučajne spremenljivke Z_n. Velja $G_0(s) = s$ in

$$G_{n+1}(s) = qG_n(s) + pG_n(s^2)\,.$$

a. (10) Pokažite, da velja

$$E(Z_{n+1}) = (1 + p)\,E(Z_n)$$

in izračunajte $E(Z_n)$.

b. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je

$$G_n(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\, s^{2^k}\,.$$

Izračunajte $P(Z_n = k)$ za vse $k = 1, 2, \ldots$.
Namig: Po Pascalu je

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\,.$$

5. (20) Na nevarnem gozdnem odseku dolžine 1 km se pogosto podirajo drevesa. Če drevo pade čez cesto, le-ta ni več prevozna od točke nesreče naprej. Razdalja prevoznosti poti do zapore naj bo podana s slučajno spremenljivko X, katere gostota je enaka $p_X(x) = Ax(1 - x^2)$ za $x \in [0, 1]$.

   a. (10) Določite A tako, da bo to res gostota in izračunajte $E(X)$.

   b. (5) Denimo, da želimo skreniti s ceste po 0˙5 km poti. Določite verjetnost, da je cesta prevozna do tega odcepa.

   c. (5) Denimo, da želimo skreniti s ceste po 0˙5 km poti in smo že prevozili 0˙2 km nevarnega odseka. Določite verjetnost, da bo cesta prevozna do našega odcepa.

6. (20) V igralnici Perla v Novi Gorici je gost Gregoroni pred kratkim priigral 144.000 evrov. Iz razpoložljivih podatkov je bilo razvidno, da je vztrajno igral na isti način: vedno je stavil skupno 500 evrov. Od tega je stavil vedno 200 evrov na "polno" na številko 17, 300 evrov pa na "konja" iz številk 16 in 17. Pri igri na "polno" vam pri dobljeni igri vrnejo stavo in izplačajo se 35-krat toliko, sicer izgubite stavo. Pri konju vam v pri dobljeni igri vrnejo stavo in izplačajo še 17-krat toliko, sicer stavo izgubite. Na ruleti je 37 številk, ki se pojavijo z enako verjetnostjo, posamezne igre pa so med sabo neodvisne.

   a. (10) Označite z X čisti dobitek gosta v eni igri z zgoraj opisanimi stavami. Ugotovite, kakšne vrednosti lahko ima X s kakšnimi verjetnostmi in izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

b. (10) Gost Gregoroni je svoj dobitek priigral v 582 igrah. Izračunajte verjetnost dobitka enakega ali večjega kot ga je s svojo igro priigral gost Gregoroni za število iger enako $n = 582$.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
8. september 2003

1. (30) Stirlingovo število S_k^n pove, na koliko načinov lahko razdelimo množico z n elementi na k disjunktnih, nepraznih podmnožic, katerih unija je enaka dani množici. Taki razdelitvi pravimo *particija*. Primer: Recimo, da je dana množica $\{1,2,3,4,5\}$, torej $n = 5$. Razdeliti jo želimo na 4 neprazne, disjunktne podmnožice. Možne particije so:

$$\begin{gathered}\{1\},\{2\},\{3\},\{4,5\}\\ \{1\},\{2\},\{4\},\{3,5\}\\ \{1\},\{2\},\{5\},\{3,4\}\\ \{1\},\{3\},\{4\},\{2,5\}\\ \{1\},\{3\},\{5\},\{2,4\}\\ \{1\},\{4\},\{5\},\{2,3\}\\ \{2\},\{3\},\{4\},\{1,5\}\\ \{2\},\{3\},\{5\},\{1,4\}\\ \{2\},\{4\},\{5\},\{1,3\}\\ \{3\},\{4\},\{5\},\{1,2\}\end{gathered}$$

   Torej je $S_4^5 = 10$.

   a. (10) Pokažite, da je $S_2^n = 2^{n-1} - 1$ in $S_{n-1}^n = \binom{n}{2}$ za vsak n.

   b. (10) Utemeljite, da je za $k \geq 2$

   $$S_k^{n+1} = S_{k-1}^n + kS_k^n\,.$$

   Namig: Element $n+1$ lahko ali dodate v že obstoječo množico ali pa ostane sam v svoji podmnožici.

   c. (10) Na razpolago imate 4 različne barve, s katerimi bi radi pobarvali 7 hiš. Na koliko različnih načinov lahko to naredite, s tem, da vsako barvo uporabite *vsaj enkrat*.

   Namig: Upoštevajte b.

2. (20) Dani sta dve pošteni igralni kocki. Njuna meta sta med seboj neodvisna. Za vsako naravno število n označimo z A_n dogodek, da je vsota pik na kockah deljiva z n.

   a. (10) Izračunajte verjetnost dogodka A_5. Ali sta dogodka A_2 in A_5 neodvisna?

b. (10) Določite pogojno verjetnost, da sta na prvi kocki padli dve piki, če veste, da je vsota pik deljiva s 5. Kolikšna je pogojna verjetnost, da so na prvi kocki padle štiri pike, če je vsota pik deljiva s 5.

3. (20) Previdna roparja A in B sta se odločila, da bosta na "delo"odhajala izmenično, dokler nekoga od njiju ne bodo dobili pri kraji. Privzemite, da so posamezni ropi med seboj neodvisni. Roparja A ujamejo z verjetnostjo a, roparja B pa z verjetnostjo b.

   a. (10) Recimo, da začne z ropi oseba A. Kolikšna je verjetnost, da ga bodo dobili pri delu prej kot roparja B?

   b. (10) Naj bo X celotno število ropov, vključno z zadnjim, ki ne uspe. Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X in njeno matematično upanje. Privzemite, da je začel ropati A.

4. (20) Oglejte si naslednjo varianto procesa razvejanja: na začetku imamo eno celico. Po geometrijskem času s parametrom p se bo ta celica razdelila na dve neodvisno od ostalih celic. Vse celice se bodo potem delile naprej po enakem načelu. Označite število celic v trenutku n z Z_n in rodovno funkcijo slučajne spremenljivke Z_n z $G_n(s)$. Velja $G_0(s) = s$ in

$$G_{n+1}(s) = G_n\big(s(q + ps)\big) ,$$

   kjer je $q = 1 - p$.

   a. (10) Pokažite, da je $E(Z_n) = (1 + p)^n$.

   b. (10) Izračunajte $P(Z_3 = 8)$.

5. (20) Na razpolago imamo pošteno igralno kocko in vrečo enakih nepoštenih kovancev, za katere je verjetnost, da na njih pade grb, enaka p. Najprej vržemo kocko in označimo z X število padlih pik. Nato iz vreče vzamemo X kovancev in jih vržemo na mizo. Pri tem so meti kovancev med seboj neodvisni. Naj slučajna spremenljivka Y pove število grbov, ki jih vidimo na mizi.

   a. (10) Zapišite tabelo porazdelitve vektorja (X, Y).

   b. (10) Izračunajte $E(X)$ ter $E(X|Y = 0)$.

6. (20) V podjetju HIT so v letu 1999 gostje igrali igro *Colore* 440.000-krat. Verjetnost za dobitek pri tej igri je $p \doteq 0\dot{}00198079$.

   a. (10) Zanima nas število S_n dobitkov v 440.000 igrah. To število je kot vsota 440.000 neodvisnih slučajnih spremenljivk z vrednostma 0 in 1, torej $S_n = X_1 + \cdots X_n$, kjer je $P(X_i = 1) = p$ in $P(X_i = 0) = 1 - p$. Z uporabo centralnega limitnega izreka izračunajte približno verjetnost, da bo dobitkov 920 ali več. *Upoštevajte:* $\Phi(1\dot{}64) \doteq 0\dot{}95$.

b. (10) Recimo, da je izplačilo pri dobitku enako $x > 0$. Če gost stavi enoto in stavo dobi, mu to enoto vrnejo in dodajo še x enot. Pokažite, da je ta dobitek lahko največ $x = 502$, če naj bo verjetnost, da bo hiša po 440.000 igrah imela izgubo, največ 0˙01? *Upoštevajte:* $\Phi(-2˙33) \doteq 0˙01$.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
19. februar 2004

1. (30) Od vsake od črk a, b in c imamo po n primerkov. Sprva so črke v leksikografskem redu, torej

$$aaaaa\ldots abbbb\ldots .bbcc\ldots .c$$

Črke lahko poljubno permutiramo, kar lahko naredimo na $(3n)!$ načinov. [13]

   a. (10) Koliko je različnih permutacij, če enakih črk ne razlikujemo med sabo?

   b. (10) Preštejte permutacije $3n$ črk, pri katerih po permutaciji nobena črka a ni na mestu, kjer je bila pred permutacijo črka a. Primer: če je $n = 3$ je

   $$bcbacbcaa$$

   taka permutacija.

   c. (10) Preštejte permutacije $3n$ črk, pri katerih po permutaciji nobena od črk a ni na mestu, kjer je bila prej črka a in nobena od črk b ni na mestu, kjer je bila prej črka b. Primer: če je $n = 3$, je

   $$cbcaacbab$$

   taka permutacija.

   Namig: Odgovor bo izražen z vsoto.

   d. (10) Preštejte permutacije $3n$ črk, pri katerih po permutaciji nobena od črk ni na mestu, kjer je bila pred permutacijo črka istega tipa. Primer: če je $n = 3$ je

   $$bcbaccaba$$

   taka permutacija.

   Namig: Odgovor bo izražen z vsoto.

2. (20) Ob začetku pisanja izpitov je v predavalnici M2 sedelo 16 študentov matematike in 20 študentov računalništva, v predavalnici M3 pa 10 študentov matematike in 14 študentov računalništva. Z malo zamude sta na izpit prišla še dva študenta računalništva in vsak od njiju je neodvisno od drugega na slepo izbral eno od obeh predavalnic. Študenti bodo končali s pisanjem v naključnem vrstnem redu, tako da bo vsak od študentov z enako verjetnostjo prvi zaključil.

[13] Povzeto po A. De Moivre, *Doctrine of Chances*, Frank Cass and Company, 1738, Problem XXXV, str. 98.

a. (10) Določi verjetnost, da je prvi študent, ki konča z izpitom, pisal izpit v M2.

b. (10) Določi verjetnost, da je prvi, ki zapusti predavalnico M2, študent matematike.

3. (30) Naj bo X nenegativna celoštevilska slučajna spremenljivka, za katero velja

$$P(X = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) P(X = k - 1)$$

za $k = 1, 2, \ldots$. Predpostavite, da je $a \neq 1$.

a. (10) Pokažite, da velja

$$E(X) = a(E(X) + 1) + b$$

in izračunajte $E(X)$.
Namig: Na pravem mestu napišite $k = (k - 1) + 1$.

b. (10) Pokažite, da je

$$E(X^2) = a\Big(E(X^2) + 2\,E(X) + 1\Big) + b(E(X) + 1)\,.$$

Izračunajte $\mathrm{var}(X)$.
Namig: Na pravem mestu napišite $k^2 = (k - 1)^2 + 2(k - 1) + 1$.

c. (10) Naj bo sta $\alpha, \beta > 0$ in

$$P(X = k) = \frac{\beta^{\alpha}(\alpha)_k}{(1 + \beta)^{\alpha+k}\, k!}$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots$, kjer je $(\alpha)_0 = 1$ in $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$. Izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.
Namig: Določite a *in* b.

4. (20) Naj bodo $Z_0, Z_1, \ldots$ nenegativne celoštevilske slučajne spremenljivke . Označimo z $G_n(s)$ rodovno funkcijo spremenljivke Z_n. Predpostavite, da velja $G_0(s) = s$ in

$$G_{n+1}(s) = G_n\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+4}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+4}\right) s^2 \right).$$

a. (10) Izračunajte porazdelitev spremenljivke Z_2.

b. (10) Izračunajte $E(Z_n)$ za $n \geq 1$.

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y\backslash X$	1	2	3
1	$\frac{4}{45}$	$\frac{8}{45}$	$*$
2	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
3	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$
4	$\frac{2}{45}$	$*$	$*$

a. (10) Dopolnite tabelo tako, da bosta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni.

b. (10) Dopolnite tabelo tako, da bo veljalo $P(X=3, Y=k) = \frac{k}{45}$, $E(X|Y=3) = \frac{21}{10}$ in $E(X|Y=4) = \frac{24}{11}$.

6. (20) Iz škatle $\boxed{\text{-a}}\ \boxed{0}\ \boxed{\text{a}}$ naključno izberemo n listkov z vračanjem. Označimo števila na listkih z $X_1, X_2, \ldots$ in naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

a. (10) Naj bo $a = 1$. Izračunajte $P(-200 \leq S_n \leq 200)$ za $n = 133415$.

b. (10) Naj bo $n = 10000$ in naj velja

$$P(-418 \leq S_{10000} \leq 418) = 0^{\cdot}99\,.$$

Izračunajte a.

2001/02

1. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
11. december 2001

1. (25) V knjigarni prodajajo zvezke štirih različnih barv: zelene, rdeče, modre in črne. Zvezki se razlikujejo le po barvah, vseh pa imajo dovolj na zalogi. Andreja potrebuje letos šest zvezkov.

   a. (10) Na koliko načinov si jih lahko izbere?

   b. (15) Na koliko načinov si lahko izbere 6 zvezkov, če jih želi imeti največ v dveh različnih barvah?

2. (25) Stojim pod šestimi stopnicami, ki so zaporedoma pobarvane z belo, rdečo, zeleno, belo, rdečo in zeleno barvo. V rokah držim kocko, na kateri sta dve ploskvi bele, dve rdeče in dve zelene barve. Meti kocke so med seboj neodvisni in enako verjetni. Da lahko stopim na naslednjo stopnico, moram na kocki vreči ustrezno barvo. V nasprotnem primeru obstojim na isti stopnici. Tako moram naprej vreči na kocki belo barvo, da lahko stopim na prvo stopnico, ko sem na njej, rdečo za na drugo stopnico in tako do vrha.

   a. (10) Določite verjetnost, da uspem priti na zgornjo stopnico po natanko šestih metih.

   b. (15) Določite verjetnost, da uspem priti na zgornjo stopnico v natanko trinajstih metih.

3. (25) Iz kraja A v kraj B peljeta dve cesti. Iz kraja B v kraj C tudi peljeta dve cesti. Vsaka od cest je neprehodna z verjetnostjo p neodvisno od stanja ostalih cest.

   a. (10) Izračunajte verjetnost, da ni prehodne poti iz kraja A v kraj C.

   b. (15) Izračunajte verjetnost, da lahko pridemo iz kraja A v kraj B pri pogoju, da ni prehodne poti iz kraja A do kraja C.

4. (25) Dvema igralcema z dobro premešanega kupa kart razdelimo po 5 kart. Igralca si najbolj želita poker iz asov, torej vse štiri ase med petimi razdeljenimi kartami. Vsak igralec lahko vrne eno od kart in zahteva še eno iz preostalega kupa 42 kart.

   a. (15) Pokažite, da za poljubne dogodke velja

   $$P(A|B) = P(A|B \cap C)\, P(C|B) + P(A|B \cap C^c)\, P(C^c|B)\,.$$

   b. (10) Recimo, da ima prvi igralec v roki natanko 3 ase in dve drugi karti. Kolikšna je njegova pogojna verjetnost, da bo s šesto karto dobil asa?

2. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
10. januar 2002

1. (25) Pred nami stoji igralni avtomat. Vsakič, ko vržemo vanj žeton, z verjetnostjo $2/5$ dobimo iz avtomata dva žetona. Z verjetnostjo $3/5$ nam avtomat žeton "požre". V avtomat mečemo žeton za žetonom, dokler jih še kaj imamo, vendar ne več kot štirikrat. Posamezne igre na avtomat so med seboj neodvisne. Na začetku imamo v roki en žeton. Igro torej igramo štirikrat, če prej ne ostanemo praznih rok.
   Naj bo X število žetonov ob koncu igre.

   a. (10) Določite porazdelitev slučajne spremenljivke X.
   b. (15) Naj bo vsak žeton vreden 350 SIT. Določite pričakovani dobiček oziroma izgubo pri tej igri.

2. (25) Spomladi na vrtu raste n marjetic, n zvončkov in n telohov, kjer je n neko naravno število. Naključno sestavimo šopek $2n$ cvetlic. Pri tem nam naj slučajne spremenljivke X, Z in T zaporedoma povejo število marjetic, zvončkov in telohov v šopku.

   a. (10) Določite verjetnost, da je v šopku toliko marjetic kot zvončkov in telohov skupaj.
   b. (15) Določite porazdelitve slučajnih spremenljivk X, Z in T ter njihova upanja.

3. (25) Kovanec mečemo tako dolgo, dokler ne dobimo ali dva grba zapovrstjo ali dve številki zapovrstjo. Označimo število potrebnih metov, vključno z zadnjim, z X. Predpostavljamo, da so meti med sabo neodvisni in je verjetnost grba enaka $p \in (0, 1)$.

   a. (15) Izračunajte $P(X = n)$ za $n = 2, 3, \ldots$.
      Namig: Računajte posebej za sode in lihe n.
   b. (10) Izračunajte $E(X)$.

4. (25) V nekem bloku živi n poročenih parov. V času zimskih obolenj naključno zboli m ljudi tega bloka ne glede na starost ali spol, pri čemer je $m \leq 2n$.

   a. (10) V bloku živita tudi zakonca Zupan. Določi verjetnost, da sta oba zakonca zdrava.
   b. (15) Z X označimo slučajno spremenljivko, ki nam pove število parov, v katerih sta obe osebi zdravi. Določi matematično upanje slučajne spremenljivke X.
      Namig: Indikatorji.

3. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
4. april 2002

1. (25) V r škatel naključno mečemo kroglice. Meti so med seboj neodvisni, verjetnost zadetka pa je za vsako škatlo enaka p, kjer $p \in (0,1)$. Privzemite, da imate n kroglic. Naj bo X_k število kroglic v škatli k za $k = 1, 2, \ldots, r$.

   a. (15) Utemeljite, da je
   $$\mathrm{var}(X_1 + X_2) = 2np\,(1 - 2p)$$
   in sklepajte, da je
   $$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = -np^2\,.$$
   Namig: Kakšna je porazdelitev slučajne spremenljivke X_1? Kaj pove slučajna spremenljivka $X_1 + X_2$ in kako je porazdeljena? Za izračun $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$ uporabi formulo za izračun variance vsote dveh slučajnih spremenljivk.

   b. (10) Izračunajte
   $$\mathrm{var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_r)\,.$$

2. (25) Slučajne spremenljivke X, Y in Z naj bodo neodvisne in enako porazdeljene z $X \propto \mathrm{Geom}(p)$. Izračunati želimo $P(X < Y < Z)$. Označite $q = 1 - p$.

   a. (10) Pokažite, da je
   $$P(X = x, Y = y, Z > y) = P(X = x, Y = y)\,q^y\,.$$

   b. (15) Izračunajte $P(X < Y < Z)$.
   Namig: Utemelji in uporabi naslednjo zvezo:
   $$\begin{aligned} P(X < Y < Z) &= \sum_{x<y} P(X = x, Y = y, Z > y) \\ &= \sum_{x<y} P(X = x, Y = y)\,q^y \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=x+1}^{\infty} P(X = x)\,P(Y = y)\,q^y\,. \end{aligned}$$

3. (25) Sladkosnedemu Janezku je babica prinesla za rojstni dan tri velike posode z različnimi bonboni. V prvi je 100 čokoladnih bonbonov, v drugi je 100 žele bonbonov in v tretji 100 trdih bonbonov.
   Vsak dan si Janezek privošči 10, 15 ali 20 bonbonov, neodvisno od njihove vrste

in neodvisno od prejšnjih dni. Verjetnost, da posamezni dan poje 10 bonbonov, je enaka $\frac{1}{6}$, verjetnost, da poje 15 bonbonov, je enaka $\frac{1}{3}$ in verjetnost, da poje 20 bonbonov, je $\frac{1}{2}$.
Naj bo X_i slučajna spremenljivka, ki pove število bonbonov, ki jih je Janezek pojedel i–ti dan in naj bo Y slučajna spremenljivka, ki pove, koliko bonbonov je Janezek pojedel v enem tednu.

a. (15) Določi $E(X_i)$ ter pričakovano število bonbonov, ki jih Janezek poje v enem tednu.

b. (10) Določi $E(X_1|Y)$.

4. (25) Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana s tabelo:

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = -1$	0˙1	0˙2	0
$X = 0$	0	0˙1	0˙2
$X = 1$	0˙3	0	0˙1

a. (10) Sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni?

b. (15) Izračunajte $E\big(X(X+Y) \mid X\big)$.

St

4. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
31. maj 2002

1. (25) Svetovno prvenstvo v nogometu je pred vrati. Nogometno igrišče v Gwangjuju je široko 70 metrov. Predpostavimo, da je gol točkast objekt v sredini krajše stranice igrišča. Napadalec Z. se od gola nikoli ne oddalji za več kot 35 metrov. Predpostavljamo, da se v danem trenutku Z. z enako verjetnostjo nahaja v katerikoli točki območja, kjer se giblje. Naj bo slučajna spremenljivka X razdalja nogometaša Z. od gola v danem trenutku.

   a. (15) Določi gostoto slučajne spremenljivke X, matematično upanje X, ter verjetnost, da je v danem trenutku $X \leq 20$.

b. (10) Občasno napadalec Z. strelja. Če je v trenutku strela oddaljen od gola za manj kot 20 metrov, potem je verjetnost, da doseže zadetek, enaka $\frac{7}{16}$, sicer pa $\frac{2}{11}$. Določi verjetnost, da Z. pri strelu v 21. minuti igre, doseže zadetek.

2. (25) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ nenegativne celoštevilske slučajne spremenljivke, za katere velja zveza

$$X_{n+1} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{X_n} + Y_{n+1}\,.$$

Pri tem so $Z_1, Z_2, \ldots$ neodvisne od X_n in Y_n, enako porazdeljene, poleg tega pa sta X_n in Y_n neodvisni. Predpostavite, da so Z_k Bernoullijeve s parametrom p, torej $P(Z_k = 1) = p$ in $P(Z_k = 0) = q = 1 - p$.

a. (10) Pokažite, da velja

$$G_{X_{n+1}}(s) = G_{X_n}(q + ps) \cdot G_{Y_{n+1}}(s)\,.$$

b. (15) Predpostavite, da je $Y_k \propto \mathrm{Po}(\lambda)$ za vsak $k \geq 1$, in naj bo $X_1 \propto \mathrm{Po}(\lambda/q)$. Kakšna je porazdelitev X_2?

3. (30) Naj bo dan proces razvejanja $Z_0, Z_1, \ldots$ z rodovno funkcijo

$$G(s) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1-s}\,.$$

a. (10) Izračunajte verjetnost, da bo že 3. generacija brez predstavnikov. 5cm

b. (10) Z indukcijo pokažite, da je rodovna funkcija n–te generacije enaka

$$G_{Z_n}(s) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1/2+1/4+\cdots+1/2^{n-1}} (1-s)^{2^{-n}}\,.$$

c. (10) Določite verjetnost, da rodbina izumre.

4. (25) Zdolgočaseni statistik je n-krat z vračanjem izbiral lističe iz spodnjih škatel. Števila na izbranih lističih je označil z $X_1, X_2, \ldots, X_n$, njihovo vsoto pa z S_n.

(i) $\boxed{-1}\ \boxed{0}\ \boxed{1}$

(ii) $\boxed{-1}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{1}$

a. (15) Statistik je izračunal

$$P(-30 \leq S_{1000} \leq 30) \doteq 0{\cdot}96\,.$$

Za katero od škatel je računal verjetnosti? Utemeljite odgovor.

b. (10) Statistik je izračunal $P(S_{100} = 0) \doteq 0\text{˙}049$. Katero škatlo je obravnaval?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
4. april 2002

1. (20) Mož želi ženi za darilo kupiti šopek devetih vrtnic. V neki cvetličarni lahko izbira med rdečimi, rumenimi in belimi vrtnicami.

   a. (10) Na koliko različnih načinov lahko cvetličarka sestavi šopek devetih vrtnic?

   b. (10) Recimo, da želi kupiti še en šopek, prav tako sestavljen iz devetih vrtnic, vendar ne povsem enak. Na koliko načinov mu lahko cvetličarka sestavi drugi šopek vrtnic?

2. (20) V modri škatli je 8 listkov označenih s številkami od 1 do 8, v rdeči škatli pa 4 listki, označeni s števili od 1 do 4.

   a. (10) Iz vsake škatle potegnemo po en listič in iz dobljenih števk sestavimo dvomestno število, tako da je število iz prve škatle z enako verjetnostjo prva števka kot število iz druge škatle. Kolikšna je verjetnost, da bo tako sestavljeno število večje ali enako 30?

   b. (10) Iz vsake škatle potegnemo po en listič in iz dobljenih števk sestavimo dvomestno število, tako da je število iz prve škatle z dvakrat večjo verjetnostjo prva števka kot število iz druge škatle. Kolikšna je verjetnost, da bo tako sestavljeno število večje ali enako 30?

3. (20) V r škatel naključno mečemo kroglice. Meti so med seboj neodvisni, verjetnost zadetka pa je za vsako škatlo enaka p, kjer $p \in (0,1)$. Privzemite, da imate n kroglic. Naj bo X_k število kroglic v škatli k za $k = 1, 2, \ldots, r$.

   a. (10) Utemeljite, da je

   $$\mathrm{var}(X_1 + X_2) = np\,(1 - 2p)$$

   in sklepajte, da je

   $$\mathrm{cov}(X_1, X_2) = -np^2\,.$$

   Namig: Kakšna je porazdelitev slučajne spremenljivke X_1? Kaj pove slučajna spremenljivka X_1+X_2 in kako je porazdeljena? Za izračun $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$ *uporabi formulo za izračun variance vsote dveh slučajnih spremenljivk.*

   b. (10) Izračunajte

   $$\mathrm{var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_r)\,.$$

4. (20) Slučajne spremenljivke X, Y in Z naj bodo neodvisne in enako porazdeljene z $X \propto \mathrm{Geom}(p)$. Izračunati želimo $P(X < Y < Z)$. Označite $q = 1 - p$.

a. (10) Pokažite, da je

$$P(X = x, Y = y, Z > y) = P(X = x, Y = y)\, q^y\,.$$

b. (10) Izračunajte $P(X < Y < Z)$.
Namig: Utemelji in uporabi naslednjo zvezo:

$$\begin{aligned} P(X < Y < Z) &= \sum_{x<y} P(X = x, Y = y, Z > y) \\ &= \sum_{x<y} P(X = x, Y = y)\, q^y \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=x+1}^{\infty} P(X = x)\, P(Y = y)\, q^y\,. \end{aligned}$$

5. (20) V žari je M rdečih in $N - M$ belih kroglic. Kroglice začnemo izbirati po vrsti brez vračanja, dokler ne izberemo vseh. Definirajmo

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{če je } k\text{-ta kroglica rdeča} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

a. (10) Za $n \leq N$ definirajte $S_n = I_1 + \cdots + I_n$. Izračunajte

$$E(S_m|S_n)$$

za $1 \leq m \leq n \leq N$.

b. (10) Izračunajte še $E(S_n|I_1)$.

6. (20) V električnem brivniku moramo baterije občasno zamenjati. Brivnik za delovanje potrebuje eno baterijo. V povprečju traja baterija 4 tedne s standardnim odklonom 1 teden. Trajanja posameznih baterij so med sabo neodvisne slučajne spremenljivke.

a. (10) Izračunajte približek verjetnosti, da bo 28 baterij skupaj trajalo več kot dve leti. Vzemite, da ima leto 52 tednov.

b. (10) Najmanj koliko baterij potrebujemo, če naj bo verjetnost, da bo zaloga dovolj za dve leti delovanja brivnika, vsaj $0,95$?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
14. junij 2002

1. (20) Nogometna vročica se vedno traja. Selektor slovenske reprezentance Srečko Katanec je v Korejo pripeljal 23 igralcev: 3 vratarje, 6 branilcev, 9 veznih igralcev in 5 napadalcev. Odgovorite na spodnja vprašanja, pri čemer **ni potrebno** izračunati binomskih simbolov.

   a. (5) Na koliko načinov lahko Srečko sestavi prvo enajsterico, v kateri bodo vratar, trije branilci, štirje vezni igralci in trije napadalci?

   b. (5) Na koliko načinov lahko Srečko razdeli drese s številkami od 1 do 11 igralcem prve enajsterice, če mora imeti vratar dres s številko 1?

   c. (5) Na koliko načinov lahko Srečko razdeli drese s številkami od 1 do 11 med svojih 23 izbrancev?

   d. (5) Na koliko načinov lahko Srečko razdeli drese s številkami od 1 do 11 med svojih 23 izbrancev, če mora številko 1 dobiti vratar, ostale pa drugi igralci (ki seveda niso vratarji)?

2. (20) Nogometaši A, B in C med treningom izmenično streljajo na gol. Verjetnost, da zadene A, je enaka $\frac{1}{5}$, verjetnost, za zadene B, je enaka $\frac{2}{5}$ in verjetnost, da zadene nogometaš C, je enaka $\frac{3}{5}$. Vsi streli na gol so med seboj neodvisni.

   a. (10) V prvi rundi strelja vsak igralec dvakrat. Določi verjetnost, da sta bila skupno dosežena vsaj dva gola.

   b. (10) V drugi rundi je streljal vsak nogometaš enkrat. Dosežena sta bila dva gola. Določi pogojno verjetnost, da gola ni zadel nogometaš C.

3. (20) Igralci A, B in C igrajo naslednjo igro: v posodi je a belih in b črnih kroglic. Igralci izbirajo kroglice naključno z vračanjem v vrstnem redu $ABCABC\ldots$ [14]

   a. (10) V igri zmaga igralec, ki prvi izvleče belo kroglico. Izračunajte verjetnosti za zmago za posamezne igralce.

   b. (10) Spremenimo pravila igre tako, da vsak, ki izvleče črno kroglico, le-to vrne in doda še eno črno kroglico. Izračunajte verjetnost, da se bo igra končala točno po n rundah.

[14] Problem iz knjige Christian Huygens *De Raciociinis in Ludo Aleae*, 1657. Christian Huygens (1629-1695), nizozemski matematik.

4. (20) Celoštevilske slučajne spremenljivke $Z_0, Z_1, \ldots$ naj imajo rodovne funkcije $G_0(s) = s$ in $G_1, G_2, \ldots$. Za rodovne funkcije naj velja zveza

$$G_{n+1}(s) = \frac{s}{2}\left(G_n(s) + G_n(0)\right) + \frac{1}{2s}\left(G_n(s) - G_0(s)\right) .$$

   a. (10) Izračunajte porazdelitev spremenljivke Z_2.

   b. (10) Pokažite, da velja

$$P(Z_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}\, P(Z_n = 1) .$$

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
3	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{b}{24}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{a}{24}$	$\frac{c}{24}$

   a. (10) Določite število a tako, da bo $E(Y|X = 2) = 3$.

   b. (10) Določite števila a,b in c tako, da bo $E(Y|X) = X + 1$.

6. (20) Kovanec mečemo $2n$-krat. Meti so neodvisni, verjetnost za grb pa je $p = 1/2$. Označimo število grbov v $2n$ metih z S_{2n}.

   a. (10) Kolikšen mora biti n, da bo veljalo

$$P(S_{2n} = n) = 0{\cdot}01\,?$$

   Ocenite z uporabo $\Phi(0{\cdot}0125) \doteq 0{\cdot}505$.

   b. (10) Naj bo $n = 5000$. Kolikšna je verjetnost, da se število grbov in število številk v $2n = 10000$ metih razlikujeta 100 ali manj?

   Namig: Kolikšno mora biti število grbov, da se število grbov in število številk razlikujeta 100 ali manj?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
28. junij 2002

1. (20) Pri žrebanju igre Loto je v bobnu 39 kroglic, na katerih so napisane številke od 1 do 39. Denimo, da A. igra Loto tako, da na lističu obkroži 10 številk.

   a. (5) Na koliko načinov lahko A. zadane sedmico (torej brez dodatne številke)?

   b. (5) Na koliko načinov lahko A. zadane sedmico (torej brez dodatne številke) ali pa dobitek 6+1 (torej 6 pravilnih izmed prve sedmerice izžrebanih številk in še dodatno število)?

   c. (10) Denimo, da je A. na tem lističu zadel sedmico že po rednem delu žrebanja. V tem krogu je bila sedmica vredna 686.954.518,00 SIT, šestica 241.120,00 SIT, petica 7.224,00 SIT in štirica 760,00 SIT. Koliko zasluži s tako izpolnjenim lističem?

2. (20) V bobnu igre Loto so bile v nedeljo dopoldan še vedno kroglice s številkami od 1 do 39.

   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo vseh sedem izžrebanih številk manjših ali enakih 20?

   b. (10) Tik pred žrebanjem je neznani nepridiprav (očitno preveč vneti hazarder) iz bobna ukradel kroglico, ne da bi to kdorkoli opazil. Kroglico je izbral povsem naključno. Pri žrebanju dobitne kombinacije so izžrebali 7 kroglic. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bila ukradena kroglica z liho številko, če je bilo vseh sedem izžrebanih številk sodih?

3. (20) Porazdelitev slučajne spremenljivke X je podana s rekurzivno s predpisom:

$$P(X = k) = c \cdot \frac{a}{k} P(X = k - 1)$$

   za dan $a > 0$ in neko konstanto c?

   a. (5) Določite konstanto c.

   b. (5) Izračunajte $E(X)$.

   c. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X)$

4. (20) V procesu razvejanja lahko dopuščamo, da se v vsako generacijo "vseli" še slučajno mnogo pozameznikov. Naj bo Z_n število posameznikov v n-ti generaciji in označimo rodovno funkcijo Z_n z G_n. Velja zveza

$$G_{n+1}(s) = G_n(G(s)) \cdot H(s)\,,$$

   kjer je $G_0(s) = s$, $G(s)$ rodovna funkcija slučajnega števila potomcev posameznika, $H(s)$ pa je rodovna funkcija slučajnega števila "priseljencev" v vsaki generaciji.

a. (10) Predpostavite, da je $G(s) = (s+1)/2$ in $H(s) = (s+1)/2$. Izračunajte $P(Z_2 = 0)$.

b. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je $E(Z_n) = 1$ za vsak $n \geq 1$.

Namig: Odvajanje rodovnih funkcij.

5. (20) Iz množice $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ naključno in neodvisno z vračanjem izberemo podmnožici A in B. Vsaka od 2^n možnih podmnožic bo izbrana z verjetnostjo 2^{-n}. Naj bo $X = \mathrm{card}(A \cap B)$ in $Y = \mathrm{card}(A \cup B)$. Velja

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}, \qquad P(Y = l) = \binom{n}{l} \left(\frac{3}{4}\right)^l \left(\frac{1}{4}\right)^{n-l}$$

in

$$P(X = k, Y = l) = \frac{n!}{k! \cdot (l-k)! \cdot (n-l)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+k-l}$$

za $0 \leq k \leq l \leq n$.

a. (10) Pokažite, da je

$$P(X = k | Y = l) = \binom{l}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{l-k}.$$

b. (10) Izračunajte $E(X|Y)$.

6. (20) Predlagana je naslednja igra na srečo: nasprotnika A in B bosta vsak zase vrgla pošten kovanec 1000-krat. Naj bo X število grbov igralca A in Y število grbov igralca B. Če je $|X - Y| \leq 15$, zmaga A, sicer zmaga B.

a. (10) Pri metu dveh kovancev so 4 možni izidi: GG, GŠ, ŠG, ŠŠ. Vsak izid ima verjetnost 1/4. Razlika $X - Y$ je kot vsota 1000 slučajnih števil, ki jih dobimo z naključnim izbiranjem z vračanjem iz škatle

$$\boxed{-1} \quad \boxed{0} \quad \boxed{0} \quad \boxed{1}$$

Utemeljite zakaj!

b. (10) Izračunajte verjetnost, da zmaga igralec A.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
30. avgust 2002

1. (20) Med $2N$ športniki je N moških in N žensk.
   a. (10) Športnike moramo razdeliti na N skupin po 2 tako, da je v vsaki skupini en moški in ena ženska. Na koliko načinov lahko to naredimo?
   b. (10) Za naslednje tekmovanje moramo $2N$ športnikov spet razdeliti na N skupin po 2, le da zdaj spol ni pomemben. V skupini sta lahko športnika istega spola. Na koliko načinov lahko to naredimo?
   Namig: Izbirajte pare po vrsti. Preverite rezultat za $N = 2$.

2. (20) Črke A,A,A,A,A,B,B,K,D,R,R naključno permutiramo, tako da je vsak vrstni red enako verjeten. Označimo
$$B = \{\text{prva črka v slučajni permutaciji je A}\}$$
in
$$C = \{\text{slučajna permutacija črk } \textbf{ni} \text{ ABRAKADABRA}\}\,.$$
   a. (10) Izračunajte $P(C^c)$.
   b. (10) Izračunajte pogojno verjetnost $P(C|B)$.
   Namig: $P(B \cap C) = P(B) - P(B \cap C^c)$.

3. (20) Na klopi sedi 8 šestošolcev, 7 sedmošolcev in 9 osmošolcev. Naključno izberemo odbojkarsko ekipo šestih učencev. Naj X označuje število sedmo- in osmošolcev v ekipi.
   a. (10) Izračunajte verjetnost, da sta v ekipi 2 šestošolca, dva sedmošolca in 2 osmošolca.
   b. (10) Izračunajte $E(X)$.

4. (20) Slučajne spremenljivke $Z_0, Z_1, \ldots$ naj imajo rodovne funkcije $G_0, G_1, \ldots$. Naj bo $G_0(s) = s$ in naj za $n \geq 0$ velja
$$G_{n+1}(s) = \frac{1}{3}\big(s + 1 + \frac{1}{s}\big)\big(G_n(s) - G_n(0)\big) + \frac{1}{3}\,G_n(0)\,(s+2)\,.$$
   a. (10) Poiščite porazdelitev spremenljivke Z_2.

b. (10) Pokažite, da velja

$$E(Z_{n+1}) = E(Z_n) + \frac{1}{3} G_n(0)$$

in izračunajte $E(Z_3)$.
Namig: Odvajajte zvezo med G_n in G_{n+1} po s.

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana z

$$P(X = k, Y = l) = \binom{k+l}{l} \frac{1}{3^{k+l+1}} = \binom{-k-1}{l} \frac{(-1)^l}{3^{k+l+1}}\,.$$

za $k, l = 0, 1, 2, \ldots$.

a. (10) Izračunajte $P(X = k)$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$.
Namig: Upoštevajte

$$\sum_{l=0}^{\infty} \binom{-k-1}{l} (-x)^l = (1-x)^{-(k+1)}\,.$$

b. (10) Izračunajte $E(Y|X)$.
Namig: Kot znano upoštevajte, da je za $|x| < 1$

$$\sum_{l=0}^{\infty} l \binom{-k-1}{l} (-x)^l = (k+1)x(1-x)^{-(k+2)}\,.$$

6. (20) Iz škatle $\boxed{\;\boxed{\text{-a}}\;\;\boxed{0}\;\;\boxed{\text{a}}\;}$ naključno izberemo n listkov z vračanjem. Označimo števila na listkih z $X_1, X_2, \ldots$ in naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

a. (10) Naj bo $a = 1$. Izračunajte $P(-200 \le S_n \le 200)$ za $n = 133415$.

b. (10) Naj bo $n = 10000$ in naj velja

$$P(-418 \le S_{10000} \le 418) = 0{\cdot}99\,.$$

Izračunajte a.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
17. september 2002

1. (20) Mož želi ženi ob obletnici kupiti posebej pripravljeno bonbonjero petdesetih čokoladnih bonbonov. Izbira lahko med orehovimi, lešnikovimi in mandljevimi bonboni.

   a. (10) Na koliko različnih načinov lahko prodajalka pripravi bonbonjero?

   b. (10) Recimo, da si mož želi, da bi bilo v bonbonjeri vsaj po 10 bonbonov vsake vrste. Na koliko načinov mu prodajalka lahko sedaj sestavi darilo?

2. (20) Na mizi imamo dve posodi. V prvi posodi je 5 belih, 2 rumeni in 3 črne kroglic, v drugi posodi pa 8 belih, ena rumena in ena črna kroglica. Vržemo pošteno igralno kocko. Če na kocki pade 1 ali 2, sežemo v prvo posodo in na slepo izvlečemo kroglico, sicer sežemo v drugo posodo in izvlečemo kroglico.

   a. (10) Izračunaj verjetnost, da je izvlečena kroglica bela.

   b. (10) Izračunaj pogojno verjetnost, da je na kocki padla enica, pri pogoju, da smo izvlekli belo kroglico.

3. (20) V posodi je b belih, r rdečih in c črnih kroglic. Dva igralca izmenično izbirata kroglico, ki jo nato vrneta v posodo. Zmaga tisti, ki prvi potegne kroglico, ki ni črne barve. Z X označimo število potegov do zmage kateregakoli igralca.

   a. (10) Navedite $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

   b. (10) Izračunajte verjetnost, da zmaga prvi igralec na potezi.

4. (20) V procesu razvejanja lahko dopuščamo, da se v vsako generacijo "vseli" še slučajno mnogo pozameznikov. Naj bo Z_n število posameznikov v n-ti generaciji in označimo rodovno funkcijo Z_n z G_n. Velja zveza

   $$G_{n+1}(s) = G_n(G(s)) \cdot H(s)\,,$$

   kjer je $G_0(s) = s$, $G(s)$ rodovna funkcija slučajnega števila potomcev posameznika, $H(s)$ pa je rodovna funkcija slučajnega števila "priseljencev" v vsaki generaciji.

   a. (10) Predpostavite, da je $G(s) = (s+1)/2$ in $H(s) = (s+1)/2$. Izračunajte $P(Z_2 = 1)$.

   b. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je $E(Z_n) = 1$ za vsak $n \geq 1$.
   Namig: Odvajanje rodovnih funkcij.

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana z

$$P(X = k, Y = l) = \binom{k+l}{l} \frac{a^k b^l}{(a+b+1)^{k+l+1}}$$

za dana $a > 0$ in $b > 0$ ter $k, l = 0, 1, 2, \ldots$.

a. (10) Izračunajte $P(X = 0)$. Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni?

b. (10) Izračunajte $E(Y|X = 0)$.

6. (20) Zavarovalnica izda 240.000 polic obveznega avtomobilskega zavarovanja. Premija je enaka £252. Povprečje dejansko izplačanih zahtevkov v preteklem letu je bilo £1240, standardni odklon dejansko izplačanih zahtevkov pa je bil £1830.

a. (10) Matematik, ki računa tveganja, najprej privzame, da bo zahtevkov 20%, torej 48.000. Zahtevki so med seboj neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke s povprečjem £1240 in standardnim odklonom £1830. Ocenite verjetnost, da zbrane premije ne bodo dovolj za izplačilo vseh zahtevkov.

b. (10) Matematik v zavarovalnici se zaveda, da ne more predvideti točnega števila zahtevkov, ki jih bo zavarovalnica morala izplačati v naslednjem letu. Zato spremeni svojo škatlo tako, da vanjo doda listke z ničlami in sicer štirikrat toliko, kolikor je bilo prvotno listkov. Povprečje škatle se tako spremeni na 248 £, standardni odklon pa na 956 £. V tem primeru je potrebno računati, kot da lističe izbiramo 240.000-krat. Ocenite zdaj verjetnost, da zbrane premije ne bodo dovolj za izplačilo vseh zahtevkov.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
5. februar 2003

1. (20) Na šahovsko ploščo, ki obsega 8×8 polj, mora vsak igralec postaviti 16 figur (in sicer po osem enakih kmetov, dva enaka skakača, dva lovca, dve trdnjavi ter po eno damo in kralja). Enakih figur ne razlikujemo med sabo.

   a. (5) Na koliko načinov lahko nevednež postavi teh 16 figur v prvi dve vrsti šahovnice?

   b. (5) Na koliko načinov lahko zgoraj omenjeni postavi 16 figur v dve dani vrsti na šahovnici (torej, da sta postavitvi figur v vrstah enaki), pri čemer enačimo damo s kraljem?

   c. (5) Na koliko načinov je moč teh 16 figur poljubno postaviti na šahovnico?

   d. (5) Na koliko načinov je mogoče 8 kmetov tako postaviti na šahovnico, da je v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu po en kmet?

2. (20) V prvi posodi se nahajo tri bele, štiri modre in pet črnih kroglic, v drugi pa šest belih, deset modrih in osem črnih kroglic.

   a. (10) Za katero posodo je verjetnost, da potegnemo dve enaki kroglici, večja?

   b. (10) Iz druge posode na slepo prestavimo neko kroglico v prvo posodo. Nato iz prve posode naključno izvlečemo kroglico ter opazimo, da je črne barve. Kolikšna je verjetnost, da je bila tudi prestavljena kroglica črne barve?

3. (20) V posodi naj bosta črna kroglica in kroglica z oznako 1. Na vsakem koraku iz posode naključno izberemo kroglico. Če ima izbrana kroglica oznako k, jo vrnemo in dodamo še eno kroglico z oznako k. Če je kroglica črna, jo vrnemo v posodo in dodamo kroglico z oznako $n+1$, kjer je n največja oznaka do tik pred izbiranjem. Primer: Prvih nekaj korakov lahko izgleda kot ● ① $\rightarrow$ ● ① ② $\rightarrow$ ● ① ② ① $\rightarrow$ ● ① ② ① ③ $\rightarrow$ ● ① ② ① ③ ① $\rightarrow$ ● ① ② ① ③ ① $\rightarrow \cdots$

   a. (10) Naj bo N število izbiranj, dokler ne izberemo črne kroglice. Izračunajte $P(N = k)$ za $k = 1, 2, \ldots$.

   b. (10) Naj bo X število različno označenih kroglic takrat, ko je po $(n-1)$-em izbiranju v posodi vključno s črno natanko $n+1$ kroglic. Črne kroglice ne štejemo. Izračunajte

   $$P(\text{pri } k\text{-tem izbiranju smo izbrali črno kroglico})$$

   za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ in potem $E(X)$.

   Namig: Indikatorji.

4. (20) Naj bodo X, Y in Z med sabo neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene geometrijsko: $X \propto \text{Geom}(1/2)$, $Y \propto \text{Geom}(1/3)$ in $Z \propto \text{Geom}(1/4)$.

   a. (10) Izračunajte rodovno funkcijo vsote $W = X + Y + Z$.

   b. (10) Pokažite, da je

$$G_W(s) = \frac{s^3}{4(1-s/2)} - \frac{4s^3}{3(1-2s/3)} + \frac{9s^3}{8(1-3s/4)}$$

   in dokažite, da je za $k = 0, 1, \ldots$

$$P(W = k+3) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^k + \left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^k .$$

   Namig: Za $|x| < 1$ *je*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k .$$

5. (20) Naj bo $n > 1$ dano naravno število. Slučajni spremenljivki X in Y imata porazdelitev dano z

$$P(X = k, Y = l) = \frac{1}{n(n-k)}$$

za $1 \leq k < n$ in $l \leq n - k$ in

$$P(X = n, Y = 0) = \frac{1}{n} .$$

   a. (10) Izračunajte $E(Y|X = k)$ za $k < n$.

   b. (10) Izračunajte še $E(Y|X = n)$ in $E(Y)$.

6. (10) Čarovnik ima dve škatli: prvo s povprečjem 1 in standardnim odklonom 10, drugo pa s povprečjem -1 in standardnim odklonom 10. Ponuja nam naslednjo igro na srečo: naskrivaj bo izbral eno izmed škatel, vsako z verjetnostjo 1/2. Nato bo iz izbrane škatle izbral $n = 100$ listkov s ponavljanjem in nam povedal vsoto. Če prav uganemo, katero škatlo je izbral, dobimo nagrado. Odločimo se, da bomo uganjevali na naslednji način: če je vsota pozitivna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem 1, če pa bo vsota negativna, bomo "uganili" škatlo s povprečjem -1.

   a. (10) Recimo, da čarovnik izbere škatlo s povprečjem 1, vendar vam tega ne pove. Kolikšna približno je verjetnost, da boste prav uganili na podlagi vsote števil na 100 naključno izbranih lističih.

   b. (10) Recimo spet, da je čarovnik izbral škatlo s povprečjem 1. Kolikokrat bi moral izbirati lističe in nam povedati vsoto, da bi uganili prav z verjetnostjo približno 0'99?

2000/01

1. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
4. december 2000

1. (25) Majda je odšla s svojimi tremi otroci Matejem, Matjažem in Matevžem v trgovino z igračami. Za vsako igračo imajo v trgovini neomejeno zalogo. Otroci so ugotovili, da jim je všeč le 8 različnih vrst igrač, vendar je imela Majda denar le za 5 igrač.
   a. (10) Na koliko načinov bi lahko Majda kupila 5 igrač, če bi izbirala le med osmimi vrstami, ki so otrokom bile všeč?
   b. (15) Matej doma predlaga, da bi kupili 5 različnih igrač in to Majda naslednjega dne tudi stori. Na koliko načinov lahko teh pet kupljenih igrač doma razdeli Mateju, Matjažu in Matevžu, če mora vsak od njih dobiti vsaj eno?

2. (25) V gledališču je n sedežev. Na blagajni so prodali n oštevilčenih kart. Ljudje so po vrsti dobili karte za sedeže $1, 2, \ldots, n$ in prihajajo v gledališče po tem vrstnem redu. Gost 1 izbere sedež naključno med n sedeži. Ostali gosti se vsedejo na svoj sedež, če je ta prost, sicer pa naključno izbirajo med preostalimi sedeži.
   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo sedež gosta 3, ko le-ta pride v dvorano, še nezaseden?
   b. (15) Recimo, da je $n = 100$. Kolikšna je pogojna verjetnost, da bo sedež gosta 50 še prost, ko le-ta stopi v dvorano, pri pogoju, da je po prihodu gostov $1, 2, \ldots, 49$ med sedeži $1, 2, \ldots, 49$ zasedeno 30 sedežev?

3. (25) Janez pošilja Katarini kodirana sporočilca v obliki črt in pik. Na poti se spremeni v črtico $\frac{2}{5}$ oddanih pik in se spremeni v piko $\frac{1}{3}$ oddanih črt. V zadnjem sporočilu je Janez oddal 62˙5% pik.
   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da je prvi znak v prejetem sporočilu črta?
   b. (15) Katarina je kot prvi znak prejela piko. Kolikšna je verjetnost, da je Janez piko tudi oddal?

4. (25) Čarovnik iz dežele matematičnih čudes ima rad kocke. V njegovi zbirki so le čudne kocke s $p \geq 3$ ploskvami, kjer je p vedno praštevilo. Ko čarovnik tako kocko vrže, se z enako verjetnostjo pojavi katerakoli številka.
   a. (10) Čarovnik izbere kocko s $p = 11$ in jo vrže. Naj bo A dogodek, da je število pik deljivo z 2 in B dogodek, da je število deljivo s 3. Ali sta dogodka A in B neodvisna?
   b. (15) Čarovnik izbere nek p in vrže pripadajočo kocko. Pokažite, da je v primeru, ko sta poljubna dogodka A in B neodvisna, vsaj eden od dogodkov ali $\emptyset$ ali Ω.

2. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
8. januar 2001

1. (25) Dva zdolgočasena statistika neodvisno mečeta vsak svojo kocko, dokler se njuna izida ne seštejeta v 6. Označite število metov, vključno z zadnjim, z X.
   a. (10) Poiščite porazdelitev slučajne spremenljivke X in jo poimenujte.
   b. (15) Izračunajte verjetnost, da bosta statistika dobila vsoto 6 po sodem številu metov.
2. (25) Na krožni poti so štirje semaforji. Vsak semafor je zaprt z verjetnostjo $\frac{1}{3}$ neodvisno od ostalih semaforjev. Avtomobilist se bo peljal enkrat okrog krožne poti. Z X označimo število zaprtih semaforjev po poti.
   a. (10) Izračunajte $P(X < 3)$.
   b. (10) Avtomobilist se bo peljal m rund. Naj bo Y število zaprtih semaforjev v m rundah. Izračunajte $E(Y)$.
3. (25) Igrate naslednji igri na srečo: (i) mečete kovanec n-krat ($n \geq 2$). Če dobite dva enaka izida zapored, vam izplačajo \$1. Predpostavite, da so meti med seboj neodvisni in je $P(G) = 1/2$. Naj X označuje skupni dobiček v n igrah. (ii) mečete kovanec n-krat. Če dobite različna izida zapored, vam izplačajo \$1. Označite z Y celotno izplačilo po n igrah. Meti so spet neodvisni in je $P(G) = 1/2$.
   a. (15) Izračunajte $E(X)$.
   b. (10) Izračunajte še $E(Y)$.
4. (25) Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana s tabelo:

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = -1$	0˙2	0˙1	0˙05
$X = 0$	0	0˙12	0˙08
$X = 1$	0˙01	0˙03	0˙06
$X = 2$	0˙1	0˙05	0˙2

   a. (15) Določi porazdelitev slučajne spremenljivke X in $E(X)$.
   b. (10) Ali sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki?

3. kolokvij iz statistike

Praktična matematika

27. marec 2001

1. (25) Na podstrešju se je naenkrat znašlo deset miši: sedem sivih in tri rjave. Urni maček Tom uspe vsako uro uloviti eno miš. Naj bo slučajna spremenljivka X število sivih miši na podstrešju po treh urah, Y pa število rjavih miši po treh urah.

   a. (10) Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni? Odgovor utemelji!

   b. (15) Izračunaj upanje $E(\frac{X}{4-Y})$.

2. (25) Nepošten kovanec, kjer je verjetnost, da vržemo grb, enaka $\frac{1}{3}$, vržemo 42-krat zapored.

   a. (15) Za $i = 1, 2, \ldots, 41$ definirajmo

   $$I_i = \begin{cases} 1, & \text{če sta } i\text{-ti in } (i+1)\text{-ti met enaka} \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

   Izračunaj $\mathrm{var}(I_i)$ in $\mathrm{cov}(I_i, I_j)$ za različna indeksa i, j.

   b. (10) Za vsaka enaka zaporedna izida si napišemo točko. Naj bo X število točk po dvainštiridesetih metih. Izračunaj $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

3. (25) Naj za neke slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots, X_n$ in za slučajno spremenljivko Z velja

   $$E(X_i|Z) = E(X_j|Z)$$

   za vsak par i, j.

   a. (10) Pokažite, da v primeru, ko je $X_1 + \cdots + X_n = g(Z)$ za neko funkcijo g, velja

   $$E(X_i|Z) = \frac{g(Z)}{n}$$

   za vsak i.

   b. (15) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ med sabo neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Pokažite, da je

   $$E(X_1^2 + (n-1)X_1X_2|Z) = \frac{Z^2}{n},$$

   kjer je $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

   Namig: Kaj je $\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2\sum_{i<j}^n X_iX_j$*? Prepričajte se še, da je* $E(X_iX_j|Z) = E(X_1X_2|Z)$ *za vse* $i \neq j$.

4. (25) V valeški pravljici “The Tale of Peredur ap Efrawg” obstaja čudežna čreda belih in črnih ovac. Vsako minuto bleja ovca, ki jo izbremo naključno ne glede na barvo in ne glede na prejšnje izbire izmed vseh N ovac. Če je bela, se ena od črnih ovac spremeni v belo, če pa je črna, se ena od belih ovac spremeni v črno. Če so vse ovce bele ali vse črne, se ne zgodi nič.

   a. (10) Označite z X_k število belih ovac po k minutah, kjer je $k = 0, 1, 2, \ldots$. Za vsak $0 \leq n \leq N$ izračunajte

   $$P(X_{k+1} = l | X_k = n)$$

   za vse možne l.

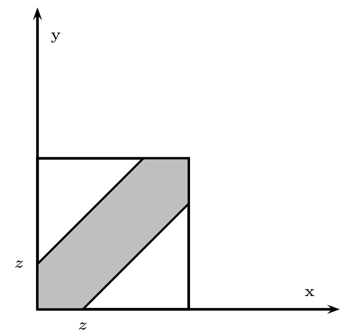
   b. (15) Pokažite, da je za $1 \leq n \leq N - 1$

   $$E(X_{k+1} | X_k = n) = n - 1 + \frac{2n}{N} .$$

4. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
24. maj 2001

1. (30) Na kvadratu s stranico $a = 1$ naključno izberemo točko. Označimo z X in Y koordinati izbrane točke in definirajmo $Z = |X - Y|$.



Sl. 1 Množica točk, za katere je $|x - y| \leq z$.

   a. (15) Poiščite gostoto slučajne spremenljivke Z.
   Namig: Množica točk na kvadratu, za katere je $|x - y| \leq z$ za nek $z \in (0, 1)$ je take oblike kot osenčena množica na sliki 1.

   b. (15) Najdite $E(Z)$, $\mathrm{var}(Z)$ in tak z, da bo $P(Z \leq z) = P(Z \geq z)$.

2. (30) Za $k = 0, 1, \ldots$ ter nenegativni števili a in b naj bodo dane vrednosti

$$p_k := \frac{a^{k-1}}{b^{\frac{k}{2}}}\,.$$

   a. (15) Določi zvezo med številoma a in b, da bodo števila p_k predstavljala verjetnosti $P(X = k)$ neke slučajne spremenljivke X. Izrazi verjetnosti p_k le s parametrom a.

   b. (15) Določi rodovno funkcijo $G_X(s)$ te slučajne spremenljivke, upanje $E(X)$ in varianco $\mathrm{var}(X)$.

3. (25) Naj bo dan proces razvejanja $Z_0, Z_1, \ldots$ z rodovno funkcijo

$$G(s) = \frac{1}{(2 - s)^2}\,.$$

   a. (15) Izračunajte verjetnost, da bo že 3. generacija brez predstavnikov?

b. (10) Pokažite, da ta rodbina izumre z verjetnostjo $\eta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

4. (25) Ponujena vam je naslednja igra na srečo: iz škatle, v kateri je veliko število listkov s števili, lahko naključno izberete 1000 listkov z vračanjem. Če je vsota izbranih števil med vključno a in $a + 100$, dobite stavo, sicer jo izgubite. Število a si lahko še izberete. O škatli veste le to, da je povprečje 0˙1 in standardni odklon 1˙5811.

   a. (15) Kolikšna je približno verjetnost, da boste stavo dobili, če si izberete $a = 0$? Stavo torej dobite, če je vsota med 0 in 100.

   b. (10) Katera izbira za a je za vas najugodnejša? Utemeljite in izračunajte verjetnost za dobitek za izbrani a.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
27. marec 2001

1. (20) Na lokalno tekmovanje psov so vaščani prijavili 13 štirinožcev. Med njimi je 7 nemških ovčarjev, trije labradorci, dva jazbečarja in en boksar.

   a. (6) Na koliko načinov lahko lastniki postavijo vse pse v vrsto pred sodnike, če morajo posamezne pasme psov stati skupaj?

   b. (6) Na koliko načinov se lahko psi postavijo v vrsto, če ne smeta nobena dva nemška ovčarja stati skupaj?

   c. (8) Na koliko načinov se lahko psi postavijo v krog okoli sodnikov, če ne smeta nobena psa, ki nista nemška ovčarja, stati skupaj?

2. (20) Dvema igralčema z dobro premešanega kupa kart razdelimo po 5 kart. Igralca si najbolj želita poker iz asov, torej vse štiri ase med petimi razdeljenimi kartami. Vsak igralec lahko vrne eno od kart in zahteva še eno iz preostalega kupa 42 kart.

   a. (10) Pokažite, da za poljubne dogodke velja

   $$P(A|B) = P(A|B \cap C)\, P(C|B) + P(A|B \cap C^c)\, P(C^c|B)\,.$$

   b. (10) Recimo, da ima prvi igralec v roki natanko 3 ase in dve drugi karti. Kolikšna je njegova pogojna verjetnost, da bo s šesto karto dobil asa?

3. (20) V posodi je b belih, r rdečih in m modrih kroglic. Dva igralca izmenično izbirata kroglico, ki jo nato vrneta v posodo. Zmaga tisti, ki prvi potegne belo kroglico. Z X označimo število potegov do zmage kateregakoli igralca.

   a. (10) Navedite $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

   b. (10) Izračunajte verjetnost, da zmaga prvi igralec na potezi.

4. (20) Berač na vogalu Beraške ulice berači vsak dan. Na dan pride mimo slučajno število N mimoidočih, kjer je N Poissonova slučajna spremenljivka s parametrom λ. Vsak mimoidoči da beraču novčič z verjetnostjo p, neodvisno od ostalih mimoidočih in njihovega števila. Označimo z I_k slučajno spremenljivko, ki ima vrednost 1, če k-ti mimoidoči beraču da novčič, sicer pa je 0. Vemo, da je

   $$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_N\,,$$

   kjer je X celotno število novčičev, ki jih bo zbral berač.

   a. (10) Kakšna je porazdelitev X?

b. (10) Recimo, da je neki drug dan $N \propto \text{Geom}(p)$, vsak mimoidoči pa da beraču tudi slučajno vsoto, ki je porazdeljena geometrijsko s parametrom ρ. Kakšna je zdaj porazdelitev X?

5. (20) V valeški pravljici "The Tale of Peredur ap Efrawg" obstaja čudežna čreda belih in črnih ovac. Vsako minuto bleja ovca, ki jo izbremo naključno ne glede na barvo in ne glede na prejšnje izbire izmed vseh N ovac. Če je bela, se ena od črnih ovac spremeni v belo, če pa je črna, se ena od belih ovac spremeni v črno. Če so vse ovce bele ali vse črne, se ne zgodi nič.

   a. (10) Označite z X_k število belih ovac po k minutah, kjer je $k = 0, 1, 2, \ldots$. Za vsak $0 \leq n \leq N$ izračunajte

   $$P(X_{k+1} = l | X_k = n)$$

   za vse možne l.

   b. (10) Pokažite, da je za $1 \leq n \leq N - 1$

   $$E(X_{k+1} | X_k = n) = n - 1 + \frac{2n}{N}\,.$$

6. (20) Naj bo $C_0 = 1$ cena delnice v trenutku $n = 0$. Na vsakem koraku se cena delnice spremeni tako, da se pomnoži s slučajnim faktorjem X_n, torej je $C_{n+1} = X_n \cdot C_n$, kjer so spremenljivke X_n za $n = 1, 2, \ldots$ med seboj neodvisne in velja $P(X_n = 0\dot{}99) = P(X_n = 1\dot{}01) = 1/2$.

   a. (10) Naj bo $Y_n = \log(X_n)$. Izračunajte $E(Y_n)$ in $\text{var}(Y_n)$.

   b. (10) Izračunajte približno verjetnost, da bo po $n = 1000$ korakih cena delnice večja kot na začetku.

   Namig: Z logaritmiranjem produkti preidejo v vsote.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
26. junij 2001

1. (20) Oče želi sinčku za darilo kupiti 6 avtomobilčkov. Vsi avtomobilčki so enakega tipa, razlikujejo se le po barvi.

   a. (10) Recimo, da lahko oče izbira med rdečimi, belimi in rumenimi avtomobilčki. Na koliko različnih načinov lahko sestavi darilo iz 6 avtomobilčkov, če je na razpolago poljubno mnogo avtomobilčkov vsake barve?

   b. (10) Na koliko načinov lahko oče obdari sina, če je na razpolago le 5 rdečih, avtomobilčkov, ostalih dveh barv pa je na razpolago poljubno mnogo?

2. (20) V modri škatli je 9 listkov označenih s številkami od 1 do 9, v rdeči škatli pa 5 listkov, označenih s števili od 1 do 5.

   a. (10) Iz vsake škatle potegnemo po en listič in iz dobljenih števk sestavimo dvomestno število, tako da je število iz prve škatle z enako verjetnostjo prva števka kot število iz druge škatle. Kolikšna je verjetnost, da bo tako sestavljeno število večje ali enako 50?

   b. (10) Na slepo izberemo škatlo in iz nje potegnemo listek s sodo številko. Določi verjetnost, da smo listek potegnili iz modre škatle.

3. (20) Igralci A, B in C igrajo naslednjo igro: v posodi je a belih in b črnih kroglic. Igralci izbirajo kroglice naključno z vračanjem v vrstnem redu $ABCABC\ldots$ [15] Zmaga tisti igralec, ki prvi izbere belo kroglico.

   a. (10) Recimo, da je se začne nova "runda" vsakič, ko izbira A. Naj bo Y število rund, ki jih bodo igrali igralci, dokler nekdo od njih ne zmaga. Primer: če je bilo $ABCABCAB$ in je B prvi potegnil belo kroglico, je zmagal B v tretji rundi. Opišite porazdelitev Y.
   Namig: $(1-q)(1+q+q^2) = 1-q^3$.

   b. (10) Izračunajte verjetnosti za zmago za posamezne igralce.

4. (20) Berač na vogalu Beraške ulice berači vsak dan. Na dan pride mimo slučajno število N mimoidočih, kjer je N Poissonova slučajna spremenljivka s parametrom λ. Vsak mimoidoči da beraču novčič z verjetnostjo p, neodvisno od ostalih mimoidočih in njihovega števila. Označimo z I_k slučajno spremenljivko, ki ima vrednost 1, če k-ti mimoidoči beraču da novčič, sicer pa je 0. Vemo, da je

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_N\,,$$

[15] Problem iz knjige Christian Huygens *De Raciociinis in Ludo Aleae*, 1657. Christian Huygens (1629-1695), nizozemski matematik.

kjer je X celotno število novčičev, ki jih bo zbral berač.

a. (10) Kakšna je porazdelitev X?

b. (10) Recimo, da je neki drug dan $N \propto \text{Geom}(p)$, vsak mimoidoči pa da beraču tudi slučajno vsoto, ki je porazdeljena geometrijsko s parametrom ρ. Kakšna je zdaj porazdelitev X?

5. (20) V posodi je r rdečih, s belih in t zelenih kroglic.

   a. (10) Iz posode izberemo n kroglic *brez* vračanja, torej mora biti $n \leq r + s + t$. Naj bo X število rdečih kroglic med n izbranimi, Y število belih in Z število zelenih. Izračunajte $E(X|Y)$.

   b. (10) Izberimo zdaj n kroglic z vračanjem in definirajmo slučajne spremenljvke X, Y in Z podobno kot v a. Izračunajte $E(X|Y)$.

6. (20) Znani angleški statistik M. G. Kendall v svojem obsežnem članku *The Random Character of Stock Market Prices* pravi:

   > … dnevno zaporedje cen delnic zgleda "blodeče", kot da bi nek škrat vsak dan naključno izbral število iz velike škatle, ki ima povprečje 0 in nek standardni odklon, in to izbrano število prištel ceni delnice prejšnega dne.

   Predpostavite, da je povprečje škatle res 0, standardni odklon pa 1. Razlika cene delnice na začetku leta in na koncu leta je tako enaka vsoti 365 naključno izbranih števil iz te škatle.

   a. (10) Recimo, da je bila cena delnice na začetku leta enaka 150 (v ustreznih enotah). Kolikšna je približno verjetnost, da bo na koncu vredna 160 ali več?

   b. (10) Nekdo vam ponuja naslednjo stavo: če bo cena delnice na koncu leta 110 ali več, ti plačam 20 enot, če ne pa ti meni plačaš 5 enot. Na začetku leta je vrednost delnice 100. Kaj menite o tej stavi?

      Namig: Kolikšen je vaš pričakovan dobiček?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
12. julij 2001

1. (20) Očka odpelje ob koncu šolskega leta malega Mihca v slaščičarno, kjer imajo 12 različnih okusov sladoleda. "Super kupa" je sestavljena iz šestih (ne nujno različnih) kepic sladoleda po lastnem izboru.
   a. (10) Koliko različnih "Super kup" nudijo v slaščičarni?
   b. (10) Mihec hoče imeti "Super kupo" iz šestih različnih kepic sladoleda, vendar pa nima rad vanilijevega sladoleda, ki ga nudijo. Na koliko načinov mu lahko ustrežejo?
2. (20) Na mizi imamo modro in rdečo posodo. V modri posodi je 9 belih in 6 črnih kroglic, v rdeči posodi pa 11 belih in 4 črne kroglice. Vržemo pošteno kocko. Če pade 1 ali 6, sežemo v modro posodo in na slepo izvlečemo eno kroglico, sicer sežemo v rdečo posodo in izvlečemo kroglico.
   a. (10) Izračunaj verjetnost, da je izvlečena kroglica bela.
   b. (10) Izračunaj verjetnost, da je na kocki padla 6, pri pogoju, da smo izvlekli belo kroglico.
3. (20) V škatli je $m+n$ listkov oštevilčenih z $1, 2, \ldots, m+n$. Iz škatle naključno izberemo n listkov brez vračanja. Z X označimo število listkov med izbranimi, na katerih je število, ki je večje od vseh m števil, ki so ostala v škatli.
   a. (10) Označite z M največje število, ki je ostalo v škatli. Izračunajte $P(M = k)$ za $k = m, m+2, \ldots, n+m$.
   b. (10) Opišite porazdelitev slučajne spremenljivke X.
4. (25) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja. Slučajno število Y potomcev vsakega posameznika naj ima porazdelitev

$$P(Y = k) = 2^{-(k+1)}$$

   za $k = 0, 1, \ldots$.
   a. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je rodovna funkcija $G_n(s)$ spremenljivke Z_n enaka

$$G_n(s) = \frac{n - (n-1)s}{n + 1 - ns}\,.$$

   b. (10) Izračunajte $E(Y)$ in $P(Z_n = 0)$ in izračunajte $P(\text{proces izumre})$. Kako se to ujema s teorijo?

5. (20) Naj bodo $I_1, I_2, \ldots$ med sabo neodvisni in enako porazdeljeni indikatorji s $P(I_j = 1) = p$ za vse $j \geq 1$. Naj bo N od njih neodvisna nenegativna celoštevilska slučajna spremenljivka in definirajmo

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_N \, .$$

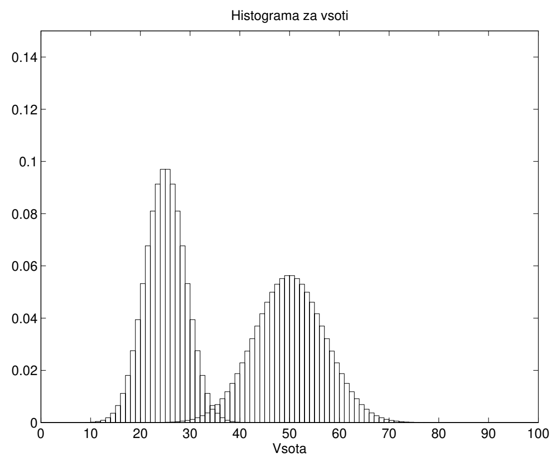
Naj bo $N \propto \mathrm{Po}(\lambda)$.

   a. (10) Izračunajte $E(X^2|N)$.
   b. (10) Izračunajte $E(N|X)$.

6. (20) Na spodnji sliki sta histograma za porazdelitvi vsot 25 neodvisnih izbiranj iz ene od naslednjih dveh škatel:

   (i) $\boxed{0} \quad \boxed{1} \quad \boxed{2}$

   (ii) $\boxed{0} \quad \boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4}$



Sl. Histograma za vsote neodvisnih izbiranj iz škatel (i) ali (ii).

   a. (10) Kateri od zgornjih dveh histogramov pripada škatli (i) in kateri škatli (ii)? Utemeljite odgovor.
   b. (10) Izračunajte približno verjetnost, da bo vsota 25 izbiranj iz škatle (ii) večja ali enaka 40.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
28. avgust 2001

1. (20) Na mizi ležijo tri kroglice in tri ploščice. Kroglice so oštevilčene s ciframi 1,3 in 5, ploščice pa z 2,4 in 6. Vseh 6 elementov postavimo v raven niz. Kroglice in ploščice so oštevilčene in jih ločimo med sabo!

   a. (5) Na koliko načinov lahko to storimo, če morajo vse kroglice stati skupaj?
   b. (5) Koliko je različnih nizov, ki se začno in končajo s ploščico?
   c. (5) Iz danih šestih elementov lahko sestavimo več štirimestnih števil. Koliko tako dobljenih števil je večjih od števila 4000?
   d. (5) Koliko štirimestnih števil ima enice in desetice zapisane na ploščicah?

2. (20) V zgornjem predalu Borutove omare se nahajo tri bele, štiri modre in pet črnih nogavic, v spodnjem pa šest belih, deset modrih in osem črnih nogavic.

   a. (10) Zjutraj še v temi mora Borut iz poljubnega predala izvleči dve nogavici. Seveda upa, da bosta enake barve. Kateri predal si bo izbral? Odgovor utemelji.
   b. (10) Nekdo je Borutu prejšnji večer prestavil iz zgornjega v spodnji predal eno nogavico. Borut zjutraj potegne iz spodnjega predala črno nogavico. Kolikšna je verjetnost, da je bila tudi prestavljena nogavica črna?

3. (20) Na začetku imamo m poštenih kock. Kocke vržemo. Tiste, na katerih je šestica, pustimo, ostale poberemo in jih vržemo še enkrat. Spet pustimo tiste, na katerih je šestica, ostale poberemo in spet vržemo. Kocke mečemo, dokler vse ne kažejo šestico. Označimo število potrebnih metov kocke z N.

   a. (10) Naj bodo $N_1, N_2, \ldots, N_m$ med sabo neodvisne slučajne spremenljivke z $N_i \propto \text{Geom}(p)$. Izračunajte
   $$P(\max(N_1, \ldots, N_m) \leq n)$$
   za $n = 1, 2, \ldots$.
   b. (10) Izračunajte $P(N = n)$ za $n = 1, 2, \ldots$.
   Namig: Naj bo N_i število metov, dokler se na kocki i ne pojavi šestica. Uporabite a.

4. (20) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ med sabo neodvisne slučajne spremenljivke z enako porazdelitvijo. Naj bo N celoštevilska in neodvisna od $X_1, X_2, \ldots$. Na predavanjih smo dokazali, da je rodovna funkcija spremenljivke $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ enaka
$$G_Y(s) = G_N(G_{X_1}(s))\,.$$

a. (10) Naj bo $Y \propto \mathrm{Geom}(\theta)$ za neki $\theta \in (0,1)$ in naj bo tudi $N \propto \mathrm{Geom}(p)$, pri čemer je $p > \theta$. Pokažite, da je

$$G_{X_1}(s) = \frac{\theta s}{\theta s + p - ps}\,.$$

b. (10) Pokažite še, da je za $k = 1, 2, \ldots$

$$P(X_1 = k) = \frac{\theta (p-\theta)^{k-1}}{p^k}$$

in poimenujte porazdelitev X_1.

5. (20) Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki z $X \propto \mathrm{Bi}(m,p)$ in $Y \propto \mathrm{Bi}(n,p)$. Označite $Z = X + Y$.

   a. (10) Dokažite, da je $Z \propto \mathrm{Bi}(m+n,p)$.
   b. (10) Izračunajte $E(X|Z)$.

6. (20) Pri ameriški ruleti je 38 enako verjetnih možnih izidov Številki 0 in 00 sta zelene barve. Od ostalih številk je pol rdečih in pol črnih. Če igate v Atlantic City in vedno stavite na rdeče, so pravila naslednja: stavite \$1. Če je izid rdeče barve, vam vrnejo stavo in \$1, tako da je dobiček enak \$1. Če je izid črne barve, ste izgubili stavo, torej je dobiček enak -\$1. Če je izid zelen, vam vrnejo pol stave, torej je dobiček enak $-\$0\dot{}5$.

   a. (10) Dobiček v eni igri je slučajna spremenljivka X. Opišite porazdelitev te slučajne spremenljivke in izračunajte njeno matematično upanje in varianco.
   b. (10) Privzemite, da igrate ruleto v Atlantic City 400-krat. Izračunajte približek za verjetnost, da bo vaš dobiček \$10 ali več.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
12. september 2001

1. (20) Pred nami sta modra in rdeča vrečka. V modri vrečki je 5 ploščic s števili 2,5,6,8 in 9, v rdeči pa pet ploščic, na katerih so zapisana števila 2,3,8,8 in 9.

   a. (10) Koliko različnih petmestnih števil lahko sestavimo iz ploščic iz modre vrečke, če neposredno za ploščico s številom 9 ne sme stati ploščica s sodo števko?

   b. (10) Sedaj na mizo stresemo vse ploščice iz obeh vrečk. Koliko različnih desetmestnih števil lahko sestavimo iz vseh ploščic?

2. (20) V vsakem zaboju breskev je 20 % gnilih. Janez in Metka kupita 2 takšna zaboja s po 25 breskvami.

   a. (10) Janez preloži naključno 2 breskvi iz prvega v drugi zaboj. Metka naključno izbere breskev iz prvega (sedaj manjšega) zaboja. Določi verjetnost, da je njena breskev gnila.

   b. (10) Janez preloži 5 breskev naključno iz prvega v drugi zaboj. Določi verjetnost, da je v preostanku prvega zaboja vsaj ena gnila breskev.

3. (20) Iz množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 3)$ naključno izberemo tri števila. Vsaka podmnožica treh števil naj bo enako verjetna. Označimo najmanjše od izbranih treh števil z X, srednje z Y in največje z Z.

   a. (10) Izračunajte $P(X = k)$ za $k = 1, 2, \ldots, n - 2$.

   b. (10) Izračunajte $P(Y = k)$ za $k = 2, 3, \ldots, n - 1$.

4. (20) V škatli so lističi s števili 0, 1, 1 in 2. Označimo z S_n vsoto n števil na naključno izbranih lističih. Izbire so neodvisne z vračanjem.

   a. (10) Izračunajte $P(S_n = k)$ za $k = 0, 1, \ldots, 2n$.
   Namig: Uporabite rodovne funkcije.

   b. (10) Ocenite $P(S_{50} = 50)$ z uporabo centralnega limitnega izreka.

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
3	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{b}{24}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{a}{24}$	$\frac{c}{24}$

a. (10) Določite število a tako, da bo $E(Y|X=2)=3$.

b. (10) Določite števila a,b in c tako, da bo $E(Y|X)=X+1$.

6. (20) V električnem brivniku moramo baterije občasno zamenjati. Brivnik za delovanje potrebuje eno baterijo. V povprečju traja baterija 4 tedne s standardnim odklonom 1 teden. Trajanja posameznih baterij so med sabo neodvisne slučajne spremenljivke.

   a. (10) Izračunajte približek verjetnosti, da bo 28 baterij skupaj trajalo več kot dve leti. Vzemite, da ima leto 52 tednov.

   b. (10) Najmanj koliko baterij potrebujemo, če naj bo verjetnost, da bo zaloga dovolj za dve leti delovanja brivnika, vsaj 0˙95?

Izpit iz statistike

Praktična matematika
14. januar 2002

1. (20) Imamo 3 množice cifer: $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B := \{3, 5, 7\}$ in $C := \{0, 3, 9\}$.
   a. (5) Koliko je vseh različnih osemmestnih števil, sestavljenih iz cifer množic A in B? Vska cifra se lahko ponovi natanko tolikokrat, v kolikor množicah je vsebovana.
   b. (5) Koliko je vseh različnih enajstmestnih števil, sestavljenih iz cifer množic A, B in C? Pri tem se neka cifra lahko ponovi natanko tolikokrat, v kolikor množicah je vsebovana.
   c. (10) Koliko je vseh različnih tromestnih števil, sestavljenih iz cifer množic A in B? Pri tem se neka cifra lahko ponovi natanko tolikokrat, v kolikor množicah je vsebovana.
2. (20) Na srečelovu imajo srečke spravljene v dveh vrečkah. V prvi vrečki v vsakem trenutku zadene 30% srečk, v drugi pa 60%. Za vplačanim zneskom vedno najprej vržemo pošteno igralno kocko. Če pade enica, moramo izvleči dve srečki iz prve vrečke, če pade katerokoli drugo število pik, moramo izvleči dve srečki iz druge vrečke.
   a. (10) Določi verjetnost, da pri vplačanem znesku za dve srečki (in enem metu kocke), zadanemo na obe srečki.
   b. (10) Naš sosed na levi je izvlekel eno prazno in eno polno srečko. Določi verjetnost, da je na kocki vrgel enico.
3. (20) Užaljeni A je ljubimcu B svoje žene napovedal dvoboj. Pravila za dvoboj so naslednja: A in B bosta izmenično streljala eden na drugega, dokler ne bo nekdo od njiju zadet. Privzemite, da so posamezni streli med seboj neodvisni, A zadene z verjetnostjo a in B zadene z verjetnostjo b.
   a. (10) Recimo, da začne streljati A. Kolikšna je verjetnost, da se bo A uspešno maščeval?

      Namig: Izrazite dogodek, da A zmaga, z dogodki

      $$A_k = \{A \textit{ zadene prvi v svojem } k\textit{-tem poskusu}\}.$$
   b. (10) Naj bo X celotno število strelov, vključno z zadnjim. Izračunajte porazdelitev slučajne spremenljivke X in njeno matematično upanje. Privzemite, da je začel streljati A.

4. (20) Naj bo $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ proces razvejanja, in naj bo $\eta = P(\cup_n \{Z_n = 0\})$ verjetnost, da proces "izumre".

   a. (10) Porazdelitev slučajnega števila potomcev naj ima rodovno funkcijo $G(s) = q + ps^2$ z $0 < p < 1$ in $q = 1 - p$. S pomočjo rodovnih funkcij izračunajte verjetnost, da proces izumre pred 3. generacijo, torej da v 3. generaciji ni več nikogar.

   b. (10) Za katere $p \in (0, 1)$ ima proces pozitivno verjetnost, da preživi?

5. (20) Porazdelitev slučajnih spremenljivk X in Y je dana s tabelo:

$Y \backslash X$	1	2	3
1	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	0
3	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{b}{24}$
4	$\frac{1}{24}$	$\frac{a}{24}$	$\frac{c}{24}$

   a. (10) Določite število a tako, da bo $E(Y|X = 2) = 3$.

   b. (10) Določite števila a,b in c tako, da bo $E(Y|X) = X + 1$.

6. (20) Zdolgočaseni statistik je n-krat z vračanjem izbiral lističe iz spodnjih škatel. Števila na izbranih lističih je označil z $X_1, X_2, \ldots, X_n$, njihovo vsoto pa z S_n.

   (i) $\boxed{-1}\ \boxed{0}\ \boxed{1}$

   (ii) $\boxed{-1}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{1}$

   a. (10) Statistik je izračunal

$$P(-30 \leq S_{1000} \leq 30) \doteq 0{\cdot}96\,.$$

   Za katero od škatel je računal verjetnosti? Utemeljite odgovor.

   b. (10) Statistik je izračunal $P(S_{100} = 0) \doteq 0{\cdot}049$. Katero škatlo je obravnaval?

1999/2000

1. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
8. december 1999

1. (25) Oče želi sinčku za darilo kupiti 6 avtomobilčkov. Vsi avtomobilčki so enakega tipa, razlikujejo se le po barvi.

   a. (15) Recimo, da lahko oče izbira med rdečimi, belimi in rumenimi avtomobilčki. Na koliko različnih načinov lahko sestavi darilo iz 6 avtomobilčkov, če je na razpolago poljubno mnogo avtomobilčkov vsake barve?

   b. (10) Na koliko načinov lahko oče obdari sina, če je na razpolago le 5 rdečih, avtomobilčkov, ostalih dveh barv pa je na razpolago poljubno mnogo?

2. (25) Vržemo tri kovance. Predpostavljamo, da so meti med seboj neodvisni, verjetnosti, da pade grb, pa niso nujno enake. Naj bo A dogodek, da se na prvem kovancu pojavi grb, B pa dogodek, da se grb pojavi na natanko dveh kovancih.

   a. (15) Recimo, da so vsi trije kovanci pošteni, torej verjetnost za grb je za vse kovance enaka $1/2$. Sta dogodka A in B neodvisna?

   b. (10) Recimo, da je prvi kovanec pošten, druga dva pa ne: na vsakem od njiju se grb pojavi z verjetnostjo p. Pri katerih p sta A in B neodvisna?

3. (25) V prvi posodi so 3 bele in 7 črnih kroglic, v drugi posodi pa 4 bele in 6 črnih kroglic. Iz vsake posode na slepo vzamemo po eno kroglico in ti dve premestimo v tretjo posodo, v kateri so že 4 bele in 4 črne kroglice. Nato iz te posode na slepo potegnemo eno kroglico.

   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da je ta kroglica črna?

4. (25) Jimmy igra na igralnem avtomatu. Vsakič, ko stavi dano vsoto, z verjetnostjo $1/4$ dobi trikrat toliko, kot je stavil (če torej stavi en dolar, ima na koncu dva dolarja več kot na začetku). Z verjetnostjo $3/4$ pa Jimmy stavo izgubi. Jimmy ima sedem dolarjev. Najprej stavi en dolar. Če dobi, konča, če izgubi, pa nadaljuje z igranjem s podvojeno stavo. Tako nadaljuje, dokler bodisi ne dobi stave bodisi ne izgubi vsega. Posamezne igre so med seboj neodvisne.

   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da Jimmy izgubi ves denar?

   b. (15) Naj bo X količina Jimmyjevega denarja, ko neha igrati. Napišite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

2. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
1. marec 2000

1. (25) V razredu je 15 učencev. Prvo uro so vprašani štirje od njih, drugo uro pri drugem predmetu pa še pet učencev neodvisno od dogajanja prvo uro. Naj bo X število učencev, ki niso bili vprašani niti prvo niti drugo uro.

   a. (15) Poimenujte porazdelitev slučajne spremenljivke X, določite njeno zalogo vrednosti in za vsak k, ki ga X zavzame, izračunajte $P(X = k)$.

   b. (10) Izračunajte $E(X)$.

2. (25) Kocko mečemo, dokler ne pade 5 ali 6, vendar največ šestkrat. Naj bo X število metov.

   a. (15) Določite zalogo vrednosti slučajne spremenljivke in opišite njeno porazdelitev, t. j. za vsak k iz zaloge vrednosti izračunajte $P(X = k)$.

   b. (10) Izračunajte $E(X)$.

3. (25) Zavarovalnica je zavarovala 1000 oseb proti nezgodi. Verjetnost nezgode je 0˙0012, zavarovalna premija je 1000 SIT, odškodnina v primeru nezgode pa znaša 750.000 SIT. Privzamemo, da se nezgode dogajajo neodvisno.

   a. (5) Kako je porazdeljeno število nezgod?

   b. (10) Izračunajte pričakovani dobiček zavarovalnice.

   c. (10) Kolikšna je verjetnost, da ima zavarovalnica izgubo?

4. (25)[16] Za okroglo mizo sedi 8 gostov, ki igrajo karte. Vsak ima v rokah 1 karto razdeljeno z dobro premešanega kupa standardnih 52 kart. Vsak lahko vidi svojo karto in karti svojih sosedov na levi in na desni. Če nekdo ima asa, soseda pa nimata nobenega, bo stavil pomarančo, sicer ne bo stavil ničesar.

   a. (15) Definirajte

   $$I_1 = \begin{cases} 1 & \text{če igralec 1 stavi pomarančo} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

   Izračunajte $P(I_1 = 1)$.

   b. (10) Naj bo X število igralcev, ki bodo stavili pomarančo. Izračunajte $E(X)$. *Namig: Uporabite indikatorje.*

[16] V izvirniku je bila naloga nekoliko drugače formulirana.

3. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
19. april 2000

1. (25) Porazdelitev slučajne spremenljivke X naj bo podana s predpisom:
$$P(X=k) = c\,2^{-k} \quad \text{za } k = 1,2,3,4$$
   a. (5) Določite konstanto c.
   b. (10) Izračunajte $E(X)$.
   c. (10) Izračunajte $\operatorname{var}(X)$.

2. (25) Porazdelitev slučajnega vektorja (X,Y) je podana s tabelo:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=0$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$
$X=1$	$\frac{1}{20}$	?	?
$X=2$	?	?	?

   a. (15) Dopolnite tabelo tako, da bosta X in Y neodvisni, in določite robni porazdelitvi.
   b. (10) Izračunajte $E(XY^2)$

3. (25) Slučajne spremenljivke X_1, X_2, X_3 naj imajo porazdelitev, dano z
$$P(X_1=k_1, X_2=k_2, X_3=k_3) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)} \cdot \frac{\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\lambda_3^{k_3}}{k_1!k_2!k_3!}$$
za dane pozitivne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, pri čemer je $k_i \geq 0$ za vse $1 \leq i \leq 3$.
   a. (15) Ali so slučajne spremenljivke X_1, X_2, X_3 med sabo neodvisne? Utemeljite odgovor.
   b. (10) Poiščite robne porazdelitve slučajnih spremenljivk X_i za $1 \leq i \leq 3$ in jih poimenujte.

4. (25)[17] Za okroglo mizo sedi 8 gostov, ki igrajo karte. Vsak ima v rokah 1 karto razdeljeno z dobro premešanega kupa 52 kart. Vsak lahko vidi le svojo karto. Če nekdo ima asa, bo stavil pomarančo, sicer ne bo stavil ničesar.
   a. (10) Definirajte
$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{če igralec } i \text{ stavi pomarančo} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$
   Izračunajte $P(I_i = 1)$ in $P(I_i = 1, I_j = 1)$ za $i \neq j$.
   b. (10) Naj bo X število igralcev, ki bodo stavili pomarančo. Izračunajte $\operatorname{var}(X)$.

[17] V izvirniku je bila naloga nekoliko drugače formulirana.

4. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
5. junij 2000

1. (25) V modelu telefonskega omrežja predpostavljamo, da je število zasedenih enot v trenutku n neka slučajna spremenljivka X_n z rodovno funkcijo G_n. Naj bo $Y \propto \mathrm{Po}(\lambda)$. Za rodovne funkcije $G_0, G_1, \ldots$ velja $G_0(s) = 1$ in

$$G_{n+1}(s) = G_n((1-p) + ps)\, G_Y(s)\,,$$

kjer je G_Y rodovna funkcija spremenljivke Y in velja $p \in (0,1)$.

   a. (15) Izračunajte $P(X_3 = 0)$.

   b. (10) Kakšna je porazdelitev spremenljivke X_n?

2. (25) Naj bo $Z_0, Z_1, \ldots$ proces razvejanja. Slučajno število Y potomcev vsakega posameznika naj ima porazdelitev

$$P(Y = k) = 2^{-(k+1)}$$

za $k = 0, 1, \ldots$.

   a. (10) Z matematično indukcijo pokažite, da je rodovna funkcija $G_n(s)$ spremenljivke Z_n enaka
$$G_n(s) = \frac{n-(n-1)s}{n+1-ns}\,.$$

   b. (10) Izračunajte $E(Y)$ in $P(Z_n = 0)$ in izračunajte $P(\text{proces izumre})$. Kako se to ujema s teorijo?

3. (25) V podjetju HIT so v letu 1999 gostje igrali igro *Colore* 440.000-krat. Verjetnost za dobitek pri tej igri je $p \doteq 0\text{'}00198079$.

   a. (5) Zanima nas število S_n dobitkov v 440.000 igrah. To število je kot vsota 440.000 neodvisnih slučajnih spremenljivk z vrednostma 0 in 1, torej $S_n = X_1 + \cdots X_n$, kjer je $P(X_i = 1) = p$ in $P(X_i = 0) = 1 - p$. Z uporabo centralnega limitnega izreka izračunajte približno verjetnost, da bo dobitkov 920 ali več.

      Upoštevajte: $\Phi(1\text{'}64) \doteq 0\text{'}95$.

   b. (15) Recimo, da je izplačilo pri dobitku enako $x > 0$. Če gost stavi enoto in stavo dobi, mu to enoto vrnejo in dodajo še x enot. Pokažite, da je ta dobitek lahko največ $x = 502$, če naj bo verjetnost, da bo hiša po 440.000 igrah imela izgubo, največ $0\text{'}01$?

4. (25) Ponujena vam je naslednja igra na srečo: iz škatle, v kateri je veliko število listkov s števili, lahko naključno izberete 1000 listkov z vračanjem. Če je vsota izbranih števil med vključno a in $a + 100$, dobite stavo, sicer jo izgubite. Število a si lahko še izberete. O škatli veste le to, da je povprečje 0˙1 in standardni odklon 1˙5811.

   a. (15) Kolikšna je vpribližno erjetnost, da boste stavo dobili, če si izberete $a = 0$? Stavo torej dobite, če je vsota med 0 in 100.

   b. (10) Katera izbira za a je za vas najugodnejša? Utemeljite in izračunajte verjetnost za dobitek za izbrani a.

Izpit iz statistike

Praktična matematika

7. junij 2000

1. (20) Oče želi sinčku za darilo kupiti 6 avtomobilčkov. Vsi avtomobilčki so enakega tipa, razlikujejo se le po barvi.

   a. (10) Recimo, da lahko oče izbira med rdečimi, belimi in rumenimi avtomobilčki. Na koliko različnih načinov lahko sestavi darilo iz 6 avtomobilčkov, če je na razpolago poljubno mnogo avtomobilčkov vsake barve?

   b. (10) Na koliko načinov lahko oče obdari sina, če je na razpolago le 5 rdečih, avtomobilčkov, ostalih dveh barv pa je na razpolago poljubno mnogo?

2. (20) Na mizi sta dve posodi. V eni je 20 raznobarvnih kroglic: 10 belih, 5 črnih in 5 zelenih, druga pa je še prazna. Iz polne posode sočasno izvlečemo dve kroglici. Najključno izberemo eno izmed njiju in jo pogledamo. Nato spustimo kroglici v prazno posodo. Posodo pretresemo in iz nje naključno izvlečemo kroglico.

   a. (10) Dokažite formulo

   $$P(A|B) = P(A|B \cap C) \cdot P(C|B) + P(A|B \cap C^c) \cdot P(C^c|B)\,.$$

   b. (10) Izračunajte pogojno verjetnost, da bo kroglica izvlečena iz druge posode bela pri pogoju, da je bila kroglica, ki smo jo pogledali bela.

3. (20) Dane so tri poštene in neodvisne kocke. Hazarder stavi na določeno številko. Če se ta številka ne pojavi na nobeni izmed teh treh kock, izgubi en dolar. Če pa se številka, na katero stavi, pojavi na kateri od kock, dobi toliko dolarjev, kolikor je kock z njegovo številko. Dobiček oziroma izgubo našega hazarderja naj ponazarja slučajna spremenjivka X.

   a. (10) Napišite porazdelitev slučajne spremenljivke X.

   b. (5) Izračunajte $E(X)$.

   c. (5) Recimo, da ima naš hazarder na začetku le en dolar in da igra, dokler kaj ima. Naj bo N število iger, ki jih odigra naš hazarder. Igre so neodvisne. Izračunajte $P(N = n)$ za $n = 1, 2, 3$ in še $P(N > 3)$.

4. (20) Celoštevilska nenegativna slučajna spremenljivka N naj ima porazdelitev dano z

   $$P(N = k) = -\frac{1}{\log(1-p)} \cdot \frac{p^k}{k}$$

   za $k = 1, 2, \ldots$ in $p \in (0, 1)$.

a. (10) Izračunajte rodovno funkcijo spremenljivke N.

Namig: $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$.

b. (10) Izračunajte matematično upanje in varianco spremenljivke N.

5. (20) Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana s tabelo:

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = -1$	0·1	0·2	0
$X = 0$	0	0·1	0·2
$X = 1$	0·3	0	0·1

a. (5) Sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni?

b. (15) Izračunajte $E\big(X(X+Y) \mid X\big)$.

6. (20) Na gimnazijo se je vpisalo 400 dijakov. Po dolgoletnih povprečjih je 5% nezadostnih, 25% zadostnih, 35% dobrih, 25% prav dobrih in 10% odličnih. Privzamemo seveda, da so dijaki neodvisni.

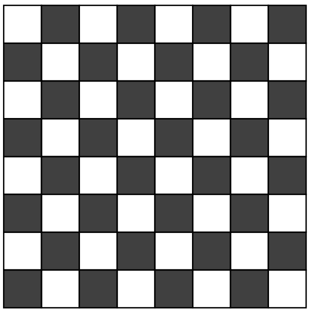
a. (10) Ocenite verjetnost, da bo letos več kot 11% odličnjakov.

b. (10) Ocenite verjetnost, da bo srednja ocena uspeha manjša od 3.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
30. junij 2000

1. (20) Na običajno šahovnico s 64 polji postavljamo figure. Figur med sabo ne ločimo.



   a. (10) Na koliko načinov lahko razpostavimo vseh 32 figur po šahovnici, če mora vsaka stati na svojem polju? Podajte samo formulo s fakultetami, ni pa potrebno izračunati dejanskega števila možnosti.
   b. (10) Na koliko načinov lahko razpostavimo 4 figure tako, da nobeni dve figuri ne bosta v isti vrsti ali v istem stolpcu na šahovnici.

2. (20) V prvi posodi so 4 bele, 4 rdeče in 4 zelene kroglice, v drugi posodi pa so 3 rdeče in 6 zelenih. Najprej iz prve posode v drugo na slepo premestimo eno kroglico. Nato drugo posodo premešamo in iz nje potegnemo kroglico.

   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da je kroglica, ki smo jo potegnili iz druge posode, zelena?
   b. (10) Recimo, da je bila kroglica, ki smo jo potegnili iz druge posode, zelena. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je bila zelena tudi kroglica, ki smo jo potegnili iz prve posode?

3. (20) Porazdelitev slučajne spremenljivke X je podana s predpisom:

$$P(X = k) = ck, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5$$

   a. (5) Določite konstanto c.
   b. (15) Izračunajte $E(X)$ in $\mathrm{var}(X)$.

4. (20) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ med sabo neodvisne slučajne spremenljivke z enako porazdelitvijo. Naj bo N celoštevilska in neodvisna od $X_1, X_2, \ldots$. Na predavanjih smo dokazali, da je rodovna funkcija spremenljivke $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ enaka

$$G_Y(s) = G_N(G_{X_1}(s))\,.$$

a. (10) Naj bo $Y \propto \text{Geom}(\theta)$ za neki $\theta \in (0,1)$ in naj bo tudi $N \propto \text{Geom}(p)$, pri čemer je $p > \theta$. Pokažite, da je

$$G_{X_1}(s) = \frac{\theta s}{\theta s + p - ps}\,.$$

b. (10) Pokažite še, da je za $k = 1, 2, \ldots$

$$P(X_1 = k) = \frac{\theta(p-\theta)^{k-1}}{p^k}$$

in poimenujte porazdelitev X_1.

5. (20) Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana s tabelo:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$0\text{'}05$	$0\text{'}1$	$0\text{'}05$
$X = 1$	$0\text{'}1$	?	?
$X = 2$	?	?	?

a. (10) Dopolnite tabelo tako, da bosta X in Y neodvisni, in določite robni porazdelitvi.

b. (10) Izračunajte:

$$E\left(\frac{X}{Y+1}\right)$$

6. (25) V podjetju HIT so v letu 1999 gostje igrali igro *Colore* 440.000-krat. Verjetnost za dobitek pri tej igri je $p \doteq 0\text{'}00198079$.

a. (5) Zanima nas število S_n dobitkov v 440.000 igrah. To število je kot vsota 440.000 neodvisnih slučajnih spremenljivk z vrednostma 0 in 1, torej $S_n = X_1 + \cdots X_n$, kjer je $P(X_i = 1) = p$ in $P(X_i = 0) = 1 - p$. Z uporabo centralnega limitnega izreka izračunajte približno verjetnost, da bo dobitkov 920 ali več. *Upoštevajte:* $\Phi(1\text{'}64) \doteq 0\text{'}95$.

b. (15) Recimo, da je izplačilo pri dobitku enako $x > 0$. Če gost stavi enoto in stavo dobi, mu to enoto vrnejo in dodajo še x enot. Pokažite, da je ta dobitek lahko največ $x = 502$, če naj bo verjetnost, da bo hiša po 440.000 igrah imela izgubo, največ $0\text{'}01$? *Upoštevajte:* $\Phi(-2\text{'}33) \doteq 0\text{'}01$.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
20. september 2000

1. (20) Danih je pet begonij, šest pelargonij in štiri fuksije. Cvetlic iste vrste med seboj ne razlikujemo. Kot ravno gredico razumemo vseh 15 cvetlic v ravni vrsti.
   a. (10) Na koliko načinov lahko iz zgornjih cvetlic naredimo ravno gredico?
   b. (10) Koliko pa je vseh možnih gredic, pri katerih so vse pelargonije skupaj?
2. (20) Dan je dobro premešan kup standardnih 52 kart.
   a. (10) Recimo, da vemo, da je druga karta as. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je tudi prva karta as?
   b. (10) Recimo, da vemo, da je prva karta pik, druga pa as. Kolikšna je zdaj pogojna verjetnost, da je prva karta as?
3. (20) Billy in Jimmy igrata naslednjo igro. Najprej Billy plača Jimmyju 9 dolarjev. Nato pa mečeta pošten kovanec, dokler ne pade cifra, vendar največ desetkrat. Če cifra pade v n-tem metu, plača Jimmy Billyju 2^n dolarjev (če pa cifra v desetih metih ne pade, Jimmy ne plača ničesar).
   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da ima Jimmy izgubo?
   b. (10) Naj bo X Jimmyjev dobiček oz. $-X$ Jimmyjeva izguba. Izračunajte $E(X)$.
4. (20) Par slučajnih spremenljivk (X, Y) naj ima porazdelitev podano po predpisu:
   $$P(X = x, Y = y) = c(x + y), \quad x, y = 0, 1, 2$$
   a. (5) Izračunajte konstanto c.
   b. (15) Določite pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke Y glede na X.
5. (20) Dan je proces razvejanja, v katerem ima število potomcev vsakega predstavnika naslednjo rodovno funkcijo:
   $$G(s) = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{1 - s}$$
   Začnemo z enim predstavnikom. Njegovi potomci predstavljajo prvo generacijo, potomci le-teh drugo itd. Števila potomcev posameznikov so neodvisne slučajne spremenljivke.
   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bo tretja generacija brez predstavnikov?

b. (15) Kolikšna je verjetnost, da proces izumre?

6. (20) Danih je 2500 neodvisnih izdelkov. Verjetnost, da bo posamezen izdelek defekten, je 10%.

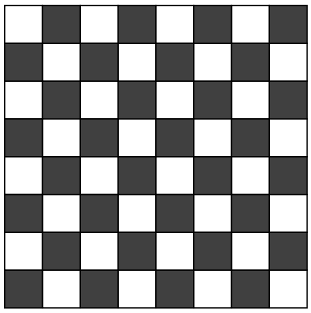
   a. (10) Ocenite verjetnost, da bo defektnih natanko 250 izdelkov.

   b. (10) Ocenite verjetnost, da bo defektnih izdelkov več kot 275.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
5. september 2000

1. (20) Na običajno šahovsko desko postavljamo figure, ki jih med sabo ne razlikujemo.



   a. (10) Na koliko načinov lahko razpostavimo 4 figure tako, da nobeni dve figuri nista v istem stolpcu ali v isti vrstici.

   b. (10) Na koliko načinov lahko razpostavimo 4 figure tako, da bosta dve na črnih, dve pa na belih poljih. Figur med sabo ne razlikujemo!

2. (20) Abraham de Moivre v svoji "*The Doctrine of Chances (1756)*" kot nalogo 94 predlaga naslednje: Igralci A,B,C igrajo isto igro na srečo po naslednjih pravilih: Najprej igrata dva od treh igralcev. Tisti, ki izgubi, preda svoje mesto tretjemu, ki je čakal in to pravilo velja v naslednjih igrah. Zmaga tisti, ki mu uspe premagati ostala dva v dveh zaporednih igrah. Predpostavljamo, da so igre med sabo neodvisne in je verjetnost za zmago kogarkoli v posamezni igri enaka 1/2.

   a. (10) Predpostavite, da najprej igrata igralca A in B. Definirajte naslednje dogodke

      - $C = \{\text{zmaga A}\}$.
      - $A_1 = \{\text{A zmaga v prvi in drugi igri}\}$.
      - $A_2 = \{\text{A zmaga v prvi igri in izgubi v drugi, C izgubi v tretji igri}\}$.
      - $A_3 = \{\text{A izgubi v prvi igri, B izgubi v drugi igri}\}$.

      Naj bo α verjetnost za zmago igralca A, če najprej igrata A in B, in β verjetnost za zmago A, če najprej igrata igralca A in C. Izrazite

$$P(C|A_i)$$

      z α in β za vsak $i = 1, 2, 3, 4$.

b. (10) Naj bo spet α verjetnost za zmago igralca A, če najprej igrata A in B, in β verjetnost za zmago A, če najprej igrata igralca A in C. Utemeljite zvezi

$$\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,\beta + \frac{1}{8}\,\alpha$$

in

$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,\alpha + \frac{1}{8}\,\beta$$

in izračunajte α.

3. (20) Kovanec mečemo, dokler ne pade vsaj en grb in vsaj ena številka. Označimo število potrebnih metov z X. Meti so med sabo neodvisni in verjetnost za grb v vsakem metu je p.

   a. (10) Poiščite $P(X = k)$ za $k = 2, 3, \ldots$.

   b. (10) Izračunajte $E(X)$.

4. (20) Naj bosta Y in N nenegativni, celoštevilski slučajni spremenljivki z rodovnima funkcijama $G(s) = E(s^Y)$ in $H(s) = E(s^N)$. Predpostavite, da velja

$$H(s) = G(0)s + G(H(s)) - G(0)\,.$$

Označite $\mu = E(Y)$ in $\nu = E(N)$. Predpostavite $\mu = E(Y) < 1$.

   a. (10) Pokažite, da je

$$\nu = \frac{G(0)}{1-\mu}\,.$$

   b. (10) Pokažite še, da je

$$\mathrm{var}(N) = \frac{\nu^2 \mathrm{var}(Y)}{1-\mu} - \nu^2(1+\mu) + \nu\,.$$

5. (20) Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana s tabelo:

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = -1$	0,1	0,2	0
$X = 0$	0	0,1	0,2
$X = 1$	0,3	0	0,1

   a. (5) Sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni?

   b. (15) Izračunajte $E\big(X(X+Y) \mid X\big)$.

6. (20) Dva strastna igralca na srečo igrata ruleto v neskončnost. Ruletni cilinder ima 37 izsekov, od katerih je 18 rdečih, 18 črnih in 1 zelen. Prvi igralec vedno stavi \$1 na rdeče, drugi pa vedno stavi \$1 na številko 17, ki je črna. Čisti dobiček po eni igri je v primeru zmage za prvega \$1, za drugega pa \$35, v nasprotnem primeru pa oba izgubita stavo.

a. (10) Aproksimirajte verjetnost, da drugi igralec po 1000 igrah nima izgube.

b. (10) Označite z X_n čisti profit prvega igralca po n igrah, z Y_n pa profit drugega igralca po n igrah. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n > X_n)\,.$$

Utemeljite vaš razmislek.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
15. januar 2001

1.

2. (20) Na mizi imamo modro in rdečo posodo. V modri posodi je 9 belih in 6 črnih kroglic, v rdeči posodi pa 11 belih in 4 črne kroglice. Vržemo pošteno kocko. Če pade 1 ali 6, sežemo v modro posodo in na slepo izvlečemo eno kroglico, sicer sežemo v rdečo posodo in izvlečemo kroglico.

   a. (10) Izračunaj verjetnost, da je izvlečena kroglica bela.

   b. (10) Izračunaj verjetnost, da je na kocki padla 6, pri pogoju, da smo izvlekli belo kroglico.

3. (20) Na klopi sedi 8 šestošolcev, 7 sedmošolcev in 9 osmošolcev. Naključno izberemo odbojkarsko ekipo šestih učencev. Naj X označuje število sedmo- in osmošolcev v ekipi.

   a. (10) Izračunajte verjetnost, da sta v ekipi 2 šestošolca, dva sedmošolca in 2 osmošolca.

   b. (10) Izračunajte $E(X)$.

4. **4.** (20) Naj bosta X in Y neodvisni nenegativni celoštevilski slučajni spremenljivki z enako porazdelitvijo. Označite $p_k = P(X = k)$ in privzemite, da velja

$$p_{k+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{m-1}{2(k+1)}\right) p_k$$

   za $k = 0, 1, \ldots$, kjer je $m \geq 1$ celo število in $p_0 = 2^{-m}$.

   a. (10) Pokažite, da je rodovna funkcija slučajne spremenljivke X enaka

$$G_X(s) = \left(\frac{1}{2-s}\right)^m .$$

   Namig: Rodovna funkcija ustreza pogoju

$$\frac{2-s}{m} \cdot G'_X(s) = G_X(s) .$$

   Napišite potenčno vrsto za levo in desno stran in izenačite koeficiente.

b. (10) Naj bo $r_k = P(X + Y = k)$ za $k = 0, 1, \ldots$. Pokažite, da je

$$r_{k+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{2m-1}{2(k+1)} \right) r_k$$

in $r_0 = 2^{-2m}$.

5. (20) Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) je podana s tabelo:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$
$X = 1$	$\frac{1}{20}$	?	?
$X = 2$	?	?	?

a. (10) Dopolnite tabelo tako, da bosta X in Y neodvisni, in določite robni porazdelitvi.

b. (10) Izračunajte $E(XY^2)$

6. (20) Naj bo $C_0 = 1$ cena delnice v trenutku $n = 0$. Na vsakem koraku se cena delnice spremeni tako, da se pomnoži s slučajnim faktorjem X_n, torej je $C_{n+1} = X_n \cdot C_n$, kjer so spremenljivke X_n za $n = 1, 2, \ldots$ med seboj neodvisne in velja $P(X_n = 0\text{˙}99) = P(X_n = 1\text{˙}01) = 1/2$.

a. (10) Naj bo $Y_n = \log(X_n)$. Izračunajte $E(Y_n)$ in $\mathrm{var}(Y_n)$.

b. (10) Izračunajte približno verjetnost, da bo po $n = 1000$ korakih cena delnice večja kot na začetku.

Namig: Z logaritmiranjem produkti preidejo v vsote.

1998/99

1. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
19. november 1998

1. (25) Morsejeve znake sestavljamo iz pik in črtic. Znak je lahko dolg 1, 2, 3 ali 4 znamenj, pri čemer je znamenje lahko pika ali črtica. Primeri: $\cdot\cdot, \cdot - \cdot, - - - \cdot$, itd.

   a. (10) Koliko je vseh možnih Morsejevih znakov?

   b. (15) Koliko je vseh možnih Morsejevih znakov, ki vsebujejo vsaj eno piko?

2. (25) Iz množice $\{1, 2, \ldots, 6N - 1, 6N\}$ naključno izberemo število. Poljubno število izberemo z enako verjetnostjo.

   a. (10) Izračunajte verjetnost, da je izbrano število deljivo z 2, ne pa tudi s 3.

   b. (15) Naključno izberimo število dvakrat zaporedoma. Izbiri sta neodvisni. Izračunajte verjetnost, da je vsota liho število.

3. (25)[18] Dani sta dve škatli, rdeča in modra. V vsaki je lahko zlatnik. Verjetnost, da je v rdeči škatli zlatnik, je $0{\cdot}3$, verjetnost, da je v modri škatli zlatnik, pa je $0{\cdot}4$. Pri tem sta škatli neodvisni (kar med drugim pomeni, da je lahko zlatnik tudi v obeh škatlah ali pa v nobeni).

   Pepe odpre obe škatli, pogleda vsebino, spet zapre in za vsako na poseben list zapiše, ali je notri zlatnik ali ne. Nato da oba lista k škatlama. Z verjetnostjo $0{\cdot}9$ da vsak list k pravi škatli, z verjetnostjo $0{\cdot}1$ pa zamenja.

   a. (15) Recimo, da na listu ob rdeči škatli piše, da je notri zlatnik. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je v rdeči škatli res zlatnik?

   b. (10) Recimo, da na natanko enem listu piše, da je v škatli zlatnik. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je zlatnik v rdeči škatli?

4. (25) Kovanec vržemo šestkrat. Vsi možni izidi so enako verjetni. Definirajmo naslednje tri dogodke:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{prvič pade številka}\} \\ B &= \{\text{zadnjič pade številka}\} \\ C &= \{\text{številka pade natanko trikrat}\} \end{aligned}$$

   a. (15) Dokaži, da sta dogodka A in B neodvisna, prav tako pa tudi A in C ter B in C.

   b. (10) Ali je C neodvisen od $A \cap B$?

[18] V izvirniku je bila naloga drugače formulirana.

2. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
25. januar 1999

1. (25) Pošteno kocko vržemo n-krat.

   a. (10) Naj bo X število šestic v n metih in Y število ostalih številk v n metih. Izračunajte
   $$P(Y - X = k)$$
   za $k = -n, -n+1, \ldots, n$.

   b. (15) Pokažite, da je verjetnost, da dobimo 6 sodo mnogokrat, enaka
   $$\tfrac{1}{2}\left[1 + (\tfrac{2}{3})^n\right] .$$
   Namig: $(1+x)^n + (1-x)^n = 2 + 2\binom{n}{2}x^2 + 2\binom{n}{4}x^4 + \cdots$.

2. (25) Verjetnost, da posamezen poskus uspe, je 30%. Poskus ponavljamo, dokler ne uspe 10-krat. Privzemamo, da so posamezni poskusi med seboj neodvisni.

   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da bomo morali poskus opraviti 20-krat, preden nam uspe desetkrat.

   b. (15) Naj bo X število poskusov, ki jih moramo opraviti. Izračunaj $E(X)$.

3. (25) Tonček in Pepček imata pred seboj vsak kup dobro premešanih standardnih 52 kart. Hkrati obrneta vsak svojo vrhnjo karto in pogledata, katera je več vredna. Privzemamo, da so vse barve enakovredne in ima da ima vseh 13 kart iste barve različne vrednosti.

   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da sta prvi karti enakovredni?

   b. (15) Recimo, da z obračanjem kart nadaljujeta (brez vračanja). Naj bo X število parov enakovrednih kart v prvih petih potezah. Izračunajte $E(X)$.

4. (25) Standardnih 52 kart dobro premešamo in začnemo deliti 4 igralcem od vrha. Vsakemu razdelimo po 13 kart. Označimo z X_1 število asov, ki jih ima prvi igralec. Podobno definiramo še X_2, X_3 in X_4.

   a. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(X_1 + X_2)$.

   b. (15) Izračunajte $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$.

3. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
29. april 1999

1. (25) Slučajni spremenljivki naj imata gostoto dano z

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \text{za } x^2+y^2<1 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

   a. (10) Določite konstanto c.

   b. (15) Izračunajte robni gostoti $p_X(x)$ in $p_Y(y)$.

2. (25) Naj bosta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki ter $X \propto \mathrm{Exp}(a)$ in $Y \propto \mathrm{Exp}(b)$. Naj bo $Z := X/Y$.

   a. (15) Izračunajte porazdelitveno funkcijo in gostoto slučajne spremenljivke Z.

   b. (10) Izračunajte $E(Z)$, če obstaja. Odgovor utemeljite!

3. (25) Slučajna spremenljivka X ima gostoto, podano po predpisu:

$$\begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+\log x}} & \text{za } x>0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

   Naj bo še $Y := \log X$.

   a. (10) Izračunajte porazdelitveno gostoto slučajne spremenljivke Y.

   b. (10) Poimenujte porazdelitev slučajne spremenljivke Y in določite morebitne parametre.

   c. (5) Določite konstanto c.

4. (25) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ med sabo neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene geometrijsko: $X_i \propto \mathrm{Geom}(p)$. Slučajna spremenljivka N naj bo neodvisna od $X_1, X_2, \ldots$ in naj bo $N \propto \mathrm{Geom}(\theta)$. Označite $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

   a. (15) S pomočjo rodovnih funkcij izračunajte $P(S=k)$ za $k = 1, 2, \ldots$.

   b. (10) Izračunajte $\mathrm{var}(S)$.

4. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
3. junij 1999

1. (25) Ruleta ima 37 izsekov, od katerih je 18 črnih. Recimo, da vedno stavimo na črno. Če dobimo, je naš čisti dobiček enak en dolar, drugače pa smo en dolar na izgubi.
   a. (10) Kolikšna je verjetnost, da po 100 igrah nismo na izgubi?
   b. (15) Najmanj kolikšno naj bo število iger, da bo imela igralnica z verjetnostjo 99% z nami dobiček?
2. (25) V zelo veliki škatli je ogromno lističev s številkami. Vemo, da je povprečje številk enako 0, ne vemo pa standardnega odklona σ.
   a. (15) Predpostavite, da smete poljubno mnogokrat izbirati lističe z vračanjem in ugotovite, da je za zelo velik n
   $$P(-2 \le \frac{S_n}{\sqrt{n}} \le 2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-s^2/2}\, \mathrm{d}s\,,$$
   kjer kot ponavadi označimo z $X_1, X_2 \ldots$ številke na izbranih lističih in $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Kakšen je po vašem mnenju σ?
   b. (10) Kolikšna je približno verjetnost
   $$P(-1 \le \frac{S_n}{\sqrt{n}} \le 1)$$
   za zelo velike n?
3. (25) V malo manjši škatli je 40 lističev s številkami. Štirje od njih so označeni s številko 40, 12 od njih s številko 22, preostali pa s številko 24. Slučajno izvlečemo štiri listke, brez ponavljanja. Naj bo $\bar{X}$ povprečna vrednost na izbranih listkih.
   a. (10) Izračunajte $E(\bar{X})$ in $SE = \sqrt{\mathrm{var}(\bar{X})}$. Odgovor utemeljite!
   b. (15) Natančno (t. j. brez uporabe CLI) izračunajte $P(\bar{X} > 35)$.
4. (20) Velikost vzorca pri *Slovenskem javnem mnenju* je $n = 2100$. Privzemite, da je vzorec enostavni slučajni in zanemarite popravni faktor $\sqrt{(N-n)/(N-1)}$.
   a. (15) Recimo, da ocenjujemo odstotek in z zgornjim vzorcem dobimo, da je vzorčni odstotek enak 54%. Približno kolikšna je verjetnost, da je napaka vzorčne ocene manjša od 1%?
   b. (10) Ali lahko zanesljivo trdite, da je pravi odstotek večji od 50%? Utemeljite vaš razmislek.

1997/98

1. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
19. november 1997

1. (25) Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_m$ poljubni dogodki.

   a. (10) Dokažite, da je

   $$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m) = P(A_1|A_2 \cap \cdots \cap A_m) \cdot P(A_2|A_3 \cap \cdots \cap A_m) \cdots P(A_m)\,.$$

   b. (15) Standardnih 52 kart dobro premešamo in začnemo deliti brez vračanja. Tretja karta je rdeča. Kakšna je verjetnost, da je bila prva karta črna?

2. (25) Zaporedoma mečemo dve pošteni kocki.

   a. (10) Naj bo X število potrebnih metov dveh kock, dokler ne dobimo vsote 7. Izračunajte $E(X)$.

   b. (15) Naj bo Y vsota vseh pik v n metih dveh poštenih kock. Izračunajte $P(\{Y \text{ je lih}\})$.

3. (25) V žari je m_1 belih, m_2 modrih in m_3 rdečih kroglic. Naključno izberemo $3n$ kroglic brez vračanja, kjer je $n \leq \min\{m_1, m_2, m_3\}$.

   a. (15) Izračunajte verjetnost, da je med izbranimi kroglicami enako število kroglic posameznih barv.

   b. (10) Naj bo X število belih ali modrih kroglic med izbranimi $3n$ kroglicami. Izračunajte $E(X)$.

4. (25) Za okroglo mizo je n sedežev. Naj bo $m < n$. Predpostavite, da se m ljudi posede za mizo povsem naključno.

   a. (15) Med m ljudmi je tudi Janez. Naj bo X število praznih sedežev med Janezom in njegovim najbližjim sosedom v smeri nasprotni urinemu kazalcu. Izračunajte $E(X)$.

      Namig: Uporabite simetrijo.

   b. (10) Naj bo $2m < n$. Predpostavljajte, da se $2m$ ljudi posede za mizo v povsem naključnem vrstnem redu. Med temi $2m$ ljudmi je tudi Janez s svojo ženo. Naj bo Y število stolov med Janezom in njegovo ženo v smeri nasprotni urinemu kazalcu. Izračunajte $E(Y)$.

2. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
14. januar 1998

1. (25) Naj bodo X, Y, Z in W neodvisne standardne normalne slučajne spremenljivke.
   a. (10) Izračunajte $P(X - Y > W - Z)$.
   b. (15) Izračunajte $P(\{X > Y\} \cap \{Z > W\})$.
2. (25) Slučajni spremenljivki X in Y naj bosta neodvisni s porazdelitvama

$$
\begin{aligned}
P(X = k) &= \frac{b^2}{(1+b)^{2+k}} \qquad \text{za } k = 0, 1, 2 \ldots \\
P(Y = k) &= \frac{b}{(1+b)^{1+k}} \qquad \text{za } k = 0, 1, 2 \ldots
\end{aligned}
$$

   za $b > 0$.
   a. (10) Kakšne vrednosti lahko zavzame slučajna spremenljivka $X + Y$?
   b. (15) Kakšna je porazdelitev $X + Y$?
3. (25) Naj bodo $I_1, I_2, \ldots, I_n$ med seboj neodvisne slučajne spremenljivke s $P(I_j = 1) = p$ in $P(I_j = 0) = 1 - p$. Označite $S_n = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$.
   a. (10) Izračunajte $E(I_1 | S_n = k)$.
      Namig: Uporabite simetrijo.
   b. (15) Naj bo $S_l = I_1 + I_2 + \cdots + I_l$. Izračunajte $E(S_l | S_n = k)$.
4. (25) Slučajni spremenljivki X in Y naj imata gostoto

$$
p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)} & \text{za } x, y \geq 0 \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}
$$

   a. (10) Izračunajte gostoti spremenljivk X in Y.
   b. (15) Izračunajte $E(Y | X = x)$ za $x > 0$.

3. kolokvij iz statistike

Praktična matematika
22. april 1998

1. (25) Naj bo $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ proces razvejanja, in naj bo $\eta = P(\cup_n\{Z_n = 0\})$ verjetnost, da proces "izumre".

   a. (15) Porazdelitev slučajnega števila potomcev naj ima rodovno funkcijo $G(s) = q + ps^2$ z $0 < p < 1$ in $q = 1 - p$. S pomočjo rodovnih funkcij izračunajte verjetnost, da proces izumre pred 3. generacijo, torej da v 3. generaciji ni več nikogar.

   b. (10) Za katere $p \in (0, 1)$ ima proces pozitivno verjetnost, da preživi?

2. (25) Porazdelitev pozitivne celo-števiske slučajne spremenljivke X naj bo dana z

$$P(X = k) = -\frac{p^k}{k\log(1-p)}$$

   za nek $0 < p < 1$ in $k = 1, 2, \ldots$.

   a. (10) Uporabite razvoj

$$\log(1-s) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s^k}{k}$$

   za $|s| < 1$ za izračun rodovne funkcije spremenljivke X.

   b. (15) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots$ med seboj neodvisne slučajne spremenljivke s enako porazdelitvijo kot X. Naj bo N Poissonova spremenljivka s parametrom λ neodvisna od vseh X_k. Izračunajte rodovno funkcijo spremenljivke $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$. Ali lahko razberete $P(Y = k)$ iz rodovne funkcije?

3. (25) Naj ima slučajna spremenljivka X gostoto

$$p_X(x) = 3\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^2$$

   za $x \geq 0$ in $\lambda > 0$.

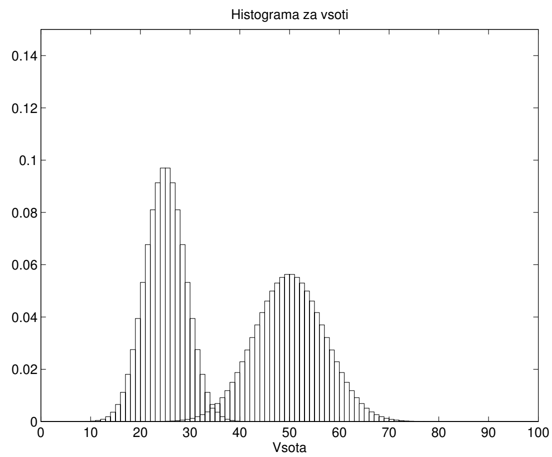
   a. (15) Izračunajte karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke X.

   b. (10) Naj bodo X_1, X_2, X_3 neodvisne eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke z $X_k \propto \text{Exp}(k\lambda)$ za $k = 1, 2, 3$. S pomočjo karakterističnih funkcij poiščite gostoto vsote $X_1 + X_2 + X_3$.

4. **4.** (25) Na spodnji sliki sta histograma za vsoti 25 neodvisnih izbiranj iz ene od naslednjih dveh škatel:

(i) $\boxed{0}\quad\boxed{1}\quad\boxed{2}$

(ii) $\boxed{0}\quad\boxed{1}\quad\boxed{2}\quad\boxed{3}\quad\boxed{4}$



Sl. 1 Histograma za vsote neodvisnih izbiranj iz škatel (i) ali (ii).

a. (10) Kateri od zgornjih dveh histogramov pripada škatli (i) in kateri škatli (ii)? Utemeljite odgovor.

b. (15) Izračunajte približno verjetnost, da bo vsota 25 izbiranj iz škatle (ii) večja ali enaka 40.

Izpit iz statistike

Praktična matematika
2. julij 1998

1. (20) Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne, enako porazdeljene eksponentne slučajne spremenljivke s parametrom $\lambda = 1$.

   a. (5) Izračunajte karakteristično funkcijo spremenljivke
   $$X = X_1 + \frac{X_2}{2} + \frac{X_3}{3} + \cdots + \frac{X_n}{n}.$$

   b. (5) Kakšna je karakteristična funkcija spremenljivke Y z gostoto
   $$p_Y(x) = ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}$$
   za $x > 0$?

   c. (10) Ali imata X in Y enako porazdelitev?

2. (20) V redni anketi *Slovensko javno mnenje* je vzorec praviloma velik $n = 2100$.

   a. (5) Privzemite najprej, da je vzorec enostavni slučajni. Oceniti želimo odstotek volilcev, ki niso zadovoljni z delom vlade. Recimo, da je v vzorcu takih 56%. Kolikšna približno je verjetnost, da je ocena prevelika za 2% ali več.

   b. (5) V resnici vzorec v *SJM* ni enostavni slučajni, ampak je vzorčni načrt bolj zapleten. Statistiki znajo oceniti standardno napako in dobijo oceno $SE = 1\dot{}5\%$. Kolikšna je zdaj verjetnost, da je ocena prevelika za 2% ali več?

   c. (10) Kako velik bi moral biti enostavni slučajni vzorec, če bi želeli, da se bo z verjetnostjo $0\dot{}95$ ocena razlikovala od pravega odstotka za manj kot za 2%? Računajte z oceno odstotka iz a.

3. (20) V raziskavi spreminjanja inteligenčnega kvocienta s starostjo so veliko skupino posameznikov testirali v 18. letu in še enkrat v 35. letu starosti. Dobili so naslednje rezultate:

18. leto:	povprečni IQ	100	std. odklon	15
35. leto:	povprečni IQ	100	std. odklon	15

   Korelacijski koeficient med spremenljivkama je bil $r = 0\dot{}80$. Obe spremenljivki sta tudi normalno porazdeljeni.

   a. (5) Ocenite povprečni IQ v 35. letu za vse posameznike, ki so imeli v 18. letu IQ enak 115.

   b. (5) Za kolikšen odstotek testiranih bi napovedali nižji percentil v 35. letu kot so ga imeli v 18. letu?

   c. (10) Kolikšen odstotek tistih, ki so v 18. letu imeli IQ enak 115, bo v 35. letu še vedno imelo nadpovprečen IQ, torej IQ nad 100?