VAJE IZ MATEMATIKE 3

za fizike

Martin Raič

Datum zadnje spremembe: 27. oktober 2020

Kazalo

1. Ponovitev elementarnih integralov 3

2. Integrali s parametrom 4

3. Dvojni in trojni integral 11

4. Krivulje in ploskve 16

5. Navadne diferencialne enačbe 30

REŠITVE 46

1. Ponovitev elementarnih integralov 47

2. Integrali s parametrom 49

3. Dvojni in trojni integral 67

4. Krivulje in ploskve 78

5. Navadne diferencialne enačbe 93

1. Ponovitev elementarnih integralov

Ponovitev tehnik integriranja (substitucija, per partes) pri nedoločenih in določenih integralih. Pasti pri substituciji v določeni integral in pri posplošenih integralih.

V vseh nalogah tega razdelka izračunajte integrale.

1. $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x}\, \mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 3}{2 + 3x}\, \mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int (x^2 + x)e^{-2x+7}\, \mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x - 1}}\, \mathrm{d}x.$
5. Izračunajte določeni integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\sin x - \tfrac{1}{2}\right| \mathrm{d}x.$
6. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 1}.$
7. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x.$
8. $\displaystyle\int_0^2 \frac{(x^3 - 4x + 2)\cos(x^4 - 8x^2 + 8x + 3)}{x^4 - 8x^2 + 8x + 3}\, \mathrm{d}x.$
9. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{16 + 9\cos^2 x}.$

2. Integrali s parametrom

Odvajanje integralov s parametrom, konvergenca posplošenih integralov. Funkciji gama in beta.

1. Izračunajte integral s parametrom:

$$F(y) = \int_0^1 |2y - 3x| \, \mathrm{d}x \, .$$

Konvergenca integralov v fiksnih končnih mejah

Naj bo $a \le b$. Če zaporedje zveznih funkcij $f_1, f_2, \ldots : [a, b] \to \mathbb{R}$ **enakomerno** *konvergira proti funkciji f, velja tudi:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Zveznost integralov v fiksnih končnih mejah

Naj bo $a \le b$, $J \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f\colon [a, b] \times J \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj je integral:

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) \, \mathrm{d}x$$

zvezen na J.

2. Je funkcija $F(y) := \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2 y^2}$ zvezna? Kaj lahko sklepamo iz tega, če gledamo situacijo, ko se y bliža izhodišču?

3. Za katere α in kje je funkcija:

$$f_\alpha(x, y) := \begin{cases} \frac{1}{y^\alpha} \, x^{1/y}(1 - x) & ;\ x \in [0, 1],\ y > 0 \\ 0 & ;\ x \in [0, 1],\ y = 0 \end{cases}$$

zvezna v posamezni spremenljivki? Kaj pa kot funkcija dveh spremenljivk? Kako pa je z zveznostjo integrala $F_\alpha(y) := \displaystyle\int_0^1 f_\alpha(x, y) \, \mathrm{d}x$?

4. Izračunajte $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2 \varphi) \, \mathrm{d}\varphi - \pi \ln\bigl(y + \sqrt{y^2 - 1}\,\bigr) \right)$.

5. Izračunajte $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \varphi} \, \mathrm{d}\varphi$.

Zveznost integralov v spremenljivih končnih mejah

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ in za vsak $y \in \mathbb{R}^n$ naj bo množica $\{x \in \mathbb{R} \,;\, (x,y) \in D\}$ interval (lahko tudi prazen). Naj bo $f\colon\ D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj je integral:

$$F(y,a,b) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

zvezen na množici $\{(y,a,b) \,;\, (a,y) \in D, (b,y) \in D\}$.

6. Izračunajte $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{e^{-n}}^1 \left(1 + \frac{\ln x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$.

Odvedljivost integralov v fiksnih končnih mejah

Naj bo $a \le b$, J interval na realni osi in $f\colon\ [a,b] \times J \to \mathbb{R}$ funkcija, pri čemer naj bo $f(x,y)$ parcialno zvezno odvedljiva po y. Tedaj za $y \in J$ velja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

7. Izračunajte $F'(y)$, kjer je $F(y) := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(xy)}{x}\,\mathrm{d}x$.

   Opomba. Integral, ki ga odvajamo, je sicer po definiciji posplošen, a posplošenost se da odpraviti, saj lahko integral zapišemo v obliki:

$$F(y) = \int_0^{\pi/2} y\,S(xy)\,\mathrm{d}y\,,$$

   kjer je funkcija:

$$S(t) := \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & ;\ t \ne 0 \\ 1 & ;\ t = 0 \end{cases}$$

   zvezna na celi realni osi.

8. Za vse $|y| > 1$ izračunajte $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$.

Odvedljivost integralov v spremenljivih končnih mejah

Naj bosta I in J intervala na realni osi in $f\colon\ I \times J \to \mathbb{R}$ funkcija, pri čemer naj bo $f(x,y)$ parcialno zvezno odvedljiva po y. Nadalje naj bosta $u, v\colon\ J \to I$ odvedljivi funkciji. Tedaj za $y \in J$ velja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,\mathrm{d}x + f\big(v(y),y\big)\,v'(y) - f\big(u(y),y\big)\,u'(y)\,.$$

9. Izračunajte $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\displaystyle\int_y^{\sqrt{y}} \frac{e^{-x^2/y}}{x}\,\mathrm{d}x$.

10. Določite definicijsko območje integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}x$$

in ga izračunajte. Kaj opazite?

Enakomerna konvergenca posplošenih integralov

Naj bo $-\infty < a < b \le \infty$. **Posplošeni Riemannov integral** *v zgornjem krajišču b je limita:*

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c\uparrow b}\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

kjer je v limiti običajni Riemannov integral. Če obstaja, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $c_0 < b$, da za vse $c_0 < c < b$ velja $\left|\int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$.

Naj bosta a in b kot prej, $J \subseteq \mathbb{R}$ in $f\colon [a,b) \times J \to \mathbb{R}$ funkcija. Posplošeni Riemannov integral s parametrom $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ konvergira **enakomerno** *po $y \in J$, če obstaja za vsak $y \in J$ in če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $c_0 < b$, da za vse $c_0 < c < b$ in vse $y \in J$ velja $\left|\int_c^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$. Ekvivalentno, integral konvergira enakomerno, če je:*

$$\lim_{c\uparrow b}\sup_{y\in J}\left|\int_c^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| = 0\,.$$

Podobno definiramo tudi enakomerno konvergenco posplošenih integralov v spodnjem krajišču. Posplošeni integral v obeh krajiščih obravnavamo tako, da integral razdelimo na dva dela.

Zveznost enakomerno konvergentnih posplošenih integralov

Naj bo $I = [a,b)$, $(a,b]$ oziroma (a,b). Če je $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in posplošeni Riemannov integral $F(y) := \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ (v zgornjem, spodnjem krajišču oziroma v obeh krajiščih) konvergira enakomerno za $y \in J$, je F zvezna na J.

Še več, če je f še vedno zvezna na $I \times J$, $y_0 \in J$ in posplošeni integral $F(y)$ konvergira enakomerno za $y \in J \setminus \{y_0\}$, je F zvezna v y_0.

11. Na katerih podintervalih intervala $(0,\infty)$ integral $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{y}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}x$ konvergira enakomerno?

Weierstrassov kriterij

Naj bo $-\infty < a < b \le \infty$, $J \subseteq \mathbb{R}$ *in* $f\colon [a,b) \times J \to \mathbb{R}$ *funkcija. Posplošeni Riemannov integral s parametrom* $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}y$ *konvergira enakomerno po* $y \in J$, *brž ko za vse* $y \in J$ *velja* $|f(x,y)| \le h(x)$, *kjer ima funkcija* h *končen posplošen integral* $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$. *Če je funkcija* $s(x) := \sup_{y \in J} |f(x,y)|$ *integrabilna na vseh intervalih* $[a,c]$, *kjer je* $a \le c < b$, *se pogoj prevede na obstoj posplošenega integrala* $\int_a^b s(x)\,\mathrm{d}x$.

Podobno velja tudi za enakomerno konvergenco posplošenih integralov v spodnjem krajišču in obeh krajiščih.

12. Za $x, y \ge 1$ definirajmo:

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & ; \ x < y \\ e^{-(x-y)y} & ; \ x \ge y\,. \end{cases}$$

Ali posplošeni integrali $\int_1^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$ konvergirajo enakomerno po $y \ge 1$? Ali izpolnjujejo Weierstrassov kriterij?

13. Utemeljite, da integral $F(y) := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ obstaja tudi za $y = 1$ in da je tam zvezen.

14. Izračunajte $\displaystyle\lim_{R\to\infty} R \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$.

Odvajanje posplošenih integralov

Oglejmo si posplošeni integral:

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,,$$

kjer je $-\infty \le a < b \le \infty$, $y \in J$, J *pa je interval na realni osi. Privzemimo:*

- *Posplošeni integral* $F(y)$ *obstaja za* **neki** $y \in J$.
- *Za vse* $x \in (a,b)$ *in vse* $y \in J$ *je* $f(x,y)$ *zvezna v* (x,y).
- *Za vse* $x \in (a,b)$ *in vse* y *iz notranjosti intervala* J *je* $f(x,y)$ *parcialno odvedljiva po* y, *parcialni odvod* $f_y(x,y)$ *pa je zvezen v* (x,y).
- *Posplošeni integral* $\int_a^b f_y(x,y)\,\mathrm{d}x$ *konvergira enakomerno po* J.

Tedaj posplošeni integral $F(y)$ *obstaja za* **vse** $y \in J$, *konvergira enakomerno na vseh končnih podintervalih intervala* J *in lahko ga odvajamo pod integralskim znakom:*

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

15. Utemeljite, da integral:
$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$
obstaja za vse $y \in \mathbb{R}$, in ga izračunajte.

16. Naj bo $y = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$. Za $x > 0$ izračunajte $y'' + y$.

17. Utemeljite, da integral:
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a)^2}$$
obstaja za vse $a > 0$, in ga izračunajte.

18. Dan je integral s parametrom:
$$I(a) := \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(a^2x) - \operatorname{arctg}(ax)}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$
    a) Določite konvergenčno območje K danega integrala.
    b) Za vse $a \in K$ izračunajte $I(a)$.
    c) Ali integral na K konvergira *enakomerno*?

19. Dan je integral s parametrom:
$$I(a) = \int_0^\infty e^{-x^2}|x-a|\,\mathrm{d}x\,.$$
    a) Določite konvergenčno območje integrala.
    b) Pokažite, da integral konvergira enakomerno na omejenih podmnožicah konvergenčnega območja.
    c) Izračunajte $I'(0)$. Odgovor utemeljite!

Fubinijev izrek (osnovna različica)

Za vsako zvezno funkcijo $f\colon\ [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ velja:
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

20. Za $a, b \ge 0$ izračunajte integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x$. Gre tu za osnovni ali posplošeni Riemannov integral?

Fubinijev izrek (splošna različica)

Dana naj bo funkcija $f\colon (a,b)\times(c,d)\to\mathbb{R}$*, ki izpolnjuje naslednje pogoje:*

- *Za vsak* $y\in(c,d)$ *naj obstaja posplošeni Riemannov integral* $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$*, funkcija* $y\mapsto\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ *pa naj bo Riemannovo integrabilna na končnih podintervalih intervala* (c,d)*.*
- *Za vsak* $x\in(c,d)$ *naj obstaja posplošeni Riemannov integral* $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$*, funkcija* $x\mapsto\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ *pa naj bo Riemannovo integrabilna na končnih podintervalih intervala* (a,b)*.*
- *Obstaja naj bodisi* $\int_c^d\int_a^b|f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ *bodisi* $\int_a^b\int_c^d|f(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ *(v prvem primeru to pomeni, da za vsak* $y\in(c,d)$ *obstaja posplošeni Riemannov integral* $\int_a^b|f(x,y)|\,\mathrm{d}x$*, za funkcijo* $y\mapsto\int_a^b|f(x,y)|\,\mathrm{d}x$ *pa obstaja posplošeni integral od* c *do* d*).*

Tedaj velja:

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

t. j. oba posplošena integrala obstajata in sta enaka.

21. Utemeljite, da rezultat prejšnje naloge v resnici velja za vse $a,b>-1$.

22. Za $a,b>0$ izračunajte integral $\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

23. Izračunajte integral $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Ali v njem lahko zamenjamo vrstni red integracije? Kateri pogoji splošne različice Fubinijevega izreka so izpolnjeni?

Funkcija gama

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$n!=\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\Gamma(s+1)=s\,\Gamma(s)$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

24. Izračunajte $\displaystyle\int_0^\infty x^9\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

25. Izračunajte $\displaystyle\int_0^1(\ln x)^4\sqrt{-\ln x}\,\mathrm{d}x$.

26. Za $a \geq 0$ izračunajte integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Vse korake utemeljite.

Funkcija beta

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$$

27. Izračunajte $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

28. Izračunajte $\displaystyle\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u$$

29. Izračunajte $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^5}{1+x^{12}}\,\mathrm{d}x$.

$$\mathrm{B}(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\varphi\;\sin^{2y-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

30. Izračunajte $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\sin^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi$.

31. Izračunajte $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2\varphi\sin^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi$.

32. Izračunajte integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}^a\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi$. Za katere a obstaja?

33. Izračunajte limito $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0}\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+t^4}\,\mathrm{d}t$.

3. Dvojni in trojni integral

Prevedba na dvakratni oz. trikratni integral, zamenjava vrstnega reda integracije. Vpeljava novih koordinat. Polarne, cilindrične in sferične koordinate. Krivuljni in ploskovni integral skalarnega polja. Uporaba: volumen, masa, težišče, vztrajnostni moment.

Dvojni integral

Če je ravninsko območje D podano s pogojema $a < x < b$, $g_1(x) < y < g_2(x)$, kjer je $g_1(x) < g_2(x)$, brž ko je $a < x < b$, dvojni integral spremenljivke $u = f(x, y)$ po tem območju prevedemo na dvakratnega na naslednji način:

$$\iint_D u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_{\substack{a<x<b \\ g_1(x)<y<g_2(x)}} f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \,.$$

Če x in y tvorita kartezijski koordinatni sistem v ravnini, v kateri si predstavljamo lik, je $\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ **diferencial ploščine***: $\mathrm{d}P = \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$.*

Podobno tudi večterne integrale prevedemo na večkratne. Če koordinate x, y in z tvorijo kartezijski koordinatni sistem v prostoru, v kateri si predstavljamo telo, je $\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$ seveda **diferencial volumna***: $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$.*

1. Izračunajte dvojni integral:

$$\iint_D (x^2 + y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,,$$

kjer je D območje, ki ga omejujeta krivulji $y = x/2$ in $x = y^2$ (t. j. območje je neprazno, omejeno, njegov rob je sestavljen iz delov teh dveh krivulj in vsaka krivulja ima svoj nezanemarljiv del na robu območja).

2. Izračunajte dvojni integral:

$$\iint_Q xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,,$$

kjer je Q štirikotnik z oglišči $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(3,1)$ in $D(1,1)$.

3. Izračunajte $\displaystyle\iiint_{\substack{x<2 \\ x^2<y<x^3 \\ y<z<xy}} \frac{1}{z} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$.

4. Izračunajte volumen telesa, ki ga določajo neenačbe:

$$x > 0 \,, \quad y^2 < z < 1 - x \,.$$

Posplošeni integral *je limita integralov, ko integracijsko območje širimo proti želenemu. Če je torej $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \cdots$ naraščajoče zaporedje območij z unijo D, je:*

$$\int_D f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lim_{n\to\infty} \int_{D_n} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,,$$

pri čemer se integral na levi razume kot posplošen, integrali na desni pa kot običajni.

Posplošeni integral lahko obstaja ali pa tudi ne. Obstoj in vrednost integrala sta lahko odvisna od tega, na kakšen način širimo integracijsko območje proti D, torej od izbire zaporedja $D_1, D_2, \ldots$ z unijo D. Toda:

- *Če integriramo nenegativno funkcijo, sta obstoj in vrednost neodvisna od izbire zaporedja.*
- *Če obstaja integral absolutne vrednosti funkcije, obstaja tudi integral prvotne funkcije in njegova vrednost je neodvisna od izbire zaporedja.*

5. Izračunajte $\displaystyle\iint_{x>2y>0} e^{-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

6. Izračunajte $\displaystyle\iint_{\substack{y<2x\\x<2y}} \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

7. Za $a, b > 0$ izračunajte $\displaystyle\iint_{x>y>0} y^{a-1}(x-y)^{b-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Vpeljava novih spremenljivk

Naj bo $G = (g,h)\colon\ \Delta \to D$, kjer je $D, \Delta \subseteq \mathbb{R}^2$, bijektivna preslikava. Tedaj velja:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta f\big(g(u,v), h(u,v)\big)\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

kjer je J **Jacobijeva**[1] **determinanta** *ali* **jacobiana**:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}\,.$$

Zakaj moramo pri Jacobijevi determinanti vzeti absolutno vrednost, nam ilustrira naslednji primer: če v integral $\int_1^2 x\sqrt{23-7x}\,\mathrm{d}x$ vpeljemo substitucijo $u = \sqrt{23-7x}$, $x = (23-u^2)/7$, dobimo:

$$\int_4^3 \frac{23-u^2}{7}\left(-\frac{2}{7}\,u\,\mathrm{d}u\right) = \frac{2}{49}\int_3^4 (23-u^2)u\,\mathrm{d}u\,.$$

V duhu integrala, s katerim delamo sedaj, pa bi substitucijo uvedli takole:

$$\int_{(1,2)} x\sqrt{23-7x}\,\mathrm{d}x = \int_{(3,4)} \frac{23-u^2}{7}\left|-\frac{2}{7}\,u\right|\,\mathrm{d}u = \frac{2}{7}\int_{(3,4)} (23-u^2)u\,\mathrm{d}u\,.$$

[1] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), nemški matematik judovskega rodu

8. Izračunajte $\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kjer je D območje, ki leži v kvadrantu $x > 0, y > 0$ ter ga omejujejo krivulje $x = y$, $x = 9y$, $xy = 1$ in $xy = 4$.

Polarne koordinate

$$x = r\cos\varphi \qquad r > 0$$
$$y = r\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$
$$J = r$$

Namesto mej od 0 do 2π lahko vzamemo kateri koli interval dolžine 2π.

9. Izračunajte $\displaystyle\iint_{\substack{x,y>0\\ x^2+y^2<4}} \frac{xy}{\big(1+(x^2+y^2)^2\big)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

10. Izračunajte ploščino območja v ravnini, določenega s pogoji:

$$0 < x < y\sqrt{3}\,, \quad (x^2+y^2)^3 < 4xy(x^2-y^2)\,.$$

11. Naj bo $a > 0$. Izračunajte trojni integral $\iiint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kjer je D telo, določeno s pogoji:

$$0 < x < a\,, \qquad y^2 + z^2 < 2xz\,.$$

12. Izračunajte $\iint_D \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kjer je D krog s središčem v izhodišču in polmerom $\sqrt{2}$.

Cilindrične koordinate

$$x = r\cos\varphi \qquad r > 0$$
$$y = r\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$
$$z = z \qquad J = r$$

13. Izračunajte $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2<3} \frac{x^2}{1+x^2z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Sferične koordinate

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi & r &> 0 \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi & 0 &\le \varphi \le 2\pi \\ z &= r\cos\theta & 0 &\le \theta \le \pi \end{aligned}$$

$$J = r^2 \sin\theta$$

14. Izračunajte $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\le z} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

15. Izračunajte volumen telesa, določenega s pogoji:

$$x^2+y^2+z^2 \le 1\,, \quad x^2+y^2 \le z^2\,, \quad z \ge 0\,.$$

16. **MANJKA!**

Ravninski lik D z (lahko nehomogeno) ploščinsko gostoto σ ima **maso***:*

$$m = \iint_D \sigma\,\mathrm{d}P\,,$$

in **težišče** (x^*, y^*)*, kjer je:*

$$x^* = \frac{1}{m}\iint_D \sigma\,x\,\mathrm{d}P\,, \quad y^* = \frac{1}{m}\iint_D \sigma\,y\,\mathrm{d}P\,.$$

17. Izračunajte težišče homogenega ravninskega lika, določenega z neenačbami $x > 0$, $y > 0$, $x^{2/3} + y^{2/3} < R^{2/3}$.

18. Dana sta ravninska lika:

$$\begin{aligned} A &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - x \le \sqrt{x^2+y^2}\right\}, \\ B &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \le 1\}\,. \end{aligned}$$

Izračunajte težišče homogenega lika $A \setminus B$.

Vztrajnostni moment *ravninskega lika D:*

$$J = \iint_D \sigma(x^2+y^2)\,\mathrm{d}P$$

19. Izračunajte razmerje med vztrajnostnim momentom in maso lika, ki ga omejuje astroida $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$. Privzemite, da je homogen.

Masa tridimenzionalnega telesa D:

$$m = \iiint_D \rho \,\mathrm{d}V$$

Težišče: (x^*, y^*, z^*), *kjer je:*

$$x^* = \frac{1}{m} \iiint_D \rho\, x \,\mathrm{d}V\,, \quad y^* = \frac{1}{m} \iiint_D \rho\, y \,\mathrm{d}V\,, \quad z^* = \frac{1}{m} \iiint_D \rho\, z \,\mathrm{d}V$$

Vztrajnostni momenti okoli osi x**,** y **in** z:

$$J_x = \iiint_D \rho(y^2 + z^2) \,\mathrm{d}V\,, \quad J_y = \iiint_D \rho(x^2 + z^2) \,\mathrm{d}V\,,$$
$$J_z = \iiint_D \rho(x^2 + y^2) \,\mathrm{d}V$$

20. Dan je pokončen stožec, pri katerem je gostota premo sorazmerna z višino. Izračunajte njegovo maso, težišče in vztrajnostni moment okoli simetrijske osi.

4. Krivulje in ploskve

Ločna dolžina, naravni parameter. Spremljajoči trieder ter pripadajoče premice in ravnine. Fleksijska in torzijska ukrivljenost.

Prostorska krivulja *je množica v* $\mathbb{R}^3$*, ki se da opisati v obliki:*

$$x = f(t)\,, \quad y = g(t)\,, \quad z = h(t) \qquad \text{oziroma} \qquad \vec{r} = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{bmatrix}\,,$$

kjer t *preteče določen interval,* f*,* g *in* h *pa so dovolj lepe funkcije. Tudi prostorsko krivuljo lahko predstavimo v kakšni drugi obliki, npr. implicitni ali eksplicitni.*

Tangenta *je premica, ki gre skozi dano točko na krivulji, smerni vektor pa se ujema z odvodom krajevnega vektorja po parametru. Če krajevni vektor točke na tangenti označimo* $\vec{R} = (X, Y, Z)$*, ima tangenta enačbo* $\vec{R} = \vec{r} + u\dot{\vec{r}}$*. Tangenta je neodvisna od parametrizacije.*

1. Parametrizirajte krivuljo:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

in zapišite enačbo tangente pri $x = 1, y < 0, z > 0$.

Ločna dolžina prostorske krivulje od a *do* b*,* $a \le b$*:*

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t$$

Naravni parameter:

$$\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

Naravni parameter, ki določa isto orientacijo:

$$\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Odvajanje po naravnem parametru:

$$u' = \frac{\dot{u}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$

2. Dana je prostorska krivulja:

$$x = 2t\,, \quad y = t^2\,, \quad z = \frac{t^3}{3}$$

a) Izračunajte dolžino krivulje v razponu od $t = 0$ do $t = 3$.

b) V izhodišču izračunajte w'', kjer je $w = x^2 + 4y^2 + 9z^2$, s črtico ($'$) pa je označen odvod po naravnem parametru.

Spremljajoči trieder prostorske krivulje

Spremljajoči trieder v dani točki je naslednja trojica enotskih vektorjev:

- **Tangentni vektor** $\vec{T}$ *je smer krivulje, skladna z orientacijo.*
- **Normalni vektor** $\vec{N}$ *je smer spreminjanja tangentnega vektorja.*
- *Vektorja* $\vec{T}$ *in* $\vec{N}$ *določata in orientirata* **pritisnjeno ravnino**. **Binormalni vektor** $\vec{B}$ *je pravokoten na to ravnino in usmerjen skladno z njeno orientacijo: velja* $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$.

Spremljajoči trieder se izraža na naslednji način:

$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}}\|}\,, \qquad \vec{B} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\|}\,, \qquad \vec{N} = \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}}{\|(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}\|} = \vec{B} \times \vec{T}\,.$$

Spremljajoči trieder določa ustrezne premice – tangento, normalo in binormalo. Poleg tega pa določa tudi ravnine:

- **Pritisnjena ravnina** *je določena s* $\vec{T}$ *in* $\vec{N}$ *ter je pravokotna na* $\vec{B}$.
- **Normalna ravnina** *je določena z* $\vec{N}$ *in* $\vec{B}$ *ter je pravokotna na* $\vec{T}$.
- **Rektifikacijska ravnina** *je določena z* $\vec{B}$ *in* $\vec{T}$ *ter je pravokotna na* $\vec{N}$.

3. Dana je krivulja:

$$x = \frac{t^4}{4}\,, \quad y = \frac{t^3}{3}\,, \quad z = \frac{t^2}{2}\,.$$

a) V vseh točkah določite spremljajoči trieder.

b) Pri $t = 1$ določite še binormalo in pritisnjeno ravnino.

Ukrivljenosti prostorske krivulje

Hitrost spreminjanja spremljajočega triedra merimo z dvema ukrivljenostma. Merimo glede na naravni parameter. **Fleksijska ukrivljenost** *ali* **upognjenost** *meri spreminjanje tangentnega vektorja,* **torzijska ukrivljenost** *ali* **zvitost** *pa spreminjanje binormalnega vektorja oz. pritisnjene ravnine. Z njima je možno opisati tudi spreminjanje normalnega vektorja. Natančneje, veljajo* **Frenet[2]–Serretove[3] formule***:*

$$\vec{T}' = \kappa \vec{N}\,, \quad \vec{B}' = -\omega \vec{N}\,, \quad \vec{N}' = -\kappa \vec{T} + \omega \vec{B}\,.$$

Sicer pa se ukrivljenosti izražata na naslednji način:

$$\kappa = \frac{\left\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right\|}{\left\|\dot{\vec{r}}\right\|^3}\,, \qquad \omega = \frac{\left\langle \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}},\, \dddot{\vec{r}} \right\rangle}{\left\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right\|^2} = \frac{\left[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}\right]}{\left\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right\|^2}\,.$$

4. Parametrizirajte krivuljo:

$$y = e^z \sin z\,, \qquad x^2 + y^2 = e^{2z}$$

   ter pri $z = 0, x > 0$ določite fleksijsko in torzijsko ukrivljenost.

5. Parametrizirajte krivuljo:

$$K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + 2y^2 = z(2-z),\ \ z = 1 - x,\ \ z \in \left[1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}},\, 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right]\right\}$$

   ter pri $z = 1, y > 0$ določite fleksijsko in torzijsko ukrivljenost.

---

[2] Jean Frédéric Frenet (1816–1900), francoski matematik, astronom in meteorolog

[3] Joseph-Alfred Serret (1819–1885), francoski matematik

Ploskev *je množica v* $\mathbb{R}^3$*, ki se da opisati v obliki:*

$$x = f(u,v)\,, \quad y = g(u,v)\,, \quad z = h(u,v)$$

oziroma:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \\ h(u,v) \end{bmatrix} ,$$

kjer (u,v) *preteče določeno odprto množico,* f, g *in* h *pa so dovolj lepe funkcije – zahteve specificiramo posebej.*

Zgornjemu zapisu pravimo **parametrizacija***, spremenljivkama* u *in* v *pa* **parametra***. Ploskev pa lahko podamo tudi v kakšni drugi obliki, npr. implicitni ali eksplicitni.*

Normalni vektor $\vec{N}$ *v dani točki na ploskvi je enotski vektor, čigar smer se ujema ali pa je nasprotna smeri vektorja* $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$*. Točka je regularna, če ustrezni vektor obstaja in je različen od nič. V posamezni regularni točki sta torej možna dva normalna vektorja. Le-ta sta neodvisna od zapisa ploskve.*

Normala *na ploskev v regularni točki je premica, ki gre skozi dano točko in katere smerni vektor je enak normalnemu vektorju (torej je vzporeden vektorju* $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$*).*

Tangentna ravnina *na ploskev v regularni točki je ravnina, ki gre skozi dano točko in katere normalni vektor je enak normalnemu vektorju ploskve (torej je vzporeden vektorju* $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$*).*

6. Parametrizirajte ploskev $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ter v točki $T(3, 4, z)$, kjer je $z < 0$, poiščite normalni vektor, normalo in tangentno ravnino.

7. Dana je krivulja $\vec{r} = \begin{bmatrix} 3t \\ 3t^2 \\ 2t^3 \end{bmatrix}$.

   a) Zapišite enačbo ploskve, ki jo sestavljajo premice, ki gredo skozi posamezne točke na krivulji v smeri pripadajočega normalnega vektorja.

   b) Poiščite *evoluto* te krivulje, t. j. krivulje, ki jo sestavljajo središča *pritisnjenih krogov*, t. j. krogov, ki se dotikajo dane krivulje, so vzporedni z ustreznimi pritisnjenimi ravninami in imajo polmere, ki se ujemajo s pripadajočimi krivinskimi polmeri krivulje, torej recipročnimi vrednostmi fleksijskih ukrivljenosti.

Krivuljni integral skalarnega polja *$w = \Phi(x, y, z)$ po krivulji K, parametrizirani v vektorski obliki $\vec{r} = (x, y, z) = \vec{\varphi}(t)$, ko t preteče interval (a, b), je definiran po predpisu:*

$$\int_K w \, \mathrm{d}s = \int_a^b \Phi(\vec{r}) \, \|\dot{\vec{r}}\| \, \mathrm{d}t = \int_a^b \Phi\big(\vec{\varphi}(t)\big) \, \|\dot{\vec{\varphi}}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

in je neodvisen od parametrizacije.
Če parametrizacijo zapišemo po komponentah:

$$x = f(t) \,, \quad y = g(t) \,, \quad z = h(t) \,,$$

se integral izraža v obliki:

$$\begin{aligned} \int_K w \, \mathrm{d}s &= \int_a^b \Phi(x, y, z) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \, \mathrm{d}t = \\ &= \int_a^b \Phi\big(f(t), g(t), h(t)\big) \sqrt{\big(\dot{f}(t)\big)^2 + \big(\dot{g}(t)\big)^2 + \big(\dot{h}(t)\big)^2} \, \mathrm{d}t \,. \end{aligned}$$

8. Izračunajte $\displaystyle\int_K \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, \mathrm{d}s$, kjer je K prvi zavoj standardne Arhimedove spirale:

$$x = \alpha \cos \alpha \,, \quad y = \alpha \sin \alpha \,, \quad z = 0 \,; \qquad 0 < \alpha < 2\pi \,.$$

Prostorska krivulja K z (lahko nehomogeno) dolžinsko gostoto μ ima **maso***:*

$$m = \int_K \mu \, \mathrm{d}s$$

in **težišče** *(x^*, y^*, z^*), kjer je:*

$$x^* = \frac{1}{m} \int_K \mu \, x \, \mathrm{d}s \,, \quad y^* = \frac{1}{m} \int_K \mu \, y \, \mathrm{d}s \,, \quad z^* = \frac{1}{m} \int_K \mu \, z \, \mathrm{d}s \,.$$

Vztrajnostni momenti *okoli koordinatnih osi so enaki:*

$$J_x = \int_K \mu(y^2 + z^2) \, \mathrm{d}s \,, \quad J_y = \int_K \mu(x^2 + z^2) \, \mathrm{d}s \,, \quad J_z = \int_K \mu(x^2 + y^2) \, \mathrm{d}s \,.$$

9. Izračunajte težišče in vztrajnostni moment okoli osi x prostorske krivulje:

$$x = 3t \,, \quad y = 3t^2 \,, \quad z = 2t^3 \,; \qquad 0 < t < 1$$

z dolžinsko gostoto $\mu = \dfrac{y}{x + 3z}$.

Krivuljni integral vektorskega polja $\vec{R} = \vec{\Phi}(\vec{r})$ *po krivulji* K*, parametrizirani v vektorski obliki* $\vec{r} = \vec{\varphi}(t)$*, ko gre* t *od* a *do* b*, je definiran po predpisu:*

$$\int_K \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_K \langle \vec{R}, \mathrm{d}\vec{r} \rangle = \int_a^b \Big\langle \vec{\Phi}\big(\vec{\varphi}(t)\big),\ \dot{\vec{\varphi}}(t) \Big\rangle \,\mathrm{d}t$$

in je v osnovi neodvisen od parametrizacije: odvisen je le od orientacije krivulje, ki jo določa dana parametrizacija. Orientirani krivulji pravimo tudi **pot***. Integral po nasprotno orientirani krivulji je nasprotna vrednost prvotnega integrala. Pri parametrizaciji ni nujno, da je* $a \le b$*.*

Orientacijo gladke krivulje lahko podamo kot usklajen nabor tangentnih vektorjev: za vsako notranjo točko je predpisan vektor $\vec{T}$, ki je tangenten na krivuljo, pri čemer mora obstajati taka parametrizacija $\vec{r} = \vec{r}(t)$, ko gre t od a do b, da ima $\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$ isto smer kot $\vec{T}(\vec{r}(t))$, če je $a < b$, in nasprotno smer, če je $a > b$. Tako parametrizacija določi eno od dveh možnih orientacij.

10. Izračunajte integral vektorskega polja $\vec{R} = \begin{bmatrix} y \\ -z \\ x \end{bmatrix}$ po krivuljah $K_1 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}$ in $K_2 = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$, pri čemer gre parameter t obakrat od 0 do 1.

Krivuljni integral vektorskega polja po komponentah

Krivuljni integral vektorskega polja:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x,y,z) \\ G(x,y,z) \\ H(x,y,z) \end{bmatrix}$$

po krivulji:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{bmatrix}, \quad \textit{kjer gre } t \textit{ od } a \textit{ do } b\,,$$

se izraža v obliki:

$$\int_K \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \Big[F\big(f(t), g(t), f(t)\big)\,\dot{f}(t) + G\big(f(t), g(t), g(t)\big)\,\dot{g}(t) + \\ + H\big(f(t), g(t), h(t)\big)\,\dot{h}(t)\Big]\,\mathrm{d}t\,.$$

To pa lahko zapišemo tudi kot:

$$\int_K \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{t=a}^{t=b} \big(X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z\big)\,.$$

Izrazu $X\,\mathrm{d}x+Y\,\mathrm{d}y+Z\,\mathrm{d}z$ pravimo **diferencialna forma**. *Splošneje, diferencialna forma je vsota izrazov oblike $u\,\mathrm{d}v$, kjer sta u in v skalarni polji. Krivuljni integral diferencialne forme definiramo po predpisu:*

$$\int_K u\,\mathrm{d}v = \int_a^b u\big(\vec{r}(t)\big)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,v\big(\vec{r}(t)\big)\,\mathrm{d}t\,.$$

pri čemer za vsote razširimo po linearnosti.

11. Izračunajte še integral vektorskega polja $\vec{R} = \begin{bmatrix} 2xz \\ z^2 \\ 2yz + x^2 \end{bmatrix}$ po krivuljah K_1 in K_2 iz prejšnje naloge.

Potencial *vektorskega polja* $\vec{R}$ *je tako skalarno polje* w*, da je* $\vec{R} = \vec{\nabla} w$*. Ekvivalentno, potendial vektorskega polja* $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ *je tako skalarno polje* w*, da je* $X = \frac{\partial w}{\partial x}$*,* $Y = \frac{\partial w}{\partial y}$ *in* $Z = \frac{\partial w}{\partial z}$ *ali tudi* $\mathrm{d}w = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z$*. Če ima vektorsko polje potencial, pravimo, da je* **potencialno***.*

Vektorsko polje $\vec{R}$ *je potencialno natanko tedaj, ko je njegov krivuljni integral odvisen le od začetnega in končnega krajišča krivulje. V tem primeru je smiselno definirati* $\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r}$*. Če je* w *potencial polja* $\vec{R}$*, velja kar:*

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = w(\vec{b}) - w(\vec{a})\,.$$

12. Dokažite, da je vektorsko polje $\vec{R}$ iz prejšnje naloge potencialno, in izračunajte njegov potencial.

Površina ploskve, *parametrizirane z* $\vec{r} = \vec{\varphi}(u, v)$*, kjer je* $(u, v) \in \Delta$*, je enaka:*

$$P = \iint_\Delta \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

kjer so E*,* F *in* G *koeficienti prve fundamentalne forme:*

$$E = \|\vec{r}_u\|^2\,, \quad F = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle\,, \quad G = \|\vec{r}_v\|^2\,.$$

Rezultat je neodvisen od parametrizacije.

13. Izračunajte površino tistega dela ploskve $x^2 + y^2 + z = 1$, ki leži nad ravnino xy.

Ploskovni integral skalarnega polja *$w = \Phi(x, y, z)$ po ploskvi S, parametrizirani z $\vec{r} = (x, y, z) = \vec{\varphi}(u, v)$, kjer je $(u, v) \in \Delta$, je definiran po predpisu:*

$$\iint_S w \, \mathrm{d}P = \iint_\Delta \Phi(\vec{r}) \sqrt{EG - F^2} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \,,$$

in je neodvisen od parametrizacije.

Masa *ploskve s površinsko gostoto σ je enaka $m = \iint_S \sigma \, \mathrm{d}P$, njeno* **težišče** *pa ima koordinate:*

$$x^* = \frac{1}{m} \iint_S \sigma \, x \, \mathrm{d}P \,, \quad y^* = \frac{1}{m} \iint_S \sigma \, y \, \mathrm{d}P \,, \quad z^* = \frac{1}{m} \iint_S \sigma \, z \, \mathrm{d}P \,.$$

Vztrajnostni momenti *okoli koordinatnih osi so enaki:*

$$J_x = \iint_S \sigma(y^2 + z^2) \, \mathrm{d}P \,, \quad J_y = \iint_S \sigma(x^2 + z^2) \, \mathrm{d}P \,, \quad J_z = \iint_S \sigma(x^2 + y^2) \, \mathrm{d}P \,.$$

14. Izračunajte maso, težišče in vztrajnostni moment okoli osi z dela paraboloida:

$$z = x^2 + y^2 \,; \quad z < 1 \,,$$

katerega površinska gostota je enaka $\sigma = x^2 + y^2$.

15. Izračunajte maso in vztrajnostni moment homogenega votlega torusa z zanemarljivo debelino okoli simetrijske osi.

Ploskovni integral vektorskega polja (pretok)

Orientacija *ploskve je podana z usklajenim naborom normalnih vektorjev: v vsaki točki $\vec{r}$ na robu ploskve mora biti podan enotski vektor $\vec{N} = \vec{\Psi}(\vec{r})$, ki je pravokoten na ploskev, vektorska funkcija $\vec{\Psi}$ pa mora biti zvezna.*

Parametrizacija $\vec{r} = \vec{\varphi}(u, v)$ je **skladna** *z orientacijo, če ima $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ isto smer kot vektor $\vec{\Psi}(\vec{r})$. Tako parametrizacija tudi določi orientacijo.*

Ploskovni integral vektorskega polja *$\vec{R} = \vec{\Phi}(\vec{r})$ po orientirani ploskvi S ali tudi* **pretok** *polja $\vec{R}$ skozi S je ploskovni integral skalarnega polja $\iint_S \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P$. Če je ploskev orientirana skladno s parametrizacijo $\vec{r} = \vec{\varphi}(u, v)$, $(u, v) \in \Delta$, je pretok enak:*

$$\iint_S \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P = \iint_\Delta \left\langle \vec{\Phi}(\vec{r}), \ \vec{r}_u \times \vec{r}_v \right\rangle \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \,.$$

16. Izračunajte pretok polja $(x, y, 2z)$ skozi ploskev $z^2 = x^2 + y^2$; $0 \le z < 1$ v smeri navzdol.

17. Izračunajte pretok vektorskega polja:

$$\vec{R} = \frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

skozi plašč valja $x^2 + y^2 = 1$, orientiran navzven.

Gradient *skalarnega polja w je vektorsko polje:*

$$\operatorname{grad} w = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \vec{\nabla} w \,, \quad \textit{kjer je} \quad \vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} .$$

Divergenca *vektorskega polja* $\vec{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ *je skalarno polje:*

$$\operatorname{div} \vec{R} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \langle \vec{\nabla} \,, \vec{R} \rangle \,.$$

18. Izračunajte $\operatorname{div}(x^2 z, -xy^2 z, 3yz^2)$.

19. Naj bo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|\vec{r}\|$. Za vse p izračunajte $\operatorname{div}\big(r^p \vec{r}\big)$.

Rotor *vektorskega polja* $\vec{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ *je vektorsko polje:*

$$\operatorname{rot} \vec{R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \end{bmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{R} \,.$$

20. Izračunajte $\operatorname{rot}(xz^3, -2x^2yz, 2yz^4)$.

V zaporedju operatorjev:

$$\begin{matrix}\textit{skalarno} & \xrightarrow{\text{grad}} & \textit{vektorsko} & \xrightarrow{\text{rot}} & \textit{vektorsko} & \xrightarrow{\text{div}} & \textit{skalarno} \\ \textit{polje} & & \textit{polje} & & \textit{polje} & & \textit{polje}\end{matrix}$$

je kompozitum dveh zaporednih operacij enak nič: $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$ *in* $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$.

Za vektorsko polje pravimo, da je **brez vrtincev**, *če je njegov rotor enak nič, in* **brez izvirov (solenoidalno)**, *če je njegova divergenca enaka nič.*
Pravimo tudi, da je vektorsko polje $\vec{R}$ **potencialno**, *če je gradient nekega skalarnega polja* w: $\vec{R} = \operatorname{grad} w$. *Polje* w *je njegov* **potencial**. *Če je* $\vec{R} = (X, Y, Z)$, *lahko ekvivalentno zapišemo tudi* $\mathrm{d}w = X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z$. *Pravimo, da je diferencialna forma na desni* **eksaktna**.
Vsako potencialno polje je torej brez vrtincev in vsako vektorsko polje, ki je dobljeno kot rotor nekega drugega vektorskega polja, je brez izvirov.

Na dovolj lepih območjih (površno povedano, brez lukenj) velja tudi obrat: vsako polje brez vrtincev je potencialno in vsako polje brez izvirov je rotor nekega vektorskega polja.

21. Dokažite, da obstajata taka a in b, da je vektorsko polje:

$$\big(2x^a \sin z,\ 3y^b \sin z,\ (x^{a+1} + y^{b+1}) \cos z\big)$$

potencialno. Za taka a in b izračunajte njegov potencial.

Cirkulacija *je integral po sklenjeni krivulji in jo označujemo z* $\oint_K \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r}$. *Je neodvisna od začetne oz. končne točke v parametrizaciji, odvisna pa je od orientacije.*

Greenova[4] formula

Naj bo D *omejeno ravninsko območje z odsekoma gladkim robom* ∂D, *ki ga orientiramo pozitivno. Tedaj za vektorsko polje* $\vec{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$, *ki je zvezno na zaprtju območja in zvezno odvedljivo v njegovi notranjosti, velja:*

$$\oint_{\partial D} \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

[4]George Green (1793–1841), angleški matematični fizik

22. Naj bo K rob trikotnika z oglišči $A(0,0)$, $B(1,0)$ in $C(0,1)$, orientiran v nasprotni smeri urinega kazalca. Izračunajte $\oint_K \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r}$, kjer je $\vec{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$, pri čemer je:

$$X = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} & ; y \neq 0 \\ \dfrac{\pi x}{2} & ; y = 0 \end{cases}, \qquad Y = \begin{cases} y \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} & ; y \neq 0 \\ 0 & ; y = 0 \end{cases}.$$

Gaussov[5] izrek

Naj bo D omejeno prostorsko območje z odsekoma gladkim robom ∂D, ki ga orientiramo tako, da normala kaže navzven. Tedaj za vsako zvezno odvedljivo vektorsko polje $\vec{R}$ velja:

$$\iint_{\partial D} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \,\mathrm{d}P = \iiint_D \operatorname{div} \vec{R}\,\mathrm{d}V\,.$$

23. Izračunajte pretok vektorskega polja:

$$X = x(y^2 + z^2)\,, \quad Y = y(x^2 + z^2)\,, \quad Z = z(x^2 + y^2)$$

skozi rob enotske krogle $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientiran navzven (gre torej za *iztok* iz krogle).

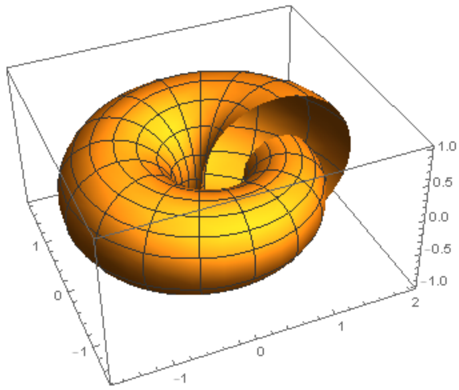
24. Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{R} := \begin{bmatrix} x + \sqrt{y^2 + z^2} \\ y + \sqrt{x^2 + z^2} \\ z + \sqrt{x^2 + y^2} \end{bmatrix}$ skozi plašč stožca $z^2 \geq x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, orientiran tako, da normala kaže navzgor.

25. Dana naj bo ploskev $\mathcal{S}$ s parametrizacijo:

$$\vec{r}(u, v) = \begin{bmatrix} \bigl(1 + e^{-u} \cos v\bigr) \cos u \\ \bigl(1 + e^{-u} \cos v\bigr) \sin u \\ e^{-u} \sin v \end{bmatrix} \quad ; \qquad u \in [0, 2\pi]\,, \;\; v \in [0, 2\pi]\,,$$

orientirana v smeri vektorja $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$. Ploskev je skicirana na spodnji sliki:

[5] Carl Friedrich Gauß (1777–1855), nemški matematik



a) Opišite krivulji, ki ju dobite pri $u = 0$ oz. $u = 2\pi$.

b) Izračunajte integral vektorskega polja:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} x^2 \\ -x^2 \\ -2xz \end{bmatrix}$$

po ploskvi $\mathcal{S}$.

Stokesov[6] izrek

Naj bo S omejena orientirana odsekoma gladka ploskev v prostoru z odsekoma gladkim robom ∂S. Orientiramo še rob ∂S. Ploskev S in njen rob ∂S sta **skladno orientirana**, *če imamo, če se sprehajamo po robu ploskve v smeri njegove orientacije in smo obrnjeni tako kot normalni vektor ploskve, ploskev na levi.*

Računsko gledano, naj bo ploskev parametrizirana z $(u, v) \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ in naj parametrizacija rob $\partial\Delta$ preslika na rob ∂S. Če rob $\partial\Delta$ orientiramo pozitivno, t. j. v nasprotni smeri urinega kazalca, in to orientacijo prek parametrizacije prenesemo na ∂S, sta S in ∂S skladno orientirana.

Če sta ploskev S in njen rob ∂S skladno orientirana, za vsako zvezno odvedljivo vektorsko polje $\vec{R}$ velja:

$$\oint_{\partial S} \vec{R}\, \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \langle \operatorname{rot} \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P\,.$$

26. Izračunajte integral vektorskega polja:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} e^{x^2} + xy \\ z + \sin^5(y^5) \\ e^{z^2} + 2x + \cos z + y \end{bmatrix}$$

[6]Sir George Gabriel Stokes, 1st Baronet (1819–1903), irski fizik in matematik, deloval v Angliji

po krivulji, ki jo določata enačbi $x^2 + y^2 = 1$ in $z = xy$, orientirana pa je tako, da se, če jo gledamo od zgoraj, vrti v nasprotni smeri urinega kazalca.

27. Izračunajte cirkulacijo:

$$\oint_K \left[\left(\frac{1}{(1+x^2)^2} + y^2 - z^2\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{1}{(1+y^2)^2} - x^2 + z^2\right) \mathrm{d}y + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{(1+z^2)^2} - x^2 + y^2\right) \mathrm{d}z\right],$$

kjer je K krivulja, ki gre od točke $(1, 0, 0)$ premočrtno do $(0, 1, 0)$, nato premočrtno do $(0, 0, 1)$ in nato premočrtno spet do $(1, 0, 0)$.

5. Navadne diferencialne enačbe

Ločljive spremenljivke. Homogena, linearna, Bernoullijeva, Riccatijeva in eksaktna enačba. Iskanje rešitev v parametrični obliki. Clairautova enačba. Znižanje reda. Sistemi linearnih enačb.

Navadna diferencialna enačba reda n *je enačba, v kateri je neznanka funkcija* $y = h(x)$ *in je oblike:*

$$F\big(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0\,.$$

Klasična rešitev *tovrstne enačbe na dani neprazni odprti množici je funkcija, ki je* n*-krat zvezno odvedljiva in zadošča dani enačbi.*

1. Poiščite čim več klasičnih rešitev enačbe $y' = y^{2/3}$, definiranih na odprtih intervalih. Komentirajte!

2. Poiščite klasično rešitev diferencialne enačbe $y^2 = xyy' + 9$, za katero je $y(1) = -2$. Katero je njeno maksimalno definicijsko območje?

Poenostavitev izrazov z logaritmi

V enačbi z ločenima spremenljivkama:

$$f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{g'(y)}{g(y)}\,\mathrm{d}y\,,$$

kjer je kot ponavadi x *neodvisna,* y *pa odvisna spremenljivka, lahko desno stran integriramo v* $\ln \frac{g(y)}{C}$ *(in potem seveda na drugi strani ne pišemo aditivne konstante).*
Pogosto se rešitev izraža z družino funkcij $C|h(x)|$*, kjer* C *preteče določeno podmnožico množice* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$*. Tedaj lahko na vsakem intervalu, kjer funkcija* h *nima ničel, to družino nadomestimo z družino funkcij* $C\,h(x)$*, kjer* C *preteče množico, ki je ista ali pa prezrcaljena okoli izhodišča.*
Enačba z ločenima spremenljivkama je navadno prvi korak pri reševanju neke druge enačbe, ki ji ni povsem ekvivalentna. Preveriti moramo torej, kaj se spremeni, če enačbo z ločenima spremenljivkama nadomestimo s prvotno enačbo (tipično, ali tudi za $C = 0$ *dobimo rešitev).*

3. Poiščite *splošno* rešitev diferencialne enačbe $y^2 = xyy' + 9$.

4. Kolesar sprva vozi s hitrostjo 7 m/s in neha poganjati. Zračni upor, ki ga zavira, je sorazmeren s kvadratom kolesarjeve hitrosti. Po 3 sekundah se hitrost zmanjša na 6 m/s. Kdaj bo hitrost kolesarja znašala 1 m/s? Privzamemo, da ni vetra, in zanemarimo upore druge vrste.

5. Stiroporno kroglo z maso $m = 10\,\mathrm{g}$ izstrelimo navpično v zrak s hitrostjo $100\,\mathrm{m/s}$. Zračni upor povzroča silo, ki je enaka cv^2, kjer je v hitrost krogle in $c = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{Ns^2/m^2}$. Seveda pa na kroglo deluje še sila teže mg, kjer je $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Po kolikšnem času krogla doseže najvišjo točko in kolikšno višino doseže? Kako pa bi bilo, če ne bi bilo zračnega upora?

Homogena *diferencialna enačba je tista, ki je oblike:*

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Če v tako enačbo uvedemo $z = \dfrac{y}{x}$*, jo prevedemo na enačbo z ločljivima spremenljivkama.*

6. Poiščite partikularno rešitev diferencialne enačbe:

$$xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x},$$

ki zadošča začetnemu pogoju $y(3) = 8\pi$, skupaj z maksimalnim odprtim intervalom, kjer je definirana.

Linearna diferencialna enačba *je tista, ki se da zapisati v obliki:*

$$y' + q(x)\,y = r(x).$$

Če poznamo eno rešitev $y = h(x)$*, lahko preostale iščemo v obliki* $y = h(x) + z$*.*

7. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $xy' - 3y = x$.

   Namig: ena od rešitev je linearna funkcija.

Če ne poznamo nobene rešitve linearne diferencialne enačbe, jo lahko rešimo tudi tako, da najprej poiščemo rešitev **homogenega dela enačbe***:*

$$y_H' + q(x)\,y_H = 0.$$

ki se da vedno zapisati v obliki $y_H = C\,h(x)$*, kjer je* C *konstanta. Rešitev izvirne enačbe nato iščemo z* **variacijo konstante***, kar pomeni, da jo nastavimo v obliki* $y = h(x)\,z$*, kjer je* z *zdaj* **funkcija***.*

Če torej poznamo eno netrivialno rešitev $y = h(x)$ **homogenega** *dela enačbe, lahko rešitve* **izvirne** *enačbe iščemo v obliki* $y = h(x)\,z$*.*

8. Poiščite rešitev diferencialne enačbe:

$$\bigl(e^x + 1\bigr)y' + e^x\,y = e^x - 1,$$

ki gre skozi izhodišče.

Bernoullijeva[7] **diferencialna enačba** *je tista, ki se da zapisati v obliki:*

$$y' + q(x)\,y = r(x)\,y^\alpha\,.$$

Enačbo lahko prevedemo na linearno, če uvedemo:

$$w = y^{1-\alpha}\,, \qquad w' = (1-\alpha)\,y^{-\alpha}y'\,.$$

Pred tem se splača deliti z y^α. A pozor: če je $\alpha > 0$, pri deljenju izgubimo rešitve z ničlami.

- *Če je $0 < \alpha < 1$, lahko vse rešitve z ničlami sestavimo iz preostalih in jih ni treba vključiti v splošno rešitev. Rešitev $y = 0$ dobimo kot ogrinjačo.*
- *Če je $\alpha \ge 1$, za vsako klasično rešitev, definirano na odprtem intervalu, velja, da je bodisi povsod enaka nič bodisi ni nikjer enaka nič. Rešitev $y = 0$ dobimo kot limito rešitev deljene enačbe in jo je treba vključiti v splošno rešitev.*

9. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $3y' + 2y = \big(1 + 3\,e^x\big)y^4$.

10. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $xy' + 3y = \sqrt[3]{y}\,\sin x$.

Riccatijeva[8] **diferencialna enačba** *ima obliko:*

$$y' = p(x) + q(x)\,y + r(x)\,y^2\,.$$

Ta enačba se v splošnem ne da rešiti v kvadraturah, t. j. z integrali. Če pa poznamo eno rešitev $y = h(x)$, lahko preostale nastavimo v obliki:

$$y = h(x) + \frac{1}{w}\,.$$

Tako se enačba prevede na linearno.

11. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$y' = x^2y^2 + \frac{2}{x^4}\,.$$

Namig: za primerna a in p funkcija $y = ax^p$ reši enačbo.

[7] Jakob Bernoulli (1655–1705), švicarski matematik
[8] Jacopo Francesco Riccati (1676–1754), italijanski matematik

Diferencialna enačba, zapisana v obliki:

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

je **eksaktna**, *če obstaja taka funkcija* F, *da je* $M = \dfrac{\partial F}{\partial x}$ *in* $N = \dfrac{\partial F}{\partial y}$.
Splošna rešitev enačbe je potem $F(x,y) = C$.
Diferencialna enačba je eksaktna natanko tedaj, ko velja $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$.
Funkciji F *pravimo* **ohranitvena količina** *ali* **prvi integral** *enačbe in jo lahko iščemo kot nedoločeni integral:*

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)\,\mathrm{d}x = F_1(x,y) + A(y) = \\ &= \int N(x,y)\,\mathrm{d}y = F_2(x,y) + B(x)\,; \end{aligned}$$

funkcije F_1, F_2, A *in* B *nastavimo tako, da se izraza ujemata.*

12. Dokažite, da je diferencialna enačba:

$$(2x^3 - y)\,\mathrm{d}x = (x+y)\,\mathrm{d}y$$

eksaktna, in jo rešite.

Integracijski multiplikator

Vsaka diferencialna enačba prvega reda postane eksaktna, če jo pomnožimo s primerno funkcijo. Tej funkciji pravimo integracijski multiplikator. V splošnem je sicer iskanje integracijskega multiplikatorja prav tako zahtevna naloga kot iskanje rešitve same diferencialne enačbe, včasih pa se da za multiplikator uganiti nastavek.

13. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$\left(3\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}\right)\mathrm{d}x + \frac{x}{x+y}\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Namig: enačba postane eksaktna, če jo pomnožite s primerno potenco določene spremenljivke.

Iskanje rešitev v parametrični obliki

Posebej če se v dani diferencialni enačbi odvod izraža na zapleten način, se rešitev često splača iskati v parametrični obliki:

$$x = \varphi(t)\,, \qquad y = \psi(t)\,,$$

in sicer tako, da poiščemo primerno funkcijo ϑ, za katero bo $y' = \vartheta(t)$. Tedaj velja:

$$\vartheta(t) = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \tag{$*$}$$

(dogovorimo se, da pika označuje odvod po spremenljivki t). Dostikrat deluje že kar $\vartheta(t) = t$.

Če je dana enačba oblike $x = f(y')$, iz nastavka takoj dobimo $x = f(\vartheta(t))$, nakar po odvajanju iz zveze $(*)$ dobimo še $\dot{y}$ in po integraciji y.

Če je dana enačba oblike $y = g(y')$, iz nastavka takoj dobimo $x = g(\vartheta(t))$, nakar po odvajanju iz zveze $(*)$ dobimo še $\dot{x}$ in po integraciji x.

14. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $x = y' + \sin y'$.
15. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $x^2 - y'^2 = 1$.
16. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $y = \sqrt{1 - y'^2}$.

Clairautova[9] *diferencialna enačba je oblike:*

$$y - xy' + f(y')\,.$$

njene rešitve so linearne funkcije:

$$y = Cx + f(C)$$

skupaj z ogrinjačo, ki jo dobimo tako, da zgornjo enačbo parcialno odvajamo po C in upoštevamo oboje.

17. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $y = xy' + y'^2$ skupaj z ogrinjačo.

Znižanje reda, če manjka odvisna spremenljivka

Če je y odvisna spremenljivka v diferencialni enačbi, ki ne vsebuje $y, y', \ldots, y^{r-1}$, lahko enačbi znižamo red z uvedbo nove odvisne spremenljivke $z = y^{(r)}$.

Iz splošne rešitve enačbe z znižanim redom z integracijo dobimo splošno rešitev prvotne enačbe.

[9] Alexis Claude Clairaut (1713–1765), francoski matematik, astronom in geofozik

18. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $x^2 y''' = (y'')^2$.

Znižanje reda, če manjka neodvisna spremenljivka

Če diferencialna enačba ne vsebuje neodvisne spremenljivke x, ji lahko prav tako znižamo red z uvedbo nove spremenljivke $v = y'$. Enačba se namreč da prevesti na diferencialno enačbo za funkcijsko zvezo med y in $y' = v$, saj se tudi višji odvodi dajo izraziti zgolj s tema dvema spremenljivkama, na primer:

$$y'' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\,.$$

19. Poiščite klasično rešitev diferencialne enačbe $yy'' = 2yy' - y'^2$, ki zadošča začetnima pogojema $y(0) = -1, y'(0) = 3$. Kateri je maksimalni možni odprt interval, na katerem je definirana?

20. Na točkasto telo, ki je spočetka na razdalji y_0 od izhodišča in miruje, deluje sila, ki ga vleče proti izhodišču in je obratno sorazmerna z oddaljenostjo od izhodišča (tako se denimo obnaša električna ali gravitacijska sila dolge žice). Še drugače, če z y označimo lego telesa glede na izhodišče, je njegov pospešek enak $-k/y$, kjer je $k > 0$ neka konstanta.

    a) Izračunajte hitrost telesa v odvisnosti od njegove lege.

    b) Za vse $0 < y < y_0$ zapišite čas, v katerem telo pride do lege y, kot določeni integral primerne elementarne funkcije.

    c) Eksplicitno izračunajte čas, v katerem telo pride do izhodišča.

21. Homogena vrv, zvita v klobčič na robu mize, se začne odvijati navzdol. Opišite dinamiko tega odvijanja.

Linearni sistemi s konstantnimi koeficienti

Sistem diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

lahko interpretiramo kot vektorsko enačbo $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$. *Homogen linearni sistem lahko zapišemo v obliki* $\vec{y}' = \mathbf{A}(x)\vec{y}$, *kjer je* $\mathbf{A}$ *matrična funkcija. Vse klasične rešitve takega sistema se izražajo v obliki:*

$$\vec{y} = C_1\vec{h}_1(x) + C_2\vec{h}_2(x) + \cdots + C_n\vec{h}_n(x)\,,$$

kjer so $\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_n$ *linearno neodvisne rešitve.*
Sistem ima konstantne koeficiente, če je $\mathbf{A}$ *konstantna matrika. Če je* $\vec{v}$ *lastni vektor matrike* $\mathbf{A}$ *za lastno vrednost* λ, *je* $\vec{y} = e^{\lambda x}\vec{v}$ *rešitev danega sistema.*
Za linearno neodvisne lastne vektorje dobimo linearno neodvisne rešitve. Če se torej matrika $\mathbf{A}$ *da diagonalizirati, lahko na ta način dobimo vse rešitve danega sistema.*

V nalogah od 22. do 26. poiščite splošno rešitev danega sistema linearnih enačb.

22. $y' = 2y + 3z\,,$
 $z' = \frac{1}{3}y + 2z\,.$

Kompleksne lastne vrednosti

Pri kompleksnih lastnih vrednostih dobimo realne bazne rešitve tako, da iz vsakega konjugiranega para izberemo eno lastno vrednost, nakar vzamemo realni in imaginarni del pripadajoče bazne rešitve.

23. $y' = 4y - 3z\,,$
 $z' = 3y + 4z\,.$

Reševanje sistemov pri korenskih vektorjih

V splošnem se matrika **A** *ne da diagonalizirati. V tem primeru za cel prostor potrebujemo lastne in korenske vektorje. Le-te lahko uredimo v verige:*

$$\vec{v}_{m+r} \xrightarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \vec{v}_{m+r-1} \xrightarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \cdots \xrightarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \vec{v}_{m+2} \xrightarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \vec{v}_{m+1} \xrightarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \mathbf{0}$$

($\vec{v}_{m+1}$ je lastni vektor, preostali vektorji pa so korenski). Iz take verige dobimo naslednje linearno neodvisne rešitve:

$$\begin{aligned} e^{\lambda x}\,\vec{v}_{m+1}\,, \\ e^{\lambda x}\big(\vec{v}_{m+2} + x\,\vec{v}_{m+1}\big)\,, \\ e^{\lambda x}\left(\vec{v}_{m+3} + x\,\vec{v}_{m+2} + \frac{x^2}{2!}\,\vec{v}_{m+1}\right), \\ \cdots \\ e^{\lambda x}\left(\vec{v}_{m+r} + x\,\vec{v}_{m+r-1} + \frac{x^2}{2!}\,\vec{v}_{m+r-2} + \cdots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\,\vec{v}_{m+1}\right). \end{aligned}$$

24. $y' = -2y + z\,,$
    $z' = -y - 4z\,.$

25. $y = y + 2z + u\,,$
    $z = -8y - 9z - 3u\,,$
    $u = 12y + 12y + 3u\,.$

26. $y' = -2y + z + 3u\,,$
    $z' = -2z + 5u\,,$
    $u' = -2u\,.$

27. Dan je linearen sistem enačb

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

   a) Določite splošno rešitev sistema enačb.

   b) Določite vse točke $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ z lastnostjo, da za rešitev sistema, ki gre ob času $t = 0$ skozi točko (x_0, y_0, z_0), velja:

$$\lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

28. Dan je sistem navadnih diferencialnih enačb:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} .$$

a) Poiščite splošno rešitev sistema diferencialnih enačb.

b) Pokažite, da je vsaka rešitev sistema enačb ravninska krivulja, in določite enačbo ravnine, v kateri leži rešitev sistema z:

$$x(0) = 4 \,, \quad , y(0) = 0 \,, \quad z(0) = -1 \,.$$

Variacija konstant pri nehomogenih linearnih sistemih

Rešitev nehomogenega sistema linearnih diferencialnih enačb:

$$\vec{y}\,' = \mathbf{A}(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$$

lahko poiščemo s pomočjo splošne rešitve pripadajočega homogenega sistema $\vec{y}\,'_H = \mathbf{A}(x)\vec{y}_H$. *Naj se le-ta izraža v obliki:*

$$\vec{y}_H(x) = C_1\,\vec{h}_1(x) + C_2\,\vec{h}_2(x) + \cdots + C_n\,\vec{h}_n(x) = \mathbf{Y}(x)\,\vec{C}\,,$$

kjer je:

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{bmatrix} \vec{h}_1(x) & \vec{h}_2(x) & \cdots & \vec{h}_n(x) \end{bmatrix} \quad \textit{in} \quad \vec{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} .$$

Matriki $\mathbf{Y}(x)$ *pravimo* **fundamentalna matrika** *sistema.*
Tedaj se rešitev danega nehomogenega sistema izraža v obliki $\vec{y} = \mathbf{Y}(x)\,\vec{u}$, *kjer vektorska funkcija* $\vec{u}$ *reši sistem:*

$$\mathbf{Y}(x)\,\vec{u}\,' = \vec{b}(x)\,.$$

29. Poiščite splošno rešitev sistema:

$$\begin{aligned} y' &= -2y + z + e^{-x} \,, \\ z' &= -y - 4z \,. \end{aligned}$$

Homogena linearna DE s konstantnimi koeficienti

Rešitev enačbe:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0\,, \tag{$*$}$$

kjer so $a_0, \ldots, a_n$ konstante, poiščemo s pomočjo karakteristične enačbe:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0\,. \tag{$**$}$$

Če ima enačba $(**)$ same enostavne rešitve $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so vse klasične rešitve enačbe $(*)$, definirane na odprtih intervalih, oblike:

$$y = C_1\, e^{\lambda_1 x} + C_2\, e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n\, e^{\lambda_n x}\,.$$

V nalogah od 30. do 37. poiščite splošno rešitev dane diferencialne enačbe.

30. $y'' - y' - 2y = 0$.
31. $y'' + 2y' = 0$.

Večkratne ničle karakterističnega polinoma

Pri večkratnih rešitvah množimo z x, dokler ne dobimo dovolj neodvisnih rešitev: če je torej λ r-kratna rešitev, iz nje dobimo člene oblike:

$$(C_k + C_{k+1} x + \cdots + C_{k+r-1} x^{r-1}) e^{\lambda x}\,.$$

32. $y'' + 6y' + 9y = 0$.
33. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.
34. $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$.

Kompleksne ničle karakterističnega polinoma

Člene, dobljene iz (konjugirano) kompleksnih rešitev, spremenimo v trigonometrijo, npr. $C_1\, e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2\, e^{(\alpha-\beta i)x}$ se spremeni v $C_1\, e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2\, e^{\alpha x} \sin(\beta x)$.

35. $y'' + 2y' + 5y = 0$.
36. $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$.
37. $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y''' - 4y'' + 3y' - y = 0$.

Homogena Euler[10]–Cauchyjeva[11] diferencialna enačba

Rešitev enačbe:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0\,, \qquad (*)$$

kjer so $a_0, \ldots, a_n$ konstante, poiščemo s pomočjo karakteristične enačbe:

$$a_n \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) + a_{n-1}\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+2) + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0\,. \quad (**)$$

Če ima enačba $(**)$ same enostavne rešitve $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so pri $x > 0$ vse klasične rešitve $(*)$, definirane na odprtih intervalih, oblike:

$$y = C_1\, x^{\lambda_1} + C_2\, x^{\lambda_2} + \cdots + C_n\, x^{\lambda_n}\,.$$

Pri večkratnih rešitvah množimo z $\ln x$: če je recimo λ r-kratna rešitev, iz nje dobimo člene oblike:

$$\bigl(C_k + C_{k+1}\ln x + \cdots + C_{k+r-1}(\ln x)^{r-1}\bigr)x^{\lambda}\,.$$

Poleg tega pa člene, dobljene iz (konjugirano) kompleksnih rešitev, spremenimo v trigonometrijo, npr. $C_1\, x^{\alpha+\beta i} + C_2\, x^{\alpha-\beta i}$ se spremeni v $C_1\, x^{\alpha}\cos(\beta\ln x) + C_2\, x^{\alpha}\sin(\beta\ln x)$.

Klasične rešitve pri $x < 0$ dobimo tako, da x zamenjamo z $-x$. Splošno rešitev dobimo tako, da x zamenjamo z $|x|$. V določenih členih menjava morda ni potrebna.

POZOR: pri $x = 0$ pogoji eksistenčnega izreka niso izpolnjeni!

V nalogah od 38. do 40. poiščite splošno rešitev dane diferencialne enačbe.

38. $2x^2y'' - 7xy' + 9y = 0$.

39. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$.

40. $x^2y'' - xy' + 10y = 0$.

[10] Leonhard Euler (1707–1783), švicarski matematik

[11] baron Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), francoski matematik

Variacija konstant pri linearnih DE višjih redov

Variacijo konstant naredimo tako, da enačbo n-tega reda prevedemo na sistem n enačb. Rešitvi y enačbe n-tega reda ustreza rešitev $\begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$ pripadajočega sistema. Iz baze $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ rešitev enačbe n-tega reda torej dobimo fundamentalno matriko:

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) & h_2(x) & \cdots & h_n(x) \\ h_1'(x) & h_2'(x) & \cdots & h_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^{(n-2)}(x) & h_2^{(n-2)} & \cdots & h_n^{(n-2)}(x) \\ h_1^{(n-1)}(x) & h_2^{(n-1)} & \cdots & h_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}.$$

Rešitev izvirne enačbe nastavimo v obliki $y = h_1(x)\, u_1 + \cdots + h_n(x)\, u_n$, kjer funkcije $u_1, \ldots, u_n$ zadoščajo sistemu:

$$\mathbf{Y}(x) \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_{n-1}' \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{bmatrix}.$$

41. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $4y'' + y = \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}}$.

42. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $x^2 y'' - 2xy' + 2y = \dfrac{1}{x-1}$.

Nastavki za nehomogeno enačbo s konstantnimi koeficienti (brez prekrivanja z rešitvijo homogene enačbe)

Rešitev enačbe s konstantnimi koeficienti:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = P(x)\, e^{\alpha x}\,,$$

kjer je P polinom, α pa ni rešitev karakteristične enačbe, iščemo v obliki $y = y_H + y_P$, kjer je y_H rešitev homogenega dela enačbe, y_P pa je rešitev izvirne enačbe oblike $y_P = \tilde{P}(x)\, e^{\alpha x}$, kjer je $\tilde{P}$ polinom, ki je iste stopnje kot P.
Rešitev enačbe:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = e^{\alpha x}\big(P(x)\cos x + Q(x)\sin x\big)\,,$$

kjer sta P in Q polinoma, $\alpha \pm \beta i$ pa ni rešitev karakteristične enačbe, iščemo v obliki $y = y_H + y_P$, kjer je y_H tako kot prej, y_P pa je rešitev izvirne enačbe oblike $y_P = e^{\alpha x}\big(\tilde{P}(x)\cos x + \tilde{Q}(x)\sin x\big)$, kjer se maksimalna stopnja polinomov $\tilde{P}$ in $\tilde{Q}$ ujema z maksimalno stopnjo polinomov P in Q.

43. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $y'' - y' - 2y = x\, e^{-2x} + \cos x$.

Nastavki za nehomogeno enačbo s konstantnimi koeficienti (s prekrivanjem z rešitvijo homogene enačbe)

Če je v enačbi, podani tako kot prej, α oziroma $\alpha \pm \beta i$ rešitev karakteristične enačbe z večkratnostjo r, ustrezni člen v nastavku za y_P množimo z x^r. Z drugimi besedami, če se desna stran prekriva z rešitvijo pripadajoče homogene enačbe, množimo z x, dokler se ne prekriva več.

44. Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$.

Variacijski račun

Ekstrem funkcionala:

$$I(y) = \int_a^b L(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

kjer je L parcialno zvezno odvedljiva funkcija treh spremenljivk, y pa zvezno odvedljiva funkcija na $[a, b]$, pri morebitnih dodatnih robnih pogojih $y(a) = A$, $y(b) = B$ (vsak od njiju lahko nastopa ali ne nastopa), je lahko dosežen kvečjemu za funkcije, ki zadoščajo **Euler–Lagrangeovi enačbi**:

$$L_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_{y'} \,.$$

Če posamezen robni pogoj **ne nastopa** *(imamo* **prosto krajišče***), mora ekstremala v ustrezni točki zadoščati še* **pogoju transverzalnosti**:

$$L_{y'}\big(a, y(a), y'(a)\big) = 0 \quad \text{oziroma} \quad L_{y'}\big(b, y(b), y'(b)\big) = 0 \,.$$

Ad hoc zadosten pogoj za minimum

Če je:

$$L(x, y, y') = \big(\Lambda(x, y, y')\big)^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x, y, y')$$

in je y_0 funkcija z $\Lambda(x, y_0, y_0') = 0$, F pa je v posameznem krajišču intervala $[a, b]$ enaka za vse y, je v y_0 dosežen minimum funkcionala I.

Konveksna jedra

Označimo $K := L_{yy}L_{y'y'} - L_{yy'}^2$ in naj bo y_0 stacionarna točka funkcionala $I(y) = \int_a^b L(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ v vektorskem funkcijskem prostoru $\mathcal{Y}$.

- *Če povsod velja $L_{yy} \ge 0$ in $K \ge 0$, funkcional I v y_0 doseže minimum, t. j. za vsak $y \in \mathcal{Y}$ velja $I(y) \ge I(y_0)$.*
- *Če jedro L izpolnjuje zgornje pogoje in je y_0 edina stacionarna točka funkcionala I, je v y_0 dosežen strogi minimum„ t. j. za vsak $y \in \mathcal{Y} \setminus \{y_0\}$ velja $I(y) > I(y_0)$.*

45. Poiščite minimum funkcionala:

$$I(y) = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 2y^2)\,\mathrm{d}x$$

po vseh zvezno odvedljivih funkcijah y na intervalu $[1, 2]$, za katere je $y(1) = 4$ in $y(2) = 1$. Nadalje pokažite, da je I na množici teh funkcij navzgor neomejen.

46. Poiščite minimum funkcionala:

$$I(y) = \int_0^1 \left(y^2 + y'^2 + 2y\, e^x\right) \mathrm{d}x$$

po vseh zvezno odvedljivih funkcijah y na intervalu $[0,1]$, za katere je $y(1) = 0$. Nadalje pokažite, da je I na množici teh funkcij navzgor neomejen.

Konveksna jedra, neodvisna od y

Naj bo funkcional I oblike:

$$I(y) = \int_a^b F\left(\frac{y'}{\varphi}\right) \varphi\, \mathrm{d}x\,,$$

kjer je $\varphi\colon\ [a,b] \to (0,\infty)$ zvezna, $F\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pa konveksna funkcija. Nadalje naj bo $\mathcal{Y}$ prostor vseh zvezno odvedljivih funkcij $y\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$, za katere je $y(a) = u$ in $y(b) = v$. Tedaj je:

$$\min_{y \in \mathcal{Y}} I(y) = I(y_0) = c\, F\left(\frac{v-u}{c}\right)\,,$$

kjer je $c = \displaystyle\int_a^b \varphi\, \mathrm{d}x$ in

$$y_0(x) = \frac{1}{c}\left(v \int_a^x \varphi\, \mathrm{d}x + u \int_x^b \varphi\, \mathrm{d}x\right) = u + \frac{v-u}{c} \int_a^x \varphi\, \mathrm{d}x\,.$$

47. Poiščite najkrajšo pot – geodetko med točkama $A(-1,0,1/2)$ in $B(1,1,1/2)$, če smo omejeni na ploskev $z = x^2/2$.

48. Po kateri poti najhitreje pridemo iz točke $A(1,0)$ v točko $B(0,2)$, če je hitrost premo sorazmerna z oddaljenostjo od izhodišča? Kot znano lahko privzamete, da je optimalno pot možno izraziti v polarnih koordinatah kot $r = r(\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, kjer je r zvezno odvedljiva funkcija kota φ.

49. Valjast stolp polmera 2 m želimo pokriti z rotacijsko simetrično streho. Streha naj se začne na robu valja, visoka pa mora biti $\sqrt{3}$ m in na vrhu naj ima luknjo polmera 1 m. Označimo s $h(r)$ višino strehe, s $c(r)$ pa ceno strehe na enoto površine, pri čemer je r oddaljenost od simetrijske osi.

   a) Izrazite ceno strehe s funkcijama c in h.
   b) Določite obliko strehe, pri kateri cena strehe doseže ekstremno vrednost, če je $c(r) = \dfrac{1}{r^2}$. Za kakšen ekstrem gre?

Če je L odvisen le od y in y', iz Euler–Lagrangeove enačbe sledi **Beltramijeva identiteta**:

$$L - y' L_{y'} = C\,.$$

Obratno Euler–Lagrangeova enačba sledi iz Beltramijeve identitete na intervalih, kjer odvod y' ni enak nič.

50. Poiščite stacionarne točke funkcionala:

$$I(y) = \int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}\,\mathrm{d}x$$

na prostoru vseh zvezno odvedljivih funkcij na $[-2, 2]$, za katere je $y(-2) = y(2) = 2$ in $y(x) > 0$ za vsak $x \in [-2, 2]$.

V nalogah od 51. do 54. na prostoru zveznih funkcij iz $[-1, 1]$ v $\mathbb{R}$ gledamo naslednji skalarni produkt:

$$\langle p\,,\,q\rangle := \int_{-1}^{1} p(x)\,q(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

51. Izračunajte kot med funkcijama $p(x) := 1$ in $q(x) := x$.
52. Izračunajte kot med funkcijama $p(x) := 1$ in $q(x) := x^2$.
53. Dana je družina polinomov $p_a(x) := x^2 + a$.
    a) Poiščite a, pri katerem je p_a ortogonalen na konstanto 1.
    b) Kolikšna je norma polinoma p_a iz prejšnje točke?
    c) Kolikšen je kot med polinomoma p_a in $x \mapsto x$?
    d) Poiščite ortonormirano bazo prostora polinomov stopnje največ 2.
54. Poiščite ortogonalno projekcijo polinoma $q(x) := x^3$ na prostor polinomov stopnje največ 2.

Opomba. Induktivno se da konstruirati ortonormirana baza $e_0, e_1, e_2, \ldots$ prostora vseh polinomov, pri čemer je polinom vsak e_n stopnje n. Do konstantnega faktorja natančno so to *Legendrovi polinomi*.

REŠITVE

1. Ponovitev elementarnih integralov

1. $\left(\frac{2x^3}{7} - \frac{2}{x}\right)\sqrt{x} + C$.

2. $\frac{3x^2 - 4x}{18} + \frac{31}{27}\ln|2 + 3x| + C$.

3. $-\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-2x+7} + C$.

4. S substitucijo $t = \sqrt{2x-1}$, $x = (t^2+1)/2$, $\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$ dobimo:

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+1)\,\mathrm{d}t = \frac{16}{3}\,.$$

5. Označimo $J := \displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\sin x - \tfrac{1}{2}\right| \mathrm{d}x$.

Prvi način. Neposredno izračunamo:

$$J = \int_0^{\pi/6} \left(\tfrac{1}{2} - \sin x\right)\mathrm{d}x + \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(\sin x - \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{5\pi/6}^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} - \sin x\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\,.$$

Drugi način. Z upoštevanjem periodičnosti malo poenostavimo:

$$J = \int_{\pi/6}^{13\pi/6} \left|\sin x - \tfrac{1}{2}\right| \mathrm{d}x = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(\sin x - \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{5\pi/6}^{13\pi/6} \left(\tfrac{1}{2} - \sin x\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\,.$$

6. $(\ln 3)/2$.

7. *Prvi način.* To je ploščina polkroga s polmerom 1, ki je enaka $\pi/2$.

Drugi način. V integral vpeljemo substitucijo $t = \sqrt{1-x^2}$, toda to ne gre brez razdelitve integrala (z nepremidno izvedbo kaj lahko dobimo, da je integral enak nič, to pa ni res, ker je integrand povsod pozitiven). Ker je $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ soda funkcija, velja:

$$J = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Po vpeljavi nove spremenljivke $t = \sqrt{1-x^2}$ dobimo:

$$\begin{aligned}
J &= -2\int_1^0 \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \\
&= 2\int_0^1 \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \\
&= 2\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \sqrt{1-t^2}\right)\mathrm{d}t = \\
&= 2\arcsin t\Big|_0^1 - J = \\
&= \pi - J\,.
\end{aligned}$$

Sledi $J = \pi/2$.

Tretji način. Označimo:

$$J := \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

S substitucijo $x = \sin t$ dobimo:

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, \mathrm{d}t = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

8. S substitucijo $t = x^4 - 8x^2 + 8x + 3$ se dani integral prevede na:

$$\int_{3}^{3} \frac{\cos t}{4t}\, \mathrm{d}t = 0\,.$$

Substitucija je legitimna, ker je integracijska pot zvezna in gladka ter ker sta vzdolž cele poti oba integranda dobro definirana (recimo nikjer ne pride do deljenja z 0) in enaka (nikjer recimo ni dileme o predznaku korena).

9. Označimo iskani integral z J. Vanj se splača vpeljati substitucijo $t = \operatorname{tg} x$, a z nepremišljeno uporabo dobimo:

$$J = \int_{0}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{25 + 16t^2} = 0\,,$$

kar ni res. Taka uvedba substitucije je napačna zato, ker je krivulja $t = \operatorname{tg} x$ prekinjena. Zato je potrebno integral razdeliti:

$$J = \int_{0}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{16 + 9\cos^2 x} + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{16 + 9\cos^2 x} + \int_{0}^{3\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{16 + 9\cos^2 x}\,.$$

Z upoštevanjem periodičnosti dobimo:

$$J = 2\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{16 + 9\cos^2 x}$$

in v ta integral lahko vpeljemo zgornjo substitucijo. Dobimo:

$$J = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{25 + 16t^2} = \frac{\pi}{10}\,.$$

2. Integrali s parametrom

1. V integrandu moramo razdelati absolutno vrednost. Za ta namen je ključno, da izraz $2y - 3x$ pride na nič pri $x = 2y/3$. Ločimo tri možnosti:

- Če je $2y/3 \le 0$, je tudi $2y/3 \le x$ za vse $x \in [0, 1]$. Povsod znotraj integrala je torej $2y - 3x \ge 0$, torej je:

$$F(y) = \int_0^1 (2y - 3x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2} - 2y\,.$$

- Če je $2y/3 \ge 1$, je tudi $2y/3 \ge x$ za vse $x \in [0, 1]$. Povsod znotraj integrala je torej $2y - 3x \le 0$, torej je:

$$F(y) = \int_0^1 (3x - 2y)\,\mathrm{d}x = 2y - \frac{3}{2}\,.$$

- Če pa je $0 \le 2y/3 \le 1$, je $2y - 3x \ge 0$ za $0 \le x \le 2y/3$ in $2y - 3x \le 0$ za $2y/3 \le x \le 1$. Torej je:

$$F(y) = \int_0^{2y/3} (2y - 3x)\,\mathrm{d}x + \int_{2y/3}^1 (3x - 3y)\,\mathrm{d}x = \frac{4y^2}{3} - 2y + \frac{3}{2}\,.$$

Sklep:

$$F(y) = \begin{cases} \frac{3}{2} - 2y & ; \ y \le 0 \\ \frac{4}{3}y^2 - 2y + \frac{3}{2} & ; \ 0 \le y \le \frac{3}{2} \\ 2y - \frac{3}{2} & ; \ y \ge \frac{3}{2} \end{cases}\,.$$

2. Funkcija $(x, y) \mapsto \frac{1}{1+x^2y^2}$ je definirana za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ in je zvezna, saj je elementarna. Torej je tudi funkcija F povsod zvezna. S substitucijo $t = xy$ izračunamo:

$$F(y) = \frac{1}{y} \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \frac{\operatorname{arctg} y}{y}\,; \quad y \ne 0$$

in še trivialno $F(0) = 1$. Dobimo torej znano dejstvo, da je $\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1$.

3. Funkcija f_α je vselej in povsod zvezna v spremenljivki x, saj jo je možno predstaviti kot enotno elementarno funkcijo na $[0, 1]$. Nadalje je f_α za vsak α zvezna kot funkcija dveh spremenljivk (torej tudi v spremenljivki y), če je $y > 0$, saj jo je v okolici take točke spet možno predstaviti kot enotno elementarno funkcijo. Zato je tudi integral $F_\alpha(y)$ zvezen za vse α, če je $y > 0$.

Preostane le še primer, ko je $y = 0$. Ker eksponentna funkcija prevlada nad potenčno, za vsak $x \in [0, 1)$ velja $\lim_{y\downarrow 0} y^{-\alpha} x^{1/y} = 0$, od koder sledi $\lim_{y\downarrow 0} f_\alpha(x, y) = 0 = f_\alpha(x, 0)$. Slednje trivialno velja tudi za $x = 1$. Sledi, da je f_α vselej in povsod zvezna v spremenljivki y.

Funkcija f_α je v točki $(x, 0)$ zvezna kot funkcija dveh spremenljivk, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka okolica točke $(x, 0)$, da za vsak (ξ, η) iz te okolice velja $f_\alpha(\xi, \eta) < \varepsilon$

(funkcija je nenegativna). Pri danem $y > 0$ si oglejmo maksimum izraza $f_\alpha(x, y)$, ko x preteče interval $[0, 1]$. Velja $f_\alpha(0, y) = f_\alpha(1, y) = 0$ in:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x}(x, y) = f_\alpha(x, y)\left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{1-x}\right),$$

kar je enako nič pri $x = \frac{1}{y+1}$. Sledi:

$$\max_{x\in[0,1]} f_\alpha(x, y) = f_\alpha\left(\frac{1}{y+1}, y\right) = \frac{1}{y^{\alpha-1}(y+1)^{y+1}}.$$

Za $\alpha < 1$ gre zgornji izraz proti nič, ko gre y proti nič, kar pomeni, da je f_α povsod zvezna tudi kot funkcija dveh spremenljivk. Za $\alpha \geq 1$ pa zgornji izraz ne gre proti nič, kar pomeni, da f_α kot funkcija dveh spremenljivk ne more biti povsod zvezna. Pokažimo, da je zvezna v vseh točkah $(x, 0)$, kjer je $x \in [0, 1)$. Za ta namen vzemimo $a \in [0, 1)$ in ocenimo:

$$\max_{x\in[0,a]} f_\alpha(x, y) \leq \frac{1}{y^\alpha} a^{1/y},$$

zgornji izraz pa gre proti nič, ko gre y proti nič. Torej za $\alpha \geq 1$ velja, da je f_α kot funkcija dveh spremenljivk zvezna povsod razen v točki $(1, 0)$.

Očitno je torej integral F_α za $\alpha < 1$ povsod zvezen. S tem pa še ni rečeno, da za $\alpha \geq 1$ ni zvezen. Velja $F_\alpha(0) = 0$, za $y > 0$ pa izračunajmo:

$$F_\alpha(y) = \frac{1}{y^\alpha}\left(\frac{1}{\frac{1}{y}+1} - \frac{1}{\frac{1}{y}+2}\right) = \frac{y^2}{y^\alpha(y+1)(2y+1)}.$$

Torej je integral F_α zvezen natanko tedaj, ko je $\alpha < 2$. Za $1 \leq \alpha < 2$ je torej integral F_α zvezen, čeprav funkcija f_α kot funkcija dveh spremenljivk ni zvezna.

Zveznost integrala za $\alpha < 2$ se da utemeljiti tudi z *izrekom o dominirani konvergenci*, iz katerega sledi, da je integral zvezen v 0, brž ko sta izpolnjena naslednja dva pogoja:

- Funkcija f_α je v vseh točkah $(x, 0)$ zvezna *v spremenljivki y*.
- Obstajata tak $b > 0$ in funkcija $G_\alpha\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$, za katero obstaja posplošen integral $\int_0^1 G_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ ter je taka, da za vsak $x \in (0, 1)$ in vsak $y \in [0, b]$ velja $|F_\alpha(x, y)| \leq G_\alpha(x)$.

Za $\alpha > 0$ in $x \in (0, 1)$ izračunajmo maksimum izraza $f_\alpha(x, y)$ kar po vseh $y \geq 0$. Vemo, da je izraz zvezen v y in da je $f_\alpha(x, 0) = 0$. Ker je $\alpha > 0$, je tudi $\lim_{y\to\infty} f_\alpha(x, y) = 0$. Nadalje iz:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial y}(x, y) = f_\alpha(x, y)\left(-\frac{\alpha}{y} - \frac{\ln x}{y^2}\right),$$

kar je enako nič pri $y = -\frac{\ln x}{\alpha}$, dobimo:

$$\max_{y\geq 0} f_\alpha(x, y) = f_\alpha\left(x, -\frac{\ln x}{\alpha}\right) = \left(-\frac{\alpha}{\ln x}\right)^\alpha e^{-\alpha}(1-x) =: G_\alpha(x).$$

S substitucijo $x = e^{-t}$ dobimo:

$$\int_0^1 G_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \alpha^\alpha e^{-\alpha} \int_0^\infty t^{-\alpha}\bigl(e^{-t} - e^{-2t}\bigr)\,\mathrm{d}t = \alpha^\alpha e^{-\alpha} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{\alpha-1}}\,E(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

kjer je $E(t) := \frac{1-e^{-t}}{t}$. Ker je funkcija E omejena na $(0,\infty)$ in $\lim_{t\to 0} E(t) = 1$, posplošeni integral $\int_0^1 G_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ obstaja natanko tedaj, ko je $\alpha < 2$, prav takrat pa je integral F_α tudi zvezen.

4. Najprej prevedemo na enotni integral:

$$F(y) := \int_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi - \pi\ln\bigl(y + \sqrt{y^2-1}\,\bigr) = \int_0^{\pi/2} \ln\frac{y^2 - \sin^2\varphi}{\bigl(y + \sqrt{y^2-1}\,\bigr)^2}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Rezultat v okviru se ne da neposredno uporabiti za limito proti neskončno, temveč samo za limito proti končnemu številu. Zato pišimo:

$$\lim_{y\to\infty} F(y) = \lim_{t\downarrow 0} G(t)\,,$$

kjer je:

$$G(t) := F\left(\frac{1}{t}\right) = \int_0^{\pi/2} \ln\frac{1 - t^2\sin^2\varphi}{\bigl(1 + \sqrt{1-t^2}\,\bigr)^2}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Funkcija:

$$g(\varphi, t) := \ln\frac{1 - t^2\sin^2\varphi}{\bigl(1 + \sqrt{1-t^2}\,\bigr)^2}$$

je definirana za $(\varphi, t) \in [0, \pi/2] \times (-1, 1)$ in je elementarna, zato je tam tudi zvezna. Torej je $G(t) := \int_0^{\pi/2} g(\varphi, t)\,\mathrm{d}\varphi$ zvezna v 0, zato je:

$$\lim_{y\to\infty} F(y) = \lim_{t\downarrow 0} G(t) = G(0) = \int_0^{\pi/2} (-\ln 4)\,\mathrm{d}\varphi = -\pi\ln 2\,.$$

5. Integrand ima sicer limito, ko gre R proti neskončno, in sicer je:

$$\lim_{R\to\infty} e^{-R\sin\varphi} = \begin{cases} 1 & ;\ \varphi = 0 \\ 0 & ;\ 0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

Ta funkcija ni zvezna, a da misliti, da je limita integrala najbrž 0. To je najlažje preveriti z neposredno oceno. Iz konkavnosti sinusa na intervalu $[0, \pi/2]$ dobimo oceno $\sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi$, iz katere sledi:

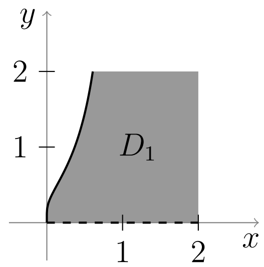
$$0 \le \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \le \int_0^{\pi/2} e^{-2R\varphi/\pi}\,\mathrm{d}\varphi \le \int_0^\infty e^{-2R\varphi/\pi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2R}\,,$$

kar pomeni, da je res $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 0$.

6. Če želimo uporabiti izrek v okviru, moramo limito prevesti na limito proti končnemu številu. Pišimo torej:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{e^{-n}}^{1}\left(1+\frac{\ln x}{n}\right)^{n}\mathrm{d}x=\lim_{y\downarrow 0}F(y)\,,\quad\text{kjer je}\quad F(y):=\int_{e^{-1/y}}^{1}(1+y\ln x)^{1/y}\,\mathrm{d}x\,.$$

Funkcija $f_1(x,y) := (1+y\ln x)^{1/y}$ je naravno definirana in zaradi elementarnosti zvezna na množici $D_1 := \{(x,y)\ ;\ y>0,\ x\ge e^{-1/y}\}$. Slika:



Toda funkcija:

$$E(t):=\begin{cases}(1+t)^{1/t} & ;\ t\neq 0\\ e & ;\ t=0\end{cases}$$

je zvezna na celi realni osi. Torej je funkcija:

$$f_2(x,y):=\big(E(y\ln x)\big)^{\ln x}$$

zvezna razširitev funkcije g_1 na množico $D_2 := D_1\cup\{(x,0)\ ;\ x>0\}$. Pokažimo, da se da g_2 zvezno razširiti še na množico $D_3 := D_2\cup\{(0,0)\}$. Za ta namen uporabimo delni Taylorjev razvoj eksponentne funkcije z ostankom, in sicer $e^t = 1+t+\frac{1}{2}e^{\theta t}t^2 \ge 1+t$, iz katerega sledi $E(t)\le e$; to velja za vse $t\in\mathbb{R}$. Sledi, da za vse $(x,y)\in D_2$ velja $0\le f_2(x,y)\le x$. Če torej postavimo $f_3(x,y) := f_2(x,y)$ za $(x,y)\in D_2$ in $f_3(0,0) := 0$, je f_3 zvezna na D_3, torej je funkcija $G_3(y,a,b) := \int_a^b f_3(x,y)\,\mathrm{d}x$ zvezna na $\{(y,a,b)\ ;\ (a,y)\in D_3, (b,y)\in D_3\}$. Potem pa je tudi funkcija:

$$F_3(y)=\begin{cases}G_3(y,e^{-1/y},1) & ;\ y>0\\ G_3(0,0,1) & ;\ y=0\end{cases}=\begin{cases}F(y) & ;\ y>0\\ G_3(0,0,1) & ;\ y=0\end{cases}$$

zvezna razširitev funkcije F na interval $[0,\infty)$. Sledi:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{e^{-n}}^{1}\left(1+\frac{\ln x}{n}\right)^{n}\mathrm{d}x=\lim_{y\downarrow 0}F(y)=F_3(0)=\int_0^1 g_3(x,0)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,.$$

7. Velja:

$$F'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin(xy)}{x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos(xy) \, \mathrm{d}x = \frac{\sin \frac{\pi y}{2}}{y} \, .$$

Opomba. Iz odvoda dobimo še eno integralsko izražavo funkcije F:

$$F(y) = \int_0^y \frac{\sin \frac{\pi t}{2}}{t} \, \mathrm{d}t \, ,$$

ki pa je ekvivalentna prvotni: le-to namreč dobimo s substitucijo $y = \pi t/(2y)$.

8. Ker je:

$$F(y) := \int_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2 \varphi) \, \mathrm{d}\varphi$$

soda funkcija, jo je dovolj izračunati za $y > 1$. Za ta namen odvajamo:

$$F'(y) = 2y \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{y^2 - \sin^2 \varphi} \, .$$

S substitucijo $t = \operatorname{tg} \varphi$ dobimo:

$$F'(y) = 2y \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{y^2 - t^2 + y^2 t^2} = \frac{2}{y} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \frac{y^2-1}{y^2} \, t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2 - 1}} \, .$$

Integriramo in dobimo:

$$F(y) = \pi \ln\bigl(y + \sqrt{y^2 - 1}\,\bigr) + C \, .$$

Za izračun konstante C bi človek najprej pomislil na $F(1) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 - \sin^2 \varphi) \, \mathrm{d}\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} \ln \cos \varphi \, \mathrm{d}\varphi$, a tu sta dve težavi. Prvič, integrand se ne da zvezno razširiti na $(\varphi, y) \in [0, \pi/2] \times [1, \infty)$ (integral za $F(1)$ je posplošen). Drugič, integral za $F(1)$ tudi računsko ni tako očiten. Pač pa smo v 4. nalogi izračunali, da je:

$$\lim_{y \to \infty} \left(\int_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2 \varphi) \, \mathrm{d}\varphi - \pi \ln\bigl(y + \sqrt{y^2 - 1}\,\bigr) \right) = -\pi \ln 2 \, ,$$

torej je $C = -\pi \ln 2$. Sledi, da je:

$$F(y) = \pi \ln \frac{y + \sqrt{y^2 - 1}}{2}$$

za vse $y > 1$. Ker je F soda, pa za $y < -1$ velja:

$$F(y) = \pi \ln \frac{-y + \sqrt{y^2 - 1}}{2} \, .$$

Za vse y z $|y| > 1$ torej velja:

$$F(y) = \pi \ln \frac{|y| + \sqrt{y^2 - 1}}{2} \, .$$

Opomba. Rezultat da misliti, da je potem:

$$\int_0^{\pi/2} \ln\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\lim_{y\downarrow 1} F(y) = -\frac{\pi\ln 2}{2}\,.$$

To je sicer res, ni pa očitno, saj predpostavke rezultata v okviru niso izpolnjene. Potrebovali bi rezultat, ki obravnava posplošene integrale.

9. Velja:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_y^{\sqrt{y}} \frac{e^{-x^2/y}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_y^{\sqrt{y}} \frac{x\,e^{-x^2/y}}{y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{e^{-1}}{\sqrt{y}}\,\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{e^{-y}}{y} = \\ &= -\frac{1}{2y}\int_{-y}^{-1} e^t\,\mathrm{d}t + \frac{e^{-1}}{2y} - \frac{e^{-y}}{y} = \\ &= -\frac{e^{-y}}{2y}\,.\end{aligned}$$

10. Integral obstaja za vsak y in je enak $\pi\,\mathrm{sgn}(y)$.
Rezultat ni zvezna funkcija, čeprav je integrand zvezna funkcija dveh spremenljivk.

11. Naj bo $c > 0$. Iz:

$$\int_c^\infty \frac{y}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}x = \int_{cy}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(cy)$$

in posledično:

$$\sup_{y\in(u,v)}\left|\int_c^\infty \frac{y}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}x\right| = \sup_{y\in[u,v]}\left|\int_c^\infty \frac{y}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}x\right| = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(uy)$$

dobimo, da integral konvergira enakomerno na vseh intervalih od u do v, kjer je $0 < u \le v \le \infty$, na ostalih podintervalih, torej intervalih od 0 do v, pa integral ne konvergira enakomerno.

Opomba. Da integral ne konvergira enakomerno na nobenem intervalu $[0, v)$, kjer je $0 < v \le \infty$, se vidi tudi iz dejstva, da v 0 ni zvezen, saj je enak $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(y)$.

12. Opazimo, da za $x = y$ velja $f(x,y) = 1$, sicer pa je $0 \le f(x,y) < 1$. Torej za vsak $x \ge 0$ velja $s(x) := \sup_{y\ge 0}|f(x,y)| = 1$. Ta funkcija je integrabilna na vsah končnih intervalih, ne obstaja pa njen posplošeni integral od 0 do neskončno, zato Weierstrassov kriterij ni izpolnjen.

Pač pa za $c, y \ge 1$ velja:

$$\int_c^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_{\max\{c,y\}} e^{-(x-y)y}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-(\max\{c,y\}-y)y}}{y} = \begin{cases} \frac{1}{y}\,e^{y^2-cy} & ;\ y \le c \\ \frac{1}{y} & ;\ y \ge c\,. \end{cases}$$

Očitno je $\max_{y\ge c}\int_c^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c}$. Nadalje definirajmo $g_c(y) := \frac{1}{y}\,e^{y^2-cy}$ in izračunajmo:

$$g_c'(y) = \left(2y - c - \frac{1}{y}\right) g_c(y)\,.$$

Funkcija g_c' ima dve ničli, in sicer $\frac{c-\sqrt{c^2+8}}{4} < 0$ in $\frac{c+\sqrt{c^2+8}}{4} > 0$. Med njima je negativna, drugod pa pozitivna. To pomeni, da je funkcija g_c na intervalu $[1, c]$ bodisi ves čas padajoča bodisi najprej padajoča, potem pa naraščajoča. V vsakem primeru pa je:

$$\max_{1 \le y \le c} g_c(y) = \max\bigl\{g_c(1), g_c(c)\bigr\} = \max\left\{e^{1-c},\ \frac{1}{c}\right\}$$

in tudi:

$$\max_{y \ge 1} \int_c^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}x = \max\left\{e^{1-c},\ \frac{1}{c}\right\},$$

to pa gre proti nič, ko gre c proti neskončno (v resnici je izraz enak kar $1/c$). Sledi, da dani integral konvergira enakomerno.

13. Integral moramo zdaj obravnavati kot posplošen. A tudi kot posplošen integral ima pomen le za $|y| \ge 1$. Zato pri obravnavi enakomerne konvergence gledamo le primer $y \ge 1$. V tem primeru ocenimo:

$$2 \ln \cos \varphi = \ln(1 - \sin^2 \varphi) \le \ln(y^2 - \sin^2 \varphi) \le 2 \ln y\,,$$

od koder sledi:

$$\bigl|\ln(y^2 - \sin^2 \varphi)\bigr| \le 2|\ln \cos y| + 2 \ln y\,.$$

Za $1 \le y \le 2$ torej velja $\bigl|\ln(y^2 - \sin^2 \varphi)\bigr| \le 2\bigl(|\ln \cos y| + \ln 2\bigr)$. Za enakomerno konvergenco integrala $F(y)$ za $y \in [1, 2]$ bo torej po Weierstrassovem kriteriju dovolj pokazati obstoj integrala $\int_0^{\pi/2} |\ln \cos \varphi|\,\mathrm{d}\varphi$. S substitucijo $t = \frac{\pi}{2} - \varphi$ se le-ta prevede na $\int_0^{\pi/2} |\ln \sin t|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (-\ln \sin t)\,\mathrm{d}t$. Z uporabo konveksnosti funkcije sinus za $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ ocenimo $\sin t \ge \frac{2}{\pi} t$, torej $-\ln \sin t \le -\ln\bigl(\frac{2}{\pi} t\bigr)$. Torej je dovolj pokazati, da obstaja posplošeni integral:

$$\int_0^{\pi/2} \left(-\ln \frac{2t}{\pi}\right) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \int_0^1 (-\ln u)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} u(1 - \ln u)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \lim_{u \downarrow 0} u \ln u\right),$$

slednja limita pa obstaja npr. po L'Hôpitalovem pravilu, saj je:

$$\lim_{u \downarrow 0} u \ln u = \lim_{u \downarrow 0} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = -\lim_{u \downarrow 0} \frac{\frac{1}{u}}{\frac{1}{u^2}} = -\lim_{u \downarrow 0} u = 0\,.$$

Ker integral $F(y)$ za $y \in [1, 2]$ enakomerno konvergira in je funkcija $f(x, y) = \ln(y^2 - \sin^2 \varphi)$ zvezna v $(\varphi, y) \in \bigl(0, \frac{\pi}{2}\bigr) \times [1, 2]$, integral $F(y)$ res obstaja tudi za $y = 1$ in je tam zvezen. Iz 8. naloge pa vemo, da za vse $y > 1$ velja $F(y) = \pi \ln \frac{y + \sqrt{y^2 - 1}}{2}$. Ker je desna stran zvezna v $y = 1$, enakost velja tudi za $y = 1$, od koder dobimo $F(1) = -\pi \ln 2$, torej:

$$\int_0^{\pi/2} \ln \cos \varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2} \ln \sin \varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{\pi \ln 2}{2}\,.$$

14. Glede na to, da je:

$$\lim_{R\to\infty} R\, e^{-R\sin\varphi} = \begin{cases} \infty & ;\ \varphi = 0 \\ 0 & ;\ 0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}\,, \end{cases}$$

je integral smiselno preoblikovati tako, da bo imel integrand povsod končno limito. S substitucijo $\alpha = R\varphi$ dobimo:

$$F(R) := R\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi := \int_0^{\pi R/2} e^{-R\sin(\alpha/R)}\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Limita integranda:

$$\lim_{R\to\infty} e^{-R\sin(\alpha/R)} = e^{-\alpha}$$

daje misliti, da je:

$$\lim_{R\to\infty} F(R) = \int_0^\infty e^{-\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = 1\,,$$

a če želimo uporabiti rezultat v okviru, moramo limito prevesti na limito proti končnemu številu. Pišimo torej:

$$\lim_{R\to\infty} F(R) = \lim_{y\downarrow 0} G(y)\,,$$

kjer je:

$$G(y) := F\left(\frac{1}{y}\right) = \int_0^{\pi/(2y)} e^{-\frac{\sin(\alpha y)}{y}}\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Za uporabo izreka iz zadnjega okvira potrebujemo zvezno funkcijo in fiksne meje. To dosežemo z izražavo:

$$G(y) = \int_0^{\pi/(2y)} \left(e^{-\frac{\sin(\alpha y)}{y}} - e^{-\frac{1}{y}}\right)\mathrm{d}\alpha + \frac{\pi}{2y}\, e^{-\frac{1}{y}} = \int_0^\infty g(\alpha, y)\,\mathrm{d}\alpha + \frac{\pi}{2y}\, e^{-\frac{1}{y}}\,,$$

kjer je:

$$g(\alpha, y) = \begin{cases} e^{-\frac{\sin(\alpha y)}{y}} - e^{-\frac{1}{y}} & ;\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2y} \\ 0 & ;\ \alpha \ge \frac{\pi}{2y} \end{cases} = \max\left\{e^{-\frac{\sin(\alpha y)}{y}} - e^{-\frac{1}{y}},\ 0\right\}.$$

Če tako uvedemo:

$$S(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & ;\ t \ne 0 \\ 1 & ;\ t = 0\,, \end{cases} \qquad \text{in} \qquad E(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}\, e^{-\frac{1}{y}} & ;\ y \ne 0 \\ 0 & ;\ y = 0\,, \end{cases}$$

lahko to nadalje izrazimo kot:

$$g(\alpha, y) = \max\left\{e^{-\alpha\, S(\alpha y)} - y\, E(y),\ 0\right\},$$

tako da je:

$$G(y) = \int_0^\infty g(\alpha, y)\,\mathrm{d}\alpha + \frac{\pi}{2}\, E(y)\,.$$

Funkcija S je zvezna na celi realni osi, funkcija E pa na $[0, \infty)$. Sledi, da je funkcija $g_1(y) := \max\bigl\{e^{-\alpha\, S(\alpha y)} - y\, E(y),\, 0\bigr\}$ zvezna razširitev funkcije g na $[0, \infty) \times [0, \infty)$. Tudi predpis $G_1(y) := \int_0^\infty g_1(\alpha, y)\,\mathrm{d}\alpha$ je razširitev funkcije G na interval $[0, \infty)$ pokazati pa moramo še, da je funkcija G_1 zvezna.

Ker za vse $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ velja $\sin t \ge \frac{2t}{\pi}$, lahko za $y > 0$ in $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2y}$ ocenimo $e^{-\frac{\sin(\alpha y)}{y}} \le e^{-\frac{2}{\pi}\alpha}$. A krajši premislek pokaže, da lahko potem za vse $\alpha \ge 0$, $y > 0$ ocenimo:

$$0 \le g(\alpha, y) \le \max\bigl\{e^{-\frac{2}{\pi}\alpha} - e^{-\frac{1}{y}},\, 0\bigr\} \le e^{-\frac{2}{\pi}\alpha}\,.$$

Ker posplošeni integral $\int_0^\infty e^{-\frac{2}{\pi}\alpha}$ obstaja, posplošeni integral $\int_0^\infty g(\alpha, y)\,\mathrm{d}\alpha$ konvergira enakomerno za $y > 0$. Sledi, da je posplošeni integral $\int_0^\infty g_1(\alpha, y)\,\mathrm{d}\alpha$ zvezen v $y = 0$. Ker je tudi funkcija E zvezna na $[0, \infty)$, je tam zvezna tudi funkcija G_1. To pa pomeni, da je:

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty} R\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi &= \lim_{y\downarrow 0} G(y) = \\ &= G_1(0) = \\ &= \int_0^\infty g_1(\alpha, 0)\,\mathrm{d}\alpha + \frac{\pi}{2}\,E(0) = \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = \\ &= 1\,.\end{aligned}$$

15. Označimo $F(y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$. Najprej opazimo, da obstaja:

$$F(0) = \int_0^\infty 0\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Za $f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x(1+x^2)}$ je $f_y(x, y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$. Zaradi elementarnosti sta obe funkciji zvezni v (x, y). Nadalje lahko ocenimo $|f_y(x, y)| \le \frac{1}{1+x^2}$, posplošeni integral $\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ pa obstaja. Torej integral $\int_0^\infty f_y(x, y)\,\mathrm{d}x$ konvergira enakomerno na celi realni osi in velja:

$$\begin{aligned}
F'(y) &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2y^2)(1+x^2)} = \\
&= \frac{1}{y^2-1}\int_0^\infty \left(\frac{y^2}{1+x^2y^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{y^2-1}\big(y\operatorname{arctg}(xy) - \operatorname{arctg} x\big)\Big|_{x=0}^\infty = \\
&= \frac{1}{y^2-1}\big(|y|\operatorname{arctg}(x|y|) - \operatorname{arctg} x\big)\Big|_{x=0}^\infty = \\
&= \frac{\pi}{2}\,\frac{|y|-1}{y^2-1} = \\
&= \frac{\pi}{2}\,\frac{|y|-1}{|y|^2-1} = \\
&= \frac{\pi}{2(|y|+1)}\,.
\end{aligned}$$

Zgornji izračun je legitimen za $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Toda iz ocene $|f_y(x,y)| \le \frac{1}{1+x^2}$ in obstoja integrala $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ sledi tudi, da je funkcija F' zvezna. Ker je tudi izraz $\frac{\pi}{2(|y|+1)}$ zvezen v y, mora enakost veljati za vse realne y.

Primitivno funkcijo F najprej izračunajmo za $y \ge 0$. Tedaj je:

$$F'(y) = \frac{\pi}{2(y+1)}\,.$$

Z integracijo dobimo, da za $y \ge 0$ velja:

$$F(x) = \frac{\pi}{2}\ln(y+1) + C\,.$$

Ker je $F(0) = 0$, za $y \ge 0$ velja $F(y) = \dfrac{\pi}{2}\ln(y+1)$. Zdaj pa opazimo, da je funkcija F liha, torej mora veljati:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln(|y|+1)\operatorname{sgn}(y)\,,$$

in sicer za vse $y \in \mathbb{R}$.

16. Integral formalno odvajamo:

$$\begin{aligned}
y' &= \int_0^\infty \frac{z\,e^{-xz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\,, \\
y'' &= \int_0^\infty \frac{z^2\,e^{-xz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\,.
\end{aligned}$$

Integrali za y, y' in y'' vsi konvergirajo enakomerno na vseh intervalih oblike $[m,\infty)$, kjer je $m > 0$, saj za $x \in [m,\infty)$ velja $0 \le \frac{e^{-xz}}{1+z^2}, \frac{z\,e^{-xz}}{1+z^2}, \frac{z^2\,e^{-xz}}{1+z^2} \le e^{-mz}$, posplošeni integral $\int_0^\infty e^{-mz}\,\mathrm{d}z$ pa obstaja. Zato je zgornje odvajanje pod integralskim znakom legitimno. Sledi:

$$y'' + y = \int_0^\infty e^{-xz}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{x}\,.$$

17. Označimo:

$$f(a,x) := \frac{1}{(x^2+a)^2}\,, \qquad F(a) := \int_{-\infty}^\infty f(a,x)\,\mathrm{d}x$$

in opazimo, da je $f(a,x) = g_a(a,x)$, kjer označimo še:

$$g(a,x) := -\frac{1}{(x^2+a)}\,, \qquad G(a) := \int_{-\infty}^\infty g(a,x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Preverimo, da velja $F = G'$. Najprej izračunamo:

$$G(a) = -\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{a}}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = -\frac{\pi}{\sqrt{a}}\,.$$

Funkcija G torej obstaja za vsak $a > 0$. Naj bo $m > 0$. Za $a \ge m$ lahko ocenimo:

$$f(a,x) \le \frac{1}{(x^2+m)^2} \le h_m(x) := \min\left\{\frac{1}{m^2}, \frac{1}{x^4}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{m^2} & ;\ |x| \le \sqrt{m}\,, \\ \frac{1}{x^4} & ;\ |x| \ge \sqrt{m}\,. \end{cases}$$

Ker integral:

$$\int_{-\infty}^\infty h_m(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-\sqrt{m}} \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x + \int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} \frac{1}{m^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{m}}^\infty \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$$

obstaja, f pa je zvezna v a in x, za $a > m$ res velja:

$$F(a) = G'(a) = \frac{\pi}{2a^{3/2}}\,.$$

Ker je bil $m > 0$ poljuben, to velja za vse $a > 0$.

18. a) Velja:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(a^2x) - \operatorname{arctg}(ax)}{x} = a^2 - a\,,$$

tako da je treba integral v posplošenem smislu gledati le pri ∞.

Najprej opazimo, da velja $I(0) = I(1) = 0$; za ti dve vrednosti parametra integral zagotovo obstaja.

Za $a > 0$ lahko integral preuredimo v:

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{x(\operatorname{arctg}(a^2x) - \operatorname{arctg}(ax))}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Ker je:

$$\lim_{x\to\infty} x\big(\operatorname{arctg}(a^2x) - \operatorname{arctg}(ax)\big) = \frac{a-1}{a^2}\,,$$

je funkcija v števcu omejena, tako da integral konvergira.

Za $a < 0$ pa označimo $c = -a$ in dobimo:

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(c^2 x) + \operatorname{arctg}(cx)}{x} \, \mathrm{d}x \,.$$

Ker je:

$$\lim_{x\to\infty} \big(\operatorname{arctg}(c^2 x) + \operatorname{arctg}(cx)\big) = \pi \,,$$

je funkcija v števcu omejena stran od 0, tako da integral divergira. Konvergenčno območje je torej $K = [0, \infty)$.

b) Brž ko integral odvoda po a enakomerno konvergira, za $a > 0$ velja:

$$I'(a) = \int_0^\infty \left(\frac{2a}{1 + a^4 x^2} - \frac{1}{1 + a^2 x^2} \right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a} \,.$$

Ker je $I(1) = 0$, je $I(a) = \dfrac{\pi}{2} \ln a$.

Enakomerno konvergenco integrala preverimo po Weierstrassovem kriteriju: za a iz poljubnega zaprtega intervala $[m, M] \subseteq (0, \infty)$ lahko ocenimo:

$$\left| \frac{2a}{1 + a^4 x^2} - \frac{1}{1 + a^2 x^2} \right| \le \frac{2M}{1 + m^4 x^2} + \frac{1}{1 + m^2 x^2} \,,$$

integral slednjega pa konvergira. To je edina enakomerna konvergenca, ki jo je treba preveriti.

Opomba. V resnici obstoj integrala za $a > 0$ sledi že iz obstoja za $a = 1$ in enakomerne konvergence integrala odvoda po a na intervalih $[m, M] \subset (0, \infty)$.

c) Ker rezultat ni zvezen v $a = 0$, dani integral ne more enakomerno konvergirati na $[0, \infty)$.

19. a) Problem za konvergenco je v ∞. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in $x \ge 0$. Ocenimo:

$$|x - a| \, e^{-x^2} \le (x + |a|) \, e^{-x^2/2} \, e^{-x^2/2} \,.$$

Produkt prvih dveh faktorjev gre proti nič, ko gre x proti neskončno, zato je omejen, tretji faktor pa je pozitivna integrabilna funkcija. Sledi, da tudi izvirni integral konvergira.

b) Uporabimo Weierstrassov kriterij: za $a \in [-M, M]$ ocenimo:

$$e^{-x^2} |x - a| \le (x + M) \, e^{-x^2}$$

in ker integral $\int_0^\infty (x + M) \, e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ konvergira, originalni integral konvergira enakomerno na $[-M, M]$.

c) Glede na to, da integrand ni povsod odvedljiv po a, integral razdelimo. Pišimo:

$$I(a) = J(a) + K(a) \,,$$

kjer je:

$$J(a) = \int_0^a e^{-x^2}|x-a|\,\mathrm{d}x = \int_0^a e^{-x^2}(a-x)\,\mathrm{d}x\,,$$
$$K(a) = \int_a^\infty e^{-x^2}|x-a|\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty e^{-x^2}(x-a)\,\mathrm{d}x\,,$$

pri čemer to velja za vse $a \in \mathbb{R}$, ne le za $a \geq 0$. Potem je:

$$I'(a) = \int_0^a e^{-x^2}\,\mathrm{d}x - \int_a^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

torej je:

$$I'(0) = -\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Treba je le še preveriti, da je odvajanje pod integralom upravičeno. Izraz $J(a)$ je integral, ki ima končne meje, integrand pa je zvezno odvedljiv po a. Integral $K(a)$ pa lahko spet razdelimo:

$$K(a) = \int_a^0 e^{-x^2}(x-a)\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty e^{-x^2}(x-a)\,\mathrm{d}x\,.$$

Prvi člen je spet integral funkcije, ki je zvezno odvedljiva po a, v končnih mejah. Formalni odvod drugega integrala:

$$-\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

pa očitno konvergira enakomerno po a, saj konvergira in je neodvisen od a. Zato lahko oba integrala odvajamo pod integralskim znakom. Odvoda lahko spet združimo v enoten integral in dobimo, da lahko tudi $K(a)$ odvajamo pod integralskim znakom.

20. Z zamenjavo vrstnega reda integracije izračunamo:

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_a^b\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \ln\frac{b+1}{a+1}\,. \qquad (*)$$

Ta račun pa je treba še utemeljiti. Za začetek opazimo, da je funkcija $(x,y) \mapsto x^y$ definirana in zvezna na $\big([0,1]\times[0,\infty)\big)\setminus\{(0,0)\}$. To pomeni, da je izračun veljaven za $a, b > 0$, pri čemer je treba pripomniti, da račun:

$$\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

strogo gledano velja le za $0 < x < 1$. Izvirni integral je formalno gledano posplošeni Riemannov integral (v obeh krajiščih), a posplošenost je tu odpravljiva, saj za $a, b > 0$ velja:

$$\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y = \begin{cases} 0 & ;\ x = 0\,, \\ \frac{x^b - x^a}{\ln x} & ;\ 0 < x < 1 \\ b - a & ;\ x = 1\,. \end{cases}$$

Funkcija na desni mora biti zvezna, saj je dobljena kot integral funkcije, ki je zvezna na $[0,1]\times[a,b]$ oziroma $[0,1]\times[b,a]$. Seveda pa lahko to preverimo tudi neposredno, z limitiranjem. Dani posplošeni Riemannov integral se torej ujema z osnovnim Riemannovim integralom zvezno razširjene funkcije.

Če je $a=0$ ali $b=0$, pa rezultata v zgornjem okviru ne moremo uporabiti, saj se funkcija $(x,y)\mapsto x^y$ ne da zvezno razširiti na $[0,1]\times[0,\infty)$. Vendar pa se da ustrezno zvezno razširiti izvirni integrand. Funkcija:

$$h(t)=\begin{cases} 0 & ;\ t=0 \\ \frac{t-1}{\ln t} & ;\ 0<t<1 \\ 1 & ;\ t=1\,, \end{cases}$$

je namreč zvezna na $[0,1]$ in velja:

$$b\,h(x^b)-a\,h(x^a)=\begin{cases} 0 & ;\ x=0\,, \\ \frac{x^b-x^a}{\ln x} & ;\ 0<x<1 \\ b-a & ;\ x=1\,. \end{cases}$$

Iz zveznosti funkcije h sledi, da je zgornji izraz zvezen v $(x,a,b)\in[0,1]\times[0,\infty)\times[0,\infty)$, torej je zvezen tudi njegov integral po x. Ker je tudi funkcija $(a,b)\mapsto\ln\frac{b+1}{a+1}$ zvezna v $(a,b)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$, formula $(*)$ velja tudi, če je $a=0$ ali $b=0$.

21. Izračun poteka enako kot pri prejšnji nalogi. Vse, kar je treba preveriti, pa je tokrat tretji pogoj splošne različice Fubinijevega izreka. Ta je izpolnjen, ker integrand povsod istega predznaka, torej lahko pri preverjanju tretjega pogoja absolutno vrednost izbrišemo ali pa jo nadomestimo s spremembo predznaka. Integral absolutne vrednosti obstaja, ker obstaja integral izvirne funkcije.

22. *Prvi način.* Velja:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty\int_a^b e^{-xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_a^b\int_0^\infty e^{-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{y}=\ln\frac{b}{a}\,.$$

Izračun utemeljimo s splošno različico Fubinijevega izreka. Tretji pogoj je izpolnjen, ker je integrand povsod istega predznaka.

Drugi način. S substitucijo $x=-\ln t$ prevedemo na prejšnjo nalogo:

$$\int_0^\infty\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t^{b-1}-t^{a-1}}{\ln t}=\ln\frac{b}{a}\,.$$

23. Velja:

$$\int_0^1\int_0^1\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_{x=0}^{1}\,\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\pi}{4}\,,$$

vrstnega reda pa ne smemo zamenjati, saj je:

$$\int_0^1\int_0^1\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\int_0^1\int_0^1\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4}\,.$$

Prva dva pogoja Fubinijevega izreka sta izpolnjena, torej tretji očitno ni izpolnjen. To se vidi tudi neposredno, saj integral:

$$\int_0^1 \int_0^y \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_{x=0}^{y}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{2y}$$

ne obstaja.

24. S substitucijo $t = x^2$ dobimo:

$$\int_0^\infty x^9\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^4\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{4!}{2} = 12\,.$$

25. S substitucijo $t = -\ln x$ dobimo:

$$\int_0^1 (\ln x)^4 \sqrt{-\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty t^{9/2} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{945}{32}\sqrt{\pi}\,.$$

26. Označimo:

$$f(a,x) := \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2}\,, \qquad F(a) := \int_0^\infty f(a,x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Najprej opazimo, da obstaja integral $F(0)$ in da je enak 0. A za uporabo izreka o odvajanju posplošenih integralov to ne bo dovolj, saj potrebujemo obstoj v *notranji* točki intervala.

Pokažimo, da obstaja $F(1)$. Funkcija $\varphi(x) := f(1,x)$ je zvezna na $(0,\infty)$ in ima limito, tako ko gre x proti nič kot tudi, ko gre proti neskončno. Zato je omejena, se pravi, da obstaja tak M, da je $|\varphi(x)| \le M$ za vse $x > 0$. Velja pa tudi ocena $|\varphi(x)| \le 1/x^2$. Oboje povzamemo v oceno:

$$|\varphi(x)| \le h(x) := \min\left\{M, \frac{1}{x^2}\right\}$$

in ker integral:

$$\int_0^\infty h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/\sqrt{M}} M\,\mathrm{d}x + \int_{1/\sqrt{M}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

obstaja, obstaja tudi $F(1)$.

Integral odvajajmo. Velja:

$$f_a(a,x) = e^{-ax^2}\,.$$

Ta funkcija je zvezna v a in v x. Izberimo $0 < m < 1$. Za $a \ge m$ in $x > 0$ ocenimo:

$$|f_a(a,x)| \le e^{-mx^2} =: h_m(x)\,.$$

S substitucijo $t = ax^2$ izračunamo:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\,.$$

Torej integral $\int_0^\infty h_m(x)\,\mathrm{d}x$ obstaja. Sledi, da integral $F(a)$ obstaja za vse $a \ge m$ in tam velja:

$$F'(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\,.$$

Ker je bil m poljuben, vse to v resnici velja za vse $a > 0$. Za te a sledi:

$$F(a) = \sqrt{\pi a} + C\,,$$

kjer je C neka konstanta. Ker je $F(0) = 0$, je $C = 0$, če je le F zvezna v 0. Za dokaz tega dejstva pa uporabimo, da je $f(a, x) = a\,\varphi\big(x\sqrt{a}\big)$. Iz ocene $|\varphi(x)| \le M$ sledi ocena $|f(a, x)| \le a$, iz ocene $|\varphi(x)| \le 1/x^2$ pa sledi ocena $|f(a, x)| \le 1/x^2$. To pa pomeni, da za $0 < a \le 1$ velja $|f(a, x)| \le h(x)$. Ker je funkcija f zvezna v obeh spremenljivkah in ker integral $\int_0^\infty h(x)\,\mathrm{d}x$ obstaja, je F res zvezna v 0. Sledi:

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi a}\,.$$

Konstanto C pa lahko izračunamo še hitreje: če v prvotni integral uvedemo substitucijo $s = x\sqrt{a}$, dobimo zvezo $F(a) = F(1)\sqrt{a}$. To pa je možno le, če je $C = 0$.

27. *Prvi način.* Z upoštevanjem sodosti in substitucijo $t = x^2$ dobimo:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^1 t^{-1/2}(1 - t)^{1/2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \\ &= \frac{\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma(2)} = \\ &= \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Drugi način. S substitucijo $t = \frac{1+x}{2}$ dobimo:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 \sqrt{(1 + x)(1 - x)}\,\mathrm{d}x = \\ &= 4\int_0^1 t^{1/2}(1 - t)^{1/2}\,\mathrm{d}t = \\ &= 4\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \\ &= 4\,\frac{\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma(3)} = \\ &= \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Tretji način. Iskani integral je enak polovici ploščine enotskega kroga, kar je enako $\pi/2$.

28. Velja:

$$\begin{aligned}\int_0^4 x^2\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x &= 4\int_0^4 x^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= 128\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}\,\mathrm{d}t = \\ &= 128\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{2}\,,\,\frac{3}{2}\right) = \\ &= 16\pi\,.\end{aligned}$$

29. S substitucijo $t = x^{12}$ dobimo:

$$\int_0^\infty \frac{x^5}{1+x^{12}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{12}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{12}\,.$$

30. Velja:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \int_\pi^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{\pi}\cos^2\alpha\sin^5\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

31. Velja:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi}\cos^2\varphi\sin^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= 2\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^5\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}\,,\,3\right) = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \\ &= \frac{2}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{16}{105}\,.\end{aligned}$$

32. Integral lahko izrazimo v oblikah:

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{tg}^a\,\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2}\varphi^a T(\varphi)^a\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2}\mathrm{ctg}^a\,\psi\,\mathrm{d}\psi = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\psi}{\psi^a T(\psi)^a}\,,$$

kjer je:

$$T(\varphi) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\varphi} & \varphi \neq 0 \\ 1 & \varphi = 0\,. \end{cases}$$

Dani integral obstaja natanko tedaj ko obstajata integrala:

$$\int_0^{\pi/4} \varphi^a T(\varphi)^a \,\mathrm{d}\varphi \quad \text{in} \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}\psi}{\psi^a T(\psi)^a}\,.$$

Funkcija T je na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ zvezna in strogo pozitivna, torej obstajata taka $0 < m < M$, da za vse $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ velja $m \le T(\varphi) \le M$. Torej prvi integral obstaja natanko za $a > -1$, drugi pa natanko za $a < 1$. Dani integral torej obstaja natanko za $-1 < a < 1$. Izračunamo:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^a \varphi \,\mathrm{d}\varphi &= \int_0^{\pi/2} \cos^{-a}\varphi \sin^a \varphi \,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{1+a}{2}, \frac{1-a}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1+a}{2}\right) = \\ &= \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi(1+a)}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi a}{2}}\,. \end{aligned}$$

33. Limite ne moremo nesti pod integral. Pač pa lahko s substitucijo $t = xs$ limito prevedemo na:

$$\lim_{x\downarrow 0} \int_0^{1/x} \frac{1}{1+s^4}\,\mathrm{d}s = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+s^4}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{u^{-3/4}\,\mathrm{d}u}{1+u} = \frac{\mathrm{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)}{4} = \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\,.$$

3. Dvojni in trojni integral

1. Integracijsko območje moramo najprej opredeliti s pogoji, ki jih dobimo tako, da enačbe spremenimo v neenačbe, to pa tako, da območje zadošča zahtevam iz besedila naloge. Za to imamo štiri možnosti, edina, ki zadošča zahtevam, pa je:

$$D = \left\{(x, y) \;;\; y > \frac{x}{2},\; x > y^2\right\} .$$

Prevedba na dvakratni integral gre lahko na dva načina.
Prvi način: pogoje zapišemo v obliki $0 < x < 4$, $x/2 < y < \sqrt{x}$. Dobimo:

$$\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \left[x^2\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right] \mathrm{d}x = \frac{124}{21} .$$

Drugi način: pogoje zapišemo v obliki $0 < y < 2$, $y^2 < x < 2y$. Dobimo:

$$\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (x^2 + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left[\frac{8y^3 - y^6}{3} + y(2y - y^2)\right] \mathrm{d}y = \frac{124}{21} .$$

2. *Prvi način*:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^x xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^1 xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \int_{x-2}^1 xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^2 x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_2^3 x\big(1 - (x-2)^2\big)\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^2 x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_2^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = \frac{x^4}{8}\bigg|_0^1 + \frac{x^2}{4}\bigg|_1^2 - \left(\frac{x^4}{8} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{4}\right)\bigg|_2^3 = \\
&\quad = \frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{4} - \frac{81}{8} + 18 - \frac{27}{4} + 2 - \frac{16}{3} + 3 = \\
&\quad = \frac{5}{3} .
\end{aligned}$$

Drugi način:

$$\int_0^1 \int_y^{y+2} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 y\big((y+2)^2 - y^2\big)\,\mathrm{d}y = 2\int_0^2 (y^2 + y)\,\mathrm{d}y = \frac{5}{3} .$$

3. Najprej opazimo, da iz drugega pogoja sledi, da mora biti $x > 1$. Tedaj iz $x^2 < y <$

x^3 sledi tudi $y < xy$. Iskani integral je torej enak:

$$\iint_{\substack{1<x<2 \\ x^2<y<x^3}} \int_y^{xy} \frac{\mathrm{d}z}{z}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \int_{x^2}^{x^3} \int_y^{xy} \frac{\mathrm{d}z}{z}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_1^2 (x^3 - x^2)\ln x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[x^4\left(\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{16}\right) - x^3\left(\frac{\ln x}{3} - \frac{1}{9}\right)\right]\Bigg|_1^2 =$$
$$= \frac{4\ln 2}{3} - \frac{23}{144} \doteq$$
$$\doteq 0{\cdot}764\,.$$

4. Tokrat bomo izračun volumna neposredno prevedli na trikratni integral. Pri pretvorbi neenačb v obliko, primerno za trikratni integral, začnemo z zadnjima dvema. Veljati mora $y^2 < 1 - x$. Od tod naprej gre na vsaj dva načina.

Prvi način: veljati mora $x < 1$ in $-\sqrt{1-x} < y < \sqrt{1-x}$. Tako dobimo naslednji ekvivalentni zapis neenačb, primeren za računanje volumna:

$$0 < x < 1\,, \quad -\sqrt{1-x} < y < \sqrt{1-x}\,, \quad y^2 < z < 1 - x\,,$$

od koder sledi:

$$V = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x}}^{\sqrt{1-x}} (1 - x - y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_0^1 (1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{15}\,.$$

Drugi način: neenačbo preoblikujemo v $x < 1 - y^2$. Skupaj s pogojem $x > 0$ je to možno le, če je $-1 < y < 1$. Tako dobimo zapis:

$$-1 < y < 1\,, \quad 0 < x < 1 - y^2\,, \quad y^2 < z < 1 - x\,,$$

iz katerega dobimo:

$$V = \int_{-1}^1 \int_0^{1-y^2} (1 - x - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (1-y^2)^2\,\mathrm{d}y = \frac{8}{15}\,.$$

5. *Prvi način*:

$$\int_0^\infty \int_0^{x/2} e^{-x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty x\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,.$$

Drugi način:

$$\int_0^\infty \int_{2y}^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty e^{-2y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,.$$

6. Dobimo:

$$\int_0^\infty \int_{x/2}^{2x} \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

in integral ne obstaja.

7. Označimo iskani integral z J.

Prvi način:

$$J = \int_0^\infty \int_0^x y^{a-1}(x-y)^{b-1}\,\mathrm{d}y\, e^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$$

S substitucijo $t = y/x$ v notranjem integralu dobimo:

$$J = \int_0^\infty x^{a+b-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(a+b)\,\mathrm{B}(a,b)\,.$$

Drugi način:

$$J = \int_0^\infty y^{a-1} \int_y^\infty (x-y)^{b-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

S substitucijo $t = x - y$ v notranjem integralu dobimo:

$$J = y^{a-1} \int_0^\infty t^{b-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\, e^{-y}\,\mathrm{d}y = \Gamma(a)\,\Gamma(b)\,.$$

Dobili smo torej znano zvezo $\mathrm{B}(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

8. Velja $D = \{(x,y)\ ;\ y < x < 9y, 1 < xy < 4\}$. Označimo naš integral z I. Neposredna prevedba na dvakratni integral ni tako preprosta:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \int_{1/x}^x x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \int_{1/x}^{4/x} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_3^6 \int_{x/9}^{4/x} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_1^2 (x^2-1)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 3\,\mathrm{d}x + \int_3^6 \left(4 - \frac{x^2}{9}\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{28}{3}\,. \end{aligned}$$

S substitucijo:

$$u = xy, \quad v = \frac{x}{y}, \quad x = \sqrt{uv}, \quad y = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad J = -\frac{1}{2v}$$

pa dobimo:

$$I = \frac{1}{2} \iint_{\substack{1<u<4\\1<v<9}} \sqrt{\frac{u}{v}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \int_1^9 \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v}} = \frac{28}{3}\,.$$

9. Po uvedbi polarnih koordinat dobimo:

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{x,y>0\\x^2+y^2<4}} \frac{xy}{\bigl(1+(x^2+y^2)^2\bigr)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{\substack{0<r<2\\0<\varphi<\pi/2}} \frac{r^3\cos\varphi\sin\varphi}{(1+r^4)^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^2 \frac{r^3\,\mathrm{d}r}{(1+r^4)^2} \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{1}{8}\int_1^{17} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \\ &= \frac{2}{17}\,. \end{aligned}$$

10. Če dano območje označimo z D, velja:

$$\mathrm{pl}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\substack{\pi/6<\varphi<\pi/2 \\ r>0 \\ r^2<4\sin\varphi\cos\varphi(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Zadnji pogoj je ekvivalenten $r^2 < \sin(4\theta)$, kar pomeni, da mora biti $\sin(4\theta) > 0$, se pravi $\pi/6 < \theta < \pi/4$. Sledi:

$$\mathrm{pl}(D) = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\sin(4\varphi)}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin(4\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{16}\,.$$

Do tega rezultata bi lahko prišli tudi z elementarno analizo, in sicer z uporabo formule za ploščino območja, podanega v polarnih koordinatah.

11. Iskani integral je enak:

$$J = \int_0^a \iint_{y^2+z^2<2xz} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \int_0^a x \iint_{y^2+z^2<2xz} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,.$$

Neenačbo $y^2 + z^2 < 2xz$ lahko prepišemo v obliki $(z-x)^2 + y^2 < x^2$, kar pomeni, da gre za krog s polmerom x. Integral forme $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ po tem krogu je natančno njegova ploščina, ki je enaka πx^2. Sledi:

$$J = \pi \int_0^a x^3\,\mathrm{d}x = \frac{\pi a^4}{4}\,.$$

12. Polarne koordinate se tu splača prilagoditi integrandu. Vpeljemo:

$$x = r\cos\varphi - 1\,, \quad y = r\cos\varphi - 1\,, \quad J = r\,.$$

Če iskani integral označimo z I, dobimo:

$$I = \iint_{\substack{0\le\varphi<2\pi \\ 0<r<2(\cos\varphi+\sin\varphi)}} r^2\,\mathrm{d}r\,.$$

Torej mora biti $\cos\varphi + \sin\varphi > 0$, kar je v okviru intervala $[0, 2\pi)$ res za $\varphi \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup$

$\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$. Torej se interval $[0, 2\pi)$ splača zamenjati npr. z intervalom $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$. Sledi:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\substack{-\pi/4<\varphi<7\pi/4 \\ 0<r<2(\cos\varphi+\sin\varphi)}} r^2\,\mathrm{d}r = \\
&= \int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^{2(\cos\varphi+\sin\varphi)} r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}(\cos\varphi+\sin\varphi)^3\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\Big(\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi + 3\cos\varphi\sin^2\varphi + \sin^3\varphi\Big)\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\Big(\cos\varphi + 2\cos^2\varphi\sin\varphi + 2\cos\varphi\sin^2\varphi + \sin\varphi\Big)\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{8}{3}\left(\sin\varphi - \frac{2\cos^3\varphi}{3} + \frac{2\sin^3\varphi}{3} - \cos\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{3\pi/4} = \\
&= \frac{64\sqrt{2}}{9}\,.
\end{aligned}$$

13. Označimo z J iskani integral. Po vpeljavi cilindričnih koordinat dobimo:

$$J = \iiint_{\substack{0\le r<\sqrt{3} \\ 0\le\varphi<2\pi}} \frac{r^3\cos^2\varphi}{1+r^2z^2\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

Prevedba na trikratni integral nam da:

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r^3\cos^2\varphi}{1+r^2z^2\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \pi\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r^2|\cos\varphi|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= 4\pi\sqrt{3}\,.
\end{aligned}$$

14. Označimo iskani integral z I. Po vpeljavi sferičnih koordinat dobimo:

$$I = \iiint_{\substack{0\le\varphi<2\pi \\ 0\le\theta\le\pi \\ 0\le r\le\cos\theta}} r^3\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Ker mora biti $\cos\theta \ge 0$, mora biti $\theta \in [0, \pi/2]$ (integracijsko območje je krogla s središčem v $(0, 0, \frac{1}{2})$ in polmerom $\frac{1}{2}$). Sledi:

$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\int_0^{\cos\theta} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{10}\,.$$

15. *Prvi način*: s cilindričnimi koordinatami.

$$V = \iiint_{\substack{r \le z \le \sqrt{1-r^2} \\ 0 \le \varphi < 2\pi}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_r^{\sqrt{1-r^2}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z \, r \, \mathrm{d}r =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\sqrt{1-r^2} - r \right) r \, \mathrm{d}r \,.$$

Če v prvi del integrala vpeljemo substitucijo $t = \sqrt{1-r^2}$, dobimo:

$$V = 2\pi \left(\int_{\sqrt{2}/2}^1 t^2 \, \mathrm{d}t - \int_0^{\sqrt{2}/2} r^2 \, \mathrm{d}r \right) = \frac{\left(2 - \sqrt{2}\,\right)\pi}{3} \,.$$

16. *Drugi način*: s cilindričnimi koordinatami, le z drugačnim vrstnim redom integracije.

$$V = \iiint_{\substack{r \le z \\ r \le \sqrt{1-z^2} \\ 0 \le \varphi < 2\pi}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_0^z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z =$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}/2} r^2 \, \mathrm{d}r + \pi \int_{\sqrt{2}/2}^1 (1 - r^2) \, \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{\left(2 - \sqrt{2}\,\right)\pi}{3} \,.$$

Tretji način: s sferičnimi koordinatami.

$$V = \iiint_{\substack{0 < r < 1 \\ 0 \le \theta \le \pi/4 \\ 0 \le \varphi < 2\pi}} r^2 \cos\varphi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = \int_0^1 r^2 \, \mathrm{d}r \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{\left(2 - \sqrt{2}\,\right)\pi}{3} \,.$$

17. Velja:

$$m = \sigma \iint_{\substack{x,y > 0 \\ x^{2/3} + y^{2/3} < R}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \sigma \int_0^R \left(R^{2/3} - x^{2/3} \right)^{3/2} \mathrm{d}x \,.$$

S substitucijo $t = (x/R)^{2/3}$ dobimo:

$$m = \frac{3}{2} \sigma R^2 \int_0^1 (1-t)^{3/2} \sqrt{t} \, \mathrm{d}t = \frac{3}{2} \sigma R^2 \, \mathrm{B}\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2} \right) = \frac{3\pi}{32} \sigma R^2 \,.$$

Koordinati težišča pa sta:

$$\begin{aligned}
x^* &= \frac{1}{m}\,\sigma \iint\limits_{\substack{x,y>0\\ x^{2/3}+y^{2/3}<R^{2/3}}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{\sigma}{m}\int_0^R x\bigl(R^{2/3}-x^{2/3}\bigr)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{3}{2}\,\frac{\sigma R^3}{m}\int_0^1 t^2(1-t)^{3/2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{3}{2}\,\frac{\sigma R^3}{m}\,\mathrm{B}\left(3,\,\frac{5}{2}\right) = \\
&= \frac{8}{105}\,\frac{\sigma R^3}{m} = \\
&= \frac{256}{315\pi}\,R
\end{aligned}$$

in:

$$\begin{aligned}
y^* &= \frac{1}{m}\,\sigma \iint\limits_{\substack{x,y>0\\ x^{2/3}+y^{2/3}<R^{2/3}}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{\sigma}{m}\int_0^R\int_0^{(R^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sigma R^3}{m}\int_0^R \bigl(1-x^{2/3}\bigr)^3\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{3}{4}\,\frac{\sigma R^3}{m}\int_0^1 (1-t)^3\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{3}{2}\,\frac{\sigma R^3}{m}\,\mathrm{B}\left(4,\,\frac{3}{2}\right) = \\
&= \frac{8}{105}\,\frac{\sigma R^3}{m} = \\
&= \frac{256}{315\pi}\,R\,.
\end{aligned}$$

Opomba: seveda sta koordinati težišča enaki, vendar pa smo ju izračunali na dva različna načina.

18. V polarnih koordinatah ima A rob dan z $r = 1+\cos\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, B pa z $r = 2\cos\varphi$ za $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ in 0 za ostale kote. Sledi $A \supseteq B$.

Označimo koordinati težišča z x^* in y^*. Zaradi simetrije je $y^* = 0$. Koordinato x^* pa lahko izračunamo na vsaj dva načina.

Prvi način. Ploščina lika je enaka:

$$\begin{aligned}
\iint_{A\setminus B} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{2\cos\varphi}^{1+\cos\varphi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{0}^{1+\cos\varphi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\bigl((1+\cos\varphi)^2 - 4\cos^2\varphi\bigr)\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(1+\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\bigl(1 + 2\cos\varphi - 3\cos^2\varphi\bigr)\,\mathrm{d}\varphi + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\bigl(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\bigr)\,\mathrm{d}\varphi\,.
\end{aligned}$$

Zaradi simetrije je:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi = 0\,,$$

velja pa še:

$$\int_{-\pi/2}^{0}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_{0}^{\pi/2}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\pi/2}^{\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\pi}^{3\pi/2}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}\,.$$

Po krajšem računu iz tega dobimo:

$$\iint_{A\setminus B}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\,.$$

Nadalje je:

$$\begin{aligned}
\iint_{A\setminus B} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{2\cos\varphi}^{1+\cos\varphi} r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{0}^{1+\cos\varphi} r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\bigl((1+\cos\varphi)^3 - 8\cos^3\varphi\bigr)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \\
&\qquad + \frac{1}{3}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\bigl(\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi - 7\cos^4\varphi\bigr)\,\mathrm{d}\varphi + \\
&\qquad + \frac{1}{3}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\bigl(\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + \cos^4\varphi\bigr)\,\mathrm{d}\varphi\,.
\end{aligned}$$

Zaradi simetrije je:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0\,,$$

velja pa še:

$$\int_{-\pi/2}^{0} \cos^4\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int_{0}^{\pi/2} \cos^4\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^4\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos^4\varphi \,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\,\Gamma(3)} = \frac{3\pi}{16}\,.$$

Po krajšem računu iz tega in prejšnjega dobimo:

$$\iint_{A\setminus B} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}\,.$$

Torej je $x^* = \dfrac{1}{2}$.

Drugi način. Upoštevamo, da je $A \supseteq B$, zaradi česar lahko poljuben integral po $A \setminus B$ računamo kot razliko:

$$\iint_{A\setminus B} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{A} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{B} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Lik B je krog s središčem v $(1,0)$ in polmerom 1, torej je:

$$\iint_{B} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi \quad \text{in tudi} \quad \iint_{B} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi\,.$$

Nadalje je:

$$\begin{aligned}
\iint_{A} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\varphi} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
\iint_{A} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\varphi} r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^3\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi + \cos^4\varphi\right)\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{5\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Dobimo:

$$\iint_{A\setminus B} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \iint_{A\setminus B} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4} \quad \text{in} \quad x^* = \frac{1}{2}\,,$$

kar je isto kot prej.

19. Masa: $m = \dfrac{3\pi}{8}\,\sigma R^2$ (enaka je štirikratni masi iz 17. naloge).

Vztrajnostni moment:

$$\begin{aligned}
J &= \sigma \int_{x^{2/3}+y^{2/3}<R^{2/3}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= 4\sigma \int_{\substack{x,y>0\\ x^{2/3}+y^{2/3}<R^{2/3}}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= 8\sigma \int_{\substack{x,y>0\\ x^{2/3}+y^{2/3}<R^{2/3}}} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= 8\sigma \int_0^R x^2\big(R^{2/3}-x^{2/3}\big)^{3/2}\,\mathrm{d}x = \\
&= 12\sigma R^4\,\frac{\sigma}{m} \int_0^1 t^{7/2}(1-t)^{3/2}\,\mathrm{d}t = \\
&= 12\sigma R^4\,\frac{\sigma}{m}\,\mathrm{B}\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right) = \\
&= \frac{21\pi}{256}\,\sigma R^4 = \\
&= \frac{7}{32}\,mR^2\,.
\end{aligned}$$

20. Označimo z R polmer osnovne ploskve, s h pa višino. Če koordinatni sistem postavimo tako, da je izhodišče v središču osnovne ploskve, os z pa se ujema s simetrijsko osjo stožca, je gostota stožca enaka cz za neko konstanto c. Privzemimo še, da ima vrh stožca pozitivno koordinato z, torej h. Najprej izračunamo maso:

$$m = \iiint_{\substack{z>0\\ \sqrt{x^2+y^2}/R+z/h<1}} cz\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Po vpeljavi cilindričnih koordinat dobimo:

$$\begin{aligned}
m &= c \iiint_{\substack{r,z\ge 0\\ r/R+z/h\le 1\\ 0\le\varphi<2\pi}} rz\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\
&= c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^r \int_0^{h(1-r/R)} z\,\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r = \\
&= \pi c h^2 \int_0^R \left(1-\frac{r}{R}\right)^2 r\,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{\pi c R^2 h^2}{12}\,.
\end{aligned}$$

Iz simetrije sledi, da ima težišče koordinati x in y enaki nič. Koordinata z pa je enaka:

$$
\begin{aligned}
z^* &= \iiint\limits_{\substack{z>0 \\ \sqrt{x^2+y^2}/R+z/h<1}} cz^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{c}{m} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^r \int_0^{h(1-r/R)} z^2 \,\mathrm{d}z \, r \,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{2\pi c h^3}{3m} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^3 r \,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{\pi c R^2 h^3}{30m} = \\
&= \frac{2h}{5} \,.
\end{aligned}
$$

Težišče je torej na simetrijski osi stožca, in sicer na 2/5 višine.

Glede na postavitev koordinatnega sistema je simetrijska os stožca os z. Vztrajnostni moment okoli te osi je torej enak:

$$
\begin{aligned}
J_z &= \iiint\limits_{\substack{z>0 \\ \sqrt{x^2+y^2}/R+z/h<1}} cz(x^2+y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \\
&= c \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^r \int_0^{h(1-r/R)} z \,\mathrm{d}z \, r^3 \,\mathrm{d}r = \\
&= \pi c R^4 h^2 \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 r^3 \,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{\pi c R^4 h^2}{60} = \\
&= \frac{mR^2}{5} \,.
\end{aligned}
$$

4. Krivulje in ploskve

1. Krivuljo parametriziramo tako, da izrazimo:

$$\begin{aligned} y &= \pm\sqrt{1-(x-1)^2} = \pm\sqrt{2x-x^2}\,, \\ z &= \pm\sqrt{4-x^2-y^2} = \pm\sqrt{4-2x}\,; \end{aligned} \qquad 0 \le x \le 2\,;$$

predznaka korenov pri izražavi spremenljivk y in z sta neodvisna. Drugače povedano,

$$\vec{r} = \left(t, \pm\sqrt{2t-t^2}, \pm\sqrt{4-2t}\right).$$

Tangento moramo izračunati v točki $\left(1,-1,\sqrt{2}\right)$. V njeni okolici je $\vec{r} = \left(t, -\sqrt{2t-t^2}, \sqrt{4-2t}\right)$, torej v njej velja:

$$\dot{\vec{r}} = \left(1,\ \frac{t-1}{\sqrt{2t-t^2}}\,,\ -\frac{1}{\sqrt{4-2t}}\right) = \left(1,\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Tangenta v implicitni obliki:

$$X - 1 = -\sqrt{2}\left(Z - \sqrt{2}\,\right), \quad Z = -1\,.$$

Opomba. Možna je tudi parametrizacija:

$$x = 1 + \cos t\,, \quad y = \sin t\,, \quad z = 2\sin\frac{t}{2}$$

(to opiše celo krivuljo, brž ko t preteče interval dolžine 4π; ko t preteče interval $[0, 2\pi]$, dobimo zgornji del krivulje ($z \ge 0$), ko pa t preteče interval $[2\pi, 4\pi]$, dobimo spodnji del krivulje ($z \le 0$).

2. a) $l = \displaystyle\int_0^3 (2+t^2)\,\mathrm{d}t = 15$.

b) Vsi možni naravni parametri: $s = \pm\left(\dfrac{t^3}{3} + 2t\right) + C$. Velja:

$$\begin{aligned} w &= t^6 + 4t^4 + 4t^2\,, \\ w' &= \frac{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \pm\frac{6t^5 + 16t^3 + 8t}{t^2+2}\,, \\ w'' &= \frac{\frac{\mathrm{d}w'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{18t^6 + 76t^4 + 88t^2 + 16}{(t^2+2)^3}\,. \end{aligned}$$

V izhodišču je $t = 0$ in $w'' = 2$.

3. a) $\vec{T} = \dfrac{(t^2, t, 1)}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\operatorname{sgn} t, \quad \vec{B} = \dfrac{(-1, 2t, -t^2)}{\sqrt{t^4+4t^2+1}},$
$\vec{N} = \dfrac{(t^3+2t, -t^4+1, -2t^3-t)}{\sqrt{t^8+5t^6+6t^4+5t^2+1}}\operatorname{sgn} t.$
b) Binormala: $X - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\left(Y - \frac{1}{3}\right) = Z - \frac{1}{2}$.
Pritisnjena ravnina: $-X + 2Y - Z = -\frac{1}{12}$.

4. Ko y, kot je izražen v prvi enačbi, vstavimo v drugo enačbo, dobimo $x^2 = e^{2z} \cos^2 z$. Dobimo torej dve krivulji:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} e^z \cos z \\ e^z \sin z \\ z \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} -e^z \cos z \\ e^z \sin z \\ z \end{bmatrix}.$$

Pri $z = 0$ in $x > 0$ je seveda relevantna prva krivulja. Odvajamo:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} e^z(\cos z - \sin z) \\ e^z(\sin z + \cos z) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -2\, e^z \sin z \\ 2\, e^z \cos z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -2e^z(\sin z + \cos z) \\ 2\, e^z(\cos z - \sin z) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vstavimo $z = 0$ in dobimo:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nadalje je:

$$\|\dot{\vec{r}}\| = \sqrt{3}, \quad \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| = 2\sqrt{2}, \quad [\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}] = 4,$$

od koder končno dobimo:

$$\kappa = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad \omega = \frac{1}{2}.$$

5. *Prvi način.* Vstavimo $z = 1 - x$ v $x^2 + 2y^2 = z(2 - z)$ in dobimo $2x^2 + 2y^2 = 1$, tako da izberemo parametrizacijo:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \end{bmatrix}; \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Odvajamo:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \end{bmatrix}, \quad \dddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \end{bmatrix}.$$

Točka, kjer je $z = 1$ in $y > 0$, je dosežena pri $t = \frac{\pi}{2}$. Tam je:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

kar nam da:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad \left\langle \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}} \right\rangle = 0, \qquad \|\dot{\vec{r}}\| = 1, \qquad \|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

in končno:

$$\kappa = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tau = 0.$$

Opomba. Torzijska ukrivljenost je enaka nič, ker krivulja leži v ravnini $x + z = 1$.

Drugi način. Parametriziramo kar z z:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 - z \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4z - 2z^2 - 1} \\ z \end{bmatrix}$$

(upoštevali smo, da je $y > 0$). Odvajamo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}z} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{2}\,(1-z)}{\sqrt{4z-2z^2-1}} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}z^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{(4z-2z^2-1)^{3/2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}}{\mathrm{d}z^3} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6\sqrt{2}(1-z)}{(4z-2z^2-1)^{5/2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vstavimo $z = 1$ in dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}z} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}z^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}}{\mathrm{d}z^3} = 0,$$

kar nam da:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \left\langle \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}} \right\rangle = 0, \qquad \|\dot{\vec{r}}\| = \sqrt{2}, \qquad \|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| = 2$$

in končno

$$\kappa = \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \tau = 0,$$

kar je isto kot prej.

Tretji način. Parametriziramo z x:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - 2x^2} \\ 1 - x \end{bmatrix}$$

(spet smo upoštevali, da je $y > 0$). Odvajamo:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{1-2x^2}} \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}x^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{(1-2x^2)^{3/2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}}{\mathrm{d}x^3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{6\sqrt{2}\,x}{(1-2x^2)^{5/2}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Če je $z = 1$, je $x = 0$, torej:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}x^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}}{\mathrm{d}x^3} = 0\,,$$

kar nam da:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \langle \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}} \rangle = 0\,, \qquad \|\dot{\vec{r}}\| = \sqrt{2}\,, \qquad \|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| = 2$$

in spet

$$\kappa = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \tau = 0\,.$$

6. Preseki ploskve z ravnino, ki ustreza določeni koordinati z, so krožnice $x^2 + y^2 = 1 + z^2$. Le-te lahko parametriziramo s kotom φ. Dobimo parametrizacijo:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \sqrt{z^2+1}\cos\varphi \\ \sqrt{z^2+1}\sin\varphi \\ z \end{bmatrix}.$$

Če želimo zajeti celo ploskev, mora kot φ preteči interval dolžine 2π, z pa mora preteči celo realno os. Odvajajmo:

$$\vec{r}_z = \begin{bmatrix} \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\cos\varphi \\ \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sqrt{z^2+1}\sin\varphi \\ \sqrt{z^2+1}\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

V splošnem je treba vedeti, koliko sta v dani točki enaka parametra. A v tem primeru je dovolj vedeti, da v dani točki velja:

$$\cos\varphi = \frac{3}{5}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{4}{5}\,, \qquad z = -\sqrt{24}\,,$$

torej je:

$$\vec{r}_z = \begin{bmatrix} -3\sqrt{24}/25 \\ -4\sqrt{24}/25 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_z \times \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -\sqrt{24} \end{bmatrix}, \qquad \vec{N} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -\sqrt{24} \end{bmatrix}.$$

Normala: $\dfrac{X-3}{3} = \dfrac{Y-4}{4} = \dfrac{Z+\sqrt{24}}{\sqrt{24}}$.
Tangentna ravnina: $3X + 4Y + \sqrt{24}\,Z = 1$.

7. a) Velja:

$$\dot{\vec{r}} = 3\begin{bmatrix}1\\2t\\2t^2\end{bmatrix}, \qquad \ddot{\vec{r}} = 6\begin{bmatrix}0\\1\\2t\end{bmatrix} \qquad \dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = 18\begin{bmatrix}2t^2\\-2t\\1\end{bmatrix}$$

$$\|\dot{\vec{r}}\| = 3(2t^2+1), \qquad \|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\| = 18(2t^2+1)$$

$$\vec{T} = \frac{1}{2t^2+1}\begin{bmatrix}1\\2t\\2t^2\end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \frac{1}{2t^2+1}\begin{bmatrix}2t^2\\-2t\\1\end{bmatrix}, \qquad \vec{N} = \frac{1}{2t^2+1}\begin{bmatrix}-2t\\1-2t^2\\2t\end{bmatrix}.$$

Možna parametrizacija iskane ploskve je:

$$\vec{\xi} = \begin{bmatrix}3t-2st\\3t^2+s-2st^2\\2t^2+2st\end{bmatrix}.$$

b) Iz krivinskega polmera:

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{\|\dot{\vec{r}}\|^3}{\|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\|} = \tfrac{3}{2}(2t^2+1)$$

dobimo parametrizacijo iskane evolute:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{r} + \rho\vec{T} = \begin{bmatrix}-6t^3\\-6t^4+3t^2+\frac{3}{2}\\2t+8t^3\end{bmatrix}.$$

8. Računajmo:

$$x^2+y^2+z^2 = \alpha^2,$$
$$\dot{x} = \cos\alpha - \alpha\sin\alpha, \quad \dot{y} = \sin\alpha - \alpha\cos\alpha, \quad \dot{z} = 0,$$
$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 = 1+\alpha^2.$$

Iskani integral je torej enak $\displaystyle\int_0^{2\pi}\alpha\sqrt{1+\alpha^2}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{(4\pi^2+1)^{3/2}-1}{3}$.

9. Najprej izračunamo:

$$\dot{x} = 3, \quad \dot{y} = 6t \quad \dot{z} = 6t^2, \qquad \mathrm{d}s = 3(2t^2+1)\,\mathrm{d}t, \qquad \mu = \frac{t}{2t^2+1}.$$

Sledi:

$$m = 3\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3},$$
$$x^* = 6\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = 2, \quad y^* = 6\int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}, \quad z^* = 4\int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t = \frac{4}{5},$$
$$J_x = \int_0^1 3t(9t^4+4t^6)\,\mathrm{d}t = 6.$$

10. Velja:

$$\int_{K_1} \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2},$$

$$\int_{K_2} \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} t^2 \\ -t^3 \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix} \right\rangle = \int_0^1 (t^2 - 2t^4 + 3t^3)\,\mathrm{d}t = \frac{41}{60}.$$

11. Velja:

$$\int_{K_1} \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 (2t^2\,\mathrm{d}t + t^2\,\mathrm{d}t + 3t^2\,\mathrm{d}t) = 2,$$

$$\int_{K_2} \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 \bigl(2t^4\,\mathrm{d}t + t^6\,\mathrm{d}(t^2) + (2t^5 + t^2)\,\mathrm{d}(t^3)\bigr) = \int_0^1 (5t^4 + 8t^7)\,\mathrm{d}t = 2.$$

Integrala sta torej enaka.

12. $x^2 z + yz^2$.

Tako je potem $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = w(1,1,1) - w(0,0,0) = 2 - 0 = 2.$

13. *Prvi način.* Ploskev lahko izrazimo eksplicitno:

$$z = 1 - x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 < 1,$$

od koder dobimo tudi $EG - F^2 = 1 + z_x^2 + z_y^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2$. Iskana površina je enaka:

$$\iint_{x^2+y^2<1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi \int_0^1 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{6}\bigl(5\sqrt{5} - 1\bigr).$$

Drugi način. Ploskev parametriziramo v polarnih koordinatah:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = 1 - \rho^2; \quad 0 \le \rho < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Iz:

$$\vec{r}_\rho = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -2\rho \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo $EG - F^2 = \rho^2(1 + 4\rho^2)$ in iskana površina je enaka:

$$\iint_{\substack{0\le\rho<1 \\ 0\le\rho<2\pi}} \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^1 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho,$$

kar je isto kot prej.

14. *Prvi način*: z eksplicitno izražavo ploskve. Najprej izračunajmo kvadrat ploščinskega elementa:

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2 .$$

Masa je torej enaka:

$$m = \iint_{z<1} \sigma\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{x^2+y^2<1} (x^2+y^2)\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y .$$

Po uvedbi polarnih koordinat $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $J = \rho$ dobimo:

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^1 \rho^3\sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \frac{25\sqrt{5}+1}{60}\,\pi .$$

Zaradi simetrije je $x^* = y^* = 0$, aplikata težišča pa je enaka:

$$\begin{aligned} z^* &= \frac{1}{m}\iint_{x^2+y^2<1} (x^2+y^2)^2\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{2\pi}{m}\int_0^1 \rho^5\sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \\ &= \frac{\pi}{m}\,\frac{125\sqrt{5}-1}{420} = \\ &= \frac{125\sqrt{5}-1}{7\big(25\sqrt{5}+1\big)} . \end{aligned}$$

Končno izračunamo še vztrajnostni moment okoli osi z:

$$J_z = \iint_{x^2+y^2<1} (x^2+y^2)^2\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}\,\pi .$$

Drugi način: s parametrizacijo v polarnih koordinatah:

$$x = \rho\cos\varphi\,,\quad y = \rho\sin\varphi\,,\quad z = \rho^2\,;\quad 0 \le \rho < 1\,,\quad 0 \le \varphi < 2\pi .$$

Tedaj je $\sigma = \rho^2$. Iz:

$$\vec{r}_\rho = \begin{bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 2\rho\end{bmatrix}\,,\quad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix}-\rho\sin\varphi\\ \rho\cos\varphi\\ 0\end{bmatrix}$$

dobimo $EG - F^2 = \rho^2(1+4\rho^2)$. Masa ploskve je tako enaka:

$$\iint_{\substack{0\le\rho<1\\ 0\le\varphi<2\pi}} \rho^3\sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \frac{25\sqrt{5}+1}{60}\,\pi .$$

Ker je $z = \rho^2$, je koordinata z težišča enaka:

$$z^* = \frac{1}{m}\iint_{\substack{0\le\rho<1\\ 0\le\varphi<2\pi}} \rho^5\sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \frac{125\sqrt{5}-1}{7\big(25\sqrt{5}+1\big)}$$

in ker je $x^2 + y^2 = \rho^2$, je vztrajnostni moment okoli osi z enak:

$$J_z = \iint_{\substack{0 \le \rho < 1 \\ 0 \le \varphi < 2\pi}} \rho^5 \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho \, d\varphi = \frac{125\sqrt{5} - 1}{420} \pi \,.$$

Rezultati so seveda enaki kot prej.

15. Ker je debelina torusa zanemarljiva, ga lahko obravnavamo kot ploskev. Označimo z a polmer osrednje, z b pa polmer stranske krožnice. Torus parametrizirajmo na naslednji način:

$$\begin{aligned} x &= (a + b\cos\theta)\cos\varphi \\ y &= (a + b\cos\theta)\sin\varphi \\ z &= b\sin\theta \end{aligned} \quad ; \qquad \begin{aligned} 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le \theta < 2\pi \,. \end{aligned}$$

Računajmo:

$$\vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -(a + b\cos\theta)\sin\varphi \\ (a + b\cos\theta)\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_\theta = \begin{bmatrix} -b\sin\theta\cos\varphi \\ -b\sin\theta\sin\varphi \\ b\cos\theta \end{bmatrix} ,$$

$$E = (a + b\cos\theta)^2 \,, \quad F = 0 \,, \quad G = b^2 \,.$$

Če je torej σ površinska gostota torusa, je njegova masa enaka:

$$m = \iint_{0 \le \varphi, \theta < 2\pi} \sigma b(a + b\cos\theta) \, d\varphi \, d\theta = 2\pi\sigma b \int_0^{2\pi} (a + b\cos\theta) \, d\theta = 4\pi^2 \sigma ab \,.$$

Vztrajnostni moment okoli simetrijske osi pa je enak:

$$\begin{aligned} J_z &= \iint_{0 \le \varphi, \theta < 2\pi} \sigma b(a + b\cos\theta)^3 \, d\varphi \, d\theta = \\ &= 2\pi\sigma b \int_0^{2\pi} (a + b\cos\theta)^3 \, d\theta = \\ &= 2\pi\sigma b \left(2\pi a^3 + 3\pi ab^2\right) = \\ &= 2\pi^2 \sigma ab \left(a^2 + 3\pi b^2\right) = \\ &= m \left(a^2 + \frac{3}{2} b^2\right) \,. \end{aligned}$$

16. Ploskev parametriziramo s pomočjo cilindričnih koordinat:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \rho \end{bmatrix} ; \qquad 0 \le \rho < 1 \,, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \,.$$

Odvajamo in dobimo:

$$\vec{r}_\rho = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\rho\cos\varphi \\ -\rho\sin\varphi \\ \rho \end{bmatrix} .$$

Ker ima vektorski produkt $\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi$ zadnjo komponento pozitivno, je želena orientacija *v nasprotju* z izbrano parametrizacijo, torej bo veljalo:

$$\begin{aligned}\iint_S \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P &= -\iint_{\substack{0 \le \rho < 1 \\ 0 \le \varphi < 2\pi}} \left\langle \begin{bmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ 2\rho \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\rho\cos\varphi \\ -\rho\sin\varphi \\ \rho \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi = \\ &= -\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi = \\ &= -\frac{2\pi}{3} \,.\end{aligned}$$

17. Plašč valja najprej parametriziramo:

$$x = \cos\varphi \,, \quad y = \sin\varphi \,, \quad z = z \,; \qquad 0 \le \varphi < 2\pi \,, \quad z \in \mathbb{R} \,.$$

in v izbranih koordinatah zapišemo vektorsko polje, ki ga integriramo:

$$\vec{R} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + z^2} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{bmatrix}$$

Nato izračunamo:

$$\vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Ker zgornji vektorski produkt vedno kaže iz valja, je pretok enak:

$$\Phi = \iint_{\substack{0 \le \varphi < 2\pi \\ z \in \mathbb{R}}} \frac{1}{1 + z^2} \left\langle \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1 + z^2} = 2\pi^2 \,.$$

18. $2xz - 2xyz + 6yz$.

19. $(p + 3)r^p$.

20. $(2z^4 + 2x^2 y, 3xz^2, -4xyz)$.

21. Označimo dano vektorsko polje z $\vec{R}$. Iz:

$$\operatorname{rot} \vec{R} = \begin{bmatrix} (b+1)y^b \cos z - 3y^b \cos z \\ 2x^a \cos z - (a+1)x^a \cos z \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo, da je polje potencialno natanko tedaj, ko je $a = 1$ in $b = 2$. Ker se nedoločeni integrali:

$$\int 2x \sin z \, \mathrm{d}x = x^2 \sin z + C_1(y, z)$$

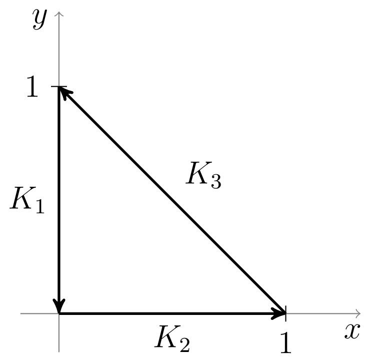
$$\int 3y^2 \sin z \, \mathrm{d}y = y^3 \sin z + C_2(x, z)$$

$$\int (x^2 + y^3) \cos z \, \mathrm{d}z = (x^2 + y^3) \sin z + C_3(x, y)$$

ujemajo za $C_1(y,z) = 3y^2 \sin z$, $C_2(x,z) = 2x \sin z$ in $C_3(x,y) = 0$, je skalarno polje $u = (x^2 + y^3) \sin z$ potencial vektorskega polja $\vec{R}$. Z drugimi besedami, velja:

$$2x \sin z \, \mathrm{d}x + 3y^2 \sin z \, \mathrm{d}y + (x^2 + y^3) \cos z \, \mathrm{d}z = \mathrm{d}\big((x^2 + y^3) \sin z\big) \,.$$

22. *Prvi način.* Integral je vsota integralov po stranicah:



Velja:

$$\begin{aligned}
\int_{K_1} \vec{R} \, \mathrm{d}\vec{r} &= 0 \,, \\
\int_{K_2} \vec{R} \, \mathrm{d}\vec{r} &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \,, \\
\int_{K_3} \vec{R} \, \mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^1 (2y - 1) \operatorname{arctg} \frac{1-y}{y} \, \mathrm{d}y \,.
\end{aligned}$$

Z integracijo po delih, kjer arkus tangens odvajamo, ostalo pa integriramo, dobimo:

$$\begin{aligned}
\int_{K_3} \vec{R} \, \mathrm{d}\vec{r} &= \int_0^1 \frac{y^2 - y}{2y^2 - 2y + 1} \, \mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{2y^2 - 2y + 1} \, \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{(2y-1)^2 + 1} = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \,.
\end{aligned}$$

Torej je $\displaystyle\oint_K \vec{R} \, \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{2}$.

Drugi način. Velja $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 1$, torej je cirkulacija po robu območja enaka kar njegovi ploščini, ploščina danega trikotnika pa je res $\frac{1}{2}$.

23. Označimo z B enotsko kroglo, z $\vec{R} = (X, Y, Z)$ dano vektorsko polje, s Φ pa iskani pretok.

Prvi način: neposredno. Rob krogle parametriziramo:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix} \; ; \qquad 0 \le \varphi < 2\pi \, , \quad 0 \le \theta \le \pi \, .$$

Tako velja:

$$\vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \vec{r}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

in

$$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} \sin^2\theta\cos\varphi \\ \sin^2\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\theta \end{bmatrix} = \vec{r}\sin\theta = \vec{N}\sin\theta \, ,$$

zato je pretok enak:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_{\partial B} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P = \\
&= \iint_{\substack{0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le \theta \le \pi}} \left\langle \begin{bmatrix} x(y^2+z^2) \\ y(x^2+z^2) \\ z(x^2+y^2) \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\rangle \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = \\
&= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = \\
&= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\sin^5\theta \sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin^3\theta) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \, .
\end{aligned}$$

Označimo $u := \sin^5\theta\sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin^3\theta$. Ker se u ne spremeni, če θ zamenjamo s $\pi - \theta$, je $\int_0^\pi u \, \mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} u \, \mathrm{d}\theta$. Nadalje, ker se u ne spremeni, če φ zamenjamo s $\varphi - \pi$, $-\varphi$ ali s $\pi/2 - \varphi$, velja $\int_0^{2\pi} u \, \mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} u \, \mathrm{d}\varphi = 2\int_0^\pi u \, \mathrm{d}\varphi = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} u \, \mathrm{d}\varphi = 4\int_0^{\pi/2} u \, \mathrm{d}\varphi$. Sledi:

$$\begin{aligned}
\Phi &= 16 \int_0^{\pi/2} \sin^5\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\sin^2\varphi \, \mathrm{d}\varphi + 8\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin^3\theta \, \mathrm{d}\theta = \\
&= 4 \, \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, 3\right) \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + 4\pi \, \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, 2\right) = \\
&= 4 \, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} \, \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)} + 4\pi \, \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \\
&= \frac{8\pi}{5} \, .
\end{aligned}$$

Drugi način: po Gaussovem izreku velja:

$$\Phi = \iiint_B \operatorname{div} \vec{R} \, \mathrm{d}V = \iiint_B 2(x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .$$

Po uvedbi sferičnih koordinat:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi \, , \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi \, , \quad z = \rho \cos\theta \, , \quad J = \rho^2 \sin\theta$$

dobimo:

$$\Phi = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^4 \sin\theta \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = \frac{8\pi}{5} \, .$$

24. Izračunati je treba:

$$\Phi := \iint_\Pi \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P \, ,$$

kjer je Π dani plašč stožca, orientiran tako, da normala kaže navzgor. Naj bo K pokrov stožca, torej ploskev $x^2 + y^2 \le 1$, $z = 1$; tudi K orientiramo tako, da normala kaže navzgor. Iztok danega vektorskega polja iz stožca je tako enak $\iint_K \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P - \iint_\Pi \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P$. Če polni stožec označimo z D, je po Gaussovem izreku:

$$\iint_K \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P - \iint_\Pi \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P = \iiint_D \operatorname{div} \vec{R} \, \mathrm{d}V = \pi \, ,$$

saj je $\operatorname{div} \vec{R} = 3$ in je integral enak kar trikratnemu volumu stožca. Izračunajmo še integral po K. Tega pa lahko izračunamo kar po definiciji s ploskovnim integralom skalarnega polja, saj je ploskev vodoravna in velja $\vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Poleg tega, če jo parametriziramo z (x, y) kot $\vec{R} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$, velja $EG - F^2 = 1$. Sledi:

$$\begin{aligned}
\iint_K \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P &= \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left\langle \begin{bmatrix} x + \sqrt{y^2 + 1} \\ y + \sqrt{x^2 + 1} \\ 1 + \sqrt{x^2 + y^2} \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \\
&= \iint_{x^2+y^2 \le 1} \left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 (1 + r) r \, \mathrm{d}r = \\
&= \frac{5\pi}{3} \, .
\end{aligned}$$

Končno je:

$$\Phi = \iint_K \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P - \iiint_D \operatorname{div} \vec{R} \, \mathrm{d}V = \frac{2\pi}{3} \, .$$

25. a) Pri $u = 0$ parametrizacija preide v:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 1+\cos v \\ 0 \\ \sin v \end{bmatrix} \quad ; \qquad v \in [0, 2\pi] \,,$$

kar je krožnica s središčem v $(1, 0, 0)$, polmerom 1 in pravokotna na os y. Pri $u = 2\pi$ pa parametrizacija preide v:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 1+e^{-2\pi}\cos v \\ 0 \\ e^{-2\pi}\sin v \end{bmatrix} \quad ; \qquad v \in [0, 2\pi] \,,$$

kar je krožnica s središčem v $(1, 0, 0)$, polmerom $e^{-2\pi}$ in pravokotna na os y,

b) Integral:

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P$$

je enak negativnemu pretoku skozi pokončni disk radija 1 z luknjo radija $e^{-2\pi}$, saj je divergenca polja enaka 0. Če ta disk z luknjo parametriziramo z (x, z); $e^{-2\pi} \le (x-1)^2 + z^2 \le 1$, velja $\vec{R} = (x^2, -x^2, -2xz)$, normalni vektor pa je enak $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (0, -1, 0)$ in kaže iz telesa, ki ga omejujeta ploskev $\mathcal{S}$ in disk z luknjo.

Preverimo, kako je glede na dano parametrizacijo orientirana ploskev $\mathcal{S}$. Velja:

$$\vec{r}_u = \begin{bmatrix} -(1+e^{-u}\cos v)\sin u - e^{-u}\cos u \cos v \\ (1+e^{-u}\cos v)\cos u - e^{-u}\cos u\cos v \\ -e^{-u}\sin v \end{bmatrix} \,, \qquad \vec{r}_v = \begin{bmatrix} -e^{-u}\cos u \sin v \\ -e^{-u}\sin u \sin v \\ e^{-u}\cos v \end{bmatrix} \,,$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{bmatrix} e^{-u}\cos u\cos v + e^{-2u}\cos u\cos^2 v - e^{-2u}\sin u \\ e^{-u}\sin u\cos v + e^{-2u}\sin u\cos^2 v + e^{-2u}\cos u \\ e^{-u}\sin v + e^{-2u}\sin v\cos v \end{bmatrix} .$$

Če izberemo $u = v = 0$, pride $\vec{r} = (1 + e^{-1}, 0, 0)$ in $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (e^{-1} + e^{-2}, e^{-2}, 0)$, kar pomeni, $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ prav tako kaže navzven. Sledi:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P &= - \iint_{e^{-2\pi} \le (x-1)^2 + z^2 \le 1} \left\langle \begin{bmatrix} x^2 \\ -x^2 \\ -2xz \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \\ &= - \iint_{e^{-2\pi} \le (x-1)^2 + z^2 \le 1} x^2 \, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \,. \end{aligned}$$

Uvedemo novi spremenljivki r in φ, pri katerih je $x = 1 + r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, $J = r$, in dobimo:

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P = - \int_0^{2\pi} \int_{e^{-2\pi}}^1 r(1 + r\cos\varphi)^2 \, \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \pi e^{-4\pi} \left(1 + \frac{e^{-4\pi}}{4} \right) - \frac{5\pi}{4} \,.$$

26. Rotor:

$$\operatorname{rot}\vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -x \end{bmatrix}$$

je precej preprostejši od izvirnega polja, zato je smiselno uporabiti Stokesov izrek. Za ta namen pa moramo najprej izbrati ploskev, katere rob je dana krivulja, ki jo označimo s K. Izberimo ploskev:

$$S\colon \quad x^2 + y^2 \le 1\,, \quad z = xy\,.$$

Orientacija izbrane ploskve bo skladna z orientacijo krivulje, če bo normalni vektor kazal navzgor. Ploskev parametrizirajmo:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \rho^2\cos\varphi\sin\varphi \end{bmatrix}$$

in izračunajmo:

$$\vec{r}_\rho = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2\rho\cos\varphi\sin\varphi \end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ \rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{bmatrix},$$

$$\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\rho^2\sin\varphi \\ -\rho^2\cos\varphi \\ \rho \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da sta krivulja in ploskev pri izbrani parametrizaciji orientirani skladno, zato je:

$$\begin{aligned}
\int_K \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} &= \iint_S \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle\,\mathrm{d}P = \\
&= \iint_{\substack{0\le\rho\le1\\0\le\varphi<2\pi}} \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -\rho\cos\varphi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\rho^2\sin\varphi \\ -\rho^2\cos\varphi \\ \rho \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \iint_{\substack{0\le\rho\le1\\0\le\varphi<2\pi}} \rho^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^2\,\mathrm{d}\rho = \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

27. Dana krivulja je rob prostorskega trikotnika, čigar oglišča so te tri točke. Prostorski trikotnik z oglišči A, B in C lahko parametriziramo v obliki:

$$\vec{r} = \vec{r}_C + u\,\overrightarrow{CA} + v\,\overrightarrow{CB} \qquad u \ge 0,\ v \ge 0\,,\ u + v \le 1\,.$$

V našem primeru lahko postavimo $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ in $C(0, 0, 1)$. Dobimo:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 - u - v \end{bmatrix} \qquad u \ge 0,\ v \ge 0\,,\ u + v \le 1\,.$$

Krivulja K nastane tako, da z izbrano parametrizacijo trikotnika preslikamo krivuljo v parametričnem prostoru, ki gre od točke $(0, 0)$ premočrtno do $(1, 0)$, nato premočrtno do $(0, 1)$ in nato premočrtno spet do $(0, 0)$. Ta pot gre v pozitivni smeri, zato sta trikotnik in njegov rob skladno orientirana.

Krivuljni integral danega vektorskega polja $\vec{R}$ je po definiciji težko izračunati. Toda po Stokesovem izreku je ta integral enak integralu rotorja:

$$\operatorname{rot} \vec{R} = \begin{bmatrix} 2y - 2z \\ -2z + 2x \\ -2x - 2y \end{bmatrix}$$

po ustrezno orientiranem trikotniku, torej:

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{u,v>0 \\ u+v<1}} \left\langle \begin{bmatrix} 2u + 4v - 2 \\ 4u + 2v - 2 \\ -2u - 2v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v &= -4 \int_0^1 \int_0^{1-v} (1 - u - v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \\ &= -2 \int_0^1 (1 - v)^2\,\mathrm{d}v = \\ &= -\frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

5. Navadne diferencialne enačbe

1. Po ločitvi spremenljivk dobimo $y^{-2/3}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$, kar se zintegrira v $3y^{1/3} = x + C$ oziroma:

$$y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3 .$$

Te funkcije imajo ničlo in glede na to, da smo delili z y, moramo to preveriti posebej. Ni težko preveriti, da so to res rešitve enačbe, niso pa edine. Še nekaj rešitev:

- $y = 0$
- $y = \begin{cases} 0 & ; x \le q \\ \left(\frac{x-q}{3}\right)^3 & ; x \ge q \end{cases}$
- $y = \begin{cases} \left(\frac{x-p}{3}\right)^3 & ; x \le p \\ 0 & ; x \ge p \end{cases}$
- $y = \begin{cases} \left(\frac{x-p}{3}\right)^3 & ; x \le p \\ 0 & ; p \le x \le q \\ \left(\frac{x-q}{3}\right)^3 & ; x \ge q \end{cases}$

Izkaže se, da ima vsaka klasična rešitev, definirana na odprtem intervalu, eno izmed teh oblik.

Nobena začetna naloga za to enačbo torej nima enolične rešitve. To se lahko zgodi zato, ker pogoji lokalne različice eksistenčnega izreka tu niso izpolnjeni – funkcija $f(x,y) = y^{2/3}$ v okolici množice $y = 0$ ni Lipschitzeva.

2. Da ločimo spremenljivke, moramo deliti z x in $y^2 - 9$:

$$\frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2-9} = \frac{\mathrm{d}x}{x} .$$

To se zintegrira v:

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-9| = \ln|x| + C .$$

Ob upoštevanju začetnega pogoja dobimo $C = \frac{1}{2}\ln 5$, poleg tega pa še, da v okolici velja $|x| = x$ in $|y^2-9| = 9 - y^2$. Sledi:

$$\ln(9-y^2) = 2\ln x + \ln 5 .$$

Rešimo na y in spet ob upoštevanju predznaka dobimo:

$$y = -\sqrt{9-5x^2} .$$

Maksimalno definicijsko območje je $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$: dlje se funkcija ne da razširiti do zvezno odvedljive funkcije.

3. Spet ločimo spremenljivke:

$$\frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2-9} = \frac{\mathrm{d}x}{x}\,.$$

Privzemimo torej najprej, da je $x \neq 0$ in $y \neq \pm 3$. Opazimo, da je leva stran, pomnožena z 2, oblike $g'(y)/g(y)$, kjer je $g(y) = y^2 - 9$. Torej lahko enačbo integriramo v:

$$\ln\frac{y^2-9}{C} = 2\ln|x|\,.$$

Obrnemo in dobimo:

$$y^2 - 9 = C|x|^2 = Cx^2\,.$$

Rešitev prvotne enačbe dobimo tudi pri $C = 0$. Izrazimo y in dobimo:

$$y = \pm\sqrt{Cx^2+9}\,.$$

Vidimo, da lahko vse te funkcije razširimo še za $x = 0$, pri čemer se zvezna odvedljivost ohrani. Primer, ko je $y = \pm 3$, pa dobimo za $C = 0$. Izkaže se, da je vsaka rešitev, ki je definirana na odprtem intervalu in je v neki točki enaka ± 3, konstantna.

4. Hitrost kolesarja v, ki se spreminja s časom t, zadošča diferencialni enačbi:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2\,,$$

kjer je k konstanta. Ločimo spremenljivke in integriramo:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -k\,\mathrm{d}t\,, \qquad \frac{1}{v} = kt + C\,.$$

Ob času 0 je hitrost enaka $v_0 := 7\,\mathrm{m/s}$, ob času $t_1 := 3\,\mathrm{s}$ je enaka $v_1 := 6\,\mathrm{m/s}$. Oboje vstavimo v rešeno enačbo in po krajšem računu dobimo:

$$C = \frac{1}{v_0}\,, \qquad k = \frac{1}{t_1}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right)\,.$$

Iščemo pa čas t_2, ob katerem je hitrost enaka $v_2 := 1\,\mathrm{m/s}$. Spet vstavimo v rešeno enačbo in po krajšem računu dobimo:

$$t_2 = t_1\,\frac{\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_0}}{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}} = 108\,\mathrm{s}\,.$$

5. Na kroglo delujeta sila zračnega upora in sila teže, obe v smeri, nasprotni njenemu gibanju. Po drugem Newtonovem zakonu je seštevek sil enak:

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - cv^2\,.$$

Ločimo spremenljivke:

$$\frac{m\,\mathrm{d}v}{mg+cv^2} = -\mathrm{d}t\,,$$

pripravimo za integracijo:

$$\frac{\mathrm{d}v}{1+\frac{c}{mg}\,v^2} = -g\,\mathrm{d}t\,,$$

integriramo:

$$\sqrt{\frac{mg}{c}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}\,v\right) = g(t_0 - t)$$

in izrazimo:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{c}}\;\mathrm{tg}\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}(t_0 - t)\right)\,.$$

Pri $t = t_0$ je $v = 0$, torej je t_0 ravno čas, ko krogla doseže najvišjo točko. Če ga želimo izračunati, vstavimo $t = 0$, ko mora biti $v = 0$. Dobimo:

$$t_0 = \sqrt{\frac{m}{cg}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}\,v_0\right) \doteq 9{\cdot}4\,\mathrm{s}\,.$$

Označimo zdaj s h višino, na kateri je krogla. Dobimo jo neposredno z integriranjem:

$$h = \int v\,\mathrm{d}t = \frac{m}{c}\ln\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}\,(t_0 - t)\right) + h_0\,.$$

Najvišja točka je dosežena pri $t = t_0$, zato je višina, ki jo doseže krogla, ravno h_0. Če jo želimo izračunati, vstavimo $t = 0$, ko je $h = 0$. Dobimo:

$$\begin{aligned} h_0 &= -\frac{m}{c}\ln\cos\left(\sqrt{\frac{cg}{m}}\,t_0\right) = \\ &= -\frac{m}{c}\ln\cos\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{c}{mg}}\,v_0\right) = \\ &= \frac{m}{2c}\ln\left(1 + \frac{c}{mg}\,v_0^2\right) \doteq \\ &\doteq 460\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

Če ne bi bilo zračnega upora, bi lahko postavili $c = 0$. Ustrezno rešitev lahko dobimo bodisi kot limito splošne rešitve, ko gre c proti nič, bodisi tako, da diferencialno enačbo rešimo posebej, kar je v resnici elementarna fizika. Pride:

$$t_0 = \frac{v_0}{g} = 10\,\mathrm{s}\,, \qquad h_0 = \frac{v_0^2}{2g} = 500\,\mathrm{m}\,.$$

6. Enačba je homogena, ker jo lahko prepišemo v obliki:

$$y' = \frac{y}{x} + \mathrm{tg}\,\frac{y}{x}\,.$$

S substitucijo $z = y/x$, $y = xz$, $y' = z + xz'$ se enačba prevede v obliko:

$$xz' = \mathrm{tg}\,z\,.$$

Ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\operatorname{ctg} z\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{x}\,, \qquad \ln\frac{\sin z}{C} = \ln|x|\,, \qquad \sin z = C|x| \longrightarrow Cx\,.$$

Preverimo, da tudi pri $C = 0$ dobimo rešitev. Izrazimo z in nato y ter dobimo dve družini rešitev:

$$y = x\bigl(\arcsin(Cx) + 2k\pi\bigr) \quad \text{in} \quad y = x\bigl(\pi - \arcsin(Cx) + 2k\pi\bigr)\,; \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Ker je lahko C poljubno realno število, ga smemo pri drugi družini zamenjati z $-C$. Tako lahko splošno rešitev poenotimo v:

$$y = x\bigl(\arcsin(Cx) + n\pi\bigr)\,; \quad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Pri danem začetnem pogoju dobimo $k = 3$ in $C = -\sqrt{3}/6$. Iskana partikularna rešitev je torej:

$$y = x\left[3\pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\,x\right)\right]\,,$$

maksimalni odprt interval, na katerem je definirana, pa je $\bigl(0,\, 2\sqrt{3}\bigr)$: čeprav je namreč sama funkcija definirana na intervalu $\bigl[-2\sqrt{3},\, 2\sqrt{3}\,\bigr]$, enačba pri $x = 0$ nima pomena.

7. Ko v enačbo vstavimo $y = kx + n$, dobimo, da enačba velja za $k = -\frac{1}{2}$ in $n = 0$. Nastavimo torej $y = z - \dfrac{x}{2}$ in dobimo enačbo:

$$xz' - 3z = 0\,.$$

Ločimo spremenljivki:

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = 3\,\frac{\mathrm{d}x}{x}\,,$$

integriramo in dobimo $\ln\dfrac{z}{C} = 3\ln|x|$ oziroma $z = C|x|^3$, kar lahko nadomestimo z $z = Cx^3$. Splošna rešitev prvotne enačbe je torej:

$$y = Cx^3 - \frac{x}{2}\,.$$

8. Najprej rešimo homogeni del:

$$\frac{\mathrm{d}y_H}{y_H} = -\frac{e^x}{e^x + 1}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \ln\frac{y_H}{C} = -\ln\bigl(e^x + 1\bigr)\,, \qquad y_H = \frac{C}{e^x + 1}\,.$$

Konstanto C nadomestimo s funkcijo z in odvajamo:

$$y = \frac{z}{e^x + 1}\,, \qquad y' = \frac{z'\bigl(e^x + 1\bigr) - z\,e^x}{\bigl(e^x + 1\bigr)^2}\,.$$

Vstavimo v prvotno enačbo, uredimo in dobimo $z' = e^x - 1$, torej $z = e^x - x + C$. Splošna rešitev dane enačbe je torej:

$$y = \frac{e^x - x + C}{e^x + 1}\,.$$

Vstavimo $x = y = 0$ in dobimo $C = -1$. Iskana partikularna rešitev je torej:

$$y = \frac{e^x - x - 1}{e^x + 1}\,.$$

9. Delimo z y^4:

$$\frac{3y'}{y^4} + \frac{2}{y^3} = 1 + 3\,e^x$$

in uvedemo $w = \dfrac{1}{y^3}$, $w' = -\dfrac{3y'}{y^4}$. Sledi:

$$-w' + 2w = 1 + 3\,e^x\,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$-\frac{\mathrm{d}w_H}{w_H} + 2\,\mathrm{d}x = 0\,, \qquad -\ln\frac{w_H}{C} + 2x = 0\,, \qquad w_H = C\,e^{2x}\,,$$
$$w = e^{2x}z\,, \qquad w' = 2\,e^{2x}z + e^{2x}z'\,,$$
$$z' = -e^{-2x} - 3\,e^{-x}\,, \qquad z = \tfrac{1}{2}\,e^{-2x} + 3\,e^{-x} + C\,,$$
$$w = \tfrac{1}{2} + 3\,e^x + C\,e^{2x}\,.$$

Iskana splošna rešitev je torej:

$$y = \left(\tfrac{1}{2} + 3\,e^x + C\,e^{2x}\right)^{-1/3}$$

skupaj z rešitvijo $y = 0$, ki je limita zgornjih rešitev, ko gre C proti neskončno.

10. Delimo s $\sqrt[3]{y}$:

$$xy^{-1/3}y' + 3y^{2/3} = \sin x$$

in uvedemo $w = y^{2/3}$, $w' = \frac{2}{3}y^{-1/3}y'$. Sledi:

$$\frac{3xw'}{2} + 3w = \sin x\,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}w_H}{w_H} + \frac{2}{x} = 0\,, \qquad \ln\frac{w_H}{C} + 2\ln|x| = 0\,, \qquad w_H = \frac{C}{x^2}\,,$$
$$w = \frac{z}{x^2}\,, \qquad w' = \frac{z'}{x^2} - \frac{2z}{x^3}\,,$$
$$z' = \tfrac{2}{3}x\sin x\,, \qquad z = \tfrac{2}{3}\big(-x\cos x + \sin x + C\big)\,,$$
$$w = \frac{2\big(-x\cos x + \sin x + C\big)}{3x^2}\,.$$

Iskana splošna rešitev je torej:

$$y = \pm\left(\frac{2\big(-x\cos x + \sin x + C\big)}{3x^2}\right)^{3/2}$$

ali ekvivalentno:

$$y = \pm\frac{1}{x^3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\big(-x\cos x + \sin x + C\big)^{3/2}.$$

Rešitev $y = 0$ je ogrinjača rešitev iz te družine.

11. Za $y = ax^p$ dobimo:

$$apx^{p-1} = a^2x^{2p+2} + 2x^{-4}.$$

Za vse x lahko to velja le, če je $p = -3$ in $a^2 + 3a + 2 = 0$, torej $a = -1$ ali $a = -2$. Torej lahko nadaljujemo na dva načina.

Prvi način: $y = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{w}$. Po ureditvi dobimo:

$$-\frac{w'}{w^2} = -\frac{2}{xw} + \frac{x^2}{w^2}.$$

Množimo z w^2, pri čemer se zavedamo, da lahko s tem pridobimo rešitve. Dobimo:

$$w' - \frac{2w}{x} + x^2 = 0.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}w_H}{w_H} = \frac{2\,\mathrm{d}x}{x}, \quad \ln\frac{w_H}{C} = 2\ln|x|, \quad w_H = Cx^2,$$
$$w = x^2 z, \qquad w' = 2xz + x^2 z',$$
$$z' x^2 + x^2 = 0, \quad z = -x + C, \quad w = -x^3 + Cx^2.$$

Točke, kjer je $w = 0$, so izločene iz rešitve. Splošna rešitev je torej:

$$y = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{Cx^2 - x^3}$$

skupaj z izhodiščno rešitvijo $y = -\dfrac{1}{x^3}$.

Drugi način: $y = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{w}$. Po ureditvi dobimo:

$$-\frac{w'}{w^2} = -\frac{4}{xw} + \frac{x^2}{w^2}.$$

Množimo z w^2, pri čemer se zavedamo, da lahko s tem pridobimo rešitve. Dobimo:

$$w' - \frac{4w}{x} + x^2 = 0.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}w_H}{w_H} = \frac{4\,\mathrm{d}x}{x}\,, \quad \ln\frac{w_H}{C} = 4\ln|x|\,, \quad w_H = Cx^4\,,$$
$$w = x^4 z\,, \qquad w' = 4x^3 z + x^4 z'\,,$$
$$z'\,x^4 + x^2 = 0\,, \quad z = \frac{1}{x} + D\,, \quad w = x^3 + Dx^4\,.$$

Točke, kjer je $w = 0$, so izločene iz rešitve. Splošna rešitev je torej:

$$y = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^3 + Dx^4}$$

skupaj z izhodiščno rešitvijo $y = -\dfrac{2}{x^3}$.

Opomba. Splošni rešitvi, dobljeni na posamezen način, sta na prvi pogled videti različni, vendar v resnici določata isto družino funkcij. Posamezni rešitvi se ujemata, če je $CD = -1$; poleg tega pa se rešitev za $C = 0$ iz prvega načina ujema z izhodiščno rešitvijo iz drugega načina, rešitev za $D = 0$ iz drugega načina pa se ujema z izhodiščno rešitvijo iz prvega načina.

12. Preverimo eksaktnost:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(x+y) = -1\,, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(2x^3 - y) = -1$$

in integriramo:

$$\int (2x^3 - y)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{2} - xy + A(y)\,, \qquad -\int (x+y)\,\mathrm{d}y = -xy - \frac{y^2}{2} + B(x)\,.$$

Integrala se ujemata, če postavimo $A(y) = -\dfrac{y^2}{2}$ in $B(x) = \dfrac{x^4}{2}$. Tedaj je $F(x,y) = \dfrac{x^4}{2} - xy - \dfrac{y^2}{2}$. Splošna rešitev enačbe je torej:

$$y^2 + 2xy = x^4 + C$$

oziroma

$$y = -x \pm \sqrt{x^4 + x^2 + C}\,.$$

13. Iz:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x^p\left(3\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}\right)\right] = \frac{2x^{p+1} + 3x^p y}{(x+y)^2}\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^p\,\frac{x}{x+y}\right] = \frac{p\,x^{p+1} + (p+1)x^p y}{(x+y)^2}$$

dobimo, da je enačba eksaktna, če jo pomnožimo z x^2. Integriramo:

$$\int \left(3x^2 \ln(x+y) + \frac{x^3}{x+y}\,\mathrm{d}x\right) = x^3 \ln(x+y) + A(y)\,,$$
$$\int \frac{x^3}{x+y}\,\mathrm{d}y = x^3 \ln(x+y) + B(x)$$

in vidimo, da se integrala ujemata, če je $A(y) = B(x) = 0$ (pri logaritmu ni absolutne vrednosti, ker je logaritem brez absolutne vrednosti že v sami enačbi in mora biti zato $x + y > 0$). Rešitev enačbe je torej:

$$x^3 \ln(x+y) = C$$

oziroma:

$$y = e^{C/x^3} - x\,.$$

14. Nastavimo kar $y' = t$, torej je $x = t + \sin t$. Sledi $\dot{x} = 1 + \cos t$, torej:

$$t = y' = \frac{\dot{y}}{1+\cos t}\,, \qquad \dot{y} = t(1+\cos t)\,, \qquad y = \frac{t^2}{2} + t\sin t + \cos t + C\,.$$

15. Nastavimo $y' = \operatorname{sh} t$, torej je $x = \pm \operatorname{ch} t$. Sledi $\dot{x} = \pm \operatorname{sh} t$, torej:

$$\operatorname{sh} t = y' = \pm\frac{\dot{y}}{\operatorname{sh} t}\,, \qquad \dot{y} = \pm \operatorname{sh}^2 t = \pm\frac{\operatorname{ch}(2t) - 1}{2}\,,$$
$$y = \pm\frac{\operatorname{sh}(2t) - 2t}{4} + C = \pm\frac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t}{2}$$

(vsi predznaki $\pm$ morajo biti enaki).

Opomba. To diferencialno enačbo lahko rešimo tudi neposredno, saj je $y' = \pm\sqrt{x^2-1}$, torej $y = \pm\int\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$. V resnici nam rešitev dane diferencialne enačbe s parametrom da eleganten izračun nedoločenega integrala:

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{Arch} x}{2} + C\,.$$

16. Nastavimo $y' = \sin t$, pri čemer lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Tedaj je $y = \cos t$. Sledi $\dot{y} = -\sin t$, torej:

$$\sin t = y' = -\frac{\sin t}{\dot{x}}\,, \qquad \dot{x} = -1\,, \qquad x = C - t\,.$$

Vidimo, da je možno zlahka eksplicitno izraziti $y = \cos(C - x)$. Lahko bi izrazili tudi v obliki $y = \cos(x + D)$.

17. Enačbo družine linearnih rešitev:

$$y = Cx + C^2$$

parcialno odvajamo po C in dobimo $0 = x + 2C$. Izrazimo $C = -x/2$, vstavimo v prvotno enačno in dobimo ogrinjačo:

$$y = -\frac{x^2}{4}\,.$$

18. Po uvedbi $z = y''$ dobimo:

$$x^2 z' = z^2\,, \quad \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,, \quad z = \frac{x}{1+Cx} \text{ in še } z = 0\,.$$

Natančneje, vse rešitve na z, definirane na odprtih intervalih, ki ne vsebujejo ničle, so take oblike, torej zgoraj navedene funkcije tvorijo splošno rešitev. Prvo družino moramo dvakrat integrirati. Za $C \neq 0$ dobimo:

$$y = \frac{x^2}{2C} - \frac{(1+Cx)\ln(1+Cx)}{C^3} + Dx + E\,,$$

za $C = 0$ pa dobimo:

$$y = \frac{x^3}{6} + Dx + E\,.$$

Končno ne smemo pozabiti rešitve $z = 0$, za katero dobimo:

$$y = Dx + E\,,$$

19. a) Po uvedbi $y' = v$, $y'' = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ dobimo:

$$y\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = 2y - v$$

skupaj z dodatno skupino rešitev $v = 0$, torej $y = C$. A najprej se posvetimo glavnemu delu, ki je linearna diferencialna enačba. Najprej rešimo homogeni del:

$$y\,\frac{\mathrm{d}v_H}{\mathrm{d}y} = -v\,, \quad \frac{\mathrm{d}v_H}{v_H} = -\frac{\mathrm{d}y}{y}\,, \quad \ln\frac{v_H}{C} = -\ln|y|\,, \quad v_H = \frac{C}{|y|} \longrightarrow \frac{C}{y}\,,$$

nato pa poiščemo še splošno rešitev:

$$v = \frac{z}{y}\,, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \frac{z'\,y - z}{y^2}\,, \quad z' = 2y\,, \quad z = y^2 + C\,, \quad v = \frac{y^2 + C}{y}\,.$$

Zdaj rešimo še:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 + C}{y}\,, \quad \frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2 + C} = \mathrm{d}x\,, \quad \frac{1}{2}\ln\frac{y^2 + C}{D} = x\,, \quad y = \pm\sqrt{D\,e^{2x} - C}\,.$$

Vstavimo začetna pogoja. Ker je $y(0) < 0$, mora biti:

$$y = -\sqrt{D\,e^{2x} - C}\,, \quad y' = -\frac{D\,e^{2x}}{\sqrt{D\,e^{2x} - C}}\,.$$

Dobimo sistem $-1 = -\sqrt{D - C}$, $3 = -\dfrac{D}{\sqrt{D - C}}$, ki ima rešitev $C = -4, D = -3$. Dobimo rešitev:

$$y = -\sqrt{4 - 3\,e^{2x}}\,.$$

Maksimalni odprti interval, kjer je dobljena rešitev klasična, torej dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, je $\left(-\infty, \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}\right)$: ker gre odvod proti neskončno, ko gre x proti desnemu krajišču, se namreč funkcija onkraj tega krajišča ne da razširiti kot dvakrat zvezno odvedljiva funkcija.

20. a) Označimo s t čas in z $v = dy/dt$ hitrost telesa. Tedaj je pospešek enak:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = -\frac{k}{y}\,,$$

od koder dobimo:

$$v\,\mathrm{d}v = -k\,\frac{\mathrm{d}y}{y}\,,$$

kar se zintegrira v:

$$\frac{v^2}{2} = -k\ln\frac{y}{A}\,.$$

A ker telo pri $y = y_0$ miruje, je $A = y_0$. Dobimo:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{-2k\ln\frac{y}{y_0}}$$

(predznak korena je negativen, ker se telo giblje proti izhodišču).

b) Prejšnjo enačbo obrnemo, integriramo in dobimo:

$$t = -\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{-2k\ln\frac{y}{y_0}}}\,.$$

A ker pri $y = y_0$ velja $t = 0$, mora biti:

$$t = -\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{-2k\ln\frac{z}{y_0}}} = \int_{y}^{y_0} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{-2k\ln\frac{z}{y_0}}}\,.$$

c) Z uvedbo nove spremenljivke $s = -2k\ln(z/y_0)$, $\quad z = y_0 e^{-s/(2k)}$, $\mathrm{d}z = -\frac{y_0}{2k}\,e^{-s/(2k)}\,\mathrm{d}s$ dobimo:

$$t = \frac{y_0}{2k}\int_0^{-2k\ln(y/y_0)} \frac{e^{-s/(2k)}}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s\,.$$

Iskani čas padanja je limita, ko gre y proti nič, to pa je integral:

$$t_0 := \frac{y_0}{2k}\int_0^\infty \frac{e^{-s/(2k)}}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s = \frac{y_0}{\sqrt{2k}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{y_0}{\sqrt{2k}}\,\Gamma\!\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{y_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{2k}}\,.$$

21. Označimo z y dolžino dela vrvi, ki se je že odvil in visi z mize, z $v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ pa hitrost, s katero se spušča. Ta del vrvi deluje na preostanek s silo $\mu g y$, kjer je μ dolžinska gostota vrvi. Uporabimo različico drugega Newtonovega zakona za gibalno količino:

$$\mathrm{d}G = F\,\mathrm{d}t\,.$$

Sprememba gibalne količine je sestavljena iz dveh delov. Del vrvi, ki je že odvit in ima maso μy, pospešuje postopoma; to poveča gibalno količino za $\mu y\,\mathrm{d}v = \mu y\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t =$

$\mu y \, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \, \mathrm{d}t$. Infinitezimalni delček vrvi, ki se pravkar odvija in ima maso $\mu \mathrm{d}y = \mu v \, \mathrm{d}t$, pa hipoma pospeši do hitrosti v; to poveča gibalno količino za $\mu v^2 \, \mathrm{d}t = \mu \big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\big)^2 \, \mathrm{d}t$. Dobimo torej:

$$\mathrm{d}G = \mu y \, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \, \mathrm{d}t + \mu \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathrm{d}t \, .$$

Vstavimo v Newtonov zakon, delimo z $\mu \, \mathrm{d}t$ in dobimo diferencialno enačbo:

$$gy = y \, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 .$$

Ker enačba ne vsebuje eksplicitno časa, ji lahko znižamo red. Dobimo:

$$gy = v^2 + yv \, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \, .$$

Če enačbo delimo z v, dobimo Bernoullijevo enačbo. S substitucijo $w = v^2$ se le-ta prevede na linearno enačbo:

$$gy = \frac{y}{2} \, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} + w \, .$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku:

$$\frac{\mathrm{d}w_H}{w_H} = -\frac{2 \, \mathrm{d}y}{y} \, , \quad \ln \frac{w_H}{A} = -2 \ln |y| \, , \quad w_H = B y^{-2} \, ,$$
$$w = b(y) \, y^{-2} \, , \qquad w' = b'(y) \, y^{-2} - 2 \, b(y) \, y^{-3} \, ,$$
$$b'(y) = 2gy^2 \, , \quad b(y) = \frac{2gy^3}{3} + C \, , \quad w = \frac{2gy}{3} + \frac{C}{y^2} \, .$$

Izrazimo v in dobimo še eno diferencialno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \pm \sqrt{\frac{2gy}{3} + \frac{C}{y^2}} \, .$$

Zdaj pa upoštevamo, da je hitrost v odvijanja vrvi pozitivna in da sta na začetku, denimo takrat, ko je $t = 0$, tako hitrost v kot tudi dolžina y enaki nič. Od tod dobimo, da mora biti $C = 0$, koren pa pozitiven. Sledi:

$$\sqrt{\frac{3}{2g}} \, \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \mathrm{d}t \, , \quad \sqrt{\frac{6y}{g}} = t + D \, .$$

Če se vrv začne odvijati ob času 0, dobimo $D = 0$, od tod pa iskano dinamiko odvijanja:

$$y = \frac{gt^2}{6} \, .$$

22. Lastna para:

$$\lambda_1 = 1\!: \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

$$\lambda_2 = 3\!: \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Splošna rešitev:

$$
\begin{aligned}
y &= -3C_1\, e^{x} + 3C_2\, e^{3x}\,, \\
z &= C_1\, e^{x} + C_2\, e^{3x}\,.
\end{aligned}
$$

23. Lastna para:

$$
\lambda_1 = 4 + 3i\,, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}\;; \qquad \lambda_2 = 4 - 3i\,, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.
$$

Za lastno vrednost λ_1 dobimo kompleksno bazno rešitev:

$$
\vec{\tilde{h}}_1(x) = \begin{bmatrix} i\, e^{(4+3i)x} \\ e^{(4+3i)x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{4x}\sin(3x) \\ e^{4x}\cos(3x) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} e^{4x}\cos(3x) \\ e^{4x}\sin(3x) \end{bmatrix},
$$

iz katere dobimo realni bazni rešitvi:

$$
\vec{h}_1(x) = \begin{bmatrix} -e^{4x}\sin(3x) \\ e^{4x}\cos(3x) \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{h}_2(x) = \begin{bmatrix} e^{4x}\cos(3x) \\ e^{4x}\sin(3x) \end{bmatrix}.
$$

Splošna rešitev v realnem je torej:

$$
\begin{aligned}
y &= e^{4x}\big(-C_1\sin(3x) + C_2\cos(3x)\big)\,, \\
z &= e^{4x}\big(C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)\big)\,.
\end{aligned}
$$

24. Za lastno vrednost $\lambda_{1,2} = -3$ dobimo verigo:

$$
\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.
$$

Splošna rešitev:

$$
\begin{aligned}
y &= \big(C_1 + C_2(1 + x)\big)e^{-3x}\,, \\
z &= (-C_1 - C_2 x)e^{-3x}\,.
\end{aligned}
$$

25. Karakteristični polinom: $-\lambda^3 - 5\lambda^2 - 7\lambda - 3 = -(\lambda+1)^2(\lambda+3)$. Dobimo dve verigi:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 = -3: & & & \vec{v}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}. \\
&\lambda_{2,3} = -1: & \vec{v}_3 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow & \vec{v}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

Splošna rešitev:

$$
\begin{aligned}
y &= C_2\, e^{-x} + C_3(-1 + x)\, e^{-x}\,, \\
z &= C_1\, e^{-3x} - C_2\, e^{-x} - C_3\, x\, e^{-x}\,, \\
u &= -2C_1\, e^{-3x} + 3C_3\, e^{-x}\,.
\end{aligned}
$$

26. Karakteristični polinom: $-(\lambda+2)^3$. Dobimo eno samo verigo:

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev:

$$\begin{aligned} y &= \big(C_1 + C_2\,x + \tfrac{1}{2}\,C_3\,x^2\big)e^{-2x}\,, \\ z &= \big(C_2 + C_3\,x - \tfrac{3}{5}\,C_3\big)e^{-2x}\,, \\ u &= \tfrac{1}{5}\,C_3\,e^{-2x}\,. \end{aligned}$$

Opomba. Ta sistem bi lahko rešili tudi tako, da bi rešili najprej tretjo enačbo, nato drugo in nazadnje prvo. Prvič bi dobili homogeno, drugič in tretjič pa nehomogeno linearno diferencialno enačbo prvega reda.

27. a) Lastne vrednosti matrike $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ so $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 2$. Za lastno vrednost $\lambda_{1,2} = -1$ dobimo verigo:

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

za lastno vrednost $\lambda_3 = 2$ pa dobimo lastni vektor:

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev sistema je torej oblike:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1\,e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2\,e^{-t} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + C_3\,e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Začetni pogoji morajo biti takšni, da je $C_3 = 0$. Ob $t = 0$ smo v točki

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1 \\ C_1 + C_3 \\ C_2 \end{bmatrix}.$$

Če upoštevamo $C_3 = 0$, dobimo, da je $x_0 = -y_0$, z_0 pa poljuben, torej iskani začetni pogoji ležijo na ravnini $x + y = 0$.

28. Edina lastna vrednost je $\lambda = 1$. Ker je $\dim\ker(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 2$ in $\dim\ker(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2 = 3$, imamo dva lastna in en korenski vektor. Vzamemo npr. korenski vektor:

$$v_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto v_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ (lastni)}$$

in še en lastni vektor:

$$v_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Splošna rešitev je potem:

$$\vec{x}(t) = A\,e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + B\,e^t \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) + C\,e^t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Če označimo $\vec{x}(t) = e^t \vec{q}(t)$, velja $\dot{q}(t) = B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\ddot{\vec{q}}(t) = 0$. Dobimo:

$$\dot{\vec{x}} = e^t \vec{q} + e^t \dot{\vec{q}}\,, \quad \ddot{\vec{x}} = e^t \vec{q} + 2\,e^t \dot{\vec{q}}\,, \quad \dddot{\vec{x}} = e^t \vec{q} + 3\,e^t \dot{\vec{q}}$$

in velja:

$$\left\langle \dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}},\, \dddot{\vec{x}} \right\rangle = \left\langle e^{2t} \vec{q} \times \dot{\vec{q}},\, e^t \vec{q} + 3\,e^t \dot{\vec{q}} \right\rangle = 0\,,$$

tako da je torzija enaka 0 in je krivulja res ravninska.

Pri danih začetnih pogojih je $A = B = C = 1$ in imamo krivujo

$$\vec{x}(t) = e^t \begin{bmatrix} 4+t \\ t \\ -1-t \end{bmatrix} = e^t\,\vec{q}(t)$$

z binormalo, ki je ves čas v smeri $\vec{q} \times \dot{\vec{q}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, tako da ima iskana ravnina enačbo:

$$x + 3y + 4z = 0\,.$$

29. Iz rešitve 24. naloge razberemo fundamentalno matriko:

$$\mathbf{Y}(x) = e^{-3x} \begin{bmatrix} 1 & 1+x \\ -1 & -x \end{bmatrix} ,$$

iz nje pa sistem:

$$\begin{aligned} u' + (1+x)v' &= e^{2x}\,, \\ -u' - x\,v' &= 0\,, \end{aligned}$$

ki ima rešitev:

$$\begin{aligned} u' &= -x\,e^{2x}\,, & \qquad u &= \left(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\right)e^{2x} + C_1\,, \\ v' &= e^{2x}\,, & \qquad v &= \tfrac{1}{2}\,e^{2x} + C_2\,. \end{aligned}$$

Splošna rešitev sistema je torej:

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{3}{4}\,e^{-x} + \big(C_1 + C_2(1+x)\big)e^{-3x}\,, \\ z &= -\tfrac{1}{4}\,e^{-x} + \big(-C_1 - C_2\,x\big)e^{-3x}\,. \end{aligned}$$

30. $y = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{-x}$.

31. $y = C_1 + C_2\,e^{-2x}$.

32. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$.

33. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{-x}$.

34. $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + C_3\,e^{-2x}$.

35. $y = e^{-x}\big(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\big)$.

36. $y = (C_1 + C_2\,x)\cos\big(\sqrt{3}\,x\big) + (C_3 + C_4\,x)\sin\big(\sqrt{3}\,x\big)$.

37. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2)e^x$.

38. $y = C_1\,|x|^{3/2} + C_2\,x^3$.

39. $y = \big(C_1 + C_2 \ln|x|\big)x^2$.

40. $y = x\big(C_1 \cos(3\ln|x|) + C_2 \sin(3\ln|x|)\big)$.

41. Iz rešitve homogenega dela $y_H = C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}$ dobimo naslednji sistem za rešitev izvirne enačbe:

$$\begin{aligned} \cos\frac{x}{2}\,u_1' + \sin\frac{x}{2}\,u_2' &= 0 \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\,u_1' + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,u_2' &= \frac{1}{4\sin\frac{x}{2}}\,. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je:

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{1}{2}\,, & u_1 &= -\frac{1}{2}x + C_1 \\ u_2' &= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,, & u_2 &= \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C_2\,, \end{aligned}$$

splošna rešitev izvirne enačbe pa je:

$$y = \left(-\frac{1}{2}\,x + C_1\right)\cos\frac{x}{2} + \left(\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C_2\right)\sin\frac{x}{2}\,.$$

42. Iz rešitve homogenega dela $y_H = C_1 x + C_2 x^2$ dobimo naslednji sistem za rešitev izvirne enačbe:

$$\begin{aligned} xu_1' + x^2 u_2' &= 0\,, \\ u_1' + 2xu_2' &= \frac{1}{x^2(x-1)}\,. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je:

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{1}{x^2(x-1)}\,, & u_1 &= -\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{1}{x} + C_1\,,\\ u_2' &= \frac{1}{x^3(x-1)}\,, & u_2 &= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + \frac{2x+1}{2x^2} + C_2\,, \end{aligned}$$

splošna rešitev naše enačbe pa:

$$y = (x^2-x)\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + x - \frac{1}{2} + C_1 x + C_2 x^2\,.$$

43. Iz desne strani in $y_H = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{-x}$ dobimo naslednji nastavek za partikularno rešitev:

$$y_P = (Ax+B)\,e^{-2x} + C\cos x + D\sin x\,.$$

Odvajamo:

$$\begin{aligned} y_P' &= (-2Ax + A - 2B)\,e^{-2x} + D\cos x - C\sin x\,,\\ y_P'' &= (4Ax - 4A + 4B)\,e^{-2x} - C\cos x - D\sin x \end{aligned}$$

in dobimo:

$$y_P'' - y_P' - 2y_P = (4Ax - 5A + 4B)\,e^{-2x} - (3C+D)\cos x + (C-3D)\sin x\,.$$

Po izenačitvi koeficientov pride $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{5}{16}$, $C = -\frac{3}{10}$ in $D = -\frac{1}{10}$. Iskana splošna rešitev je torej:

$$y = \left(\tfrac{1}{4}x + \tfrac{5}{16}\right)e^{-2x} - \tfrac{3}{10}\cos x - \tfrac{1}{10}\sin x + C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{-x}\,.$$

44. Iz desne strani in $y_H = (C_1 + C_2 x)\,e^{-3x}$ dobimo naslednji nastavek za partikularno rešitev:

$$y_P = Ax^2\,e^{-3x}\,.$$

Odvajamo:

$$y_P' = A(-3x^2 + 2x)\,e^{-3x}\,, \qquad y_P'' = (9x^2 - 12x + 2)\,e^{-3x}$$

in dobimo:

$$y_P'' + 6y_P' + 9y_P = 2A\,e^{-3x}\,,$$

torej mora biti $A = \frac{1}{2}$ in iskana splošna rešitev je:

$$y = \left(C_1 + C_2 x + \tfrac{1}{2}x^2\right)e^{-3x}\,.$$

45. Euler–Lagrangeova enačba:

$$4y = 4xy' + 2x^2y'' \qquad \text{oziroma} \qquad x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$$

je Eulerjeva diferencialna enačba s splošno rešitvijo $y = \dfrac{C_1}{x^2} + C_2 x$. Iz robnih pogojev dobimo $C_1 = 4$, $C_2 = 0$, torej $y = y_0 := \dfrac{4}{x^2}$.

Da dokažemo, da je v y_0 res minimum, opazimo, da velja $xy_0' + 2y_0 = 0$, in pišimo:

$$x^2 y'^2 + 2y^2 = (xy' + 2y)^2 - 4xyy' - 2y^2 = (xy' + 2y)^2 - (2xy^2)' .$$

Nadalje opazimo, da je vrednost funkcije $2xy^2$ v posamezni robni točki natančno določena z ustreznim robnim pogojem.

Da dokažemo, je v y_0 res minimum, pišimo:

$$L := x^2 y'^2 + 2y^2 , \qquad L_{yy} = 2x^2 , \qquad L_{yy'} = 0 , \qquad L_{y'y'} = 4y'^2$$

in očitno je res L_{yy}, $L_{yy}L_{y'y'} - L_{yy'}^2 \geq 0$. Ker je y_0 edina stacionarna točka, je tam dosežen strogi minimum.

Če je torej $\mathcal{Y}$ prostor vseh zvezno odvedljivih funkcij $y\colon\ [1,2] \to \mathbb{R}$, za katere je $y(1) = 4$ in $y(2) = 1$, velja:

$$\min_{y \in \mathcal{Y}} I(y) = I(y_0) = -(2xy_0^2)\Big|_{x=1}^{2} = -\frac{32}{x^3}\Big|_1^2 = 28 .$$

Končno vstavimo $y = ax(x-3) + 7 - 3x$ in ocenimo:

$$I(y) \geq \int_1^2 x^2 y'^2 \,\mathrm{d}x = \int_1^2 x^2 (2ax - 3a - 3)^2 \,\mathrm{d}x = \tfrac{8}{5}a^2 - 3a + 21 ,$$

kar je lahko za primerne a poljubno veliko.

46. Euler–Lagrangeova enačba:

$$2y + 2e^x = 2y'' \qquad \text{oziroma} \qquad y'' - y = e^x$$

je nehomogena linearna enačba s konstantnimi koeficienti, ki ima splošno rešitvev $y = \frac{1}{2}x\,e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Iz edinega robnega pogoja dobimo $C_2 = -e^2\big(\frac{1}{2} + C_1\big)$, namesto drugega robnega pogoja pa imamo transverzalnost, ki nam da $y'(0) = 0$, torej $\frac{1}{2} + C_1 - C_2 = 0$. Rešimo sistem in dobimo $C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = 0$, torej:

$$y = y_0 := \tfrac{1}{2}(x-1)e^x .$$

Da dokažemo, da je v y_0 res minimum, odvajamo:

$$y_0' = \tfrac{1}{2}x\,e^x ,$$

od koder dobimo, da je $y_0 - y_0' + \frac{1}{2}e^x = 0$, nakar izračunamo:

$$\big(y - y' + \tfrac{1}{2}e^x\big)^2 = L(x,y,y') + \tfrac{1}{4}e^{2x} - y\,e^x - y'e^x - 2yy' = L(x,y,y') - \big(ye^x + y^2 - \tfrac{1}{8}e^{2x}\big)' .$$

Če velja robni pogoj, je vrednost funkcije $y\,e^x + y^2 - \frac{1}{8}e^{2x}$ v 1 vedno enaka $-e^2/8$. Česa takega pa tokrat seveda ne moremo reči za vrednost v 0. Velja torej:

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_0^1 \left(y - y' + \tfrac{1}{2}e^x\right)^2 \mathrm{d}x + \left(ye^x + y^2 - \tfrac{1}{8}e^{2x}\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \\ &= \int_0^1 \left(y - y' + \tfrac{1}{2}e^x\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1-e^2}{8} - y(0) - y(0)^2 \,. \end{aligned}$$

Zdaj pa pišimo $y = y_0 + v$ in izračunamo:

$$I(y_0 + v) = \int_0^1 (v - v')^2 \,\mathrm{d}x + \frac{3-e^2}{8} - v(0)^2 \,.$$

Prvi člen ima pri $v \equiv 0$ seveda minimum, drugi člen je konstanten, tretji člen pa ima pri $v \equiv 0$ žal *maksimum*, zato še ne moremo takoj reči, da ima I v y_0 minimum. Toda zadnji člen lahko ob upoštevanju robnega pogoja zapišemo kot integral:

$$-v(0)^2 = v(1)^2 - v(0)^2 = 2\int_0^1 vv' \,\mathrm{d}x \,,$$

torej je:

$$I(y_0 + v) = \int_0^1 (v - v')^2 \,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 vv' \,\mathrm{d}x = \int_0^1 (v^2 + v'^2) \,\mathrm{d}x \,,$$

kar ima pri $v \equiv 0$ res minimum.

Da dokažemo, je v y_0 res minimum, pišimo:

$$L := y^2 + y'^2 + 2y\,e^x \,, \qquad L_{yy} = 2 \,, \qquad L_{yy'} = 0 \,, \qquad L_{y'y'} = 2y'^2$$

in očitno je L_{yy}, $L_{yy}L_{y'y'} - L_{yy'}^2 \geq 0$. Ker je y_0 edina stacionarna točka, je tam strogi minimum.

Če je torej $\mathcal{Y}$ prostor vseh zvezno odvedljivih funkcij $y\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$, za katere je $y(1) = 0$, velja:

$$\min_{y \in \mathcal{Y}} I(y) = I(y_0) = \frac{3-e^2}{8} \,.$$

Končno vstavimo $y = a(1-x)$ in za $a \geq 0$ ocenimo:

$$I(y) \geq \int_0^1 y'^2 \,\mathrm{d}x = a^2 \,,$$

kar je lahko za primerne a poljubno veliko.

48. Iz izražave poti v kartezijskih koordinatah:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \,, & \dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ y &= r\sin\varphi \,, & \dot{y} &= \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi} \end{aligned}$$

ali tudi z uvedbo primernih lokalnih koordinat dobimo hitrost:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}\,.$$

Tu pika označuje odvod po času t. Če s črtico označimo odvod po kotu φ, dobimo:

$$v = \sqrt{r'^2 + r^2}\,\dot{\varphi}\,.$$

(kot se očitno s časom veča, zato je $\dot{\varphi} > 0$). Po predpostavki je $v = \lambda r$ za neko konstanto $\lambda > 0$, torej je:

$$\lambda r = \sqrt{r'^2 + r^2}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

oziroma:

$$\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{\lambda r}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Naj bo τ čas, ki ga potrebujemo za pot od točke A do točke B. Integriramo po t od 0 do τ in po φ od 0 do $\pi/2$, kar nam da:

$$\tau = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{\lambda r}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Če vpeljemo $w := \ln r$, dobi to obliko:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + w'^2}\,\mathrm{d}\varphi =: I(w)\,.$$

Če označimo $L := \sqrt{1 + w'^2}$, velja $L_{w'w'} = \bigl(1 + w'^2\bigr)^{-3/2} > 0$, zato ima funkcional I največ eno stacionarno točko, ki zadošča diferencialni enačbi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\,\frac{w'}{1 + w'^2} = 0\,,$$

ta pa se takoj zintegrira v:

$$\frac{w'}{1 + w'^2} = C$$

oziroma $w' = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} =: D$. Torej je w linearna funkcija. Vstavimo robne pogoje in dobimo, da ima funkcional I v funkciji:

$$w_0(\varphi) := \frac{2\ln 2}{\pi}\,\varphi$$

strogi minimum.

Ker je $F(x) = \sqrt{1 + x^2}$ strogo konveksna funkcija, je minimum pri robnih pogojih $w(0) = 0$, $w(\pi/2) = \ln 2$ dosežen v funkciji:

$$w_0(\varphi) := \frac{2\ln 2}{\pi}\int_0^{\varphi} \mathrm{d}s = \frac{2\ln 2}{\pi}\,\varphi\,,$$

iskana pot pa se v polarnih koordinatah izraža kot:

$$r_0(\varphi) := e^{2\ln 2\varphi/\pi}\,,$$

torej gre za logaritmično spiralo.

Opomba. Iz oblike funkcionala I je jasno, da je dani problem ekvivalenten iskanju najkrajše poti na ravnini od točke $(0,0)$ do točke $(\pi/2, \ln 2)$, za le-to pa vemo, da je daljica.

49. a) Cena strehe je enaka ploskovnemu integralu $I(h) = \iint_S c\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)\,\mathrm{d}P$, kjer je S ploskev, podana eksplicitno v obliki $\vec{r}(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ h\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big) \end{bmatrix}$. Izračunamo:

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\,h\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\,h\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)\right)^2 = 1 + h'\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)^2\,.$$

Sledi:

$$\begin{aligned} I(h) &= \iint_{1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 2} c\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)\sqrt{1 + h'\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= 2\pi\int_1^2 r\,c(r)\,\sqrt{1+h'(r)^2}\,\mathrm{d}r\,. \end{aligned}$$

b) Formula za ceno iz prejšnje točke nam da že enkrat zintegrirano Euler–Lagrangeovo enačbo:

$$A = -\frac{h'}{r\sqrt{1+h'^2}}\,.$$

Izrazimo h', integriramo še enkrat in dobimo

$$h(r) = B + \frac{\sqrt{1-A^2r^2}}{A}\,.$$

Upoštevamo robne pogoje $h(2) = 0$, $h(1) = \sqrt{3}$ in po krajšem računu dobimo $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, torej:

$$h(r) = 2\sqrt{1-\frac{r^2}{4}} = \sqrt{4-r^2}\,.$$

Ker za funkcijo $L(r,y,z) = \frac{\sqrt{1+z^2}}{r^2}$ velja $L_{yy} = L_{yz} = 0$, $L_{zz} = (1+z^2)^{3/2} > 0$, je v dobljeni funkciji dosežen minimum. Ta minimum pa je strog, ker je dobljena funkcija edina rešitev Euler–Lagrangeove enačbe.

50. Vse stacionarne točke zadoščajo Beltramijevi identiteti, ki se po ureditvi glasi:

$$\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} = C\,.$$

Enačbo kvadriramo, še preuredimo in dobimo:

$$y^2 + (yy')^2 = D\,.$$

Po uvedbi nove odvisne spremenljivke $u = y^2$ dobimo:

$$u + \frac{u'^2}{4} = D$$

oziroma:

$$u' = \pm 2\sqrt{D-u}\,, \qquad \pm\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{D-u}} = \mathrm{d}x\,, \qquad \mp\sqrt{D-u} = x + E\,.$$

Kvadriramo, prikličemo y in dobimo:

$$(x+E)^2 + y^2 = D\,.$$

Robni pogoji nam dajo sistem:

$$(E+2)^2 + 4 = (E-2)^2 + 4 = D\,,$$

ki ima edino rešitev $D = 8, E = 0$. Izrazimo y, upoštevamo, da je $y > 0$, in dobimo edino stacionarno točko, ki je polkrožni lok:

$$y = \sqrt{8 - x^2}\,.$$

51. Ker je $\langle p\,,\,q\rangle = \int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 0$, sta funkciji ortogonalni.

52. Iz:

$$\langle p\,,\,q\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,, \quad \langle p\,,\,p\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2\,, \quad \langle q\,,\,q\rangle = \int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$$

dobimo, da je kot enak $\arccos\frac{\sqrt{5}}{3} \doteq 41{\cdot}8^\circ$.

53. a) Iz:

$$\langle p_a\,,\,1\rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 + a)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} + 2a$$

dobimo, da ortogonalnost velja pri $a = -1/3$.

b) Iz:

$$\langle p_a\,,\,p_a\rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2x^2}{3} + \frac{1}{9}\right)\mathrm{d}x = \frac{8}{45}$$

dobimo $\|p_a\| = \sqrt{8/45}$.

c) Iz:

$$\langle p_a\,,\,1\rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{x}{3}\right)\mathrm{d}x = 0$$

dobimo, da sta polinoma ortogonalna.

d) Izračunamo še

$$\langle 1\,,\,1\rangle = 2\,, \qquad \langle x \mapsto x\,,\, x \mapsto x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

in dobimo ortonormirano bazo:

$$e_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad e_1(x) := \sqrt{\frac{3}{2}}\,x\,, \qquad e_2(x) := \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3x^2-1)\,.$$

54. Ker polinomi e_0, e_1 in e_2 iz prejšnje naloge tvorijo ortonormirano bazo, je iskana projekcija enaka $p := \langle q\,,\,e_0\rangle\,e_0 + \langle q\,,\,e_1\rangle\,e_1 + \langle q\,,\,e_2\rangle\,e_2$. Iz skalarnih produktov:

$$\begin{aligned}
\langle q\,,\,e_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = 0\,,\\
\langle q\,,\,e_1\rangle &= \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{6}}{5}\,,\\
\langle q\,,\,e_2\rangle &= \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} (3x^5 - x^3)\,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

dobimo iskano projekcijo $p(x) = \dfrac{3x}{5}$.