REŠITVE KOLOKVIJEV IN IZPITOV IZ SLUČAJNIH PROCESOV 1

Finančna matematika

Zbral: Martin Raič

2020/21

Rešitve izpita iz slučajnih procesov 1 z dne 3. 6. 2021

1. a) Z indukcijo dobimo, da je proces n homogen Poissonov proces z intenzivnostjo 2^{-n}. Če torej z S_n označimo čas n-tega zaporednega prihoda v procesu D oziroma prvega prihoda v procesu n, je $S_n \sim \mathrm{Exp}\big(2^{-n}\big)$.

b) Velja:

$$\mathbb{P}(N_t \geq n) = \mathbb{P}(S_n \leq t) = 1 - e^{-2^{-n}t},$$

torej je:

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(N_t \geq n) - \mathbb{P}(N_t \geq n+1) = e^{-2^{-n-1}t} - e^{-2^{-n}t}$$

za vse $n = 0, 1, 2, \ldots$

c) Prvi prihod v procesu D ustreza prvemu prihodu v procesu 1. Če le-ta ni izbran v proces 2, je to tudi edini prihod znotraj prvega skoka. Če pa je izbran, je to tudi prvi prihod v procesu 2, torej drugi prihod v procesu 1, ki se zgodi ob istem času kot prvi prihod, torej znotraj istega skoka. Spet, če prvi prihod v procesu 2 ni izbran v proces 3, je to zadnji prihod znotraj prvega skoka v procesu D, sicer pa je to tudi prvi prihod v procesu 3, torej tretji v procesu D. Tako nadaljujemo in dobimo:

$$\mathbb{P}(N_{T_1} = n) = 2^{-n}\,; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

d) Če je prvi prihod v procesu 1 izbran v proces 2, je iskani medprihodni čas enak nič. Pogojno na to, da ta prihod ni izbran, pa je proces 2 od tam naprej homogen Poissonov proces z intenzivnostjo 1/4. Porazdelitev iskanega medprihodnega časa ima torej kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$F_{T_2}(t) = \begin{cases} 0 & ;\ t < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\,e^{-t/4} & ;\ t \geq 0\,. \end{cases}$$

2. V skladu z namigom gledamo obrnemo proces metov od trenutka t nazaj in ga gledamo kar v nedogled v preteklost. Gre torej za označen homogen Poissonov proces z intenzivnostjo λ, pri čemer se pri vsakem metu prikaže Alberta z verjetnostjo a in Beverly z verjetnostjo $1 - a$, pri čemer so izidi metov neodvisni tako med seboj kot tudi od njihovih časov. Če v intervalu od 0 do t ni bilo nobenega meta, je jasno, da Elon biva v Alberti, sicer pa Elon biva v vili, ki jo narekuje prvi met od trenutka t nazaj. Iskana verjetnost je torej enaka:

$$e^{-\lambda t} + \big(1 - e^{-\lambda t}\big)a\,.$$

3. Naj bo $t > 0$. Število prihodov v časovnem intervalu od 0 do t je porazdeljeno po Poissonu s parametrom:

$$R(t) := \int_0^t e^{-s}\,\mathrm{d}s = 1 - e^{-t}\,,$$

število prihodov od trenutka t do neskončno pa je porazdeljeno po Poissonu s parametrom:

$$S(t) := \int_t^\infty e^{-s}\,\mathrm{d}s = e^{-t}\,.$$

Nadalje izračunamo porazdelitev časa T_1. Za $t > 0$ iz:

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-R(t)} = e^{e^{-t}-1}$$

dobimo gostoto porazdelitve:

$$f_{T_1}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbb{P}(T_1 > t) = e^{e^{-t}-t-1}\,.$$

Pogojno na T_1 je proces nadaljnjih prihodov spet Poissonov proces z isto funkcijo intenzivnosti, če ne premaknemo časa (če ga merimo od T_1 naprej). Če torej z N označimo število prihodov v časovnem intervalu od $T_1 + \delta$ do neskončno, velja:

$$\mathbb{E}(N \mid T_1) = S(T_1 + \delta) = e^{-T_1-\delta}\,.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \mathbb{E}\big[e^{-T_1-\delta}\big] = \\
&= \int_0^\infty e^{e^{-t}-2t-1-\delta} = \\
&= e^{-1-\delta}\int_0^1 u\,e^u\,\mathrm{d}u = \\
&= e^{-1-\delta}\int_0^1 u\,e^u\,\mathrm{d}u = \\
&= e^{-1-\delta}\,.
\end{aligned}$$

4. To lahko gledamo kot prenovitveni proces z nagradami: osnovni prenovitveni proces je proces A, nagrada, ki pripada posameznemu medprihodemu intervalu, pa je čas čakanja. Označimo medprihodni čas z U_i, čas čakanja pa z R_i. Iz krepke lastnosti Markova, uporabljene za proces B, sledi, da je čas čakanja od posameznega prihoda v procesu A do naslednjega prihoda v procesu B porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$ in neodvisen od časa čakanja do naslednjega prihoda v procesu A. Torej ima R_1 enako porazdelitev kot $\min\{T_1, U_1\}$, kjer sta $T_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ in $U_i \sim \mathrm{Unif_c}(a, b)$ neodvisni. Izračunati moramo $\mathbb{E}(R_1) = \mathbb{E}\big[\min\{T_1, U_1\}\big]$, kar lahko storimo na vsaj dva načina.

Prvi način: s pomočjo dvorazsežne gostote. Velja:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R_1) &= \frac{\lambda}{b-a}\iint_{\substack{a<u<b\\ t>0}} \min\{t,u\}\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{\lambda}{b-a}\int_a^b \left(\int_0^u t\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t + \int_u^\infty u\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{\lambda(b-a)}\int_a^b \big(1 - e^{-\lambda u}\big)\,\mathrm{d}u = \\
&= \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}}{\lambda^2(b-a)}\,.
\end{aligned}$$

Prvi način: s pomočjo preživetvene funkcije slučajne spremenljivke R. Za $0 \le s \le a$ je:

$$\mathbb{P}(R_1 > s) = \mathbb{P}(T_1 > s) = e^{-\lambda s}\,,$$

za $a \le s \le b$ pa je:

$$\mathbb{P}(R_1 > s) = \mathbb{P}(T_1 > s, U_1 > s) = \mathbb{P}(T_1 > s)\,\mathbb{P}(U_1 > s) = e^{-\lambda s}\,\frac{b-s}{b-a}\,.$$

Torej je:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R_1) &= \int_0^b \mathbb{P}(R_1 > s)\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_0^a e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{b-a}\int_a^b (b-s)\,e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}}{\lambda^2(b-a)}\,,
\end{aligned}$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

Končno je $\mathbb{E}(U_1) = \frac{a+b}{2}$, torej je pričakovani delež časa iskanega čakanja enak:

$$\frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(U_1)} = \frac{2}{a+b}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}}{\lambda^2(b-a)}\right)\,.$$

Rešitve izpita iz slučajnih procesov 1 z dne 18. 6. 2021

1. a) Če čase prihodov kot navadno označimo z $S_1, S_2, \ldots$, je treba izračunati:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[S_1 S_2 \cdots S_{N_t}\big] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n)\,\mathbb{E}\big[S_1 S_2 \cdots S_{N_t} \bigm| N_t = n\big] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n)\,\mathbb{E}\big[S_1 S_2 \cdots S_n \bigm| N_t = n\big]\,.\end{aligned}$$

Naj bodo $U_1, U_2, \ldots$ neodvisne in porazdeljene enakomerno na intervalu $[0, t]$. Po lastnosti vrstilnih statistik je:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[S_1 S_2 \cdots S_{N_t}\big] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n)\,\mathbb{E}(U_1 U_2 \cdots U_n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \left(\frac{t}{2}\right)^n = \\ &= e^{\lambda t^2/2 - \lambda t}\,.\end{aligned}$$

b) Pričakovana vrednost je najmanjša pri $t = 1$ (neodvisno od λ). Izračunajmo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(S_1 S_2 \cdots S_{N_t})^2\big] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n)\,\mathbb{E}\big[(S_1 S_2 \cdots S_n)^2 \bigm| N_t = n\big] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n)\,\mathbb{E}\big[U_1^2 U_2^2 \cdots U_n^2\big] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \left(\frac{t^2}{3}\right)^n = \\ &= e^{\lambda t^3/3 - \lambda t}\,.\end{aligned}$$

Sledi:

$$\operatorname{var}(S_1 S_2 \cdots S_{N_t}) = e^{\lambda t^3/3 - \lambda t} - e^{\lambda t^2 - 2\lambda t} = e^{-2\lambda/3} - e^{-\lambda}\,.$$

2. a) Označimo z A dogodek, da je ribič ujel vsaj eno ribo in da je bila prva ujeta riba klen. Nadalje naj bo N_t število vseh ujetih rib. Velja $\mathbb{P}(A \mid N_t = 0) = 0$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ pa velja $\mathbb{P}(A \mid N_t = n) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$. Torej je:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\,\mathbb{P}(N_t > 0) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\big(1 - e^{-(\lambda + \mu)t}\big)\,.$$

b) Označimo z B dogodek, da je ribič ujel vsaj eno ribo, zadnja ujeta riba pa je bila klen. Velja $\mathbb{P}(A \cap B \mid N_t = 0) = 0$, $\mathbb{P}(A \cap B \mid N_t = 1) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$, za $n = 2, 3, 4, \ldots$ pa velja $\mathbb{P}(A \cap B \mid N_t = n) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2$. Torej je:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,\mathbb{P}(N_t = 1) + \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2 \mathbb{P}(N_t > 1) =$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,(\lambda+\mu)t\,e^{-(\lambda+\mu)t} + \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2 \Big(1 - \big(1 + (\lambda+\mu)t\big)\,e^{-(\lambda+\mu)t}\Big) =$$
$$= \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} + \left(\frac{\lambda\mu t}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}\right) e^{-(\lambda+\mu)t}\,,$$

iskana pogojna verjetnost pa je:

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\lambda + \big(\mu(\lambda+\mu)t - \lambda\big)\,e^{-(\lambda+\mu)t}}{(\lambda+\mu)\big(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\big)}\,.$$

3. a) Označimo z N_t število zamudnikov, ki pridejo do vključno časa t. Velja $N_t \sim \mathrm{Pois}\big(R(t)\big)$, kjer je:

$$R(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{1 + 2\,e^s} = \ln \frac{3\,e^t}{1 + 2\,e^t}\,.$$

Definicijo lahko razširimo na $t = \infty$: N_∞ je število vseh zamudnikov, ki kdaj koli pridejo, in velja $N_\infty \sim \mathrm{Pois}\big(\ln \frac{3}{2}\big)$.

Dogodek, da je prišel vsaj en zamudnik, je dogodek $\{N_\infty \geq 1\}$ in velja:

$$\mathbb{P}(N_\infty \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(N_\infty = 0) = 1 - e^{-\ln(3/2)} = \frac{1}{3}\,.$$

b) Označimo z Z čas prihoda zadnjega zamudnika in začnimo računati pogojno kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$F_{Z \mid N_\infty \geq 1}(t) = \mathbb{P}(Z \leq t \mid N_\infty \geq 1)$$

Velja $\{Z \leq t\} = \{N_\infty - N_t = 0\}$. Slučajna spremenljivka $N_\infty - N_t$ je namreč enaka številu zamudnikov, ki pridejo po času t. Je neodvisna od N_t in velja:

$$N_\infty - N_t \sim \mathrm{Pois}\big(R(\infty) - R(t)\big) = \mathrm{Pois}\left(\ln\left(1 + \frac{e^{-t}}{2}\right)\right)\,.$$

Sedaj nadaljujmo z računanjem pogojne kumulativne porazdelitvene funkcije:

$$F_{Z \mid N_\infty \geq 1}(t) = \mathbb{P}(N_\infty - N_t = 0 \mid N_\infty \geq 1) =$$
$$= \frac{\mathbb{P}(N_\infty - N_t = 0, N_\infty \geq 1)}{\mathbb{P}(N_\infty \geq 1)} =$$
$$= \frac{\mathbb{P}(N_\infty - N_t = 0, N_t \geq 1)}{\mathbb{P}(N_\infty \geq 1)} =$$
$$= \frac{\mathbb{P}(N_\infty - N_t = 0)\,\mathbb{P}(N_t \geq 1)}{\mathbb{P}(N_\infty \geq 1)} =$$
$$= 3\exp\left(-\ln\left(1 + \frac{e^{-t}}{2}\right)\right)\left[1 - \exp\left(-\ln \frac{3\,e^t}{1 + 2\,e^t}\right)\right] =$$
$$= \frac{2(e^t - 1)}{2\,e^t + 1}\,,$$

iz katere dobimo še pogojno funkcijo preživetja:

$$\mathbb{P}(Z > t \mid N_\infty \geq 1) = 1 - F_{Z|N_\infty \geq 1}(t) = \frac{3}{1 + 2\,e^t}\,.$$

Pogojna pričakovana vrednost je potem enaka:

$$\mathbb{E}(Z \mid N_\infty \geq 1) = \int_0^\infty \frac{3\,\mathrm{d}t}{1 + 2\,e^t} = -\ln\bigl(2 + e^{-t}\bigr)\Big|_0^\infty = \ln\frac{3}{2}\,.$$

4. Sprejeti klici tvorijo prenovitveni proces z medprihodnimi časi, katerih porazdelitev je mešanica eksponentne porazdelitve $\mathrm{Exp}(\lambda)$ in porazdelitve $\mathrm{Gama}(2, \lambda)$, pri čemer ima vsaka delež $1/2$. Laplace–Stieltjesova transformiranka medprihodnega časa je torej:

$$\hat{F}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{z + \lambda} + \frac{\lambda^2}{(z + \lambda)^2}\right)\,,$$

Laplace–Stieltjesova transformiranka prenovitvene mere pa je:

$$\hat{M}(z) = \frac{\hat{F}(z)}{1 - \hat{F}(z)} = \frac{\lambda z + 2\lambda^2}{2z^2 + 3\lambda z} = \frac{2\lambda}{3z} - \frac{\lambda}{6z + 3\lambda}\,,$$

iskana prenovitvena mera pa je:

$$M(t) = \mathbb{E}(N_t) = \frac{2\lambda t}{3} - \frac{\lambda}{6}\int_0^t e^{-3\lambda s/2}\,\mathrm{d}s = \frac{2\lambda t}{3} - \frac{1 - e^{-3\lambda t/2}}{9}\,.$$

2013/14

Rešitve kolokvija iz Slučajnih procesov 1 z dne 3. 4. 2014

Finančna matematika

1. Naj bo S_n Tonetovo premoženje v evrih po n-tem metu. Pišemo lahko $S_n = 7 + X_1 + X_2 + \cdots X_n$, kjer je X_k znesek, ki ga je po k-tem metu Tine plačal Tonetu. Naj bo T met, po katerem eden igralcev ostane brez denarja. Velja $S_T = 0$ ali $S_T = 12$, zanima pa nas $\mathbb{P}(S_T = 12)$.

Ker je $X_k \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$, je $\mathbb{E}(X_k) = 0$. Nadalje je T čas ustavljanja. Po Waldovi identiteti je $\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_T) = 0$, torej $\mathbb{E}(S_T) = 7$ (to sicer sledi tudi iz opažanja, da je S_n martingal). Po drugi strani pa je $\mathbb{E}(S_T) = 12\,\mathbb{P}(S_T = 12)$, torej je verjetnost, da na koncu Tone dobi vse, enaka $7/12$.

2. a) Označimo s T čas, ki mine od klica učiteljice do prihoda prvega učenca, z N pa število učencev, ki slišijo učiteljico. Za $n = 1, 2, 3, \ldots$ se na dogodku $\{N = n\}$ dogodek $\{T > t\}$ ujema z dogodkom, da do časa t še ni prišel nobeden od n učencev, ki so slišali učiteljico. Torej za $t \geq 0$ velja $\mathbb{P}(T > t \mid N = n) = 1/(1+t)^n$. Po izreku o polni verjetnosti je:

$$\mathbb{P}(T > t) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \cdot \frac{1}{(1+t)^n} = \frac{p}{p+t}\,.$$

medtem ko za $t > 0$ seveda velja $\mathbb{P}(T > t) = 1$. S tem je že natančno opisana porazdelitev slučajne spremenljivke T, lahko pa zapišemo tudi kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq 0 \\ 1 - \frac{p}{p+t} & ; t \geq 0 \end{cases}$$

in gostoto porazdelitve:

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ \frac{p}{(p+t)^2} & ; t > 0 \end{cases}$$

b) Najprej izračunamo:

$$\mathbb{P}(T > t \mid N \geq 2) = \frac{1}{\mathbb{P}(N \geq 2)} \sum_{n=2}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \frac{1}{(1+t)^n} = \frac{p}{(1+t)(p+t)}\,.$$

Ustrezno pogojno matematično upanje najlažje izračunamo z integracijo zgornjega izraza – pogojne preživetvene funkcije):

$$\mathbb{E}(T \mid N \geq 2) = \int_0^{\infty} \frac{p}{(1+t)(p+t)}\,\mathrm{d}t = -\frac{p \ln p}{1-p}\,.$$

3. Za $k = 1, 2, 3, \dots$ velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_t = k) &= \mathbb{P}(N_t \geq k) - \mathbb{P}(N_t \geq k+1) = \\ &= \mathbb{P}(S_k \leq t) - \mathbb{P}(S_{k+1} \leq t) = \\ &= \mathbb{P}(S_{k+1} > t) - \mathbb{P}(S_k > t) = \\ &= e^{-t/(k+1)} - e^{-t/k}\,,\end{aligned}$$

medtem ko za $k = 0$ velja:

$$\mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(S_1 > t) = e^{-t}\,.$$

4. Če je X višina nagrade, velja:

$$X = \begin{cases} ct & ;\ N_t \leq 1 \\ 0 & ;\ N_t \geq 2 \end{cases}\,.$$

kjer je N_t število zvonjenj do časa t, $c > 0$ pa neka konstanta. Ker je $N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$, velja:

$$\mathbb{E}(X) = ct(1 + \lambda t)e^{-\lambda t}\,,$$

kar je maksimalno pri $t = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2\lambda}$.

Rešitve kolokvija iz Slučajnih procesov 1 z dne 17. 6. 2014

Finančna matematika

1. *Prvi način.* Označimo s T_{G} čas, ob katerem pade prvi grb, z A pa dogodek, da dve časovni enoti ali manj pred prvim grbom ni bilo nobene cifre. Če je $T_{\mathrm{G}} < 2$, je obdobje, v katerem ni smelo biti nobene cifre, dolgo T_{G} časovnih enot, sicer pa je dolgo dve časovni enoti. Glede na to, da je meti cifer tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$, velja:

$$\mathbb{P}(A \mid T_{\mathrm{G}}) = \begin{cases} e^{-T_{\mathrm{G}}/10} & ; T_{\mathrm{G}} < 2 \\ e^{-1/5} & ; T_{\mathrm{G}} \geq 2 \end{cases} .$$

Meti grbov pa tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{30}$, torej je čas meta prvega grba porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(7/30)$. Sledi:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{7}{30} \left[\int_0^2 e^{-t/10} e^{-7t/30} \, \mathrm{d}t + \int_2^\infty e^{-7t/30} \, \mathrm{d}t \right] = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} e^{-2/3} \doteq 0{\cdot}854 .$$

Drugi način. Naj bosta T_{G} in A tako kot pri prvem načinu. Dogodek $A \cap \{T_{\mathrm{G}} < 2\}$ sovpada z dogodkom, da kovanec prvič vržemo prej kot dve časovni enoti od začetka in da pri tem vržemo grb. Torej je:

$$\mathbb{P}\bigl(A \cap \{T_{\mathrm{G}} < 2\}\bigr) = \frac{7}{10}\bigl(1 - e^{-1/3}\bigr) .$$

Nadalje, ker za $T_{\mathrm{G}} \geq 2$ velja $\mathbb{P}(A \mid T_{\mathrm{G}}) = e^{-1/5}$, je tudi $\mathbb{P}(A \mid T_{\mathrm{G}} \geq 2) = e^{-1/5}$. Sledi:

$$\mathbb{P}\bigl(A \cap \{T_{\mathrm{G}} \geq 2\}\bigr) = \mathbb{P}(T_{\mathrm{G}} \geq 2) \, \mathbb{P}(A \mid T_{\mathrm{G}} \geq 2) = e^{-2\cdot(1/3)\cdot(7/10)} \, e^{-1/5} = e^{-2/3} .$$

Ko seštejemo, dobimo $\mathbb{P}(A) = \dfrac{7}{10} + \dfrac{3}{10} e^{-2/3}$, kar je enako kot prej.

2. *Prvi način.* Če z $S_1, S_2, \ldots$ označimo čase zaporednih prihodov potnikov in z N število potnikov, ki pridejo do odhoda vlaka, lahko pišemo:

$$W = (t - S_1) + (t - S_2) + \cdots + (t - S_N) = N - S_1 - S_2 - \cdots - S_N .$$

Pogojna porazdelitev vsote $S_1 + \cdots + S_N$ glede na $N = n$ pa se ujema z brezpogojno porazdelitvijo vsote $U_1 + \cdots + U_n$, kjer so $U_1, \ldots U_n$ neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene zvezno z gostoto, ki je za $0 \leq t \leq 1$ enaka:

$$f(t) := \frac{t}{\int_0^1 s \, \mathrm{d}s} = 2t .$$

To pomeni, da lahko slučajne spremenljivke $S_1, S_2, \ldots$ zamenjamo s slučajnimi spremenljivkami $U_1, U_2, \ldots$, ki so porazdeljene zvezno z gostoto f in neodvisne tako med seboj kot tudi od N. Dobimo:

$$\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}\bigl(N - U_1 - U_2 - \cdots - U_N\bigr) .$$

Po Waldovi identiteti je:

$$\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(N) - \mathbb{E}(U_1)\,\mathbb{E}(N)\,.$$

Velja:

$$\mathbb{E}(N) = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,, \qquad \mathbb{E}(U_1) = 2\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\,,$$

torej je $\mathbb{E}(W) = \dfrac{1}{6}$.

Drugi način. Če z N_t označimo število prihodov potnikov do časa t, opazimo, da je $W = \displaystyle\int_0^1 N_t\,\mathrm{d}t$. Sledi:

$$\mathbb{E}(W) = \int_0^1 \mathbb{E}(N_t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \int_0^t s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\,.$$

3. Oglejmo si prenovitveni proces z nagradami, pri katerem so časi prihodov trenutki, ko posamezno vozilo *do konca prevozi most*. Medprihodni čas T_n je tedaj vsota $2 + U_n$, kjer je $U_n \sim \mathrm{Exp}(1/3)$. Če je $n = 1$ ali $T_n > 4$, je v celotnem n-tem medprihodnem intervalu na mostu kvečjemu eno vozilo. Če pa je $n > 1$ ali $T_n \le 4$, sta v okviru tega medprihodnega intervala $4 - T_n$ dolgo na mostu dve vozili (da sta več kot dve, se zgodi z verjetnostjo nič). Torej n-temu medprihodnemu intervalu priredimo nagrado R_n, ki je enaka $4 - T_n$, če je $T_n \le 4$, sicer pa naj bo $R_n = 0$.

Označimo z D_t skupni čas do trenutka t, ko sta na mostu dve vozili. Skupna količina nagrad, ki pridejo do časa t, pa je enaka $W_t := D_t + (4 - T_1)\,\mathbb{1}(T_1 \le 4)$ (pri prvem medprihodnem času se ne ujema). Glede dolgoročnega deleža časa je vseeno, ali vzamemo W_t ali D_t, zato je želeni delež po krepkem zakonu velikih števil enak:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D_t}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = \frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)}\,.$$

Velja $\mathbb{E}(T_1) = 2 + \mathbb{E}(U_1) = 5$ in:

$$\mathbb{E}(R_1) = \mathbb{E}\big[(2 - U_1)\,\mathbb{1}(U_1 \le 2)\big] = \frac{1}{3}\int_0^2 (2 - u)e^{-u/3}\,\mathrm{d}u = 3\,e^{-2/3} - 1\,.$$

Sledi:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D_t}{t} = \frac{3\,e^{-2/3} - 1}{5} \doteq 0\text{'}1081\,.$$

4. a) Laplaceova transformiranka medprihodne porazdelitve je:

$$\hat{F}(z) = p + \frac{(1-p)\lambda}{\lambda + z}\,,$$

Laplace–Stieltjesova transformiranka prenovitvene mere pa je:

$$\hat{M}(z) = \frac{p}{1-p} + \frac{\lambda}{(1-p)z}\,.$$

Torej je prenovitvena mera enaka:

$$M(t) = \frac{p}{1-p} + \frac{\lambda}{1-p}\, t\,.$$

b) *Prvi način.* Izračunati je potrebno:

$$\mathbb{E}\big[\min\{T_2, t\}\big] = (1-p)\lambda \left[\int_0^t s\, e^{-\lambda s}\, \mathrm{d}s + \int_t^\infty t\, e^{-\lambda s}\, \mathrm{d}s\right] = \frac{1-p}{\lambda}\big(1 - e^{-\lambda t}\big)$$

ali tudi:

$$\mathbb{E}\big[\min\{T_2, t\}\big] = \int_0^t \mathbb{P}(T_2 > s)\, \mathrm{d}s = (1-p) \int_0^t e^{-\lambda s}\, \mathrm{d}s = \frac{1-p}{\lambda}\big(1 - e^{-\lambda t}\big)$$

(od koder dobimo že znano dejstvo, da je $\mathbb{E}(T_2) = (1-p)/\lambda$). Kumulativna porazdelitvena funkcija novega prvega medprihodnega časa je torej enaka:

$$G(t) = \frac{\mathbb{E}\big[\min\{T_2, t\}\big]}{\mathbb{E}(T_2)} = 1 - e^{-\lambda t}\,,$$

kar pomeni, da je prvi medprihodni čas porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

Drugi način. Če je proces stacionaren, velja:

$$M(t) = \frac{t}{\mathbb{E}(T_2)} \qquad \text{oziroma} \qquad \hat{M}(z) = \frac{1}{z\, \mathbb{E}(T_2)} = \frac{\lambda}{(1-p)z}\,.$$

Če torej z G označimo kumulativno porazdelitveno funkcijo prvega medprihodnega časa, mora veljati:

$$\frac{\hat{G}(z)}{1 - \hat{F}(z)} = \frac{\lambda}{(1-p)z}$$

oziroma:

$$\hat{G}(z) = \frac{\lambda\big(1 - \hat{F}(z)\big)}{(1-p)z} = \frac{\lambda}{\lambda + z}\,,$$

kar pomeni, da je prvi medprihodni čas porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 27. 6. 2014

Finančna matematika

1. Če z S_2 označimo čas drugega prihoda in z N_t število prihodov do časa t, je najlažje izračunati:

$$\mathbb{E}(S_2) = \int_0^\infty \mathbb{P}(S_2 > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathbb{P}(N_t < 2)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty (1+t)\,h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \\ = \frac{\pi}{2}\,.$$

2. Označimo:

- z N_t število rib, z $N_t^{(\mathrm{K})}$ pa število krapov, ki jih je Mirko ujel do časa t;
- z $S_n^{(\mathrm{K})}$ čas, ko je Mirko ujel n-tega krapa.

Izračunati je potrebno:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{K})} \mid N_1 = 2\big) = \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{K})} = 0 \mid N_1 = 2\big)\,\mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{K})} \mid N_1 = 2, N_1^{(\mathrm{K})} = 0\big) + \\ + \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{K})} = 1 \mid N_1 = 2\big)\,\mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{K})} \mid N_1 = 2, N_1^{(\mathrm{K})} = 1\big) + \\ + \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{K})} = 2 \mid N_1 = 2\big)\,\mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{K})} \mid N_1 = 2, N_1^{(\mathrm{K})} = 2\big)\,.\end{aligned}$$

Ker je vsaka ujeta riba krap z verjetnostjo $1/4$ in postrv z verjetnostjo $3/4$ ter ker so vrste ujetih rib neodvisne, za $k = 0, 1, 2$ velja:

$$\mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{K})} = k \mid N_1 = 2\big) = \binom{2}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{2-k},$$

torej:

$$\mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{K})} = 0 \mid N_1 = 2\big) = \frac{9}{16}\,, \quad \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{K})} = 1 \mid N_1 = 2\big) = \frac{3}{8}\,, \\ \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{K})} = 2 \mid N_1 = 2\big) = \frac{1}{16}\,.$$

Če je $N_1^{(\mathrm{K})} = k \in \{0, 1\}$, je Mirko drugega krapa zagotovo ujel po času 1, torej se čas, ko je ujel drugega krapa, ujema s časom, ko je ujel $(2-k)$-tega krapa po času 1, merjeno od začetka. Ker je dogajanje po času 1 neodvisno od dogodka $\big\{N_1 = 2, N_1^{(\mathrm{K})} = k\big\}$ (saj slednji zadeva le dogajanje pred časom 1), je:

$$\mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{K})} \mid N_1 = 2, N_1^{(\mathrm{K})} = k\big) = 1 + \frac{2-k}{2}\,.$$

Pogojno na dogodek $\big\{N_1 = 2, N_1^{(\mathrm{K})} = 2\big\}$ (ki je dogodek, da je Mirko do časa 1 ujel nič postrvi in natanko dva krapa) pa je čas $S_2^{(\mathrm{K})}$ porazdeljen enako kot druga vrstilna statistika, t. j. maksimum dveh neodvisnih slučajnih spremenljivk, ki sta porazdeljeni enakomerno na intervalu od 0 do 1. Ta maksimum ima kumulativno porazdelitveno funkcijo $F(t) = t^2$, gostoto $f(t) = 2t$ (za $0 \le t \le 1$) in pričakovano vrednost $\int_0^1 2t^2 \,\mathrm{d}t = 2/3$. Izpeljali smo:

$$\mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{K})} \mid N_1 = 2, N_1^{(\mathrm{K})} = 0\big) = 2\,, \quad \mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{K})} \mid N_1 = 2, N_1^{(\mathrm{K})} = 0\big) = \frac{3}{2}\,,$$
$$\mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{K})} \mid N_1 = 2, N_1^{(\mathrm{K})} = 0\big) = \frac{2}{3}\,.$$

Sledi:

$$\mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{K})} \mid N_1 = 2\big) = \frac{9}{16} \cdot 2 + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{3} = \frac{83}{48}$$

oziroma 1 uro, 43 minut in 45 sekund.

3. Kot ponavadi z S_1 označimo čas prvega, z S_2 pa čas drugega prihoda. Izračunati je potrebno $\mathbb{E}(S_1 \mid S_2 > 2)$.

Prvi način. Pogojno na S_2 je S_1 porazdeljen zvezno z gostoto:

$$t \mapsto \frac{\rho(t)}{\int_0^{S_2} \rho(t)\,\mathrm{d}t} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+t)\ln(1+S_2)} & ;\ 0 < t < S_2 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}\,.$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(S_1 \mid S_2) = \frac{1}{\ln(1+S_2)} \int_0^{S_2} \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{S_2}{\ln(1+S_2)} - 1\,.$$

Za izračun želenega potrebujemo še porazdelitev slučajne spremevljivke S_2. Le-ta ima kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$F_{S_2}(t) = \mathbb{P}(S_2 \le t) = \mathbb{P}(N_t \ge 2) = 1 - \mathbb{P}(N_t < 2)\,,$$

kjer je N_t število prihodov do časa t. Le-to je porazdeljeno po Poissonu s parametrom:

$$\int_0^t \frac{2}{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\ln(1+t)\,,$$

torej je:

$$F_{S_2}(t) = 1 - \big(1 + 2\ln(1+t)\big)e^{-2\ln(1+t)} = 1 - \frac{1 + 2\ln(1+t)}{(1+t)^2}\,,$$

Od tod že sledi:

$$\mathbb{P}(S_2 > 2) = 1 - F_{S_2}(2) = \frac{1 + 2\ln 3}{9}\,.$$

Potrebujemo še gostoto:

$$f_{S_2}(t) = \frac{4\ln(1+t)}{(1+t)^3}\,.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[S_1\,\mathbb{1}(S_2>2)\big] &= \int_2^\infty \left(\frac{t}{\ln(1+t)}-1\right)\frac{4\ln(1+t)}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t = \\ &= \left(-\frac{4}{1+t}+\frac{3+2\ln(1+t)}{(1+t)^2}\right)\Bigg|_2^\infty = \\ &= 1-\frac{2\ln 3}{9}\,.\end{aligned}$$

Končno je:

$$\mathbb{E}(S_2 \mid S_2>2) = \frac{\mathbb{E}\big[S_1\,\mathbb{1}(S_2>2)\big]}{\mathbb{P}(S_2>2)} = \frac{9-2\ln 3}{1+2\ln 3} \doteq 2{\cdot}13\,.$$

Drugi način. Velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_1 \mid S_2>2) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(S_1>t \mid S_2>2)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N_t<1 \mid N_2<2)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(N_t=0 \mid N_2<2)\,\mathrm{d}t\,,\end{aligned}$$

kjer je N_t število prihodov do časa t. Za $s \le t$ ima slučajna spremenljivka $N_t - N_s$ Poissonovo porazdelitev s parametrom:

$$\int_s^t \frac{2}{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\big(\ln(1+t)-\ln(1+s)\big)\,.$$

Torej je:

$$\mathbb{P}(N_2<2) = (1+2\ln 3)e^{-2\ln 3} = \frac{1+2\ln 3}{9}\,.$$

Za $t \le 2$ velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_t=0, N_2<2) &= \mathbb{P}(N_t=0)\,\mathbb{P}(N_2-N_t<2) = \\ &= e^{-2\ln(1+t)}\Big[1+2\big(\ln 3-\ln(1+t)\big)\Big]e^{-2(\ln 3-\ln(1+t))} = \\ &= \frac{1+2\big(\ln 3-\ln(1+t)\big)}{9}\end{aligned}$$

in posledično:

$$\mathbb{P}(N_t=0 \mid N_2<2) = \frac{1+2\big(\ln 3-\ln(1+t)\big)}{1+2\ln 3}\,,$$

medtem ko za $t \ge 2$ velja:

$$\mathbb{P}(N_t=0, N_2<2) = \mathbb{P}(N_t=0) = e^{-2\ln(1+t)} = \frac{1}{(1+t)^2}$$

in posledično:

$$\mathbb{P}(N_t = 0 \mid N_2 < 2) = \frac{9}{1 + 2\ln 3}\,\frac{1}{(1+t)^2}\,.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_1 \mid S_2 > 2) &= \frac{1}{1+2\ln 3}\left[\int_0^2 \Big[1 + 2\big(\ln 3 - \ln(1+t)\big)\Big]\,\mathrm{d}t + 9\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}\right] = \\ &= \frac{9 - 2\ln 3}{1 + 2\ln 3}\,.\end{aligned}$$

Tretji način. Pišimo $\{S_2 > 2\} = \{N_2 < 2\} = \{N_2 = 0\} \cup \{N_2 = 1\}$, kjer je N_t število prihodov do časa t. Sledi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_1 \mid S_2 > 2) = \mathbb{P}(N_2 = 0 \mid N_2 < 2)\,\mathbb{E}(S_1 \mid N_2 = 0) &+ \\ + \mathbb{P}(N_2 = 1 \mid N_2 < 2)\,\mathbb{E}(S_1 \mid N_2 = 1)&\,.\end{aligned}$$

Podobno kot pri prvem načinu vidimo, da je N_2 porazdeljena po Poissonu $\mathrm{Pois}\big(2\ln(1+t)\big)$, torej je:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_2 = 0) &= \frac{1}{9}\,, & \mathbb{P}(N_2 = 1) &= \frac{2\ln 3}{9}\,, \\ \mathbb{P}(N_2 = 0 \mid N_2 < 2) &= \frac{1}{1+2\ln 3}\,, & \mathbb{P}(N_2 = 1 \mid N_2 < 2) &= \frac{2\ln 3}{1 + 2\ln 3}\,.\end{aligned}$$

Pogojno na $N_2 = 0$ ima naš proces intenziteto:

$$t \mapsto \begin{cases} 0 & ;\ t \le 2 \\ \dfrac{2}{1+t} & ;\ t > 2 \end{cases}\,,$$

torej je za $t > 2$ slučajna spremenljivka N_t porazdeljena po Poissonu s parametrom:

$$\int_2^t \frac{2}{1+s}\,\mathrm{d}s = 2\big(\ln(1+t) - \ln 3\big)$$

in velja:

$$\mathbb{P}(S_1 > t \mid N_2 = 0) = \mathbb{P}(N_t = 0 \mid N_2 = 0) = \frac{9}{(1+t)^2}\,,$$

za $t \le 2$ pa je seveda $\mathbb{P}(S_2 > t \mid N_2 = 0) = 1$. Torej je:

$$\mathbb{E}(S_1 \mid N_2 = 0) = \int_0^\infty \mathbb{P}(S_2 > t \mid N_2 = 0)\,\mathrm{d}t = 2 + \int_2^\infty \frac{9}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 5\,.$$

Pogojno na $N_2 = 1$ pa je S_1 porazdeljena zvezno z gostoto:

$$t \mapsto \frac{\rho(t)}{\int_0^2 \rho(t)\,\mathrm{d}t} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+t)\ln 3} & ;\ 0 < t < 2 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}\,,$$

zato je:

$$\mathbb{E}(S_1 \mid N_2 = 1) = \int_0^2 \frac{t}{(1+t)\ln 3}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\ln 3} - 1\,.$$

Ko zberemo vse skupaj, dobimo:

$$\mathbb{E}(S_1 \mid S_2 > 2) = \frac{1}{1+2\ln 3} \cdot 5 + \frac{2\ln 3}{1+2\ln 3}\left(\frac{2}{\ln 3} - 1\right) = \frac{9-2\ln 3}{1+2\ln 3}\,.$$

4. Gre za prenovitveni proces z zaostankom. Prvi prihod je porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(1)$, vsi nadaljnji pa imajo porazdelitev $\mathrm{Gama}(2,2)$. Laplaceovi transformiranki porazdelitev sta:

$$\hat{G}(z) = \frac{1}{1+z}\,, \qquad \hat{F}(z) = \left(\frac{2}{2+z}\right)^2\,.$$

Izračunati je potrebno prenovitveno mero tega procesa. Njena Laplace–Stieltjesova transformiranka je enaka:

$$\hat{M}(z) = \frac{\hat{G}(z)}{1-F(z)} = \frac{(z+2)^2}{z(z+1)(z+4)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3(z+1)} + \frac{1}{3(z+4)}\,.$$

Iskano pričakovano število je torej enako:

$$M(t) = t - \frac{1-e^{-t}}{3} + \frac{1-e^{-4t}}{12} = t - \frac{1}{4} + \frac{e^{-t}}{3} - \frac{e^{-4t}}{12}\,.$$

Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 27. 8. 2014

Finančna matematika

1. Posamezen tovornjak, ki zapelje čez most v prvi smeri, bo srečal vse tovornjake iz druge smeri, ki so bodisi na mostu bodisi jim do mostu manjka še 1 minuta. To so torej tovorljaki, ki bodo začetek mostu prevozili v časovnem razponu 2 minut. Njihovo pričakovano število je 2/3.

Število vseh srečanj lahko zapišemo kot vsoto $X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, kjer je N število tovornjakov, ki iz prve smeri v predpisanem časovnem okviru zapeljejo na most, X_i pa je število tovornjakov, ki jih sreča i-ti tovornjak. Te slučajne spremenljivke so neodvisne, N pa je čas ustavljanja, zato velja Waldova identiteta. Ker je $\mathbb{E}(N) = 60/5 = 12$, je pričakovano število vseh srečanj enako 8.

2. Označimo z S_n čas n-tega klica, z $S_n^{(\mathrm{D})}$ čas n-tega domačega, z $S_n^{(\mathrm{T})}$ pa čas n-tega tujega klica. Nadalje z N_t označimo število klicev do časa t, z $N_t^{(\mathrm{D})}$ število domačih klicev do časa t, z $N_t^{(\mathrm{T})}$ pa število tujih klicev do časa t. Izračunati moramo:

$$\mathbb{E}\big(S_2 \mid N_1^{(\mathrm{T})} = 1\big) = \int_0^\infty \mathbb{P}\big(S_2 > t \mid N_1^{(\mathrm{T})} = 1\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Izrazimo dogodek $\{S_2 > t\}$ z dogodki, ki se bodisi nanašajo le na tuje klice do časa 1 bodisi so od njih neodvisni. Opazimo naslednje:

- Za $t < S_1^{(\mathrm{T})}$ je $S_2 > t$ ekvivalentno $N_t^{(\mathrm{D})} < 2$.
- Za $S_1^{(\mathrm{T})} \le t < 1$ je $S_2 > t$ ekvivalentno $N_t^{(\mathrm{D})} = 0$.
- Za $t \ge 1$ je $S_2 > t$ ekvivalentno $N_1^{(\mathrm{D})} = 0,\ N_t - N_1 = 0$.

Za $t < 1$ torej velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(S_2 > t \mid N_t^{(\mathrm{T})} = 1\big) = \mathbb{P}\big(S_1^{(\mathrm{T})} > t \mid N_t^{(\mathrm{T})} = 1\big)\,\mathbb{P}\big(N_t^{(\mathrm{D})} < 2\big) &+ \\ + \mathbb{P}\big(S_1^{(\mathrm{T})} \le t \mid N_t^{(\mathrm{T})} = 1\big)\,\mathbb{P}\big(N_t^{(\mathrm{D})} = 0\big)&\end{aligned}$$

Upoštevamo, da je slučajna spremenljivka $S_1^{(\mathrm{T})}$ pogojno na $\{N_t^{(\mathrm{T})} = 1\}$ porazdeljena enakomerno na intervalu od 0 do 1. Sledi:

$$\mathbb{P}\big(S_2 > t \mid N_t^{(\mathrm{T})} = 1\big) = (1-t)(1+4t)\,e^{-4t} + t\,e^{-4t} = (1 + 4t - 4t^2)\,e^{-4t}\,.$$

Za $t \ge 1$ pa velja:

$$\mathbb{P}\big(S_2 > t \mid N_t^{(\mathrm{T})} = 1\big) = \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{D})} = 0,\ N_t - N_1 = 0\big) = e^{-4}\,e^{-5(t-1)} = e^{1-5t}\,.$$

Končno dobimo:

$$\mathbb{E}\big(S_2 \mid N_1^{(\mathrm{T})} = 1\big) = \int_0^1 (1 + 4t - 4t^2)\,e^{-4t}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty e^{1-5t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8} + \frac{13}{40}\,e^{-4}\,.$$

oziroma približno 23 minut.

3. Pogojno na dogodek, da je bilo do časa 1 natanko n prihodov, se porazdelitev množice le-teh ujema s porazdelitvijo množice n neodvisnih slučajnih spremenljivk, porazdeljenih zvezno z gostoto:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}\, t^2\, e^{-t} & ; 0 < t < 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} ,$$

kjer je $a = \int_0^1 t^2\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$. Šok, ki ga povzroči prihod ob času T, ima učinek e^{T-1}. Pričakovani učinek šoka, ki ga povzroči prihod ob slučajnem času z gostoto f, pa je enak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{t-1} f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{a} \int_0^1 t^2\, e^{-1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{3ae} ,$$

kar pomeni, da je pričakovani skupni učinek šokov, ki ga povzročijo prihodi v našem procesu do časa 1 pogojno na to, da jih je bilo do tedaj natanko n, enak $n/(3ae)$. Ker je pričakovano število prihodov do časa 1 enako a, je brezpogojni pričakovani skupni učinek šokov enak $1/(3e)$.

4. Proces bo stacionaren natanko tedaj, ko bo kumulativna porazdelitvena funkcija časa T_1 za $t \geq 0$ enaka:

$$G(t) = \frac{\mathbb{E}\big[\min\{T_2, t\}\big]}{\mathbb{E}(T_2)}$$

(in seveda $G(t) = 0$ za $t < 0$). Za $t \leq 1$ je kar $\min\{T_2, t\} = t$, medtem ko za $t > 1$ velja:

$$\mathbb{E}\big[\min\{T_2, t\}\big] = \int_1^t s\, \frac{2}{s^3}\, \mathrm{d}s + \int_t^\infty t\, \frac{2}{s^3}\, \mathrm{d}s = 2 - \frac{1}{t} .$$

Mimogrede smo dobili še $\mathbb{E}(T_2) = 2$. Sledi:

$$G(t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq 0 \\ \frac{t}{2} & ; 0 \leq t \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2t} & ; t \geq 1 \end{cases} .$$

Torej je čas prvega prihoda porazdeljen zvezno z gostoto:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ \frac{1}{2} & ; 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2t^2} & ; t > 1 \end{cases} .$$

Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 8. 9. 2014

Finančna matematika

1. Naj bodo $T_1, T_2, \ldots$ časi trajanja žarnic, S pa čas od začetka do trenutka, ko Stanko kupi sijalko.

Prvi način. Če je $T_1 < a$, je $S = a$, sicer pa je slučajna spremenljivka $S - T_1$ pogojno na T_1 porazdeljena enako kot S. Sledi $\mathbb{E}(S \mid T_1 < a) = a$ in $\mathbb{E}(S \mid T_1 \geq a) = \mathbb{E}(T_1 \mid T_1 \geq a) + \mathbb{E}(S)$. Zaradi pozabljivosti eksponentne porazdelitve pa je $\mathbb{E}(T_1 \mid T_1 \geq a) = a + \mathbb{E}(T_1)$. Ko vse poberemo skupaj, dobimo rekurzivno zvezo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= a\,\mathbb{P}(T_1 < a) + \mathbb{P}(T_1 \geq a)\big(a + \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(S)\big) = \\ &= a\big(1 - e^{-a/b}\big) + e^{-a/b}\big(a + b + \mathbb{E}(S)\big)\,,\end{aligned}$$

ki ima rešitev:

$$\mathbb{E}(S) = \frac{a + b\,e^{-a/b}}{1 - e^{-a/b}}\,.$$

Drugi način. in naj bo N prvi indeks, za katerega je $T_N < a$. Čas od začetka do trenutka, ko Stanko kupi sijalko, lahko zapišemo v obliki:

$$S = T_1 + T_2 + \cdots + T_{N-1} + a = T_1 + T_2 + \cdots + T_N + a - T_N\,.$$

Ker so $T_1, T_2, \ldots$ neodvisni, N pa čas ustavljanja glede na zaporedje $T_1, T_2, \ldots$, lahko uporabimo Waldovo identiteto. Iz eksponentne porazdelitve časov dobimo:

$$\mathbb{E}(T_1 + T_2 + \cdots + T_N) = b\,\mathbb{E}(N)\,.$$

Slučajno spremenljivko N lahko gledamo kot prvi uspeli poskus v Bernoullijevem zaporedju, kjer n-ti poskus uspe, če žarnica traja manj kot a. Verjetnost uspeha takega poskusa je $1 - e^{-a/b}$, torej je:

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{1 - e^{-a/b}}\,.$$

Izračunati je potrebno še $\mathbb{E}(T_N)$. To lahko dobimo s pogojevanjem na N. Velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_N \mid T = n) &= \mathbb{E}(T_n \mid T_1 \geq a, T_2 \geq a, \ldots T_{n-1} \geq a, T_n < a) = \\ &= \mathbb{E}(T_n \mid T_n < a) = \\ &= \frac{\frac{1}{b}\int_0^a t\,e^{-t/b}\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{b}\int_0^a e^{-t/b}\,\mathrm{d}t} = \\ &= \frac{b - (a+b)e^{-a/b}}{1 - e^{-a/b}}\,,\end{aligned}$$

torej je tudi:

$$\mathbb{E}(T_N \mid T = n) = \frac{b - (a+b)e^{-a/b}}{1 - e^{-a/b}}\,.$$

Ko poberemo vse skupaj, dobimo:

$$\mathbb{E}(S) = \frac{a + b\, e^{-a/b}}{1 - e^{-a/b}}\,,$$

kar je isto kot prej.

2. Označimo N_t število žuželk, z $N_t^{(\mathrm{M})}$ število muh, z $N_t^{(\mathrm{O})}$ pa število os, ki so priletele v hišo v t minutah od začetka. Izračunati je potrebno $\mathbb{P}\big(N_1 \le 1 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big)$.

Prvi način. Nastavimo:

$$\mathbb{P}\big(N_1 \le 1 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big) = \frac{\mathbb{P}\big(N_1 \le 1, N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big)}{\mathbb{P}\big(N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big)}\,. \qquad (*)$$

Velja $\mathbb{P}\big(N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big) = \frac{1}{3!}\left(\frac{5}{2}\right)^3 e^{-5/2}$. Nadalje je dogodek $\big\{N_1 \le 1\big\}$ disjunktna unija dogodkov $\{N_1 = 0\}$, $\big\{N_1^{(\mathrm{M})} = 0, N_1^{(\mathrm{O})} = 1\big\}$ in $\big\{N_1^{(\mathrm{M})} = 1, N_1^{(\mathrm{O})} = 0\big\}$. Velja:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(N_1 = 0,\ N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big) &= \mathbb{P}\big(N_1 = 0,\ N_5^{(\mathrm{M})} - N_1^{(\mathrm{M})} = 3\big) = \\
&= \frac{2^3}{3!}\, e^{-27/10}\,, \\
\mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{M})} = 0,\ N_1^{(\mathrm{O})} = 1,\ N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big) &= \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{M})} = 0,\ N_1^{(\mathrm{O})} = 1,\ N_5^{(\mathrm{M})} - N_1^{(\mathrm{M})} = 3\big) = \\
&= \frac{1}{5}\,\frac{2^3}{3!}\, e^{-27/10}\,, \\
\mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{M})} = 1,\ N_1^{(\mathrm{O})} = 0,\ N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big) &= \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{M})} = 1,\ N_1^{(\mathrm{O})} = 0,\ N_5^{(\mathrm{M})} - N_1^{(\mathrm{M})} = 2\big) = \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{2^2}{2!}\, e^{-27/10}\,.
\end{aligned}$$

Ko vse skupaj vstavimo v formulo $(*)$, dobimo:

$$\mathbb{P}\big(N_1 \le 1 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big) = \frac{624}{625}\, e^{-1/5} \doteq 0{\cdot}817\,.$$

Drugi način: pogojujemo na število os, ki so priletele v prvi minuti. Nastavimo torej:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(N_1 \le 1 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big) = \\
&\quad = \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{O})} = 0 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big)\, \mathbb{P}\big(N_1 \le 1 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3,\ N_1^{(\mathrm{O})} = 0\big) + \\
&\qquad + \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{O})} = 1 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big)\, \mathbb{P}\big(N_1 \le 1 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3,\ N_1^{(\mathrm{O})} = 1\big) + \\
&\qquad + \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{O})} \ge 2 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big)\, \mathbb{P}\big(N_1 \le 1 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3,\ N_1^{(\mathrm{O})} \ge 2\big)\,.
\end{aligned}$$

Opazimo, da je zadnji člen enak nič: če sta v prvi minuti prileteli vsaj dve osi, se ne more zgoditi, da bi v tem obdobju priletela največ ena žuželka. V preostalih dveh členih pa pri prvem faktorju upoštevamo neodvisnost, pri drugem pa dogodke na levi zapišemo drugače. Dobimo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(N_1 \le 1 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big) &= \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{O})} = 0\big)\, \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{M})} \le 1 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3,\ N_1^{(\mathrm{O})} = 0\big) + \\
&\quad + \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{O})} = 1\big)\, \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{M})} = 0 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3,\ N_1^{(\mathrm{O})} = 1\big)\,.
\end{aligned}$$

Zdaj pa še pri drugih faktorjih upoštevamo neodvisnost in dobimo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(N_1 \le 1 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big) = \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{O})} = 0\big)\, \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{M})} \le 1 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big) + \\ + \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{O})} = 1\big)\, \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{M})} = 0 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big)\,.\end{aligned}$$

Pogojno na dogodek, da so v prvih petih minutah priletele natanko tri muhe, je množica njihovih prihodov porazdeljena enako kot množica $\{U_1, U_2, U_3\}$, kjer so U_1, U_2 in U_3 neodvisne in porazdeljene enakomerno na intervalu $[0, 3]$. Tako dobimo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(N_1 \le 1 \mid N_5^{(\mathrm{M})} = 3\big) &= \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{O})} = 0\big)\Big[\mathbb{P}\big(U_1 > 1,\ U_2 > 1,\ U_3 > 1) + \\ &\qquad + \mathbb{P}\big(U_1 \le 1,\ U_2 > 1,\ U_3 > 1) + \\ &\qquad + \mathbb{P}\big(U_1 > 1,\ U_2 \le 1,\ U_3 > 1) + \\ &\qquad + \mathbb{P}\big(U_1 > 1,\ U_2 > 1,\ U_3 \le 1)\Big] + \\ &\quad + \mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{O})} = 1\big)\, \mathbb{P}\big(U_1 > 1,\ U_2 > 1,\ U_3 > 1) = \\ &= e^{-1/5}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2\right] + \frac{1}{5} \cdot e^{-1/5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \\ &= \frac{624}{625}\, e^{-1/5}\,,\end{aligned}$$

kar je isto kot prej.

3. Označimo z A_t starost ob času t. Za $0 \le s < t$ velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_t > s) &= \mathbb{P}\big(\text{v časovnem intervalu } [t - s, t] \text{ ni bilo nobenega prihoda}\big) = \\ &= \exp\left(-\int_{t-s}^{t} \frac{\mathrm{d}u}{1 + u}\right) = \\ &= \exp\big(\ln(1 + t - s) - \ln(1 + t)\big) = \\ &= \frac{1 + t - s}{1 + t}\,,\end{aligned}$$

medtem ko za $s > t$ velja $\mathbb{P}(A_t > s) = 0$. Sledi:

$$\mathbb{E}(A_t) = \int_0^t \frac{1 + t - s}{1 + t}\, \mathrm{d}s = \frac{2t + t^2}{2(1 + t)}\,.$$

4. a) Zadevo lahko interpretiramo kot prenovitveni proces z nagradami. Za prihode vzamemo npr. prihode v kraj A, za nagrade pa vzamemo dolžine bivanj v kraju A. Če je $W(t)$ skupni znesek nagrad (skupna dolžina bivanja v kraju A) do časa t, je dolgoročni delež časa, ko Rudi službuje v kraju A, enak:

$$\lim_{t \to \infty} W_t / t = \frac{\mathbb{E}(A_1)}{\mathbb{E}(T_1)}\,.$$

Pri tem je A_n dolžina bivanja v kraju A v n-tem ciklu, T_n pa je skupna dolžina bivanja v tem ciklu. Pišemo lahko $T_n = A_n + B_n$ in $B_n = A_n + R_n$, kjer je $\mathbb{E}(A_n) = 2$

in $\mathbb{E}(R_n) = 1$. Torej je $\mathbb{E}(T_n) = 5$, iskani dolgoročni delež časa pa je $2/5$.

b) Naj bo $H(t)$ verjetnost, da je Rudi ob času t v kraju A. Nadalje naj bo $S(t) = \mathbb{P}(A_n > t)$ verjetnost, da Rudi v i-tem ciklu biva v kraju A več kot t časa, $f(t) = \mathbb{P}(T_n \le t)$ pa naj bo kumulativna porazdelitvena funkcija dolžine posameznega cikla. Tedaj velja prenovitvena enačba:

$$H(t) = S(t) + \int_0^t H(t-s)\,\mathrm{d}F(s)\,.$$

Iskani pogoj je, da je *porazdelitev medprihodnih časov T_n nearitmetična.* Tedaj namreč po Smithovem ključnem prenovitvenem izreku velja:

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{1}{\mathbb{E}(T_1)} \int_0^\infty S(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathbb{E}(A_1)}{\mathbb{E}(T_1)}\,,$$

kar je ravno rezultat iz prejšnje točke.

2012/13

Rešitve kolokvija iz Slučajnih procesov 1 z dne 11. 4. 2013

Finančna matematika

1. Za n-ti prihod po osnovni ekvivalenci velja:

$$F_{S_n}(t) = \mathbb{P}(S_n \le t) = \mathbb{P}(N_t \ge n) = \mathbb{P}(N_t + 1 > n) = \left(1 - e^{-t}\right)^n .$$

Sledi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_1) &= \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1\,, \\
\mathbb{E}(S_2) &= \int_0^\infty \left[1 - \left(1 - e^{-t}\right)^2\right] \mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(2\,e^{-t} - e^{-2t}\right) \mathrm{d}t = \frac{3}{2}\,.
\end{aligned}$$

2. Izkoristimo, da je število metov čas ustavljanja glede na zaporedje števil pik v posameznih metih. Torej lahko uporabimo Waldovo identiteto, po kateri je pričakovano skupno število pik enako produktu pričakovanega števila metov in pričakovanega števila pik pri posameznem metu. Število metov je porazdeljeno geometrijsko $\mathrm{Geom}(1/3)$, število pik pri posameznem metu pa diskretno enakomerno na množici $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pričakovano skupno število pik je torej enako:

$$3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{2} = 10\text{'}5\,.$$

3. a) Naj bo A_n dogodek, da se je n-ti prihod zgodil do časa a, obenem pa mu v naslednjih b časovnih enotah ne sledi noben prihod (torej v časovnem intervalu od S_n do $S_n + b$ ni nobenega prihoda). Bolj formalno:

$$A_n = \{S_n \le a, T_{n+1} > b\}$$

Iz neodvisnosti medprihodnih časov ter dejstva, da je $S_n \sim \mathrm{Gama}(n, \lambda)$ in $T_{n+1} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, sledi:

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(S_n \le a)\,\mathbb{P}(T_{n+1} > b) = \frac{e^{-b\lambda}}{(n-1)!} \int_0^a \lambda^n t^{n-1}\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\,.$$

To pa lahko zapišemo tudi še drugače: po osnovni ekvivalenci je $\{S_n \le a\} = \{N_a \ge n\}$. Ker je $N_a \sim \mathrm{Pois}(a\lambda)$, velja tudi:

$$\mathbb{P}(A_n) = e^{-b\lambda}\,\mathbb{P}(N_a \ge n) = \sum_{k=n}^\infty \frac{a^k \lambda^k\, e^{-(a+b)\lambda}}{k!}\,.$$

b) *Prvi način.*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-b\lambda}}{(n-1)!} \int_0^a \lambda^n t^{n-1}\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = e^{-b\lambda} \int_0^a \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = e^{-b\lambda} \int_0^a \lambda\,\mathrm{d}t = \\
&= a\lambda\, e^{-b\lambda}\,.
\end{aligned}$$

Drugi način.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-b\lambda} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a^k \lambda^k \, e^{-a\lambda}}{k!} = e^{-(a+b)\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{a^k \lambda^k}{k!} = e^{-(a+b)\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k \lambda^k}{(k-1)!} =$$
$$= a\lambda \, e^{-b\lambda} \, .$$

Tretji način. Ker X šteje, koliko dogodkov A_n se je zgodilo, velja:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = e^{-b\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_a \geq n) = e^{-b\lambda} \, \mathbb{E}(N_a) = a\lambda \, e^{-b\lambda} \, .$$

Četrti način (ne potrebujemo točke a)). Naj bo Y_n indikator dogodka, da n-temu prihodu v naslednjih b časovnih enotah ne sledi noben prihod. Očitno je Y_n neodvisna od $T_1, T_2, \ldots T_n$. Nadalje velja:

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N \, ,$$

kjer je N definiran na enega od naslednjih treh ekvivalentnih načinov:

- število prihodov v časovnem intervalu $[0, a]$;
- zadnji indeks, za katerega je $S_N = T_1 + \cdots + T_N \leq a$;
- prvi indeks, za katerega je $T_1 + \cdots + T_{N+1} > a$.

Če definiramo $Z_n := T_{n+1}$, je Y_n neodvisna od $Z_0, Z_1, \ldots Z_{n-1}, N$ pa je prvi indeks, za katerega je $Z_0 + \cdots + Z_N > a$. Torej je N čas ustavljanja glede na zaporedje $Z_0, Z_1, \ldots$. Po Waldovi identiteti je:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(N) \, \mathbb{E}(Y_1) = a\lambda \, e^{-b\lambda} \, .$$

4. Naj bo T čas, ob katerem pes dobi Binetov briket, N_t število briketov, ki jih Andraž da psu do časa t, $\tilde{N}_t$ pa število briketov, ki jih pes požre do časa t. Tedaj je:

$$\tilde{N}_t = \begin{cases} N_T + 1 & ; T \leq t \\ N_t & ; T > t \end{cases} \, .$$

Ker je $\mathbb{E}(N_s) = 3s$ za vse $s \geq 0$ in ker sta Andraž in Bine neodvisna, velja:

$$\mathbb{E}(\tilde{N}_t \mid T) = \begin{cases} 3T + 1 & ; T \leq t \\ 3t & ; T > t \end{cases} \, .$$

Ker je T porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(1)$, sledi:

$$\mathbb{E}(\tilde{N}_t) = \int_0^t (3s+1) e^{-s} \, \mathrm{d}t + 3t \int_t^{\infty} e^{-s} \, \mathrm{d}s = 4\big(1 - e^{-t}\big) \, .$$

Rešitve kolokvija iz Slučajnih procesov 1 z dne 6. 6. 2013

Finančna matematika

1. a) $1 - \exp\left(-\int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) = 1 - e^{-1} \doteq 0\text{'}632.$

b) $1 - \exp\left(-\int_0^1 e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) = 1 - e^{-(1-e^{-1})} \doteq 0\text{'}469.$

c) Če z X označimo število prepoznih ponudnikov, je $X = N - \mathbb{1}_A$, kjer je N število vseh ponudnikov, A pa je dogodek, da vsaj ena ponudba pride pravočasno. Velja:

$$\mathbb{E}(N) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1\,.$$

Torej je:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(N) - \mathbb{P}(A) = e^{-(1-e^{-1})} \doteq 0\text{'}531\,.$$

2. Zaradi preglednejšega zapisa označimo s $t_0 = 10^{-4}$s dolžino celotnega intervala, ki ga gledamo, z $\delta = 6\cdot 10^{-5}$ s dolžino posameznega mrtvega intervala, z $\lambda = 50.000/s$ pa intenzivnost prihajanja žarkov. Nadalje označimo s $T_1, T_2, T_3, \ldots$ dolžine časovnih intervalov, v katerih števec *zaznava* žarke. Naj bo še M skupna dolžina mrtvega časa do trenutka t_0. Tedaj velja naslednje:

- Če je $T \ge t_0$, je $M = 0$.
- Če je $t_0 - \delta \le T_1 < t_0$, je $M = t_0 - T_1$.
- Če je $T_1 < t_0 - \delta$ in $T_2 \ge t_0 - T_1 - \delta$, je $M = \delta$.
- Če je $T_2 < t_0 - T_1 - \delta$, je $M = t_0 - T_1 - T_2$.

Sledi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M) = \mathbb{E}\Big[(t_0 - T_1)\,\mathbb{1}(t_0 - \delta \le T_1 < t_0)\Big] + \delta\,\mathbb{P}(T_1 < t_0 - \delta, T_2 \ge t_0 - T_1 - \delta) + \\ + \mathbb{E}\Big[(t_0 - T_1 - T_2)\,\mathbb{1}(T_1 + T_2 < t_0 - \delta)\Big]\,.\end{aligned}$$

Ker žarki tvorijo homogen Poissonov proces in ker velja krepka lastnost Markova, sta T_1 in T_2 porazdeljeni eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$, njuna vsota $T_1 + T_2$ pa ima porazdelitev $\mathrm{Gama}(2,\lambda)$. Sledi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M) &= \int_{t_0-\delta}^{t_0} (t_0 - x)\,e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x + \delta\lambda^2 \int_0^{t_0-\delta} e^{-\lambda x} \int_{t_0-x-\delta}^\infty e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \\ &\quad + \lambda^2 \int_0^{t_0-\delta} (t_0 - z)z\,e^{-\lambda z}\,\mathrm{d}z = \\ &= \frac{1}{\lambda}\,e^{-\lambda t_0} + \left(t_0 - \delta + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda(t_0-\delta)} + t_0 - \frac{2}{\lambda} = \\ &= 6\text{'}83\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}\,.\end{aligned}$$

3. Gre za prenovitveni proces z nagradami. Označimo s T_1 čas vožnje po avtocesti, s T_2 pa čas vožnje po stari cesti. Tedaj je dolžina medprihdnega intervala porazdeljena enako kot $T_1 + T_2$, nagrada pa je enaka T_2. Če čas merimo v urah, je $T_1 = 1$. Čas T_2 pa je slučajen, in sicer je enak $120/V$, kjer je V povprečna hitrost potovanja po stari cesti. Torej velja:

$$\mathbb{E}(T_2) = \frac{1}{20} \int_{60}^{80} \frac{120}{v} \, \mathrm{d}v = 6 \ln \frac{80}{60} \doteq 1{\cdot}726 \, .$$

Po krepkem zakonu velikih števil je iskani delež časa enak:

$$\frac{\mathbb{E}(T_2)}{\mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T_2)} \doteq 0{\cdot}633 \, .$$

4. a) Čas prvega prihoda je porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(1/t_0)$, porazdelitev nadaljnjih medprihodnh časov pa se ujema s porazdelitvijo slučajne spremenljivke, ki je z verjetnostjo $1 - p$ enaka nič, z verjetnostjo p pa je porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(1/t_0)$.
b) Poiskati je potrebno prenovitveno mero. Velja:

$$\hat{G}(z) = \frac{1}{1 + t_0 z} \, , \qquad \hat{F}(z) = 1 - p + \frac{p}{1 + t_0 z} \, ,$$

od koder najprej dobimo:

$$\hat{M}(z) = \frac{\hat{G}(z)}{1 - \hat{F}(z)} = \frac{1}{p t_0 z} \, ,$$

torej je iskana prenovitvena mera $M(t) = \dfrac{t}{p t_0}$.

Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 20. 6. 2013

Finančna matematika

1. a) Opazimo, da je rezultat popolnoma isti, kot če bi Pepi ves čas lovil ribe v prvem ribniku, to pa je $4\,e^{-3} \doteq 0{\cdot}199$.

b) Označimo z S_2 čas, ko je Pepi ujel drugo ribo, z A pa dogodek, da je ujel več kot dve ribi. Tedaj velja:

$$\mathbb{P}(A \mid S_2) = \begin{cases} 1 - e^{-2(1-S_2)} & ;\ S_2 < 1 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases} .$$

Nadalje ima slučajna spremenljivka S_2 porazdelitev Gama$(2,3)$, ki je zvezna z gostoto:

$$f_{S_2}(s) = \begin{cases} 9s\,e^{-3s} & ;\ s > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases} .$$

Sledi:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \int_0^1 9s\,e^{-3s}\big(1 - e^{-2(1-s)}\big)\,\mathrm{d}s = \\ &= 9\int_0^1 s\,e^{-3s}\,\mathrm{d}s - 9\,e^{-2}\int_0^1 s\,e^{-s}\,\mathrm{d}s = \\ &= 1 - 9\,e^{-2} + 14\,e^{-3} \doteq \\ &\doteq 0{\cdot}479\,. \end{aligned}$$

2. *Prvi način.* Čas, ob katerem zakonca kupita avto, je minimum slučajnih spremenljivk Z_3 in M_2. Pomagamo si s preživetveno funkcijo:

$$\mathbb{P}(M_2 > t) = (\mu t + 1)e^{-\mu t}\,, \qquad \mathbb{P}(Z_3 > t) = \frac{1}{2}\,(\lambda^2 t^2 + 2\lambda t + 2)e^{-\lambda t}\,,$$

iz katere izračunamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > t) &= \mathbb{P}(Z_3 > t, M_2 > t) = \mathbb{P}(Z_3 > t)\,\mathbb{P}(M_2 > t) = \\ &= \frac{1}{2}\big(\lambda^2\mu t^3 + \lambda(\lambda + 2\mu)t^2 + 2(\lambda+\mu)t + 2\big)e^{-(\lambda+\mu)t}\,. \end{aligned}$$

kar nam da:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(T > t)\,\mathrm{d}t = \frac{3\lambda^2\mu}{(\lambda+\mu)^4} + \frac{\lambda(\lambda+2\mu)}{(\lambda+\mu)^3} + \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{1}{\lambda+\mu} = \\ &= \frac{3\lambda^3 + 12\lambda^2\mu + 8\lambda\mu^2 + 2\mu^3}{(\lambda+\mu)^4}\,. \end{aligned}$$

Drugi način. Uporabimo neodvisnost in enako porazdeljenost označb v združenem procesu prihajanja ponudb: vsaka ponudba je z verjetnostjo $\lambda/(\lambda+\mu)$ označena za ženo, z verjetnostjo $\mu/(\lambda+\mu)$ pa za moža. Nato uporabimo Waldovo identiteto, in sicer gledamo časovne intervale med posameznimi primernimi ponudbami (tako tistih, ki jih gleda žena, kot tistih, ki jih gleda mož). Kot ponavadi označimo njihove dolžine s $T_1, T_2, T_3, \ldots$. Tedaj je $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_N$, kjer je N zaporedna številka ponudbe, ob kateri pride do nakupa. Za vsak časovni interval vemo, koliko dolg je (T_n) in kdo je ob njegovem izteku našel ponudbo. Glede na to je N čas ustavljanja. Združene ponudbe tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda+\mu$, torej je $\mathbb{E}(T_n) = 1/(\lambda+\mu)$. Po Waldovi identiteti je dovolj izračunati $\mathbb{E}(N)$.

Možni poteki ponudb do nakupa skupaj z verjetnostmi in dolžinami (N) so zbrani v naslednji tabeli:

Potek	ŽŽŽ	MŽŽŽ	ŽMŽŽ	ŽŽMŽ
Dolžina	3	4	4	4
Verjetnost	$\frac{\lambda^3}{(\lambda+\mu)^3}$	$\frac{\lambda^3\mu}{(\lambda+\mu)^4}$	$\frac{\lambda^3\mu}{(\lambda+\mu)^4}$	$\frac{\lambda^3\mu}{(\lambda+\mu)^4}$

Potek	MM	ŽMM	MŽM	ŽŽMM	ŽMŽM	MŽŽM
Dolžina	2	3	3	4	4	4
Verjetnost	$\frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}$	$\frac{\lambda\mu^2}{(\lambda+\mu)^3}$	$\frac{\lambda\mu^2}{(\lambda+\mu)^3}$	$\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^4}$	$\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^4}$	$\frac{\lambda^2\mu^2}{(\lambda+\mu)^4}$

Torej je $N \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} & \frac{\lambda^3+2\lambda\mu^2}{(\lambda+\mu)^3} & \frac{3\lambda^2\mu}{(\lambda+\mu)^3} \end{pmatrix}$, od koder izračunamo najprej:

$$\mathbb{E}(N) = \frac{3\lambda^3 + 12\lambda^2\mu + 8\lambda\mu^2 + 2\mu^3}{(\lambda+\mu)^3}$$

in nato po Waldovi identiteti še:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{3\lambda^3 + 12\lambda^2\mu + 8\lambda\mu^2 + 2\mu^3}{(\lambda+\mu)^4}\,,$$

kar je seveda enako kot pri prvem načinu.

3. Pišimo $W = X + Y$, kjer je $X = N_2 - N_1$ in $Y = N_3 - N_2$. Pogojno na dogodek A je slučajna spremenljivka X porazdeljena binomsko $\mathrm{Bin}(2, p)$, kjer je:

$$p = \frac{\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}}{\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}} = \frac{\ln 3 - \ln 2}{\ln 3} \doteq 0{\cdot}369\,,$$

slučajna spremenljivka Y pa je porazdeljena po Poissonu $\mathrm{Pois}(\lambda)$, kjer je:

$$\lambda = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 4 - \ln 3 \doteq 0{\cdot}287\,.$$

Poleg tega sta slučajni spremenljivki pogojno glede na A neodvisni. Torej je:

$$\mathbb{E}(W \mid A) = \mathbb{E}(X \mid A) + \mathbb{E}(Y \mid A) = 2p + \lambda \doteq 1{\cdot}026\,,$$
$$\mathrm{var}(W \mid A) = \mathrm{var}(X \mid A) + \mathrm{var}(Y \mid A) = 2p(1-p) + \lambda \doteq 0{\cdot}753\,.$$

4. Gre za prenovitveni proces z zaostankom, pri katerem je čas prvega prihoda porazdeljen eksponentno Exp(1/30), vsi nadaljnji medprihodni časi pa so mešanica 2/3 eksponentne porazdelitve Exp(1/20) in 1/3 eksponentne porazdelitve Exp(1/30) (če čas merimo v minutah). Laplaceovi transformiranki teh dveh porazdelitev sta enaki:

$$\hat{G}(z) = \frac{1}{1+30z}\,,$$
$$\hat{F}(z) = \frac{2}{3}\,\frac{1}{1+20z} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+30z} = \frac{3+80z}{3(1+20z)(1+30z)}\,,$$

Laplace–Stieltjesova transformiranka prenovitvene mere pa je enaka:

$$\hat{M}(z) = \frac{\hat{G}(z)}{1-\hat{F}(z)} = \frac{3(1+20z)}{z(70+1800z)} = \frac{3}{70z} - \frac{12}{7(7+180z)} = \frac{3}{70z} - \frac{1}{105\bigl(z+\frac{7}{180}\bigr)}\,.$$

torej je prenovitvena mera sama enaka:

$$M(t) = \frac{3t}{70} + \frac{1}{105}\int_0^t e^{-7s/180}\,\mathrm{d}s = \frac{3t}{70} + \frac{12}{49}\bigl(1-e^{-7t/180}\bigr)\,.$$

Ponovimo, da ta mera velja za čas, merjen v minutah. Če bi ga merili v urah, bi dobili:

$$M(t) = \frac{18t}{7} + \frac{12}{49}\bigl(1-e^{-7t/3}\bigr)\,.$$

Proces je stacionaren, če je proces $(N_{s+t}-N_t)_{s\ge 0}$ porazdeljen enako kot prvotni proces $(N_s)_{s\ge 0}$. Od tod sledi, da je $\mathbb{E}(N_{s+t})-\mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}(N_s)$, torej $M(s+t)-M(t) = M(s)$. To pa v našem primeru ne drži, torej proces ni stacionaren.

Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 26. 8. 2013

Finančna matematika

1. Označimo z X_n spremembo Lojzetovega premoženja v n-ti igri, N pa igro, v kateri Lojze izgubi še zadnji evro. To je torej prvi indeks, za katerega je $S_N = -100$, kjer je:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

(brez škode si lahko mislimo, da Lojze tudi potem, ko pride na ničlo, še naprej igra na up). Ker je $\{N \le n\}$ dogodek, da je vsaj ena izmed vsot $S_1, S_2, \ldots S_n$ enaka -100, je N čas ustavljanja.

Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \ldots$ so neodvisne in imajo porazdelitev:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 19/37 & 18/37 \end{pmatrix}.$$

Po Waldovi identiteti je $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(N)$. Velja $\mathbb{E}(X_1) = -1/37$ in $S_N = -100$, zato je $\mathbb{E}(N) = 3700$.

2. Označimo z N_t število vseh iglic, ki padejo na teraso do časa t, z $N_t^{(\mathrm{D})}$ pa število iglic, ki do časa t padejo na njen desni del. Nadalje naj bo $S_n^{(\mathrm{D})}$ čas, ko na desni del terase pade n-ta iglica. Najprej opazimo, da je:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{D})} = 0 \mid N_1 = 2\big) &= \frac{4}{9}\,, \\
\mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{D})} = 1 \mid N_1 = 2\big) &= \frac{4}{9}\,, \\
\mathbb{P}\big(N_1^{(\mathrm{D})} = 2 \mid N_1 = 2\big) &= \frac{1}{9}\,.
\end{aligned}$$

Če na desni del terase ni padla nobena iglica, se po lastnosti Markova vse začne na novo. Ker iglice, ki padajo na desni del terase, tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo ene iglice na uro, velja:

$$\mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{D})} \mid N_1^{(\mathrm{D})} = 0\big) = 1 + \mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{D})}\big) = 3\,.$$

Če je na desni del terase padla natanko ena iglica, mora pasti le še ena iglica. Sledi:

$$\mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{D})} \mid N_1^{(\mathrm{D})} = 1\big) = 1 + \mathbb{E}\big(S_1^{(\mathrm{D})}\big) = 2\,.$$

Če pa sta na desni del terase že padli dve iglici, moramo gledati, kdaj je padla druga. Pogojno na $\{N_1^{(\mathrm{D})} = 2\}$ je $S_2^{(\mathrm{D})}$ porazdeljena tako kot $\max\{U_1, U_2\}$, kjer sta U_1 in U_2 neodvisni in porazdeljeni enakomerno na intervalu od 0 do 1. Ker za $0 \le t \le 1$ velja:

$$\begin{aligned}
F_{S_2^{(\mathrm{D})} \mid N_1^{(\mathrm{D})} = 2}(t) &= F_{\max\{U_1, U_2\}}(t) = \mathbb{P}(\max\{U_1, U_2\} \le t) = \\
&= \mathbb{P}(U_1 \le t, U_2 \le t) = \mathbb{P}(U_1 \le t)\,\mathbb{P}(U_2 \le t) = t^2\,,
\end{aligned}$$

je:

$$f_{S_2^{(\mathrm{D})}\mid N_1^{(\mathrm{D})}=2}(t) = 2t \quad \text{in} \quad \mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{D})} \mid N_1^{(\mathrm{D})} = 2\big) = \int_0^1 2t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\,.$$

Končno po pogojni različici izreka o polnem matematičnem upanju dobimo:

$$\mathbb{E}\big(S_2^{(\mathrm{D})} \mid N_1 = 2\big) = \frac{4}{9}\cdot 3 + \frac{4}{9}\cdot 2 + \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{62}{27} \doteq 2\,\mathrm{h}\ \ 18\,\mathrm{min}\,.$$

3. Nalogo rešimo s pogojevanjem na čas prvega prihoda S_1, torej moramo najprej poznati porazdelitev te slučajne spremenljivke. Za $t > 0$ velja:

$$\mathbb{P}(S_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\int_0^t e^s\,\mathrm{d}s} = e^{-(e^t-1)}\,,$$

torej:

$$f_{S_1}(t) = e^{t-e^t+1}\,.$$

Če je A dogodek, da eno časovno enoto po prvem prihodu ni nobenega prihoda, po krepki lastnosti Markova velja:

$$\mathbb{P}(A \mid S_1) = e^{-\int_{S_1}^{S_1+1} e^s\,\mathrm{d}s} = e^{-e^{S_1}(e-1)}\,.$$

Torej velja:

$$\mathbb{P}(A) = \int_0^\infty e^{-e^s(e-1)}\,e^{s-e^s+1}\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty e^{s-e^{s+1}+1}\,\mathrm{d}s\,.$$

S substitucijo $u = e^s$ dobimo:

$$\mathbb{P}(A) = \int_1^\infty e^{-eu+1}\,\mathrm{d}u = e^{-e} \doteq 0{\cdot}066\,.$$

4. Gre za prenovitveni proces z zaostankom, pri katerem ima čas prvega prihoda porazdelitev Gama$(2,2)$, vsi nadaljnji medprihodni časi pa so mešanica $2/3$ deterministične porazdelitve, skoncentrirane v nič, in $1/3$ porazdelitve Gama$(2,2)$ (če čas merimo v letih). Laplaceovi transformiranki teh dveh porazdelitev sta enaki:

$$\hat{G}(z) = \left(\frac{2}{2+z}\right)^2,$$
$$\hat{F}(z) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{2+z}\right)^2,$$

Pričakovano število nadaljnjih kandidatk, ki se v t letih zvrstijo na razgovoru pri direktorju, je ravno prenovitvena mera. Njena Laplace–Stieltjesova transformiranka prenovitvene mere je enaka:

$$\hat{M}(z) = \frac{\hat{G}(z)}{1-\hat{F}(z)} = \frac{12}{z(z+4)} = 3\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+4}\right).$$

torej je prenovitvena mera sama enaka:

$$M(t) = 3\left(t - \int_0^t e^{-4s}\,\mathrm{d}s\right) = 3t - \frac{3}{4}\big(1-e^{-4t}\big)\,.$$

Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 9. 9. 2013

Finančna matematika

1. a) Naj bo L_1 čas lovljenja prve muhe, T_2 pa čas, ki je minil od prihoda prve do prihoda druge muhe. To sta neodvisni slučajni spremenljivki ter velja $L_1 \sim \text{Exp}(1/2)$ in $T_2 \sim \text{Exp}(1/3)$ (čase merimo v minutah). Iskana verjetnost je:

$$\mathbb{P}(L_1 > T_2) = \frac{1}{6} \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-l/2}\, e^{-t/3}\, \mathrm{d}l\, \mathrm{d}t = \frac{1}{3} \int_0^\infty e^{-5t/6}\, \mathrm{d}t = \frac{2}{5}\,.$$

b) Označimo z N število muh, ki so priletele v hišo, medtem ko je Erazem lovil prvo muho. Zaradi neodvisnosti velja $\mathbb{E}(N \mid L_1) = L_1/3$, torej $\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(L_1)/3 = 2/3$.

c) Označimo s T čas, ki mine od odprtja vrat do trenutka, ko Erazem ujame zadnjo muho.

Prvi način. Pišimo $T = T_1 + T_2 + T'$, kjer je T_1 čas prihoda prve muhe, T_2 tako kot prej čas, ki mine od prihoda prve do prihoda druge muhe, T' pa preostanek časa. Nadalje naj bo U dogodek, da Erazem ujame prvo muho, preden prileti druga. Označimo še z L_2 čas lovljenja druge muhe.

Če se zgodi U, je preprosto $T' = L_2$. Zaradi neodvisnosti je $\mathbb{E}(T' \mid T_2, U) = \mathbb{E}(L_2) = 2$. Če pa se U ne zgodi, velja $T' = L_1' + L_2 + L'$, kjer je L_1' preostanek časa lovljenja prve muhe, L' pa čas lovljenja N muh, ki priletijo, medtem ko Erazem lovi prvo muho. Podobno kot prej je $\mathbb{E}(L_2 \mid T_2, U^{\mathrm{c}}) = 2$. Nadalje po krepki lastnosti Markova velja $\mathbb{E}(L_1' \mid T_2, U^{\mathrm{c}}) = 2$. Spet zaradi krepke lastnosti Markova in še neodvisnosti velja $\mathbb{E}(N \mid T_2, U^{\mathrm{c}}, L_1') = L_1'/3$. Spet zaradi neodvisnosti je $\mathbb{E}(L' \mid T_2, U^{\mathrm{c}}, L_1') = 2L_1'/3$, torej $\mathbb{E}(L' \mid T_2, U^{\mathrm{c}}) = 4/3$. Sledi $\mathbb{E}(T' \mid T_2, U^{\mathrm{c}}) = 2 + 2 + 4/3 = 16/3$.

Velja $\mathbb{P}(U^{\mathrm{c}} \mid T_2) = e^{-T_2/2}$. Iz pogojne različice izreka o polnem matematičnem upanju dobimo:

$$\mathbb{E}(T' \mid T_2) = \mathbb{P}(U \mid T_2)\, \mathbb{E}(T' \mid T_2, U) + \mathbb{P}(U^{\mathrm{c}} \mid T_2)\, \mathbb{E}(T' \mid T_2, U^{\mathrm{c}}) = 2 + \frac{10}{3}\, e^{-T_2/2}\,.$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(T') = 2 + \frac{10}{3} \int_0^\infty e^{-t/2} \cdot \frac{1}{3}\, e^{-t/3}\, \mathrm{d}t = \frac{10}{3}\,.$$

Ker je $T_1, T_2 \sim \text{Exp}(1/3)$, je $\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}(T_2) = 3$, torej: in končno:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T_2)\, \mathbb{E}(T') = \frac{28}{3}\,.$$

Drugi način. Pišimo $T = T_1 + L_1 + T''$, kjer je T_1 čas prihoda prve muhe, L_1 tako kot prej čas lovljenja prve muhe, T'' pa preostanek časa. Označimo z N število muh, ki priletijo v hišo med lovljenjem prve muhe.

Če je $N = 0$, lahko pišemo $T'' = T_2'' + L_2$, kjer je T_2'' preostanek časa čakanja na drugo muho, L_2 pa čas njenega lovljenja. Po krepki lastnosti Markova je $\mathbb{E}(T_2'' \mid$

$L_1, N = 0) = 3$ in $\mathbb{E}(L_2 \mid L_1, N = 0) = 2$, torej je $\mathbb{E}(T'' \mid L_1, N = 0) = 5$. Če pa je $N > 0$, je T'' preprosto čas lovljenja N muh. Zaradi neodvisnosti torej na dogodku $\{N > 0\}$ velja $\mathbb{E}(T'' \mid L_1, N) = 2N$. Krajše, velja $\mathbb{E}(T'' \mid L_1, N) = 2N + 5\,\mathbb{1}(N = 0)$. Pogojno na L_1 je $N \sim \mathrm{Pois}(L_1/3)$, torej je:

$$\mathbb{E}(T'' \mid L_1) = \frac{2L_1}{3} + 3\,e^{-L_1/3}\,.$$

Ker je $L_1 \sim \mathrm{Exp}(1/2)$, nadalje velja:

$$\mathbb{E}(T'') = \frac{4}{3} + 5\int_0^\infty e^{-t/3} \cdot \frac{1}{2}\,e^{-t/2}\,\mathrm{d}t = \frac{13}{3}\,.$$

Končno je:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(L_1) + \mathbb{E}(T'') = 3 + 2 + \frac{13}{3} = \frac{28}{3}\,.$$

Vse količine imajo kot enoto privzeto minuto. Iskani pričakovani čas je torej 9 minut in 20 sekund.

2. Pogojno na A meti tvorijo nehomogen Poissonov proces, ki ima na intervalu $[0, 2]$ intenzivnost $1/3 \cdot 3/10 = 1/10$, medtem ko ima na intervalu $[2, \infty)$ polno intenzivnost $1/3$. Za $t \le 2$ torej velja:

$$\mathbb{E}(T > t \mid A) = e^{-t/10}\,,$$

medtem ko za $t \ge 2$ velja:

$$\mathbb{E}(T > t \mid A) = e^{-2/10 + (t-2)/3}\,.$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(T \mid A) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T > t \mid A)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 e^{-t/10}\,\mathrm{d}t + e^{-1/5}\int_0^\infty e^{-s/3}\,\mathrm{d}s = 10 - 7\,e^{1/5} \doteq$$
$$\doteq 4{\cdot}27\,.$$

3. a) Iskana verjetnost je enaka:

$$1 - \exp\left(-\int_0^\infty \frac{1}{2\,e^t - 1}\,\mathrm{d}t\right)\,.$$

S substitucijo $x = e^t$ dobimo, da je enaka:

$$1 - \exp\left(-\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(2x-1)}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\,.$$

b) Upoštevamo $\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T > t)\,\mathrm{d}t$. Dogodek $\{T > t\}$ pomeni, da je bil v časovnem intervalu od t do ∞ vsaj en prihod. Njegova verjetnost je enaka:

$$1 - \exp\left(-\int_t^\infty \frac{1}{2\,e^s - 1}\,\mathrm{d}s\right) = 1 - \exp\left(-\int_{e^t}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{2x-1}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{e^{-t}}{2}\,.$$

Torej je $\mathbb{E}(T) = 1/2$.

4. Dani proces lahko gledamo kot prenovitveni proces z nagradami: prihodi tvorijo kar Poissonov proces z dano intenzivnostjo, medtem ko je nagrada enaka 1, če je prihod sprejet, sicer pa 0. Pričakovana vrednost nagrade je enaka verjetnosti, da bo prihod sprejet. Ker je $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, je slednja verjetnost enaka:

$$p = \int_0^\infty \left(1 - e^{-\mu t}\right) \lambda \, e^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \, .$$

Dolgoročno število sprejetih prihodov na časovno enoto pa je enako:

$$\lambda p = \frac{\lambda \mu}{\lambda + \mu} \, .$$

2011/12

Rešitve kolokvija iz Slučajnih procesov 1 z dne 19. 4. 2012

Finančna matematika

1. *Prvi način.* Če tako kot ponavadi z N_t označimo število meritev do časa t brez začetne meritve, velja $\mathbb{P}(T > t \mid N_t = n) = 1/(n+1)$. Sledi:

$$\mathbb{P}(T > t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{(\lambda t)^n \, e^{-\lambda t}}{n!} = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t}$$

in s tem je porazdelitev natančno opisana. Je zvezna in z odvajanjem dobimo gostoto:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{1 - (1 + \lambda t) e^{-\lambda t}}{\lambda t^2} & ; \; t > 0 \\ 0 & ; \; \text{sicer} \end{cases} .$$

Drugi način. Označimo z F kumulativno porazdelitveno funkcijo in z f gostoto porazdelitve posamezne meritve. Nadalje naj bo še X_0 prva izmerjena vrednost. Če je $X_0 = x$, čakamo na prvo meritev, kjer izmerimo več od x. Verjetnost, da je posamezna meritev večja od x, je $1 - F(x)$. Če torej naredimo redčenje procesa vseh meritev, pri čemer odbiramo le tiste, ki dajo vrednost, večjo od x, dobimo, da le-te tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo $\lambda\bigl(1 - F(x)\bigr)$. Čas čakanja na prvo meritev z vrednostjo, večjo od x, je torej porazdeljen eksponentno s parametrom $\lambda\bigl(1 - F(x)\bigr)$. Sledi:

$$\mathbb{P}(T > t \mid X_0) = e^{-\lambda(1 - F(X_0))t}, \qquad \mathbb{P}(T > t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1 - F(x))t} f(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

S substitucijo $u = F(x)$ dobimo:

$$\mathbb{P}(T > t) = \int_0^1 e^{-\lambda(1-u)t} \, \mathrm{d}u = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} \, ,$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

Tretji način. Označimo s K število meritev (brez začetne) do prve, ki preseže začetno. Velja:

$$\mathbb{P}(K = k) = \frac{1}{k(k+1)} \, ; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

in pogojno na $K = k$ ima slučajna spremenljivka T porazdelitev $\text{Gama}(k, \lambda)$, torej za $t > 0$ pogojno gostoto:

$$f_{T \mid K=k}(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} \, e^{-\lambda t} \, .$$

Brezpogojno gostoto dobimo s seštetjem:

$$f_T(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(K = k) \, f_{T \mid K=k}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k+1)!} \, e^{-\lambda t} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^{l+1} t^l}{(l+2)!} \, e^{-\lambda t} =$$
$$= \frac{1 - (1 + \lambda t) e^{-\lambda t}}{\lambda t^2} \, ,$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

2. *Prvi način.* Ker prihodi, ki so se zgodili pred več kot eno časovno enoto, nimajo učinka, se je dovolj omejiti na časovni interval dolžine 1, brez škode za splošnost kar na $[0,1]$. Pogojno na dogodek, da se je v tem intervalu zgodilo natanko n prihodov, je množica njihovih časov porazdeljena enako kot množica $\{U_1, U_2, \ldots U_n\}$, kjer so $U_1, \ldots U_n$ neodvisne in porazdeljene enakomerno na $[0,1]$. Prihod, ki se je zgodil ob času t, ima učinek t. Če torej z N_1 označimo število vseh šokov v časovnem intervalu $[0,1]$, z S pa njihov skupni učinek, velja:

$$\mathbb{E}(S \mid N_1 = n) = \mathbb{E}(U_1 + U_2 + \cdots + U_n) = \frac{n}{2},$$

oziroma $\mathbb{E}(S \mid N_1) = \frac{N_1}{2}$. Sledi $\mathbb{E}(S) = \frac{\lambda}{2}$.

Drugi način. Skupni učinek šokov zapišimo kot Riemann–Stieltjesov integral:

$$S = \int_0^1 s \, \mathrm{d}N_s$$

in uporabimo integracijo po delih:

$$S = N_1 - \int_0^1 N_s \, \mathrm{d}s .$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N_1) - \int_0^1 \mathbb{E}(N_s) \, \mathrm{d}s = \lambda - \int_0^1 \lambda s \, \mathrm{d}s = \frac{\lambda}{2} .$$

3. *Prvi način.* Računamo lahko preživetveno funkcijo slučajne spremenljivke T, t. j. $\mathbb{P}(T > t)$. Če z N_t označimo število izpitov do časa t, je $T > t$ dogodek, da Zvone izpita ni naredil niti še po N_t poskusih. Iz preživetvene funkcije geometrijske porazdelitve dobimo:

$$\mathbb{P}(T > t \mid N_t = n) = (1-p)^n$$

in nato po izreku o polni verjetnosti:

$$\mathbb{P}(T > t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n) \, \mathbb{P}(T > t \mid N_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} (1-p)^n = e^{-p\lambda t} .$$

Torej je $T \sim \mathrm{Exp}(p\lambda)$.

Drugi način. Pogojno na K ima slučajna spremenljivka T porazdelitev $\mathrm{Gama}(K, \lambda)$. Njena pogojna gostota je torej za $t > 0$ enaka:

$$f_{T \mid K=k}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \, e^{-\lambda t} .$$

Brezpogojno gostoto dobimo s seštetjem:

$$f_T(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(K = k) \, f_{T \mid K=k}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(k-1)!} \, e^{-\lambda t} = p\lambda \, e^{-p\lambda t} .$$

Spet dobimo $T \sim \mathrm{Exp}(p\lambda)$.

Tretji način. Opazimo, da dejstvo, da je K porazdeljena geometrijsko, pomeni isto kot to, da Zvone v vsakem poskusu naredi z verjetnostjo p, neodvisno od ostalih poskusov. Če Zvone hipotetično dela izpite tudi potem, ko že naredi, in je Z_t število izpitov, ki jih je Zvone naredil do časa t, iz principa redčenja sledi, da je $Z_t \sim \mathrm{Pois}(p\lambda t)$. Tako lahko zaključimo, da je:

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(Z_t = 0) = e^{-p\lambda t}\,,$$

tako kot pri prvem načinu.

4. *Prvi način.* Najprej izračunamo pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke T glede na N_t. Če je $N_t \in \{0, 1\}$, predzadnji prihod ne obstaja in velja $T = 0$. Za $n = 2, 3, 4, \ldots$ pa velja:

$$\begin{aligned}
F_{T|N_t=n}(s) &= \mathbb{P}(T \le s \mid N_t = n) = \\
&= \mathbb{P}(N_s \in \{n-1, n\} \mid N_t = n) = \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_s \in \{n-1, n\}, N_t = n)}{\mathbb{P}(N_t = n)} = \\
&= \frac{\mathbb{P}(N_s = n-1, N_t - N_s = 1) + \mathbb{P}(N_s = n, N_t - N_s = 0)}{\mathbb{P}(N_t = n)} = \\
&= n s^{n-1} - \frac{(n-1)s^n}{t}\,,
\end{aligned}$$

torej:

$$f_{T|N_t=n}(s) = n(n-1)\left(s^{n-2} - \frac{s^{n-1}}{t}\right).$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(T \mid N_t = n) = \frac{n-1}{n+1}\,t\,.$$

Torej velja:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n)\, \mathbb{E}(T \mid N_t = n) = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, e^{-\lambda t}\, \frac{n-1}{n+1}\, t = \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{2}{(n+1)!}\right) (\lambda t)^n\, t\, e^{-\lambda t} = \\
&= \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} - \frac{2}{\lambda t} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!}\right) t\, e^{-\lambda t} = \\
&= \frac{(\lambda t + 2)e^{-\lambda t} + \lambda t - 2}{\lambda}\,.
\end{aligned}$$

Drugi način. Dani proces hipotetično razširimo nazaj v zgodovino pred čas 0. Če ga gledamo od časa T nazaj, spet dobimo homogen Poissonov proces. Predzadnji prihod v izvirnem procesu, če obstaja, ustreza drugemu prihodu v novem procesu. Čas tega drugega prihoda označimo z $\tilde{S}_2$. Velja:

$$T = \begin{cases} t - \tilde{S}_2 & ; \tilde{S}_2 \le t \\ 0 & ; \tilde{S}_2 \ge t \end{cases} .$$

Slučajna spremenljivka $\tilde{S}_2$ ima porazdelitev Gama$(2, \lambda)$, ki ima gostoto:

$$f_{\tilde{S}_2}(s) = \lambda^2 s\, e^{-\lambda s}$$

za $s > 0$. Torej je:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \lambda^2 \int_0^t (t-s)s\, e^{-\lambda s}\, \mathrm{d}s = \frac{\lambda^2 s(s-t) + \lambda(2s-t) + 2}{\lambda}\, e^{-\lambda s}\Big|_0^t = \\ &= \frac{(\lambda t + 2)e^{-\lambda t} + \lambda t - 2}{\lambda} . \end{aligned}$$

Rešitve kolokvija iz Slučajnih procesov 1 z dne 14. 6. 2012

Finančna matematika

1. *Prvi način.* Kot običajno označimo z N_t število klicev do časa t. Tedaj lahko pogojno verjetnost, ki je vprašanje naloge, zapišemo kot $\mathbb{P}(N_2 \ge 2 \mid N_2 \ge 1)$. Ker je $N_2 \sim \mathrm{Pois}\big(R(2)\big)$, kjer je:

$$R(2) = \int_0^2 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2 - \ln 3\,,$$

je:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_2 \ge 2 \mid N_2 \ge 1) &= \frac{\mathbb{P}(N_2 \ge 2)}{\mathbb{P}(N_2 \ge 1)} = \frac{1 - \big(1 + R(2)\big)e^{-R(2)}}{1 - e^{-R(2)}} = \frac{1 - (9 - 3\ln 3)e^{-2}}{1 - 3\,e^{-2}} = \\ &\doteq 0{\cdot}384\,.\end{aligned}$$

Drugi način: pogojujemo na čas prvega klica, T_1. Če z A označimo dogodek, da drugi klic pride pred časom 2, moramo izračunati:

$$\mathbb{P}(A \mid T_1 < 2) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(T_1 < 2)}\,.$$

Najprej izračunajmo porazdelitev časa T_1. Za $t \ge 0$ velja:

$$F_{T_1}(t) = \mathbb{P}(T_1 \le t) = \mathbb{P}(N_t \ge 1) = 1 - \exp\left(\int_0^t \frac{s}{1+s}\,\mathrm{d}s\right) = 1 - (1+t)e^{-t}\,.$$

Od tod takoj dobimo $\mathbb{P}(T_1 < 2) = \mathbb{P}(T_1 \le 2) = 1 - 3\,e^{-2}$, nato pa še gostoto:

$$f_{T_1}(t) = t\,e^{-t}\,.$$

Nadalje je pogojno na T_1 število klicev v časovnem intervalu od T_1 do 2 porazdeljeno po Poissonu s parametrom:

$$\int_{T_1}^2 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2 - T_1 - \ln 3 + \ln(T_1 + 1)\,.$$

Sledi:

$$\mathbb{P}(A \mid T_1) = \big(1 - e^{-(2 - T_1 - \ln 3 + \ln(T_1+1))}\big)\,\mathbb{1}(T_1 \le 2) = \left(1 - \frac{3\,e^{T_1 - 2}}{T_1 + 1}\right)\mathbb{1}(T_1 \le 2)\,.$$

Torej velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{E}\left[\left(1 - \frac{3\,e^{T_1-2}}{T_1+1}\right)\mathbb{1}(T_1 \le 2)\right] = \\ &= \int_0^2 \left(1 - \frac{3\,e^{t-2}}{t+1}\right) f_{T_1}(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^2 \left(t\,e^{-t} - \frac{3\,e^{-2}\,t}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \\ &= 1 - (9 - \ln 3)\,e^{-2}\,.\end{aligned}$$

Po deljenju dobimo želeni rezultat, ki je seveda isti kot prej.

2. *Prvi način.* Postavimo se v trenutek, ko prvič naslednjič delijo nagrade, in ga označimo s T_1. Če je $T_1 \le 30$, Tonček takrat dobi nagrado, zato je tedaj $T = T_1$. Sicer pa se vse začne na novo: Tonček mora od tega trenutka naprej čakati še čas T', ki je pogojno na zgodovino porazdeljen enako kot T. Torej velja:

$$T = T_1 + T' \, \mathbb{1}(T_1 > 30)\,,$$

od koder sledi:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T)\,\mathbb{P}(T_1 > 30) = 30 + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(T)\,,$$

torej je $\mathbb{E}(T) = 60$. Drugače povedano, Tonček lahko pričakuje, da bo čakal eno uro.

Drugi način. Označimo z N delitev, pri kateri Tonček dobi nagrado, pri čemer izvzamemo delitev ob času nič, ki jo Tonček v vsakem primeru zamudi. Če s $T_1, T_2, \ldots$ označimo medprihodne čase v procesu deljenja nagrad, velja:

$$\{N = n\} = \{T_1 > 30,\ T_2 > 30, \ldots T_{n-1} > 30,\ T_n \le 30\}\,.$$

Na dogodku $\{N = n\}$ je $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ in pogojno na $\{N = n\}$ so $T_1, \ldots T_{n-1}$ porazdeljeni enakomerno na intervalu od 30 do 40 minut (torej za $k = 1, \ldots n-1$ velja $\mathbb{E}(T_k \mid N = n) = 35$), T_n pa je porazdeljen enakomerno na intervalu od 20 do 30 minut (torej je $\mathbb{E}(T_n \mid N = n) = 25$). Sledi:

$$\mathbb{E}(T \mid N) = 35(N-1) + 25\,.$$

Ker je N porazdeljena geometrijsko Geom(1/2), je $\mathbb{E}(N) = 2$. Sledi:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}\big[35(N-1) + 25\big] = 60\,.$$

Tretji način. Z oznakami iz drugega načina je $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_N$. Opazimo, da je N čas ustavljanja, saj je dogodek $\{N = n\}$ enolično določen s $T_1, T_2, \ldots T_n$ (glej zgoraj). Po Waldovi identiteti je potem $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(T_1) = 2 \cdot 30 = 60$.

Četrti način. Naj bodo tako kot prej $T_1, T_2, \ldots$ medprihodni časi v prenovitvenem procesu deljenja nagrad. Nadalje si zamislimo še, da Tonček v nedogled hodi po nagrade. Tedaj tudi te Tončkove nagrade tvorijo prenovitveni proces. Označimo njegove medprihodne čase s $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \ldots$ (torej je $T = \tilde{T}_1$).

Označimo z W_t število nagrad, ki jih Tonček dobi do časa t. To lahko izrazimo na naslednja dva načina: s prenovitvenim procesom Tončkovih nagrad in s prenovitvenim procesom splošnega deljenja nagrad, ki mu pripišemo še nagrade $R_1, R_2, \ldots$, kjer je $R_n = 1$, če Tonček ob n-tem deljenju dobi nagrado, sicer pa je $R_n = 0$. Velja $\mathbb{P}(R_n = 0) = \mathbb{P}(R_n = 1) = 1/2$. Po krepkem zakonu velikih števil za oba prenovitvena procesa je skoraj gotovo:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{W_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(\tilde{T}_1)} = \frac{1}{\mathbb{E}(T)} = \frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)}\,,$$

torej mora biti:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{\mathbb{E}(T_1)}{\mathbb{E}(R_1)} = 60\,.$$

3. Stroški z menjavo avtomobilov tvorijo prenovitveni proces z nagradami. Medprihodna porazdelitev je enaka porazdelitvi slučajne spremenljivke $\min\{Z, t_1\}$, kjer je Z čas do prve resne okvare avtomobila. Če so torej $T_1, T_2, \ldots$ medprihodni časi, velja:

$$\mathbb{E}(T_1) = \mathbb{E}\big[\min\{Z, t_1\}\big] = \int_0^{t_1} t \cdot \frac{t}{50}\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{10} t_1 \cdot \frac{t}{50}\,\mathrm{d}t = t_1 - \frac{t_1^3}{300}\,.$$

Nadalje, če z $R_1, R_2, R_3, \ldots$ označimo stroške posameznih menjav, velja:

$$R_1 = \begin{cases} 10000 & ; Z \le t_1 \\ 7000 & ; Z > t_1 \end{cases}\,.$$

Torej je:

$$\mathbb{E}(R_1) = 10000 \int_0^{t_1} \frac{t}{50}\,\mathrm{d}t + 7000 \int_{t_1}^{10} \frac{t}{50}\,\mathrm{d}t = 7000 + 30\,t_1^2\,.$$

Dolgoročni stroški menjave na časovno enoto so torej:

$$h(t_1) = \frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = \frac{7000 + 30\,t_1^2}{t_1 - \frac{t_1^3}{300}}$$

Poiskati moramo minimum po t_1 na intervalu $(0, 10]$. Opazimo, da gre $h(t)$ proti neskončno, ko gre t proti nič. Nadalje velja:

$$h'(t) = 9000\,\frac{t^4 + 1000t^2 - 70000}{(300\,t - t^3)^2}$$

Ker je $h'(10) = 9000 \cdot 40000/2000^2 > 0$, je minimum dosežen v stacionarni točki v notranjosti intervala. Edina stacionarna točka na danem intervalu pa je:

$$t_1 = \sqrt{\frac{-1000 + \sqrt{1280000}}{2}} \doteq 8{\cdot}1\,.$$

Avto se torej najbolj splača menjati na vsakih dobrih 8 let.

4. Označimo z λ intenzivnost izvirnega homogenega Poissonovega procesa. Iskani proces je prenovitveni proces z zaostankom, pri čemer je prvi prihodni čas porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(\lambda)$, nadaljnji medprihodni časi pa imajo porazdelitev $\mathrm{Gama}(2, \lambda)$. Laplaceova transformiranka prvega prihodnega časa je torej enaka:

$$\hat{G}(z) = \frac{\lambda}{z + \lambda}\,,$$

Laplaceova transformiranka nadaljnjih medprihodnih časov pa je enaka:

$$\hat{F}(z) = \frac{\lambda^2}{(z + \lambda)^2}\,.$$

Iščemo prenovitveno mero iskanega prenovitvenega procesa. Njena Laplace–Stieltjesova transformiranka je enaka:

$$\hat{\tilde{M}}(z) = \frac{G(z)}{1 - F(z)} = \frac{\lambda(z + \lambda)}{z(z + 2\lambda)} = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z + 2\lambda}\right),$$

prenovitvena mera sama pa je enaka:

$$\mathbb{E}(\tilde{N}_t) = \frac{\lambda}{2}\int_0^t \left(1 + e^{-2\lambda s}\right) \mathrm{d}s = \frac{\lambda t}{2} + \frac{1 - e^{2\lambda t}}{4}.$$

Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 20. 6. 2012

Finančna matematika

1. Največji učinek ima zadnji prihod. Mislimo si, da časovni interval podaljšamo neskončno nazaj v zgodovino. Če tedaj z X označimo čas, ki je minil od zadnjega prihoda do konca intervala, je $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, učinek pa je enak:

$$U = \begin{cases} e^{-\alpha X} & ; X \le 1 \\ 0 & ; X > 1 \end{cases} .$$

Iskana količina je:

$$\mathbb{E}(U) = \lambda \int_0^1 e^{-\alpha x} e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha} \left(1 - e^{-\alpha - \lambda}\right) .$$

2. Označimo najprej s H dogodek, da je bil v prve pol ure natanko en ogled. Dogodek H je disjunktna unija dveh dogodkov: dogodka H_F, da edini študent, ki pride na ogled, študira finančno matematiko, in dogodka H_S, da ta edini študent študira splošno matematiko. Iz teorije markiranja sledi, da je:

$$\mathbb{P}(H_F \mid H) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{in} \quad \mathbb{P}(H_S \mid H) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} .$$

Če s T_F označimo pogojni pričakovani čas prvega študenta finančne matematike, ki pride, je ta slučajna spremenljivka pogojno na dogodek H_F porazdeljena enakomerno na intervalu od 0 do 1/2 (merjeno v urah), pogojno na dogodek H_S pa je $T_F - 1/2$ porazdeljena eksponentno $\mathrm{Exp}(4)$. Sledi:

$$\mathbb{E}(T_F \mid H_F) = \frac{1}{4} \quad \text{in} \quad \mathbb{E}(T_F \mid H_S) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} .$$

Končno velja:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_F \mid H) &= \frac{\mathbb{E}\big(T_F \, \mathbb{1}(H)\big)}{\mathbb{P}(H)} = \\
&= \frac{\mathbb{E}\big(T_F \, \mathbb{1}(H_F)\big) + \mathbb{E}\big(T_F \, \mathbb{1}(H_S)\big)}{\mathbb{P}(H)} = \\
&= \frac{\mathbb{P}(H_F)\, \mathbb{E}(T_F \mid H_F) + \mathbb{P}(H_S)\, \mathbb{E}(T_F \mid H_S)}{\mathbb{P}(H)} = \\
&= \mathbb{P}(H_F \mid H)\, \mathbb{E}(T_F \mid H_F) + \mathbb{P}(H_S \mid H)\, \mathbb{E}(T_F \mid H_S) = \\
&= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

oziroma 25 minut.

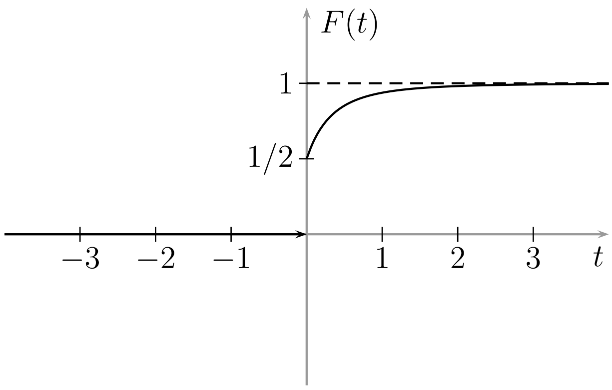
3. a) Število tistih, ki zamudijo manj kot dva meseca, je porazdeljeno po Poissonu $\mathrm{Pois}\big(R(2)\big)$, kjer je $R(t) = \int_0^t e^{-s}\,\mathrm{d}s = 1 - e^{-t}$. Torej je verjetnost iskanega dogodka enaka:

$$R(2)\,e^{-R(2)} = \big(1 - e^{-2}\big)e^{-(1-e^{-2})} \doteq 0\text{˙}364\,.$$

b) Vprašanje lahko formuliramo kot pogojno verjetnost dogodka, da nihče ne bo zamudil več kot dva meseca, glede na dogodek, da natanko eden zamudi manj kot dva meseca. Toda ta dva dogodka sta neodvisna, zato je to kar brezpogojna verjetnost dogodka, da ne bo nihče zamudil več kot dva meseca. Ker je število tistih, ki zamudijo več kot dva meseca, porazdeljeno po Poissonu $\mathrm{Pois}\big(R(\infty) - R(2)\big) = \mathrm{Pois}\big(e^{-2}\big)$, je iskana verjetnost enaka:

$$e^{-e^{-2}} \doteq 0\text{˙}873\,.$$

4. Graf:



Dolgoročno število prihodov na časovno enoto je recipročna vrednost pričakovanega medprihodnega časa v urah, le-ta pa je enak:

$$\mathbb{E}(T_1) = \int_0^\infty t\,\mathrm{d}F(t) = \int_0^\infty t\,F'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{t}{(1+t)^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$$

ali tudi:

$$\mathbb{E}(T_1) = \int_0^\infty \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\,.$$

Dolgoročno gledano ima torej dani proces 4 prihode na časovno enoto.

Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 2. 7. 2012

Finančna matematika

1. *Prvi način.* Označimo čas opazovanja s T. Ugodno ga je razdeliti na čas do prvega prihoda (T_1) in preostanek, ki ga bomo označili s T'. Oglejmo si drugi prihodni čas T_2. Če je $T_2 < \delta$, je opazovanja konec, zato je tedaj $T' = T_2$. Sicer pa se od trenutka drugega prihoda naprej vse začne na novo: od takrat naprej moramo opazovati še čas T'', ki je pogojno na zgodovino porazdeljen enako kot T'. Torej velja:

$$T' = T_2 + T'' \, \mathbb{1}(T_2 \geq \delta) \,,$$

od koder sledi:

$$\mathbb{E}(T') = \mathbb{E}(T_2) + \mathbb{E}(T') \, \mathbb{P}(T_2 \geq \delta) \,.$$

Ker je $T_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, je $\mathbb{E}(T_2) = 1/\lambda$ in $\mathbb{P}(T_2 \geq \delta) = e^{-\lambda\delta}$, torej je:

$$\mathbb{E}(T') = \frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda\delta} \, \mathbb{E}(T')$$

oziroma:

$$\mathbb{E}(T') = \frac{1}{\lambda\bigl(1 - e^{-\lambda\delta}\bigr)}$$

in končno:

$$\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(T_1) + \mathbb{E}(T') = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda\bigl(1 - e^{-\lambda\delta}\bigr)} = \frac{2 - e^{-\lambda\delta}}{\lambda\bigl(1 - e^{-\lambda\delta}\bigr)} \,.$$

Drugi način. Če z N označimo zaporedno številko prihoda, ob katerem končamo opazovanje, za $n = 2, 3, 4, \ldots$ velja:

$$\{N = n\} = \{T_2 \geq \delta, \; T_3 \geq \delta, \ldots T_{n-1} \geq \delta, \; T_n < \delta\} \,.$$

Na dogodku $\{N = n\}$ velja $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$. Seveda je $\mathbb{E}(T_1 \mid N = n) = \mathbb{E}(T_1) = 1/\lambda$. Nadalje za $i = 2, 3, \ldots n-1$ velja:

$$\mathbb{E}(T_i \mid N = n) = \mathbb{E}(T_i \mid T_i \geq \delta) = \frac{\mathbb{E}\bigl[T_i \, \mathbb{1}(T_i \geq \delta)\bigr]}{\mathbb{P}(T_i \geq \delta)} = \frac{1}{e^{-\lambda\delta}} \int_\delta^\infty \lambda t \, e^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} + \delta$$

(to sledi tudi iz pozabljivosti eksponentne porazdelitve), medtem ko je:

$$\mathbb{E}(T_n \mid N = n) = \mathbb{E}(T_n \mid T_n < \delta) = \frac{\mathbb{E}\bigl[T_i \, \mathbb{1}(T_i < \delta)\bigr]}{\mathbb{P}(T_i < \delta)} = \frac{1}{1 - e^{-\lambda\delta}} \int_0^\delta \lambda t \, e^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t = $$
$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{\delta \, e^{-\lambda\delta}}{1 - e^{-\lambda\delta}} \,.$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(T \mid N) = \frac{N}{\lambda} + (N-2)\delta - \frac{\delta \, e^{-\lambda\delta}}{1 - e^{-\lambda\delta}} = N\left(\frac{1}{\lambda} + \delta\right) - \frac{2 - e^{-\lambda\delta}}{1 - e^{-\lambda\delta}} \, \delta \,.$$

Ker je $N-1$ porazdeljena geometrijsko $\mathrm{Geom}\big(\mathbb{P}(T_1<\delta)\big)=\mathrm{Geom}\big(1-e^{-\lambda\delta}\big)$, je:

$$\mathbb{E}(N)=1+\frac{1}{1-e^{-\lambda\delta}}=\frac{2-e^{-\lambda\delta}}{1-e^{-\lambda\delta}}\,.$$

Sledi:

$$\mathbb{E}(T)=\mathbb{E}(N)\left(\frac{1}{\lambda}+\delta\right)-\frac{2-e^{-\lambda\delta}}{1-e^{-\lambda\delta}}\,\delta=\frac{2-e^{-\lambda\delta}}{\lambda\big(1-e^{-\lambda\delta}\big)}\,.$$

Tretji način. Z oznakami iz drugega načina je $T=T_1+T_2+\cdots+T_N$. Opazimo, da je N čas ustavljanja, saj je dogodek $\{N=n\}$ enolično določen s $T_1,T_2,\ldots T_n$ (glej zgoraj). Po Waldovi identiteti je potem:

$$\mathbb{E}(T)=\mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(T_1)=\frac{2-e^{-\lambda\delta}}{\lambda\big(1-e^{-\lambda\delta}\big)}\,.$$

Četrti način. Celotni čas opazovanja spet razdelimo na čas do prvega prihoda (T_1) in preostanek T'. V preostanku podaljšajmo celotni proces opazovanj v nedogled, tako da dobimo *cikle* opazovanj. Celotni čas opazovanja je tako sestavljen iz časa čakanja na prvi prihod (T_1) in enega ali več ciklov. Vsak cikel se konča ob prihodu, pri katerem od prejšnjega prihoda mine manj kot δ. Cikli tvorijo prenovitveni proces. Označimo njegove medprihodne čase s $\tilde{T}_1,\tilde{T}_2,\ldots$ (torej je $T'=\tilde{T}_1$).

Označimo z W_t število zaključenih ciklov do časa $t+T_1$. To lahko izrazimo na naslednja dva načina: s prej omenjenim prenovitvenim procesom ciklov opazovanj in s prenovitvenim procesom, ki pripada prvotnemu Poissonovemu procesu od prvega prihoda naprej in ki mu pripišemo še nagrade $R_2,R_3,\ldots$, kjer je $R_n=1$, če se ob n-tem prihodu prvotnega Poissonovega procesa zaključi cikel opazovanj (torej če je od prejšnjega prihoda minilo manj kot δ), sicer pa je $R_n=0$. Velja $\mathbb{P}(R_n=1)=\mathbb{P}(T_n<\delta)=1-e^{-\lambda\delta}$. Po krepkem zakonu velikih števil za oba prenovitvena procesa je skoraj gotovo:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{W_t}{t}=\frac{1}{\mathbb{E}(\tilde{T}_1)}=\frac{1}{\mathbb{E}(T')}=\frac{\mathbb{E}(R_2)}{\mathbb{E}(T_2)}\,,$$

torej mora biti:

$$\mathbb{E}(T')=\frac{\mathbb{E}(T_2)}{\mathbb{E}(R_2)}=\frac{1}{\lambda\big(1-e^{-\lambda\delta}\big)}$$

in končno:

$$\mathbb{E}(T)=\mathbb{E}(T_1)+\mathbb{E}(T')=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda\big(1-e^{-\lambda\delta}\big)}=\frac{2-e^{-\lambda\delta}}{\lambda\big(1-e^{-\lambda\delta}\big)}\,.$$

2. Označimo z N_t^{A} število asistentov, z N_t^{S} pa število študentov, ki pridejo do časa t. Dogodek, na katerega pogojujemo, lahko tedaj zapišemo kot $\{N_2^{\mathrm{A}}+N_2^{\mathrm{S}}=3\}$. Pogojno na ta dogodek so posamezni prihodi neodvisni in porazdeljeni enakomerno na intervalu od 0 do 2 (merjeno v urah) in ohrani se, da je vsak, ki pride, z verjetnostjo

40% asistent, z verjetnostjo 60% pa študent. Dogodek, na katerega pogojujemo, je disjunktna unija dogodkov $\{N_2^{\mathrm{A}} = n, N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n\}$; $n = 0, 1, 2, 3$. Velja:

$$\mathbb{P}\big(N_2^{\mathrm{A}} = n, N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n \bigm| N_2^{\mathrm{A}} + N_2^{\mathrm{S}} = 3\big) = \binom{3}{n} \cdot 0\text{'}4^n \cdot 0\text{'}6^{3-n} \,.$$

Če s T_1^{A} označimo čas prihoda prvega asistenta, velja:

$$\mathbb{P}\big(T_1^{\mathrm{A}} < 1 \bigm| N_2^{\mathrm{A}} = n, N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n\big) = \mathbb{P}\big(T_1^{\mathrm{A}} < 1 \bigm| N_2^{\mathrm{A}} = n\big) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \,.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(T_1^{\mathrm{A}} < 1 \bigm| N_2^{\mathrm{A}} + N_2^{\mathrm{S}} = 3\big) &= \frac{\mathbb{P}\big(T_1^{\mathrm{A}} < 1,\ N_2^{\mathrm{A}} + N_2^{\mathrm{S}} = 3\big)}{\mathbb{P}\big(N_2^{\mathrm{A}} + N_2^{\mathrm{S}} = 3\big)} = \\
&= \sum_{n=0}^{3} \frac{\mathbb{P}\big(T_1^{\mathrm{A}} < 1,\ N_2^{\mathrm{A}} = n,\ N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n\big)}{\mathbb{P}\big(N_2^{\mathrm{A}} + N_2^{\mathrm{S}} = 3\big)} = \\
&= \sum_{n=0}^{3} \frac{\mathbb{P}\big(N_2^{\mathrm{A}} = n,\ N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n\big)\,\mathbb{P}\big(T_1^{\mathrm{A}} < 1 \bigm| N_2^{\mathrm{A}} = n,\ N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n\big)}{\mathbb{P}\big(N_2^{\mathrm{A}} + N_2^{\mathrm{S}} = 3\big)} = \\
&= \sum_{n=0}^{3} \mathbb{P}\big(N_2^{\mathrm{A}} = n,\ N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n \bigm| N_2^{\mathrm{A}} + N_2^{\mathrm{S}} = 3\big)\,\mathbb{P}\big(T_1^{\mathrm{A}} < 1 \bigm| N_2^{\mathrm{A}} = n,\ N_2^{\mathrm{S}} = 3 - n\big) = \\
&= 3 \cdot 0\text{'}4 \cdot 0\text{'}6^2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 0\text{'}4^2 \cdot 0\text{'}6 \cdot \frac{3}{4} + 0\text{'}4^3 \cdot \frac{7}{8} = \\
&= 0\text{'}488\,.
\end{aligned}$$

3. Najprej izračunamo preživetveno funkcijo:

$$1 - F_{S_2}(s) = \mathbb{P}(S_2 > s) = \mathbb{P}(N_s < 2)\,.$$

Ker je $N_s \sim \mathrm{Pois}\big(R(s)\big)$, kjer je:

$$R(s) = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{s}\,,$$

velja:

$$1 - F_{S_2}(s) = \big(1 + 2\sqrt{s}\big)e^{-2\sqrt{s}}\,.$$

Porazdelitvena gostota je torej enaka:

$$f_{S_2}(s) = 2\,e^{-2\sqrt{s}}\,,$$

pričakovana vrednost pa:

$$\mathbb{E}(S_2) = 2\int_0^\infty s\,e^{-2\sqrt{s}} = \frac{1}{4}\int_0^\infty t^3\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\,.$$

Alternativno jo lahko izračunajo tudi s pomočjo preživetvene funkcije:

$$\mathbb{E}(S_2) = \int_0^\infty \big(1 - F_{S_2}(s)\big)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty \big(1 + 2\sqrt{s}\big)e^{-2\sqrt{s}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty (t + t^2)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\,.$$

4. Označimo s T čas, v katerem igralni avtomat izvrže nagrado. Tedaj lahko Nacetovo igranje ponazorimo s prenovitvenim procesom z nagradami, kjer imajo medprihodni časi enako porazdelitev kot $\min\{T, x\}$, nagrade pa enako porazdelitev kot $\mathbb{1}(T \le x)$. Torej velja:

$$\mathbb{E}(T_1) = 2 \int_0^x t(1-t)\,\mathrm{d}t + 2x \int_x^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = x - x^2 + \frac{x^3}{3}$$

in:

$$\mathbb{E}(R_1) = 2 \int_0^x (1-t)\,\mathrm{d}t = 2x - x^2\,.$$

Dolgoročno število nagrad na časovno enoto je po krepkem zakonu velikih števil enako:

$$\frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = 3\,\frac{2-x}{3-3x+x^2}\,.$$

Iz odvoda:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = 3\,\frac{-3+3x-x^2+(2-x)(3-2x)}{(3-3x+x^2)^2} = 3\,\frac{x^2-4x+3}{(3-3x+x^2)^2}$$

razberemo, da je to število maksimalno pri $x = 1$.

Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 20. 8. 2012

Finančna matematika

1. Označimo z M čas, ko režiser dobi moškega, z Z čas, ko dobi obe ženski, s T pa čas, ko dobi vse potrebne igralce. Tedaj je $T = \max\{M, Z\}$. Velja $M \sim \mathrm{Exp}(2)$ in $Z \sim \mathrm{Gama}(2, 1)$, torej za $t > 0$ velja:

$$f_M(t) = 2\,e^{-2t}\,, \qquad F_M(t) = 1 - e^{-2t}\,,$$
$$f_Z(t) = t\,e^{-t}\,, \qquad F_Z(t) = 1 - (1+t)e^{-t}\,.$$

Zaradi neodvisnosti je:

$$F_T(t) = F_M(t)\,F_Z(t) = 1 - (1+t)e^{-t} - e^{-2t} + e^{-3t}\,.$$

Pričakovano vrednost lahko izračunamo bodisi s pomočjo porazdelitvene gostote:

$$f_T(t) = t\,e^{-t} + 2\,e^{-2t} - 3\,e^{-3t}\,,$$
$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \Big(t^2\,e^{-t} + 2t\,e^{-2t} - 3t\,e^{-3t}\Big)\mathrm{d}t = \frac{13}{6}$$

bodisi s pomočjo preživetvene funkcije:

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \big(1 - F_T(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty (1+t)e^{-t} + 2\,e^{-2t} - 3\,e^{-3t} = \frac{13}{6}\,.$$

2. Označimo iskani čas s T, število všečkanj do časa t pa kot ponavadi označimo z N_t. Velja:

$$N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}\left(\int_s^t \frac{2}{1+u}\,\mathrm{d}u\right) = \mathrm{Pois}\left(2\ln\frac{1+t}{1+s}\right)\,.$$

Poiščimo preživetveno funkcijo časa T. Če je $t \le 1$, je $\{T > t\} = \{N_t \le 1\}$, torej je:

$$\mathbb{P}(T > t) = \frac{1 + 2\ln(1+t)}{(1+t)^2}\,.$$

Za $t > 1$ pa je $\{T > t\} = \{N_1 \le 1, N_t - N_1 = 0\}$, zato je:

$$\mathbb{P}(T > t) = \frac{1 + 2\ln 2}{(1+t)^2}\,.$$

Kumulativna porazdelitvena funkcija je torej enaka:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & ;\ t \le 0 \\ 1 - \dfrac{1 + 2\ln(1+t)}{(1+t)^2} & ;\ 0 \le t \le 1 \\ 1 - \dfrac{1 + 2\ln 2}{(1+t)^2} & ;\ t \ge 1 \end{cases}$$

in je absolutno zvezna, gostota porazdelitve pa je enaka:

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & ; t \le 0 \\ \dfrac{2\ln(1+t)}{(1+t)^3} & ; 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{2+4\ln 2}{(1+t)^3} & ; t \ge 1 \end{cases} .$$

3. Označimo z A_t število briketov, ki jih je pes dobil od Andraža, z B_t število briketov, ki jih je dobil od Bineta, z N_t pa število briketov, ki jih je požrl. Velja $N_t = A_t + \mathbb{1}(B_t \ge 1)$. Ker je $A_t \sim \text{Pois}(2t)$ in $B_t \sim \text{Pois}(3t)$, velja:

$$\mathbb{E}(N_t) = \mathbb{E}(A_t) + \mathbb{P}(B_t \ge 1) = 2t + 1 - e^{-3t} .$$

4. Gre za prenovitveni proces z nagradami. Posamezen cikel ustreza življenjski dobi televizorja, priredimo pa mu nagrado, ki je enaka dohodku, ki ga ima trgovina z dobavo *naslednjega* televizorja. Če se televizorju življenjska doba izteče še pod garancijo, je prihodek enak -200 evrov, sicer pa je enak 100 evrov.

Če torej s T_i označimo življenjsko dobo televizorja, R_i pa prihodek v posameznem ciklu, velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_i) &= \frac{2}{25}\int_0^5 t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{10}{3} , \\ \mathbb{P}(T_i \le 1) &= \frac{2}{25}\int_0^1 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{25} , \\ \mathbb{E}(T_i) &= -200 \, \mathbb{P}(T_i \le 1) + 100 \, \mathbb{P}(T_i > 1) = 88 , \end{aligned}$$

pričakovani letni prihodek na zvesto stranko pa je enak:

$$\frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = 26\text{'}4 .$$

2010/11

Rešitve kolokvija iz Slučajnih procesov 1 z dne 22. 4. 2011

Finančna matematika

1. a) Označimo s T_1 čas, ko Tone dobi prvo nalogo, z N_4 pa število vseh nalog, ki jih je dobil v prvih štirih urah službe (če je $N_4 = 0$, vzamemo $T_1 > 4$). Nadalje naj bo T označimo čas, ki ga Tone prebije v službi.

Prvi način. Velja:

$$T = \begin{cases} T_1 + 4N_4 & ; T_1 \le 4 \\ 4 & ; T_1 > 4 \end{cases} .$$

Če je $T_1 \le 4$, je pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke $N_4 - 1$ glede na T_1 Poissonova $\mathrm{Pois}\big((4 - T_1)/2\big)$. Zato je $\mathbb{E}(N_4 - 1 \mid T_1) = 2 - T_1/2$ oziroma $\mathbb{E}(N_4 \mid T_1) = 3 - T_1/2$, od koder sledi $\mathbb{E}(T \mid T_1) = 12 - T_1$. Ker je čas T_1 porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(1/2)$, potem velja:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \int_0^4 (12 - t) \cdot \tfrac{1}{2}\, e^{-t/2}\, \mathrm{d}t + 4 \int_4^\infty \tfrac{1}{2}\, e^{-t/2}\, \mathrm{d}t = \\ &= (2t - 10)e^{-t/2}\Big|_0^4 + 4\, e^{-t/2}\Big|_4^\infty = \\ &= 10 - 2\, e^{-2} \doteq 9{\cdot}73 . \end{aligned}$$

Drugi način. Pišemo $T = \hat{T}_1 + 4N_4$, kjer je $\hat{T}_1 = 4$, če je $N_4 = 0$, in $\hat{T}_1 = T_1$, če je $N_4 > 0$. Če je $n \in \mathbb{N}$, je pogojno na $N_4 = n$ slučajna spremenljivka T_1 porazdeljena tako kot prva vrstilna statistika slučajnega vektorja iz neodvisnih slučajnih spremenljivk, porazdeljenih enakomerno na $[0, 4]$. Z drugimi besedami, če so $U_1, \ldots U_n$ take slučajne spremenljivke, se pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke $\hat{T}_1$ glede na $N_4 = n$ ujema z brezpogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke $\min\{U_1, \ldots U_n\}$. Iz funkcije preživetja:

$$1 - F_{\hat{T} \mid N_4 = n}(t) = \mathbb{P}\big(\min\{U_1, \ldots U_n\} > t\big) = \mathbb{P}(U_1 > t, \ldots U_n > t) = \left(1 - \frac{t}{4}\right)^n$$

dobimo gostoto:

$$f_{\hat{T} \mid N_4 = n}(t) = \frac{n}{4} \left(1 - \frac{t}{4}\right)^{n-1}$$

(oba računa veljata za $0 < t < 4$; zunaj tega intervala lahko postavimo $f_{\hat{T} \mid N_4 = n}(t) = 0$). Sledi:

$$\mathbb{E}(\hat{T} \mid N_4 = n) = \frac{n}{4} \int_0^4 t \left(1 - \frac{t}{4}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = 4n \int_0^1 (1 - u) u^{n-1}\, \mathrm{d}u = \frac{4}{n + 1} .$$

Račun smo izpeljali za $n \in \mathbb{N}$, opazimo pa, da je pravilen tudi za $n = 0$. Od tod dobimo še brezpogojno matematično upanje:

$$\mathbb{E}(\hat{T}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{2^n\, e^{-2}}{n!} \, \frac{4}{n + 1} = 2\, e^{-2} \sum_{n=0}^\infty \frac{2^{n+1}}{(n + 1)!} = 2\, e^{-2} \sum_{m=1}^\infty \frac{2^m}{m!} = 2 - 2\, e^{-2} .$$

in končno $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(\hat{T}) + \mathbb{E}(N_4) = 10 - 2\,e^{-2}$.

Tretji način. Opazimo, da velja $T = \min\{T_1, 4\} + 4N_4$. Iz:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\min\{T_1,4\}\big] &= \int_0^4 t \cdot \tfrac{1}{2}\,e^{-t/2}\,\mathrm{d}t + 4\int_4^\infty \tfrac{1}{2}\,e^{-t/2}\,\mathrm{d}t = \\ &= (-t-2)e^{-t/2}\Big|_0^4 - 2\,e^{-t/2}\Big|_4^\infty = \\ &= 2 - 2\,e^{-2}\end{aligned}$$

in $\mathbb{E}(N_4) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ tako kot prej dobimo $\mathbb{E}(T) = 10 - 2\,e^{-2}$.

b) Najprej izračunamo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > 17) &= 1 - \mathbb{P}(T \le 17) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(T_1 \le 1, N_4 \le 4) - \mathbb{P}(T_1 > 1, N_4 \le 3) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(N_4 \le 3) - \mathbb{P}(T_1 \le 1, N_4 = 4)\,.\end{aligned}$$

Od tod naprej gre na vsaj dva načina.

Prvi način. Ker je, kot smo že omenili, za $T_1 \le 4$ pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke $N_4 - 1$ glede na T_1 Poissonova $\mathrm{Pois}\big(2 - \frac{1}{2}T_1\big)$, velja:

$$\mathbb{P}(N_4 = 4 \mid T_1) = \mathbb{P}(N_4 - 1 = 3 \mid T_1) = \frac{(2 - \frac{1}{2}T_1)^3}{6}\,e^{-(2-T_1/2)}\,.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1 \le 1, N_4 = 4) &= \int_0^1 \frac{(2-\frac{1}{2}t)^3}{6}\,e^{-(2-t/2)} \cdot \frac{1}{2}\,e^{-t/2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{96\,e^2}\int_0^1 (4-t)^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{96\,e^2}\int_3^4 u^3\,\mathrm{d}u = \frac{175}{384\,e^2}\,.\end{aligned}$$

in končno:

$$\mathbb{P}(T > 17) = 1 - \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{6}\right)e^{-2} - \frac{175}{384\,e^2} = 1 - \frac{2607}{384\,e^2} \doteq 0{\cdot}0812\,.$$

Drugi način. Uporabimo, da se pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke T_1 glede na $N_4 = 4$ ujema z brezpogojno porazdelitvijo slučajne spremenljivke $\min\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$, kjer so $U_1, \ldots U_4$ neodvisne in porazdeljene enakomerno na intervalu $[0, 4]$. Dobimo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1 \le 1 \mid N_4 = 4) &= \mathbb{P}\big(\min\{U_1,U_2,U_3,U_4\} \le 1\big) = \\ &= 1 - \mathbb{P}\big(\min\{U_1,U_2,U_3,U_4\} > 1\big) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(U_1 > 1, U_2 > 1, U_3 > 1, U_4 > 1) = \\ &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \\ &= \frac{175}{256}\,.\end{aligned}$$

Sledi:

$$\mathbb{P}(T_1 \le 1, N_4 = 4) = \frac{2^4\, e^{-2}}{24} \cdot \frac{175}{256} = \frac{175}{384\, e^2}\,,$$

kar je seveda isto kot prej.

2. Označimo z N_s število potnikov, ki pridejo na postajo do vključno časa s. Od tod naprej gre na vsaj štiri načine.

Prvi način. Velja $W = (t - S_1) + (t - S_2) + \ldots + (t - S_{N_t}) = N_t t - S_1 - \ldots - S_{N_t}$, kjer so $S_1, S_2, \ldots$ časi prihodov potnikov. Pri $N_t = n$ čase prihodov $S_1, \ldots S_n$ na slepo in neodvisno premešamo. Dobljeni časi, ki jih označimo z $\tilde{S}_1, \ldots \tilde{S}_n$, so pogojno na $N_t = n$ neodvisni in porazdeljeni enakomerno na $[0, t]$. Sledi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W \mid N_t = n) &= nt - n\,\frac{nt}{2} = \frac{nt}{2}\,, \\
\operatorname{var}(W \mid N_t = n) &= n\,\frac{t^2}{12}\,, \\
\mathbb{E}(W^2 \mid N_t = n) &= \frac{nt^2}{12} + \left(\frac{nt}{2}\right)^2 = \frac{nt^2}{12} + \frac{n^2 t^2}{4}\,.
\end{aligned}$$

Nadalje iz:

$$\mathbb{E}(N_t) = \operatorname{var}(N_t) = \lambda t\,, \quad \mathbb{E}(N_t^2) = \lambda t + \lambda^2 t^2$$

dobimo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W) &= \frac{t}{2}\,\mathbb{E}(N_t) = \frac{\lambda t^2}{2}\,, \\
\mathbb{E}(W^2) &= \frac{t^2}{12}\,\mathbb{E}(N_t) + \frac{t^2}{4}\,\mathbb{E}(N_t^2) = \frac{\lambda t^3}{3} + \frac{\lambda^2 t^4}{4}\,, \\
\operatorname{var}(W) &= \frac{\lambda t^3}{3}\,.
\end{aligned}$$

Drugi način. Naj bodo $\tilde{S}_1, \ldots \tilde{S}_n$ kot pri prvem načinu. Za $N_t = n$ pišimo $W = (t - \tilde{S}_1) + \cdots + (t - \tilde{S}_n)$ in opazimo, da so pogojno na ta dogodek tudi slučajne spremenljivke $t - \tilde{S}_1, \ldots t - \tilde{S}_n$ neodvisne in porazdeljene enakomerno na $[0, t]$. Od tod sledi naslednje: če so $U_1, U_2, \ldots$ porazdeljene enakomerno na $[0, t]$ ter neodvisne med seboj in od N_t, je W porazdeljena enako kot $U_1 + U_2 + \ldots + U_{N_t}$. Če označimo $\mu = \mathbb{E}(U_i)$ in $\sigma^2 = \operatorname{var}(U_i)$, potem velja:

$$\operatorname{var}(W) = \mathbb{E}(N_t)\,\sigma^2 + \operatorname{var}(N_t)\,\mu^2 = \lambda t \left[\frac{t^2}{12} + \left(\frac{t}{2}\right)^2\right] = \frac{\lambda t^3}{3}\,.$$

Tretji način. Varianco razčlenimo na pojasnjeno in nepojasnjeno:

$$\operatorname{var}(W) = \operatorname{var}\big(\mathbb{E}(W \mid N_t)\big) + \mathbb{E}\big(\operatorname{var}(W \mid N_t)\big)\,.$$

Iz:

$$\mathbb{E}(W \mid N_t = n) = \frac{nt}{2} \quad \text{oziroma} \quad \mathbb{E}(W \mid N_t) = \frac{N_t t}{2}$$

dobimo:

$$\operatorname{var}\bigl(\mathbb{E}(W \mid N_t)\bigr) = \frac{t^2}{4}\operatorname{var}(N_t^2) = \frac{\lambda t^3}{4}\,.$$

Iz:

$$\operatorname{var}(W \mid N_t = t) = \frac{nt^2}{12} \quad \text{oziroma} \quad \operatorname{var}(W \mid N_t) = \frac{N_t t^2}{12}$$

pa dobimo:

$$\mathbb{E}\bigl(\operatorname{var}(W \mid N_t)\bigr) = \frac{t^2}{12}\,\mathbb{E}(N_t) = \frac{\lambda t^3}{12}\,.$$

Sledi $\operatorname{var}(W) = \dfrac{\lambda t^3}{3}$ (delež pojasnjene variance je 3/4, nepojasnjene pa 1/4).

Četrti način. Upoštevamo:

$$W = \int_0^t N_u \,\mathrm{d}u\,.$$

Iz Fubinijevega izreka sledi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W) &= \mathbb{E}\left[\int_0^t N_u\,\mathrm{d}u\right] = \int_0^t \mathbb{E}(N_u)\,\mathrm{d}u\,,\\
\mathbb{E}(W^2) &= \mathbb{E}\left[\int_0^t N_u\,\mathrm{d}u \int_0^t N_v\,\mathrm{d}v\right] = \int_0^t\int_0^t \mathbb{E}(N_t N_s)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

in nato še:

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(W) &= \mathbb{E}(W^2) - \bigl(\mathbb{E}(W)\bigr)^2 = \\
&= \int_0^t\int_0^t \mathbb{E}(N_u N_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \int_0^t\int_0^t \mathbb{E}(N_u)\,\mathbb{E}(N_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= \int_0^t\int_0^t \operatorname{cov}(N_u, N_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= \lambda\int_0^t\int_0^t \min\{u, v\}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\
&= \lambda\int_0^t \left(\int_u^v u\,\mathrm{d}u + \int_v^t v\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v = \\
&= \lambda\int_0^t \left(tv - \frac{v^2}{2}\right)\mathrm{d}v = \\
&= \frac{\lambda t^3}{3}\,.
\end{aligned}$$

3. a) Igralec dobi igro, če pride med časoma s in 1 do natanko enega zvonjenja. Ker je število zvonjenj v tem časovnem intervalu porazdeljeno po Poissonu $\mathrm{Pois}\bigl(\lambda(1-s)\bigr)$, je verjetnost dogodka, da igralec dobi igro, enaka:

$$\lambda(1-s)\,e^{-\lambda(1-s)}\,.$$

b) Funkcija $t \mapsto t\,e^{-t}$ na intervalu $[0,1]$ narašča, pri $t = 1$ doseže maksimum e^{-1}, na intervalu $[1,\infty)$ pa pada. Namesto t zdaj vstavimo izraz $\lambda(1-s)$, ki lahko preteče interval od 0 do λ. Če je $\lambda < 1$, torej ta izraz ne more doseči 1 in maksimum je dosežen pri $s = 0$, maksimalna verjetnost, da igralec dobi igro, pa je $\lambda\, e^{-\lambda}$. Pri $\lambda \geq 1$ pa izraz $\lambda(1 - s)$ doseže vrednost 1 pri $s = (\lambda - 1)/\lambda$ in maksimalna verjetnost, da igralec dobi igro, je e^{-1}.

4. *Prvi način.* Označimo z S_F čas, ob katerem Franc dobi drugi namig, z S_D pa čas, ob katerem pride prvi izmed drugih kupcev. Franc dobi sliko, če je $S_\mathrm{F} < S_\mathrm{D}$. Velja $S_\mathrm{F} \sim \mathrm{Gama}(2, \lambda)$ in $S_\mathrm{D} \sim \mathrm{Exp}(\lambda/2)$. Gostoti teh dveh porazdelitev sta (za $x, y > 0$):

$$f_{S_\mathrm{F}}(x) = \lambda^2 x\, e^{-\lambda x}\,, \quad f_{S_\mathrm{D}}(y) = \frac{\lambda}{2}\, e^{-\lambda y/2}\,.$$

in velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_\mathrm{F} < S_\mathrm{D}) &= \int_0^\infty f_{S_\mathrm{F}}(x) \int_x^\infty f_{S_\mathrm{D}}(y)\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{\lambda^3}{2} \int_0^\infty x\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \int_x^\infty e^{-\lambda y/2}\,\mathrm{d}y = \\ &= \lambda^2 \int_0^\infty x\, e^{-3\lambda x/2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{4}{9}\,.\end{aligned}$$

Drugi način. Iz teorije markiranja sledi, da je dogodek, da Franc dobi sliko, neodvisen od združenega procesa namigov in prihodov drugih kupcev (pri čemer v združenem procesu pozabimo, kaj je namig Francu in kaj je prihod drugega kupca). Če z N_t označimo število namigov in s K_t število drugih kupcev do časa t, z F pa dogodek, da Franc dobi sliko, je torej dogodek F neodvisen od nabora slučajnih spremenljivk $N_t + K_t$, $t \geq 0$. Njegova verjetnost se potem ujema s pogojno verjetnostjo glede na kateri koli dogodek s pozitivno verjetnostjo, ki se izraža le z $N_t + K_t$. Tak je tudi dogodek $\{N_t + K_t = 2\}$ za poljuben $t > 0$. Na tem dogodku se dogodek F ujema z dogodkom, da je $N_t = 2$. Torej velja:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(N_t = 2 \mid N_t + K_t = 2) = \frac{\mathbb{P}(N_t = 2, K_t = 0)}{\mathbb{P}(N_t + K_t = 2)} = \frac{\mathbb{P}(N_t = 2)\,\mathbb{P}(K_t = 0)}{\mathbb{P}(N_t + K_t = 2)}\,.$$

Ker je $N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$, $K_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t/2)$ in $N_t + K_t \sim \mathrm{Pois}(3\lambda t/2)$, sledi:

$$\mathbb{P}(F) = \frac{\dfrac{(\lambda t)^2\, e^{-\lambda}}{2!}\, e^{-\lambda/2}}{\dfrac{\left(\frac{3\lambda t}{2}\right)^2\, e^{-3\lambda t/2}}{2!}} = \frac{4}{9}\,.$$

Tretji način. Namige in prihode drugih kupcev spet združimo v enoten proces, ki je spet Poissonov tok z intenziteto $\lambda + \frac{\lambda}{2} = \frac{3\lambda}{2}$. Pogojno na združeni proces je posamezen pojav namig Francu z verjetnostjo $\lambda \big/ \frac{3\lambda}{2} = \frac{2}{3}$ in prihod drugega kupca z verjetnostjo $\frac{\lambda}{2} \big/ \frac{3\lambda}{2}$, tipi posameznih pojavov pa so med seboj neodvisni.

Franc dobi sliko natanko tedaj, ko sta prva dva pojava v združenem procesu namiga. Po prejšnjem je pogojna verjetnost tega dogodka glede na združeni proces, enaka $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, ne glede na izid združenega procesa. Sledi, da je tudi brezpogojna verjetnost tega dogodka enaka $4/9$.

Rešitve kolokvija iz Slučajnih procesov 1 z dne 10. 6. 2011

Finančna matematika

1. a) Število zamudnikov, ki zamudijo več kot tri mesece, je porazdeljeno po Poissonu $\mathrm{Pois}(\lambda)$, kjer je:

$$\int_3^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-3}\,.$$

Verjetnost, da ni nobenega takega, pa je enaka:

$$\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-e^{-3}} \doteq 0\text{˙}951\,.$$

b) *Prvi način.* Če tako kot ponavadi z S_2 označimo prihod drugega zamudnika, z N_t pa število prihodov do časa t, velja:

$$\begin{aligned} F_{S_2 \mid N_\infty = 2}(t) &= \frac{\mathbb{P}(S_2 \le t, N_\infty = 2)}{N_\infty = 2} = \frac{\mathbb{P}(N_t = 2, N_\infty - N_t = 0)}{\mathbb{P}(N_\infty = 2)} = \\ &= \frac{\frac{(R(t))^2}{2!}\, e^{-R(t)}\, e^{-(R(\infty)-R(t))}}{\frac{(R(\infty))^2}{2!}\, e^{-R(\infty)}} = \left(\frac{R(t)}{R(\infty)}\right)^2, \end{aligned}$$

kjer je $R(t) = \int_0^t \rho(t)\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-t}$. Torej je:

$$F_{S_2 \mid N_\infty = 2}(t) = \left(1 - e^{-t}\right)^2,$$

pogojna gostota je enaka:

$$f_2(t) = F_2'(t) = 2\left(e^{-t} - e^{-2t}\right),$$

pogojna pričakovana vrednost pa:

$$\mathbb{E}(S_2 \mid N_3 = 2) = 2\int_0^\infty t\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\,.$$

Drugi način. Znano je, da sta pogojno na dogodek, da zamudita natanko dva, na slepo pomešana časa njunih zamud neodvisna, njuna porazdelitev pa je zvezna z intenziteto, ki je sorazmerna z intenziteto Poissonovega procesa. Ker je $\int_0^\infty \rho(t)\,\mathrm{d}t = 1$, je ta pogojna gostota enaka kar ρ, kumulativna porazdelitvena funkcija pa je za $t \ge 0$ enaka:

$$F(t) = \int_0^s \rho(s)\,\mathrm{d}s = 1 - e^{-t}\,.$$

Zamuda zadnjega zamudnika je seveda maksimum (pomešanih) zamud obeh zamudnikov, torej je njena pogojna kumulativna porazdelitvena funkcija enaka:

$$F_{S_2 \mid N_\infty = 2}(t) = \left(1 - e^{-t}\right)^2.$$

Nadaljujemo tako kot pri prvem načinu.

Tretji način. Znano je, da je pogojno na dogodek, da zamudita natanko dva, pogojna navzkrižna gostota njunih prihodov enaka:

$$f_{S_1,S_2|N_\infty=2}(s_1,s_2) = \begin{cases} 2! \, \dfrac{\rho(s_1)\,\rho(s_2)}{R(\infty)} & ; \; 0 \le s_1 \le s_2 \\ 0 & ; \; \text{sicer} \end{cases} ,$$

kjer sta ρ in R tako kot pri prvem načinu. Za $0 \le s_2 \le s_2$ torej velja:

$$f_{S_1,S_2|N_\infty=2}(s_1,s_2) = 2\, e^{-s_1-s_2} \, .$$

Sledi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_2 \mid N_\infty = 2) &= \iint_{\mathbb{R}^2} s_2 f_{S_1,S_2|N_\infty=2}(s_1,s_2)\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2 = 2\int_0^\infty e^{-s_1}\int_{s_1}^\infty s_2\, e^{s_2}\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_1 = \\ &= 2\int_0^\infty (s_1+1)\,e^{-2s_1}\,\mathrm{d}s_1 = \frac{3}{2} \, . \end{aligned}$$

2. Označimo z W_t skupni znesek glob, ki jih mora lastnik restavracije plačati do časa t. To je prenovitveni proces z “nagradami” $R_1, R_2, \ldots$, ki imajo pričakovane vrednosti $10 \cdot (10-c)_+^2$, in medprihodnimi časi $T_1, T_2, \ldots$, ki imajo pričakovano vrednost 60 dni. Torej skoraj gotovo velja:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = \frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = \frac{(10-c)_+^2}{6} \, .$$

Če s C_t označimo lastnikove stroške z vzdrževanjem z globami vred, velja $C_t = ct + W_t$, torej skoraj gotovo velja:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C_t}{t} = f(c) := c + \frac{(10-c)_+^2}{6} \, .$$

Za $c \in [10,\infty)$ je $f(c)$ naraščajoča funkcija, za $c \in [0,10]$ pa po odvajanju:

$$f'(c) = \frac{c-7}{3}$$

dobimo, da je minimum dosežen pri $c = 7$.

3. Označimo $M(t) := \mathbb{E}(N_t)$. Gre za prenovitveni proces z zaostankom, pri čemer ima prvi (med)prihodni čas porazdelitev $\mathrm{Gama}(2,\lambda)$, ki ima Laplaceovo transformiranko:

$$\hat{G}(z) = \frac{\lambda^2}{(z+\lambda)^2} \, ,$$

nadaljnji medprihodni časi pa imajo eksponentno porazdelitev $\mathrm{Exp}(\lambda)$ z Laplaceovo transformiranko:

$$\hat{F}(z) = \frac{\lambda}{z+\lambda} \, .$$

Laplace–Stieltjesova transformiranka prenovitvene mere je torej enaka:

$$\hat{M}(z) = \frac{\hat{G}(z)}{1 - \hat{F}(z)} = \frac{\lambda^2}{z(z+\lambda)} = \frac{\lambda}{z} - \frac{\lambda}{z+\lambda}\,,$$

prenovitvena mera sama pa znaša:

$$M(t) = \lambda \int_0^t \mathrm{d}s - \lambda \int_0^s e^{-\lambda s}\,\mathrm{d}s = \lambda t - 1 + e^{-\lambda t}\,.$$

4. a) Če s $T_1, T_2, \ldots$ označimo medprihodne čase, velja $\mathbb{E}(T_i) = \frac{4}{3}$, torej $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(T_1)} = \frac{4}{3}$.

b) Ker je medprihodni čas navzgor omejen z 1, varnostnik v dveh urah skoraj gotovo obišče sef vsaj dvakrat. Če ga torej je v prvi uri in pol obhodil natanko enkrat, ga bo v naslednje pol ure skoraj gotovo vsaj še enkrat. Iskana pogojna verjetnost je torej enaka nič.

Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 1. 7. 2011

Finančna matematika

1. Označimo z N_t število klicev do časa t. Tedaj je $N_t \sim \mathrm{Pois}(t/4)$.

a) Iskana verjetnost je enaka:

$$\mathbb{P}(N_{12} \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(N_{12} = 0) - \mathbb{P}(N_{12} = 1) = 1 - e^{-3}(1+3) \doteq 0{\cdot}801\,.$$

b) Iskana pogojna verjetnost je enaka:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_4 \geq 1 \mid N_{12} \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(N_4 = 0 \mid N_{12} \geq 2) = \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}(N_4 = 0, N_{12} \geq 2)}{\mathbb{P}(N_{12} \geq 2)} = \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}(N_4 = 0, N_{12} - N_4 \geq 2)}{\mathbb{P}(N_{12} \geq 2)}\,.\end{aligned}$$

Zaradi neodvisnosti je:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_4 \geq 1 \mid N_{12} \geq 2) &= 1 - \frac{\mathbb{P}(N_4 = 0)\,\mathbb{P}(N_{12} - N_4 \geq 2)}{\mathbb{P}(N_{12} \geq 2)} = \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}(N_4 = 0)\big(1 - \mathbb{P}(N_{12} - N_4 = 0) - \mathbb{P}(N_{12} - N_4 = 1)\big)}{\mathbb{P}(N_{12} \geq 2)}\end{aligned}$$

Ker je $N_4 \sim \mathrm{Pois}(1)$ in $N_{12} - N_4 \sim \mathrm{Pois}(2)$, je končno:

$$\mathbb{P}(N_4 \geq 1 \mid N_{12} \geq 2) = 1 - \frac{e^{-1}\big(1 - e^{-2}(1+2)\big)}{\mathbb{P}(N_{12} \geq 2)} \doteq 0{\cdot}727\,.$$

2. a) Velja $S = U + V$, kjer je U čas, ki ga potrebuje Pepe, da ujame svojo prvo ribo, V pa je čas, ki ga od trenutka, ko Pepe ujame svojo prvo ribo, potrebuje Rudi, da ujame ribo. Seveda je $U \sim \mathrm{Exp}(2)$, zaradi krepke lastnosti Markova pa je tudi $V \sim \mathrm{Exp}(3)$, poleg tega pa je V neodvisna od U. Torej je:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}(U) + \mathbb{E}(V) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\,, \\ \mathrm{var}(S) &= \mathrm{var}(U) + \mathrm{var}(V) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}\,.\end{aligned}$$

b) Dogodek, da je Rudi ujel ribo že pred Pepetom, je enak dogodku, da je bila prva ujeta riba Rudijeva. Verjetnost tega dogodka pa je $\dfrac{3}{2+3} = \dfrac{3}{5}$.

3. Če z N_t označimo število prihodov do časa t, velja:

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = \exp\left(-\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{1+u}\right) = \frac{1}{1+t}\,.$$

Po odvajanju dobimo porazdelitveno gostoto:

$$f_{T_1}(t) = \frac{1}{(1+t)^2}\,.$$

Nadalje velja:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_2 > s \mid T_1 = t) &= \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = 0 \mid T_1 = t) = \exp\left(-\int_t^{t+s} \frac{\mathrm{d}u}{1+u}\right) = \\ &= \frac{1+t}{1+t+s}\,.\end{aligned}$$

Z integracijo dobimo brezpogojno preživetveno funkcijo:

$$\mathbb{P}(T_2 > s) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_2 > s \mid T_1 = t) f_{T_1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t+s)} = \frac{\ln(1+s)}{s}$$

in po odvajanju spet porazdelitveno gostoto:

$$f_{T_2}(s) = \frac{(1+s)\ln(1+s) - s}{s^2(1+s)}\,.$$

4. Gre za prenovitveni proces z nagradami, kjer so medprihodni časi $T_1, T_2, \ldots$ dolžine Manjinih telefonskih pogovorov s posameznimi strankami, nagrada R_i pa je enaka 1, če Manja izdelek proda, sicer pa 0. Očitno je $\tau \le 1/2$. Torej velja:

$$F_{T_i}(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 3(t - t^2) & ;\ 0 \le t < \tau \\ 1 & ;\ t \ge \tau \end{cases}\,.$$

Torej slučajna spremenljivka T_i ni niti diskretna niti zvezna. Vseeno pa lahko izračunamo njeno matematično upanje.

Prvi način: razbijemo na zvezni in diskretni del:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_i) &= \int_0^\tau t\,F'_{T_i}(t)\,\mathrm{d}t + \tau\big(F_{T_i}(\tau) - F_{T_i}(\tau^-)\big) = \\ &= \int_0^\tau (3t - 6t^2)\,\mathrm{d}t + \tau(1 - 3\tau + 3\tau^2) = \\ &= \tau - \frac{3\tau^3}{2} + \tau^3\,.\end{aligned}$$

Drugi način: izberemo slučajno spremenljivko $\tilde{T}$, katere kumulativna porazdelitvena funkcija je absolutno zvezna in se na intervalu $[0, \tau)$ ujema s kumulativno porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke T_i. Tedaj je T_i enako porazdeljena kot $\min\{\tilde{T}, \tau\}$, zato je:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_i) &= \mathbb{E}\big[\min\{\tilde{T}, \tau\}\big] = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \min\{t, \tau\}\, f_{\tilde{T}}(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_{-\infty}^{\tau} t\, f_{\tilde{T}}(t)\,\mathrm{d}t + \tau \int_{\tau}^{\infty} f_{\tilde{T}}(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_{0}^{\tau} t\, F'_{\tilde{T}}(t)\,\mathrm{d}t + \tau\big(1 - F_{\tilde{T}}(\tau)\big) = \\
&= \int_{0}^{\tau} t\, F'_{T_i}(t)\,\mathrm{d}t + \tau\big(F_{T_i}(\tau) - F_{T_i}(\tau^-)\big)\,,
\end{aligned}$$

kar je isto kot prej.

Tretji način: upoštevamo, da, ker je $T_i \geq 0$, velja:

$$\mathbb{E}(T_i) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(T_i > t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\tau} (1 - 3t + 3t^2)\,\mathrm{d}t = \tau - \frac{3\tau^3}{2} + \tau^3\,,$$

kar je spet isto kot prej.

Dogodek, da je $R_i = 1$, je enak dogodku, da Manji uspe prepričati kupca do časa τ. Torej je:

$$\mathbb{E}(R_i) = \mathbb{P}(R_i = 1) = 3(\tau - \tau^2)\,.$$

Če z W_t označimo število prodanih izdelkov do časa t, skoraj gotovo velja:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = \frac{\mathbb{E}(R_1)}{\mathbb{E}(T_1)} = \frac{6(1-\tau)}{2 - 3\tau + 2\tau^2} =: h(\tau)\,.$$

Iz:

$$h'(\tau) = \frac{6(2\tau^2 - 4\tau + 1)}{(\tau^2 - 3\tau + 2)^2}$$

dobimo, da funkcija h na intervalu $[0, 1/2]$ doseže maksimum pri $\tau = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0{}^{\cdot}293$.

Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 22. 8. 2011

Finančna matematika

1. Če Frančeve košnje trave pogledamo od trenutka čez 15 dni nazaj, le-te prav tako tvorijo homogen Poissonov proces z intenziteto ene košnje na 5 dni, le da mu moramo dodati še pravkaršnjo košnjo. Če torej z z A označimo čas zadnje košnje v prihodnjih 15 dneh, ima A isto porazdelitev kot $\min\{T, 15\}$, kjer je $T \sim \mathrm{Exp}(1/5)$ (slučajna spremenljivka A predstavlja *starost* Poissonovega procesa košenj). Torej velja:

$$\mathbb{E}(A) = \frac{1}{5}\int_0^{15} t\, e^{-t/5}\,\mathrm{d}t + \frac{15}{5}\int_{15}^{\infty} e^{-t/5}\,\mathrm{d}t = 5 - 5\,e^{-3}\,.$$

Višina trave je enaka $2A$, torej bo njena pričakovana vrednost enaka $2\,\mathbb{E}(A) = 10 - 10\,e^{-3} \doteq 9{\cdot}50\,\mathrm{cm}$.

2. Velja $D = \max\{S_2, T_1\}$, kjer je S_2 čas, ko Stanka nabere drugega jurčka, T_1 pa je čas, ko Tone ujame svojo (edino) postrv. Slučajni spremenljivki S_2 in T_1 sta neodvisni, pri čemer je $S_2 \sim \mathrm{Gama}(2, 2)$ in $T_1 \sim \mathrm{Exp}(1)$. Za $t > 0$ torej velja:

$$\begin{aligned} f_{S_2}(t) &= 4t\,e^{-2t}\,, & F_{S_2}(t) &= 1 - (2t+1)\,e^{-2t}\,,\\ f_{T_1}(t) &= e^{-t}\,, & F_{T_1}(t) &= 1 - e^{-t}\,. \end{aligned}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} F_D(t) &= F_{S_2}(t)\,F_{T_1}(t) = 1 - e^{-t} - (2t+1)e^{-2t} + (2t+1)e^{-3t}\,,\\ f_D(t) &= e^{-t} + 4t\,e^{-2t} - (6t+1)e^{-3t}\,. \end{aligned}$$

3. a) Označimo z N_t število zamudnikov, ki pridejo do vključno časa t. Za $t \le s$ je torej $N_s - N_t$ število zamudnikov, ki pridejo z zamudo med t in s. Velja:

$$\begin{aligned} N_t &\sim \mathrm{Exp}\left(\int_0^t e^{-u}\,\mathrm{d}u\right) = \mathrm{Exp}\big(1 - e^{-t}\big)\,,\\ N_s - N_t &\sim \mathrm{Exp}\left(\int_t^s e^{-u}\,\mathrm{d}u\right) = \mathrm{Exp}\big(e^{-t} - e^{-s}\big)\,, \end{aligned}$$

poleg tega pa sta N_t in $N_s - N_t$ neodvisni. Definicijo lahko razširimo na $s = \infty$: $N_\infty - N_t$ je število vseh zamudnikov, ki zamudijo več kot t, in velja $N_\infty - N_t \sim \mathrm{Exp}(e^{-t})$.

Dogodek, da pride natanko en zamudnik in zamudi več kot dva meseca, lahko zapišemo kot:

$$A := \{N_2 = 0, N_\infty - N_2 = 1\}\,.$$

Zaradi neodvisnosti je njegova verjetnost enaka:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(N_2 = 0)\,\mathbb{P}(N_\infty - N_2 = 1) = e^{e^{-2}-1}\,e^{-2}\,e^{-e^{-2}} = e^{-3} \doteq 0{\cdot}0498\,.$$

b) Označimo z Z zamudo edinega zamudnika in začnimo računati pogojno kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$\begin{aligned} F_{Z|A}(t) &= \mathbb{P}(Z \le t \mid A) = \\ &= \mathbb{P}(N_t \ge 1 \mid A) = \\ &= \frac{\mathbb{P}(N_t \ge 1, N_2 = 0, N_\infty - N_2 = 1)}{\mathbb{P}(N_2 = 0, N_\infty - N_2 = 1)} . \end{aligned}$$

Za $t \le 2$ je $F_{Z|A}(t) = 0$, za $t \ge 2$ pa velja:

$$\begin{aligned} F_{Z|A}(t) &= \frac{\mathbb{P}(N_2 = 0, N_t - N_2 = 1, N_\infty - N_t = 0)}{\mathbb{P}(N_2 = 0, N_\infty - N_2 = 1)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(N_2 = 0)\,\mathbb{P}(N_t - N_2 = 1)\,\mathbb{P}(N_\infty - N_t = 0)}{\mathbb{P}(N_2 = 0)\,\mathbb{P}(N_\infty - N_2 = 1)} = \\ &= 1 - e^{2-t} . \end{aligned}$$

Za izračun pogojne pričakovane zamude imamo več možnosti. Lahko izračunamo gostoto:

$$f_{Z|A}(t) = e^{2-t}$$

in z integriranjem dobimo:

$$\mathbb{E}(Z \mid A) = \int_2^\infty t\, e^{2-t}\, \mathrm{d}t = 3 .$$

Lahko ga dobimo tudi neposredno iz preživetvene funkcije:

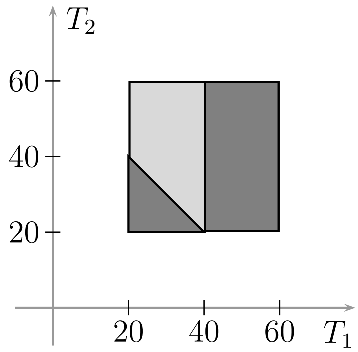
$$\mathbb{E}(Z \mid A) = \int_0^\infty \bigl(1 - F_{Z|A}(t)\bigr)\, \mathrm{d}t = 2 + \int_2^\infty e^{2-t}\, \mathrm{d}t = 3 .$$

Lahko pa tudi opazimo, da se pogojna porazdelitev ujema z eksponentno porazdelitvijo Exp(1), pomaknjeno za 2 v desno, in prav tako dobimo pogojno pričakovano zamudo 3 mesece.

4. a) Prihodi avtobusa tvorijo prenovitveni proces. Če medprihodne čase označimo s $T_1, T_2, \ldots$, je asimptotično dolgoročno število prihodov na uro enako:

$$\frac{1}{\mathbb{E}(T_1)} = \frac{3}{2} .$$

b) Dogodek, da bodo Peteršiljčkovi čakali manj kot 20 minut, lahko zapišemo kot $\{T_1 \ge 40\,\mathrm{min}\} \cup \{T_1 + T_2 < 1\,\mathrm{h}\}$. To lahko prikažemo na naslednjem diagramu:



in iz razmerja ploščin razberemo, da je iskana verjetnost enaka 5/8.

Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 5. 9. 2011

Finančna matematika

1. Če igralec pritisne na gumb ob času t, je verjetnost, da bo dobil nagrado, enaka $1 - e^{-(3-t)}$, torej je pričakovana vrednost njegove nagrade enaka:

$$f(t) = \big(e^t - 1\big)\big(1 - e^{t-3}\big)$$

Iz:

$$f'(t) = -2\,e^{2t-3} + (e^{-3} + 1)e^t$$

dobimo, da je maksimum dosežen pri $t = \ln\dfrac{e^3 + 1}{2} \doteq 2{\cdot}355$ oziroma približno 2 min 21 s.

2. *Prvi način.* Naj bo T_1 čas, ko pride prva neprijazna stranka. Ker neprijazne stranke prihajajo z intenziteto $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$ stranke na uro, je $T_1 \sim \mathrm{Exp}(1/2)$. Iz krepke lastnosti Markova sledi, da je pogojno na T_1 število strank, ki pridejo za prvo neprijazno stranko, porazdeljeno po Poissonu $\mathrm{Pois}\big(2(1 - T_1)\big)$, če je seveda $T_1 \le 1$. Če torej z A označimo dogodek, da pride natanko ena neprijazna stranka, za njo pa nobena stranka več, velja:

$$\mathbb{P}(A_1 \mid T_1) = \begin{cases} e^{-2(1-T_1)} & ;\ T_1 \le 1 \\ 0 & ;\ T_1 > 1 \end{cases}.$$

Torej je:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t/2}\,e^{-2(1-t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\,e^2}\int_0^1 e^{3t/2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{3/2} - 1}{3\,e^2} \doteq 0{\cdot}236\,.$$

Drugi način. Če je N število vseh strank, ki pridejo v eni uri, je $N \sim \mathrm{Pois}(2)$. Nadalje, če spet z A označimo naš dogodek, velja $\mathbb{P}(A \mid N = 0) = 0$, za $n = 1, 2, 3, \ldots$ pa je $\mathbb{P}(A \mid N = n) = \big(\frac{3}{4}\big)^{n-1} \cdot \frac{1}{4}$. Torej je:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2^n\,e^{-2}}{n!} = \frac{1}{2\,e^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{e^{3/2} - 1}{3\,e^2}\,.$$

3. Slučajni spremenljivki N_1 in $N_2 - N_1$ neodvisni in velja:

$$N_1 \sim \mathrm{Pois}\left(\int_0^1 t\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Pois}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{in} \quad N_2 - N_1 \sim \mathrm{Pois}\left(\int_1^2 t\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Pois}\left(\frac{3}{2}\right).$$

Torej je:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N_1 N_2) &= \mathbb{E}\big(N_1^2 + N_1(N_2 - N_1)\big) = \\
&= \mathbb{E}(N_1^2) + \mathbb{E}(N_1)\,\mathbb{E}(N_2 - N_1) = \\
&= \mathrm{var}(N_1) + \big(\mathbb{E}(N_1)\big)^2 + \mathbb{E}(N_1)\,\mathbb{E}(N_2 - N_1) = \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \\
&= \frac{3}{2}\,.
\end{aligned}$$

4. a) Če s T_1 označimo čas do beračevega naslednjega prihoda, z D_t pa količino denarja, ki ga gospa Genovefa v času t da beraču, skoraj gotovo velja:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D_t}{t} = \frac{a}{\mathbb{E}(T_1)} = a(1 + a^{-2}) = a + \frac{1}{a}\,,$$

kar je minimalno pri $a = 1$.

b) Če je čas do beračevega naslednjega prihoda porazdeljen eksponentno $\mathrm{Exp}(2)$, to pomeni, da beračevi prihodi tvorijo homogen Poissonov proces z intenzivnostjo 2. Sprašujemo se po verjetnosti, da berač v eni časovni enoti pride več kot dvakrat (trikrat ali več) in verjetnost tega dogodka je enaka:

$$1 - e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!}\right) \doteq 0\text{˙}323\,.$$

Rešitve izpita iz Slučajnih procesov 1 z dne 1. 3. 2012

Finančna matematika

1. Označimo s T čas skoka tistega učenca, ki skoči drugi. Tedaj je $T > t$ natanko tedaj, ko sta do vključno časa t skočila manj kot dva učenca.

Verjetnost, da je posamezen učenec skočil do vključno časa t, je enaka $1 - e^{-t/30}$, če je čas merjen v sekundah. Število učencev, ki skočijo do vključno časa t, je torej porazdeljeno binomsko $\mathrm{Bin}\big(10, 1 - e^{-t/30}\big)$. Zato je:

$$\mathbb{P}(T > t) = \big(e^{-t/30}\big)^{10} + 10\big(1 - e^{-t/30}\big)\big(e^{-t/30}\big)^{9} = 10\,e^{-3t/10} - 9\,e^{-t/3}\,,$$

od koder dobimo kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$F_T(t) = 1 - 10\,e^{-3t/10} + 9\,e^{-t/3}\,,$$

nato gostoto:

$$f_T(t) = 3\big(e^{-3t/10} - e^{-t/3}\big)$$

in končno pričakovano vrednost:

$$\mathbb{E}(T) = 3\int_0^\infty t\big(e^{-3t/10} - e^{-t/3}\big)\,\mathrm{d}t = 57\,.$$

Pričakovani čas skoka je torej 57 sekund.

2. Od vsakega prodanega sesalnika ima družba z obrestmi vred najmanj 200 in največ 210 evrov dobička. To pomeni, da se jim, če prodajo največ en sesalec, vložek zagotovo ne povrne, če prodajo najmanj tri sesalce, pa se jim vložek zagotovo povrne. Če prodajo natanko dva sesalca, pa je to, ali se vložek povrne ali ne, odvisno od obresti: če so X_1 obresti od prvega, X_2 pa od drugega prodanega sesalca, sta X_1 in X_2 (pogojno na to, da so prodali natanko dva sesalca) neodvisni in porazdeljeni enakomerno na intervalu $[0, 10]$. Vložek se povrne, če je $X_1 + X_2 \ge 10$ in pogojna verjetnost tega dogodka je natanko $1/2$.

Naj bo N število prodanih sesalcev. Le-to je porazdeljeno po Poissonu $\mathrm{Pois}(2)$. Verjetnost, da se začetni vložek povrne, je enaka:

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(N = 0) - \mathbb{P}(N = 1) - \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(N = 2) &= 1 - \left(1 + 2 - \frac{2^2}{2!\,2}\right) e^{-2} = \\ &= 1 - 4\,e^{-2} \doteq 0{'}459\,. \end{aligned}$$

3. Najprej velja:

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \exp\left(-\int_0^t s\,\mathrm{d}s\right) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,,$$

$$\mathbb{P}(T_2 > T_1 \mid T_1) = \exp\left(-\int_{T_1}^{2T_1} s\,\mathrm{d}s\right) = \exp\left(-\frac{3T_1^2}{2}\right)\,.$$

Sledi:

$$F_{T_1}(t) = 1 - e^{-t^2/2}\,, \qquad f_{T_1}(t) = t\,e^{-t^2/2}$$

in končno:

$$\mathbb{P}(T_2 > T_1) = \int_0^\infty e^{-3t^2/2}\, f_{T_1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t\,e^{-2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\,.$$

4. Gre za prenovitveni proces z nagradami, ki so v tem primeru globe. Ker je verjetnost, da Bine v posameznem ciklu plača globo, točno $1/2$, je njena pričakovana višina v posameznem ciklu 60 evrov. Nadalje je pričakovana dolžina cikla leto in pol, torej je dolgoročni letni znesek globe enak:

$$\frac{60}{3/2} = 40 \text{ evrov.}$$