REŠITVE KOLOKVIJEV IN IZPITOV IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika

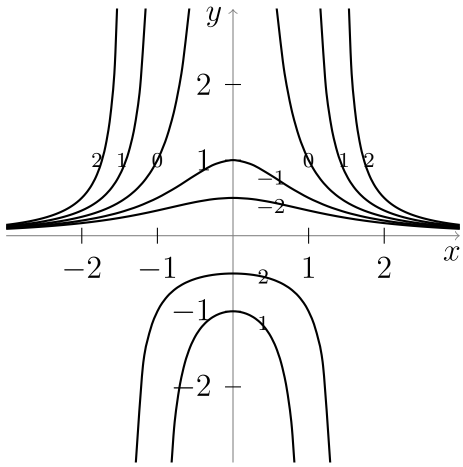
Zbral: Martin Raič

2018/19

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 21. 11. 2018

1. a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ y \neq 0\}$.

b) Nivojnica za vrednost z je krivulja $y = \dfrac{1}{x^2 - z}$. Slika:



c) Ne, ker npr. ne obstaja limita $\lim_{y \to 0} f(0, y) = \lim_{y \to 0}\left(-\frac{1}{y}\right)$.

2. a) Ker za $|z| < 1$ velja $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ in $\frac{1}{1-z} = \sum_{l=0}^{\infty} z^l$, je:

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k} y^{2k}}{k!} + \sum_{l=0}^{\infty} x^{3l} y^{3l}\,.$$

b) Iz Taylorjeve formule $f(x, y) = \sum_{m,n} \frac{\partial^{m+n} f(0,0)}{\partial x^m\,\partial y^n} \frac{x^m y^n}{m!\,n!}$ sledi:

$$\frac{\partial^{50} f(0,0)}{\partial x^{24}\,\partial y^{26}} = 0\,, \qquad \frac{\partial^{50} f(0,0)}{\partial x^{25}\,\partial y^{25}} = 0\,,$$
$$\frac{\partial^{40} f(0,0)}{\partial x^{20}\,\partial y^{20}} = \frac{(20!)^2}{10!}\,, \qquad \frac{\partial^{36} f(0,0)}{\partial x^{18}\,\partial y^{18}} = (18!)^2 \left(\frac{1}{9!} + 1\right)\,.$$

3. a) Parcialna odvoda sta:

$$f_x(x, y) = 2x(1 - x^2 - 2y^2)\, e^{-x^2-y^2} \quad \text{in} \quad f_y(x, y) = 2y(2 - x^2 - 2y^2)\, e^{-x^2-y^2}\,.$$

Iz $f_x = 0$ dobimo $x = 0$ ali $x^2 + 2y^2 = 1$, iz $f_y = 0$ pa $y = 0$ ali $x^2 + 2y^2 = 2$. Pri $x = y = 0$ je $f(0, 0) = 0$ in ker v vseh drugih točkah velja $f(x, y) > 0$, je $(0, 0)$ globalni minimum. Ne more hkrati veljati $x^2 + 2y^2 = 1$ in $x^2 + 2y^2 = 2$. Torej je bodisi $x = 0$ in $x^2 + 2y^2 = 2$, od koder dobimo točki $(0, \pm 1)$ bodisi $y = 0$ in $x^2 + 2y^2 = 1$, od koder dobimo točki $(\pm 1, 0)$. Hessejeva matrika je:

$$H = 2\,e^{-x^2-y^2} \begin{bmatrix} 1 - 5x^2 + 2x^4 - 2y^2 + 4x^2y^2 & -6xy + 2x^3y + 4xy^3 \\ -6xy + 2x^3y + 4xy^3 & 2 - x^2 - 10y^2 + 2x^2y^2 + 4y^4 \end{bmatrix}.$$

V stacionarnih točkah je to:

$$H(0,0) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H(\pm 1, 0) = \frac{2}{e} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H(0, \pm 1) = \frac{2}{e} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Zato je $(0,0)$ lokalni minimum, $(\pm 1, 0)$ sta sedli, $(0, \pm 1)$ pa lokalna maksimuma.

b) Najprej opazimo, da je $f(0,0) = 0$ in $f(x,y) > 0$, brž ko je $(x,y) \neq (0,0)$. Točka $(0,0)$ je torej globalni minimum.

Globalni maksimum je lahko kvečjemu v točkah $(0, \pm 1)$. To je res natanko tedaj, ko funkcija f na celi ravnini sploh doseže globalni maksimum. Cela ravnina sicer ni zaprta in omejena množica, pač pa gre $f(x,y)$ proti nič, ko gre (x,y) proti neskončno: če namreč označimo $r := \sqrt{x^2 + y^2}$, velja $|f(x,y)| \le 2r^2 e^{-r^2}$, to pa gre proti nič, ko gre r proti neskončno.

Ker je $f(0, \pm 1) = \frac{2}{e}$, po prejšnjem obstaja tak r_0, da je $f(x,y) < \frac{2}{e}$ za vse $r \ge r_0$ (zunaj kroga). Zaprti krog okoli izhodišča s polmerom r_0 pa je zaprta in omejena množica, zato f tam zavzame globalni maksimum. Globalna maksimuma za f na celi ravnini $\mathbb{R}^2$ torej nastopita v točkah $(0, \pm 1)$ z vrednostjo $\frac{2}{e}$.

4. Nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$L = 2x^3 + 3x + 2y^3 + y + \lambda\big(x^4 + x^2 + 3y^4 + y^2 - 94\big)$$

Parcialni odvodi so:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 6x^2 + 3 + \lambda(4x^3 + 2x) = (2x^2 + 1)(3 + 2\lambda x)\,, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 6y^2 + 1 + \lambda(12y^3 + 2y) = (6y^2 + 1)(1 + 2\lambda y)\,, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^4 + x^2 + 3y^4 + y^2 - 94\,. \end{aligned}$$

Izenačimo z nič in iz prvih dveh enačb dobimo $\lambda = \frac{-3}{2x} = \frac{-1}{2y}$, torej $x = 3y$. Vstavimo v tretjo enačbo in dobimo $84y^4 + 10y^2 - 94 = 0$ oziroma $(84y^2 + 94)(y^2 - 1) = 0$, od koder dobimo stacionarni točki $T_1(-3, -1)$ in $T_2(3, 1)$. Vstavimo v funkcijo in dobimo:

$$\min_D f = f(-3, -1) = -66 \quad \text{in} \quad \max_D f = f(3,1) = 66\,.$$

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 22. 1. 2019

1. Iz prvih parcialnih odvodov:

$$\vec{r}_u = \begin{bmatrix} 2e^u \\ e^u \\ 39(e^u - e^{-u}) - 4ve^{uv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_v = \begin{bmatrix} -e^v \\ 3e^v \\ -4u\,e^{uv} - 20(e^v - e^{-v}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo $E = 5$, $F = 1$, $G = 10$, $EG - F^2 = 49$, $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ in $\vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Nadalje iz drugih parcialnih odvodov

$$\vec{r}_{uu} = \begin{bmatrix} 2e^u \\ e^u \\ 39(e^u + e^{-u}) - 4v^2e^{uv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 78 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{uv} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4(1+uv)e^{uv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$\vec{r}_{vv} = \begin{bmatrix} -e^v \\ 3e^v \\ -4u^2\,e^{uv} - 20(e^v + e^{-v}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -40 \end{bmatrix}$$

izračunamo $L = 78$, $M = -4$, $N = -40$. Končno je:

$$\det\left(\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 78 - 5\lambda & -4 - \lambda \\ -4 - \lambda & -40 - 10\lambda \end{vmatrix} = 49(\lambda^2 - 12\lambda - 64) =$$
$$= 49(\lambda + 4)(\lambda - 16)\,.$$

Glavni ukrivljenosti sta torej $\lambda_1 = -4$ in $\lambda_2 = 16$. Gre za hiperbolično točko.

2. a) Jacobijeva matrika parcialnih odvodov vektorske funkcije:

$$\vec{F}(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 - z^3 + w^2 + 4 \\ 2xy + y^2 - 2z^2 + 3w^4 + 8 \end{bmatrix}$$

je enaka $\begin{bmatrix} 2x & -2y & -3z^2 & 2w \\ 2y & 2x + 2y & -4z & 12w^3 \end{bmatrix}$, kar je v dani točki enako $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -12 & 2 \\ -2 & 2 & -8 & 12 \end{bmatrix}$.
Ker so determinante $\begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} = -128$, $\begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = -56$ in $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 12 \end{vmatrix} = 20$ vse različne od nič, se da sistem v določeni okolici enolično izraziti v vseh omenjenih oblikah.

b) Velja:

$$\begin{bmatrix} z_x & z_y \\ w_x & w_y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -12 & 2 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 14 & -2 \end{bmatrix},$$

torej je $z_x = \frac{13}{32}$, $z_y = \frac{5}{32}$, $w_x = \frac{7}{16}$ in $w_y = \frac{-1}{16}$.

3. Točke (x, y) iz dane množice zadoščajo enačbi:

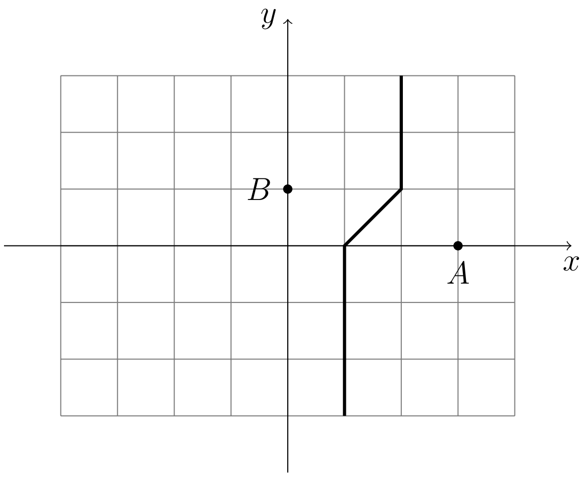
$$|x - 3| + |y| = |x| + |y - 1|\,,$$

ki jo preoblikujemo v $f(x) = g(y)$, kjer je:

$$f(x) = |x| - |x - 3| = \begin{cases} -3 & ;\ x \le 0 \\ 2x - 3 & ;\ 0 \le x \le 3 \\ 3 & ;\ x \ge 3\,, \end{cases}$$

$$g(y) = |y| - |y - 1| = \begin{cases} -1 & ;\ y \le 0 \\ 2y - 1 & ;\ 0 \le y \le 1 \\ 1 & ;\ y \ge 1\,. \end{cases}$$

Če je $0 \le x \le 3$ in $0 \le y \le 1$, mora biti $y = x - 1$. Če je $x < 0$, je $f(x) = -3$, če pa je $x > 3$, je $f(x) = 3$; nobeno od teh števil ni v zalogi vrednosti funkcije g. Če pa je $y < 0$, je $g(y) = -1$; enakost $f(x) = -1$ velja, če je $x = 1$. Podobno, če je $y > 1$, je $g(y) = 1$; enakost $f(x) = 1$ velja, če je $x = 2$. Dobimo spodaj prikazano množico točk:



4. a) Označimo $f(x) := \sqrt{2 + \sqrt{x}}$. Funkcija f je kompozitum naraščajočih funkcij, zato je naraščajoča. Velja $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2 + \sqrt[4]{2}} > \sqrt{2}$ in $f(2) = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2 + \sqrt{4}} = 2$. Sledi, da funkcija interval $[\sqrt{2}, 2]$ spet slika v interval $[\sqrt{2}, 2]$. Nadalje je:

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{2x + x\sqrt{x}}}\,,$$

kar je padajoča funkcija, zato za $x \in [\sqrt{2}, 2]$ velja:

$$0 \le f'(x) \le f'(\sqrt{2}) = \frac{1}{4\sqrt{2\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt[4]{2}}} < 0{\cdot}118 < 1\,,$$

torej je f na intervalu $[\sqrt{2}, 2]$ skrčitev, zato zaporedje x_n konvergira. Limita seveda prav tako leži na tem intervalu in reši enačbo $x = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$, iz katere sledi $x^2 = 2 + \sqrt{x}$, torej $\sqrt{x} = x^2 - 2$, torej $x = (x^2 - 2)^2$, torej $x^4 - 4x^2 - x + 4 = 0$.

b) Prvih nekaj približkov je (na šest decimalk natančno):

$$x_0 \doteq 1\dot{}414214\,, \quad x_1 \doteq 1\dot{}785835\,, \quad x_2 \doteq 1\dot{}826568\,, \quad x_3 \doteq 1\dot{}830712\,,$$
$$x_4 \doteq 1\dot{}831130\,, \quad x_5 \doteq 1\dot{}831172\,.$$

Če z x^* označimo iskano rešitev, velja $|x^* - x_5| \leq \dfrac{0\dot{}118}{1 - 0\dot{}118}\,|x_4 - x_5| < 0\dot{}000006$, torej je $1\dot{}8311655 < x^* < 1\dot{}8311785$, kar pomeni, da se rešitev v zahtevani natančnosti glasi $x^* \doteq 1\dot{}8312$.

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 25. 4. 2019

1. Z zamenjavo vrstnega reda integracije dobimo, da je dani integral enak:

$$\iint_{\substack{y \geq 1 \\ x \leq 1 \\ x \geq \ln y}} \sin(e^x - x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_1^{e^x} \sin(e^x - x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \sin(e^x - x)(e^x - 1)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_1^{e-1} \sin t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \cos 1 - \cos(e-1)\,.$$

2. Označimo $F(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Prvi način. Odvajamo:

$$F'(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + a^2x^4}\,\mathrm{d}x\,.$$

Za $a > 0$ uvedimo substitucijo $t = \sqrt{a}\,x$ in dobimo:

$$F'(a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{a}}\,.$$

Po integraciji dobimo, da za $a > 0$ velja:

$$F(a) = \pi\sqrt{2a} + C\,.$$

Zaradi zveznosti to velja tudi za vse $a \geq 0$. Zdaj pa opazimo, da je funkcija F liha; med drugim to pomeni, da je $F(0) = 0$. Od tod brž sledi $C = 0$. Iz lihosti pa zdaj dobimo, da za splošni $a \in \mathbb{R}$ velja:

$$F(a) = \pi\sqrt{2|a|}\,\operatorname{sgn}(a)\,.$$

Drugi način. Integriramo per partes z $u = \operatorname{arctg}(ax^2)$, $\mathrm{d}u = \frac{2ax}{1+a^2x^4}$, $\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ in $v = -\frac{1}{x}$. Dobimo:

$$F(a) = -\frac{1}{x}\operatorname{arctg}(ax^2)\Big|_{x=-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{1 + a^2x^4}\,\mathrm{d}x\,.$$

Prvi člen je enak nič, v drugega pa za $a > 0$ uvedemo substitucijo $t = \sqrt{a}\,x$ in dobimo:

$$F(a) = 2\sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^4} = \pi\sqrt{2a}\,,$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

3. Vzamemo lahko, da krožnica leži v ravnini xy, in jo parametriziramo v obliki $\vec{r} = \begin{bmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Za os lahko vzamemo kar os x. Če dolžinsko gostoto označimo z μ, je torej vztrajnostni moment enak $J = \mu \int_K (y^2 + z^2)\, \mathrm{d}s$. Iz $\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$, $\|\dot{\vec{r}}\| = R$ dobimo:

$$J = \mu \int_0^{2\pi} R^3 \sin^2\varphi \, d\varphi = \pi\mu R^3 \,.$$

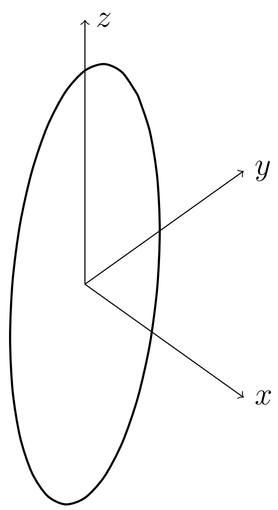
Opomba. Masa krožnice je enaka $2\pi\mu R$, torej je tudi $J = \frac{1}{2} m R^2$.

4. Oba dela ploskve skupaj tvorita rob zgornje enotske polkrogle, ki jo lahko parametriziramo s sferičnimi koordinatami $\vec{r} = \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{bmatrix}$; $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le r \le 1$. Opazimo še, da je rob orientiran navzven. Po Gaussovem izreku je iskani integral enak:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{R} = \iiint_D 3(x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 3r^4 \cos^3\theta \, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}r = \\ &= 6\pi \int_0^1 r^4 \, \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{6\pi}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{5} \, \mathrm{B}\big(2, \tfrac{1}{2}\big) = \frac{4\pi}{5} \,. \end{aligned}$$

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 3. 6. 2019

1. a) Skica:



Ker krivuljo sestavljajo točke oblike $(x, y, 2x - y)$, kjer točka (x, y) leži na enotski krožnici v ravnini, gre za prostorsko elipso.

b) *Prvi način*: sledimo namigu in si pomagamo s Stokesovim izrekom. Označimo integracijsko krivuljo s K. Krivulja K je sklenjena in omejuje prostorski krog, ki ga lahko parametriziramo z $\vec{\rho} = \begin{bmatrix} \rho\cos t \\ \rho\sin t \\ 2\rho\cos t - \rho\sin t \end{bmatrix}$, $(\rho, t) \in \Delta$, kjer je $\Delta = \{(\rho, t) \;;\; 0 \le \rho \le 1,\; 0 \le t \le 2\pi\}$. Integracijska krivulja ustreza delu roba množice Δ, kjer je $\rho = 1$. Če je ρ prva, t pa druga koordinata, smer, ko gre t od 0 do 2π, ustreza pozitivni orientaciji roba. Če prostorski krog orientiramo skladno s prejšnjo parametrizacijo, je torej orientiran skladno z integracijsko krivuljo. Velja:

$$\operatorname{rot}\vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_\rho = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\cos t - \sin t \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_t = \rho \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -2\sin t - \cos t \end{bmatrix},$$

$$\vec{r}_\rho \times \vec{r}_t = \rho \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \left\langle \operatorname{rot}\vec{R}, \vec{r}_\rho \times \vec{r}_t \right\rangle = -\rho\,.$$

Sledi:

$$\oint_K \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\iint_{\substack{0\le\rho\le 1\\ 0\le t\le 2\pi}} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = -\pi\,.$$

Drugi način: neposredno. Na integracijski krivulji velja:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} \sin t \sin^2(2\cos t - \sin t) \\ -\cos t \cos^2(2\cos t - \sin t) \\ 2\sin t \cos t \sin(2\cos t - \sin t)\cos(2\cos t - \sin t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -2\sin t - \cos t \end{bmatrix}.$$

Sledi:

$$\oint_K \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\int_0^{2\pi} \Big(\sin^2 t \sin^2(2\cos t - \sin t) + \cos^2 t \cos^2(2\cos t - \sin t) +$$
$$+ 2\sin t \cos t(2\sin t + \cos t)\sin(2\cos t - \sin t)\cos(2\cos t - \sin t)\Big)\,\mathrm{d}t\,.$$

Zadnji člen integriramo per partes:

$$\begin{aligned} u &= \sin t \cos t\,, \\ \mathrm{d}u &= (\cos^2 t - \sin^2 t)\,\mathrm{d}t\,, \\ \mathrm{d}v &= 2(2\sin t + \cos t)\sin(2\cos t - \sin t)\cos(2\cos t - \sin t)\,\mathrm{d}t\,, \\ v &= -\sin^2(2\cos t - \sin t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

in po krajšem računu dobimo:

$$\oint_K \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = -\pi\,,$$

tako kot prej.

2. Funkcija u je realni del neke holomorfne funkcije natanko tedaj, ko obstaja taka funkcija v, da je $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ in $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$; funkcija g je pripadajoči imaginarni del. Velja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{y}{x^2+y^2}\,, & v(x,y) &= \tfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + A(x)\,, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{x}{x^2+y^2}\,, & v(x,y) &= \tfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + B(y)\,. \end{aligned}$$

Izraza se ujemata, brž ko je $A(x) = B(y) = 0$, torej je iskani imaginarni del funkcija $v(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

3. a) Funkcija f ima singularnosti tam, kjer je $g(z) := e^{2z/3} - e^{-z/3} = 0$, to pa je ekvivalentno $e^z = 1$, kar se zgodi v točkah $2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$. V vseh teh točkah je $g'(z) = \frac{2}{3}e^{2z/3} + \frac{1}{3}e^{-z/3} = 1 \neq 0$, torej ima g povsod tam ničlo prve stopnje, f pa ima pol prve stopnje.

b) Integracijska pot obkroži singularnosti 0 in $2\pi i$. Iskani integral je torej enak:

$$
\begin{aligned}
2\pi i\Big[\operatorname{Res}(0)+\operatorname{Res}(f,2\pi i)\Big] &= 2\pi i\Big[\lim_{z\to 0} z\,f(z)+\lim_{z\to 2\pi i}(z-2\pi i)\,f(z)\Big] = \\
&= 2\pi i\left[\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^{2z/3}-e^{-z/3}}+\lim_{z\to 2\pi i}\frac{z-2\pi i}{e^{2z/3}-e^{-z/3}}\right] = \\
&= 2\pi i\left[\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{2}{3}\,e^{2z/3}+\frac{1}{3}\,e^{-z/3}}+\lim_{z\to 2\pi i}\frac{1}{\frac{2}{3}\,e^{2z/3}+\frac{1}{3}\,e^{-z/3}}\right] = \\
&= 2\pi i\left(1+\frac{1}{\frac{2}{3}\big(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\big)+\frac{1}{3}\big(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\big)}\right) = \\
&= 2\pi i\left(1-\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{6}\,i}\right) = \\
&= \frac{\pi}{13}\big(-4\sqrt{3}+2i\big)\,.
\end{aligned}
$$

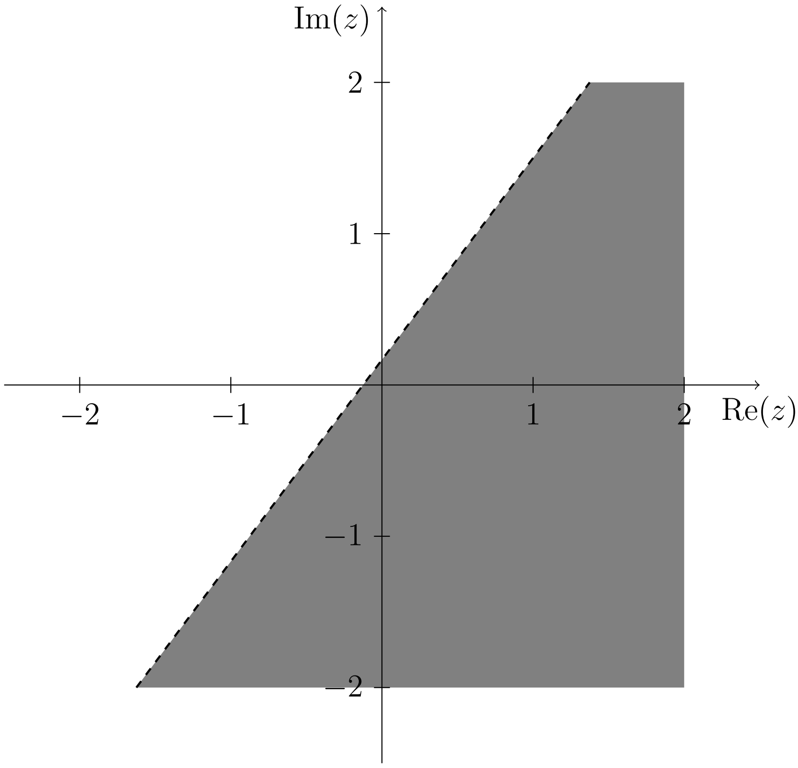
4. a) Kompleksno število z pripada množici A natanko tedaj, ko je $|z|>5$ ali ekvivalentno $z\bar{z}>25$. Če označimo $w=f(z)$, je $z=\frac{1}{w}+4+3i$, torej bo $w\in f(A)$ natanko tedaj, ko bo $w\neq 0$ in $\frac{1}{w}+4+3i\in A$, torej:

$$
\left(\frac{1}{w}+4+3i\right)\left(\frac{1}{\bar{w}}+4-3i\right)>25\,,
$$

Pomnožimo z $w\bar{w}$, uredimo in dobimo:

$$
1+(4+3i)w+(4-3i)\bar{w}>0\,.
$$

Če zapišemo $w=x+iy$, dobimo $1+8x-6y>0$. Skica:



b) Funkcija $g_1(z) := \frac{1}{z}$ množico A bijektivno preslika na odprt krog s središčem v izhodišču in polmerom $\frac{1}{5}$, ki mu odvzamemo središče. Funkcija $g_2(z) := 10z$ slednjo množico bijektivno preslika na odprt krog s središčem v izhodišču in polmerom 2, ki mu odvzamemo središče. Funkcija $g_3(z) := z + 2i$ pa slednjo množico bijektivno preslika na želeno množico. Iskana konformna preslikava je torej:

$$g(z) = g_3(g_2(g_1(z))) = \frac{10}{z} + 2i\,.$$

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 10. 6. 2019

1. a) Velja $g_x + g_y + g_z = f_x \cdot 2 + f_z \cdot (-2) + f_x \cdot (-2) + f_y \cdot 2 + f_y \cdot (-2) + f_z \cdot 2 = 0$.

b) Velja:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x\, f_u + 2y\, f_v\,, \\ f_{xx} &= 2\, f_u + 2x(2x\, f_{uu} + 2y\, f_{uv}) + 2y(2x\, f_{uv} + 2y\, f_{vv}) = \\ &= 2\, f_{uu} + 4x^2 f_{uu} + 8xy\, f_{uv} + 4y^2 f_{vv}\,, \\ f_y &= -2y\, f_u + 2x\, f_v\,, \\ f_{yy} &= -2\, f_u - 2y(-2y\, f_{uu} + 2x\, f_{uv}) + 2x(-2y\, f_{uv} + 2x\, f_{vv}) = \\ &= -2\, f_u + 4y^2 f_{uu} - 8xy\, f_{uv} + 4x^2 f_{vv}\,, \\ f_{xx} - f_{yy} &= 4\, f_u + 4(x^2 - y^2) f_{uu} + 16xy f_{uv} + 4(y^2 - x^2) f_{vv} = \\ &= 4\, f_u + 4u\, f_{uu} + 8v\, f_{uv} - 4u\, f_{vv}\,. \end{aligned}$$

Tako se enačba pretvori v:

$$f_u + u(f_{uu} - f_{vv}) + 2v\, f_{uv} = 0\,.$$

2. Iz:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \cos t \\ 2\cos(2t) - \cos t \\ 2\cos(2t) + 2\cos t \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -4\sin(2t) + \sin t \\ -4\sin(2t) - 2\sin t \end{bmatrix}, \quad \dddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -8\cos(2t) + \cos t \\ -8\cos(2t) - 2\cos t \end{bmatrix},$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \big(4\cos t \sin(2t) - 2\sin t \cos(2t)\big) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \big\langle \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}} \big\rangle = 0\,,$$

$$\begin{aligned} \big\|\dot{\vec{r}}\big\| &= 6\cos^2 t + 4\cos(2t)\cos t + 8\cos^2(2t)\,, \\ \big\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\big\| &= \sqrt{11}\big|4\cos t \sin(2t) - 2\sin t \cos(2t)\big| \end{aligned}$$

dobimo ukrivljenosti:

$$\kappa = \frac{\sqrt{11}\,\big|2\cos t \sin(2t) - \sin t \cos(2t)\big|}{\sqrt{2}\big(3\cos^2 t + 2\cos(2t)\cos t + 4\cos^2(2t)\big)^{3/2}}\,, \qquad \omega = 0\,.$$

Ker je torzijska ukrivljenost enaka nič, je krivulja ravninska. To pa lahko ugotovimo tudi iz dejstva, da za $\vec{r} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$ velja $3X + Y = Z$: na tej ravnini leži dana krivulja.

3. Z vpeljavo sferičnih koordinat:

$$x = r\cos\theta\cos\varphi\,, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi\,, \quad z = r\sin\theta\,, \quad J = r^2\cos\theta$$

dobimo, da je dani integral enak:

$$\iiint\limits_{\substack{0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \pi/4 \\ 0 \le \theta \le \pi/2}} r^6 \sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^2 r^6\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{32\pi}{21}\,.$$

4. a) Singularnosti so v točkah $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. V izhodišču je pol druge stopnje, ostale singularnosti pa so poli prve stopnje.

V izhodišču velja:

$$\begin{aligned} c_{-2} &= \lim_{z\to 0} z^2 f(z) = 1\,, \\ c_{-1} &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\big(z^2 f(z)\big) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1 - ze^z}{(e^z-1)^2} = -\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Glavni del Laurentove vrste je torej $\dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{2z}$.

V singularnosti $a = 2k\pi i$, kjer je $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, pa velja

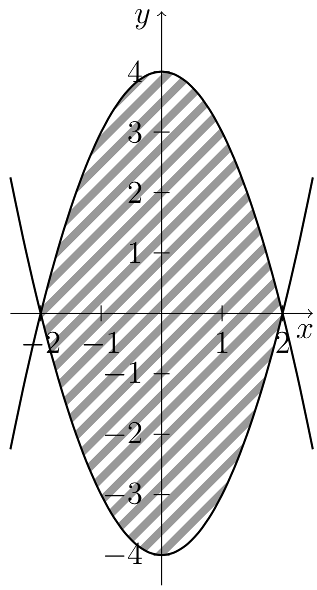
$$c_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to 2k\pi i} \frac{z - 2k\pi i}{z(e^z - 1)} = \frac{1}{2k\pi i}\,,$$

torej je glavni del Laurentove vrste enak $\dfrac{1}{2k\pi i(z - 2k\pi i)}$.

b) Dana krožnica obkroži le singularnost $2\pi i$. Ker je $\mathrm{Res}(f, 2\pi i) = \frac{1}{2\pi i}$, je iskani integral enak 1.

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 19. 8. 2019

1. Na desni je prikazana skica definicijskega območja.



Oglišči: $f(-2,0) = -2\,e^{-2} \doteq -0{\cdot}271$,
$f(2,0) = 2\,e^2 \doteq 14{\cdot}78$.
Rob $y = x^2 - 4$, $-2 < x < 2$:
$f(x, x^2 - 4) = x\,e^{x^2+x-4}$,
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, x^2 - 4) = (1 + x + 2x^2)\,e^{x^2+x-4}$,
stacionarnih točk ni.
Rob $y = 4 - x^2$, $-2 < x < 2$:
$f(x, 4 - x^2) = x\,e^{4+x-x^2}$,
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, 4 - x^2) = (1 + x - 2x^2)\,e^{4+x-x^2}$.
Obe stacionarni točki $(1,3)$ in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$ ležita v definicijskem območju. Velja $f(1,3) = e^4 \doteq 54{\cdot}6$ in $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right) = -\frac{1}{2}\,e^{13/4} \doteq -12{\cdot}9$.
Notranjost: $f_x(x,y) = (1+x)\,e^{x+y}$,
$f_y(x,y) = x\,e^{x+y}$.
Stacionarnih točk v notranjosti ni.

Torej je $\min_D f = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right) = -\frac{1}{2}\,e^{13/4}$ in $\max_D f = f(1,3) = e^4$.

2. Z upoštevanjem sodosti in lihosti dobimo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \pi\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,,\\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0\,,\\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{n}\,.
\end{aligned}$$

Razvita funkcija je torej:

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\sin(nx) = \frac{\pi}{4} - \sin x + \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin(3x)}{3} + \cdots\,.$$

3. $$\int_C \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 \left\langle \begin{bmatrix} 8t^7 \\ 5t^3 \\ -4t^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 (8t^7 + 10t^4 - 12t^5)\,\mathrm{d}t = 1.$$

4. Singularnosti so v točkah $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ in $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, in vse so poli prve stopnje. Dana krožnica obkroži le $\frac{\pi}{6}$ in tam je:

$$c_{-1} = \lim_{z\to\pi/6} \left(z - \frac{\pi}{6}\right) f(x) = \cos\frac{\pi i}{6} \lim_{z\to\pi/6} \frac{z - \frac{\pi}{6}}{2\sin z - 1} = \frac{e^{\pi/6} + e^{-\pi/6}}{2\sqrt{3}}\,,$$

torej je iskani integral enak:

$$\pi i \, \frac{e^{\pi/6} + e^{-\pi/6}}{\sqrt{3}} \doteq 4{\cdot}14 \, i \, .$$

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 2. 9. 2019

1. Velja $f_x = 48x^3 - 6y$ in $f_y = 3y^2 - 6x$, stacionarni točki sta $T_1(0,0)$ in $T_2\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Nadalje je $f_{xx} = 144x^2$, $f_{xy} = -6$ in $f_{yy} = 6y$. V T_1 je sedlo, v T_2 pa lokalni minimum.

2. Z vpeljavo sferičnih koordinat $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$, $z = r\sin\theta$, $J = r^2\cos\theta$ najprej izračunamo maso:

$$m = \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ z\ge 0}} \rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \sin\theta\cos\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}\,,$$

nato pa še integral:

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ z\ge 0}} \rho z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 \sin^2\theta\cos\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{15}\,.$$

Koordinata z iskanega težišča je torej enaka $\frac{8}{15}$, koordinati x in y pa sta enaki nič.

3. Če ploskev parametriziramo z $\vec{r} = \begin{bmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ 2\sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$, iz pogoja na z in splošnih pogojev dobimo pogoje $0 \le r < \frac{1}{2}$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Odvajamo in izračunamo smer normale, ki jo porodi parametrizacija:

$$\vec{r}_\rho = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -\frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{2\rho^2\cos\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ \frac{2\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ \rho \end{bmatrix}$$

Ker ima produkt $\vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi$ isto smer kot predpisana normala, je iskani integral enak

$$\iint_{\substack{0\le\rho<\frac{1}{2}\\ 0\le\varphi<2\pi}} \left\langle \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \frac{2\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2\rho^2\cos\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ \frac{2\rho^2\sin\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ \rho \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \iint_{\substack{0\le\rho<\frac{1}{2}\\ 0\le\varphi<2\pi}} \frac{2}{\sqrt{1-\rho^2}} \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi^2}{3}\,.$$

4. a) Množica A je množica vseh kompleksnih števil z, za katere velja $i(\bar{z} - z) > 6$. Preslikana množica pa je množica vseh kompleksnih števil w, za katere je $1/w \in A$, torej $i(w - \bar{w}) > 6w\bar{w}$. Če pišemo $w = u + iv$, dobimo $u^2 + v^2 + \frac{v}{3} = 0$ oziroma $u^2 + \left(v + \frac{1}{6}\right)^2 < \frac{1}{36}$. Gre torej za odprt krog s središčem v $\frac{1}{6}i$ in polmerom $\frac{1}{6}$.

b) Krog iz prejšnje točke je treba najprej premakniti za $\frac{1}{6}i$ navzdol, nato pa raztegniti za faktor 6. Iskana preslikava je torej:

$$g(z) = 6\left(f(z) - \frac{i}{6}\right) = \frac{6}{z} - i\,.$$

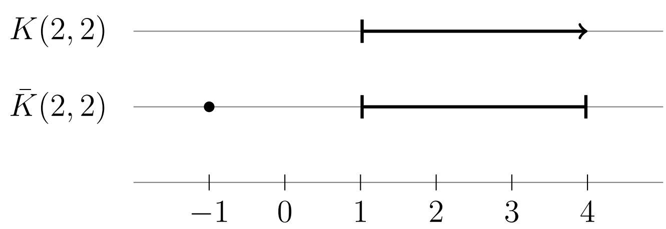
2017/18

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 4. 12. 2017

1. a) Preverimo aksiome metrike:

- Če je $x = y$, sta x in y istega predznaka, torej je $d(x, y) = |x - y| = 0$. Če je $x \neq y$ ter sta x in y istega predznaka, je $d(x, y) = |x - y| > 0$. Če pa sta x in y nasprotnega predznaka, eno izmed števil pripada $(-\infty, -1]$, drugo pa v $[1, \infty)$, torej je $|x - y| \geq 2$ in spet $d(x, y) \geq 1 > 0$.
- Simetrija je očitna.
- Preverimo trikotniško neenakost $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Če so x, y in z vsi istega predznaka, je to trikotniška neenakost za običajno metriko. Če sta x in y različnega, y in z pa istega predznaka, je $d(x, z) = |x - z| - 1$ in $d(x, y) + d(y, z) = |x - y| - 1 + |y - z|$ in neenakost spet sledi iz trikotniške neenakosti za običajno metriko. Podobno velja v primeru, ko sta x in y istega, y in z pa različnega predznaka. Preostane le še primer, ko sta x in z istega predznaka, y pa je različnega predznaka kot x in z. V tem primeru upoštevamo, da je $d(x, y) \geq |x| + 1$ in $d(y, z) \geq |z| + 1$. Po trikotniški neenakosti za absolutno vrednost ocenimo $d(x, z) = |x - z| \leq |x| + |z| \leq d(x, y) + d(y, z)$.

b) Odprta krogla je interval $[1, 4)$, zaprta krogla pa je množica $\{-1\} \cup [1, 4]$. Slika:



2. a) Oglejmo si funkcijo:

$$f(x) - x = 4 - \frac{4x + \sin x}{3}.$$

Ko gre x proti minus neskončno, gre $f(x) - x$ proti neskončno in ko gre x proti neskončno, gre $f(x) - x$ proti minus neskončno. Sledi, da ima funkcija $x \mapsto f(x) - x$ na realni osi vsaj eno rešitev. Nadalje velja:

$$f'(x) = -\frac{1 + \cos x}{3},$$

torej za vse $x \in \mathbb{R}$ velja $-\frac{2}{3} \leq f'(x) \leq 0$ in zato $-\frac{5}{3} \leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x) - x\big) \leq -1$. Funkcija $x \mapsto f(x) - x$ je torej strogo padajoča, zato ima največ eno ničlo. Sledi, da ima enačba $f(x) = x$ res natanko eno rešitev.

b) Ker za vse $x \in \mathbb{R}$ velja $-\frac{2}{3} \leq f'(x) \leq 0$, bo funkcija na intervalu $[0, a]$ skrčitev, brž ko ga bo preslikala vase. Ker je padajoča, bo slednje res, brž ko bosta $f(0)$ in $f(a)$ na intervalu $[0, a]$. Velja $f(0) = 4$, torej bo $a \geq 4$. Nadalje lahko $f(4) = 4 - \frac{4+\sin 4}{3}$

omejimo med $4 - \frac{4+1}{3} = \frac{7}{3}$ in $4 - \frac{4-1}{3} = 3$, kar pomeni, da je $f(4) \in [0, 4]$. Sklep: funkcija f je skrčitev na intervalu $[0, 4]$.

c) Za začetni približek $x_1 = 0$ dobimo naslednje zaporedje približkov:

$$0\,,\ 4\,,\ 2\text{'}918934\,,\ 2\text{'}953414\,,\ 2\text{'}953172\,,\ 2\text{'}953173\,, \ldots$$

Ker je funkcija f padajoča, točen rezultat leži med dvema zaporednima približkoma, od koder sledi, da ustrezno zaokrožena rešitev znaša 2˙95317.

3. a) Velja:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}$$

in za $n = 1, 2, 3, \ldots$ velja:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x^2 \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{\pi \sin\frac{n\pi}{2}}{2n} + \frac{2\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2} - \frac{4\sin\frac{n\pi}{2}}{n^3\pi}\,.\end{aligned}$$

Ker je funkcija f liha, je:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Iskana Fourierova vrsta je torej:

$$\tilde{f}(x) = \frac{\pi^2}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi \sin\frac{n\pi}{2}}{2n} + \frac{2\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2} - \frac{4\sin\frac{n\pi}{2}}{n^3\pi} \right) \cos(nx)\,.$$

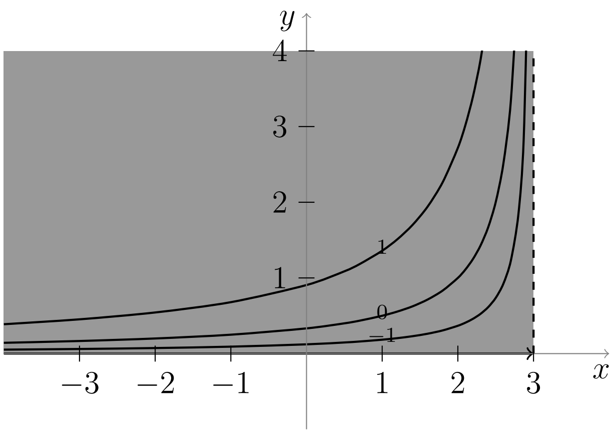
b) Dobljena vrsta $\tilde{f}$ se z izvirno funkcijo f ujema povsod razen v $\pm\frac{\pi}{2}$, kjer ni zvezna: tam je funkcija f enaka 0, medtem ko je vsota vrste $\tilde{f}$ enaka $\frac{\pi^2}{8}$.

Ker je funkcija f soda, se vrsta $\tilde{f}$ ujema z razvojem v vrsto iz samih kosinusov. Ker funkcija f ni liha, se vrsta $\tilde{f}$ ne ujema z razvojem v vrsto iz samih sinusov.

4. a) Definicijsko območje funkcije je $(-\infty, 3) \times [0, \infty)$. Nivojnica za vrednost z je krivulja:

$$y = e^{z - \ln(3-x)} = \frac{e^z}{3 - x}\,.$$

Slika:



b) Ko funkcijo enkrat ali večkrat odvajamo po x, drugi člen odpade in dobimo funkcijo samo spremenljivke x, ko le-to odvajamo po y, pa dobimo nič. Podobno, ko funkcijo enkrat ali večkrat odvajamo po y, prvi člen odpade in dobimo funkcijo samo spremenljivke y, ko le-to odvajamo po x, pa dobimo nič. Sledi:

$$f_{xxy}(x, y) = f_{xyx}(x, y) = f_{yxx}(x, y) = 0\,.$$

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 22. 1. 2018

1. a) $$\frac{\ln(1-xy^2)}{y^2} = -\frac{1}{y^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(xy^2)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n y^{2n-2}}{n} = -x - \frac{x^2y^2}{2} - \frac{x^3y^4}{3} - \frac{x^4y^6}{4} - \cdots$$

b) Za $f(x,y) = \sum_{k,l} a_{kl}x^k y^l$ je $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(0,0) = m!\cdot n!\cdot a_{mn}$, torej dobimo:

$$\frac{\partial^{41} f}{\partial x^{15}\,\partial y^{26}}(0,0) = 0 \quad (\text{saj } (15,26) \text{ ni oblike } (n, 2n-2))\,,$$

$$\frac{\partial^{10} f}{\partial x^{4}\,\partial y^{6}}(0,0) = 4!\cdot 6!\cdot\frac{-1}{4} = -4320\,.$$

2. $f_x(x,y) = y(1-2x^2)\,e^{-x^2-y^2}$, $f_y(x,y) = x(1-2y^2)\,e^{-x^2-y^2}$.
Stacionarne točke: $T_1(0,0)$, $T_2\big(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\big)$, $T_3\big(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\big)$, $T_4\big(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\big)$ in $T_5\big(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\big)$.
$f_{xx}(x,y) = 2xy(2x^2-3)\,e^{-x^2-y^2}$, $f_{xy}(x,y) = (1-2x^2)(1-2y^2)\,e^{-x^2-y^2}$ $f_{yy}(x,y) = 2xy(2y^2-3)\,e^{-x^2-y^2}$.

V točki T_1 je $H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ in $K(0,0) = -1$, torej tam ni ekstrema.

V točkah T_2 in T_5 je $H\big(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\big) = H\big(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\big) = \frac{2}{e}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ in $K(0,0) = \frac{4}{e^2}$, torej je tam lokalni maksimum.

V točkah T_3 in T_4 je $H\big(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\big) = H\big(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\big) = \frac{2}{e}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ in $K(0,0) = \frac{4}{e^2}$, torej je tam lokalni minimum.

3. a) Enačba dobi obliko $(x^2+11)^2 = 45x^2+45$ oziroma $x^4-23x^2+76=0$, kar ima rešitve $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = \sqrt{19}$ in $x_4 = -\sqrt{19}$.
b) Funkcija $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2+9)^2 - 45(x^2+y^2)$ ima parcialne odvode:

$$F_x(x,y,z) = x(4t-90)\,,\quad F_y(x,y,z) = y(4t-90)\,,\quad F_z(x,y,z) = 4tz\,,$$

kjer je $t = x^2+y^2+z^2+9$. Pri $y=z=1$ je bodisi $t=15$ bodisi $t=30$, torej v nobenem primeru ni $4t-90=0$, prav tako pa tudi ni $x=0$, torej tudi F_x ni enak nič. Po izreku o implicitni funkciji se da zato v okolici rešitve res enolično izraziti $x = x(y,z)$.

c) $$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y(2,1,1)}{F_x(2,1,1)} = -\frac{1}{2},\quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{F_z(2,1,1)}{F_x(2,1,1)} = 1.$$

4. a) Ko y, kot je izražen v prvi enačbi, vstavimo v drugo enačbo, dobimo $x^2 = e^{2z}\cos^2 z$. Dobimo torej dve krivulji:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} e^z\cos z \\ e^z\sin z \\ z \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} -e^z\cos z \\ e^z\sin z \\ z \end{bmatrix}.$$

Pri $z = 0$ in $x > 0$ je seveda relevantna prva krivulja. Odvajamo:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} e^z(\cos z - \sin z) \\ e^z(\sin z + \cos z) \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -2\,e^z \sin z \\ 2\,e^z \cos z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -2e^z(\sin z + \cos z) \\ 2\,e^z(\cos z - \sin z) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vstavimo $z = 0$ in dobimo:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nadalje je:

$$\|\dot{\vec{r}}\| = \sqrt{3}, \quad \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| = 2\sqrt{2}, \quad [\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}] = 4,$$

od koder končno dobimo:

$$\kappa = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \quad \text{in} \quad \omega = \frac{1}{2}.$$

b) Odvajamo in vstavimo $u = v = 0$:

$$\vec{r}_u = \begin{bmatrix} 16u - 22v \\ -32u + 68v + 3 \\ 32u - 65v + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_v = \begin{bmatrix} -22u + 10v - 6 \\ 68u - 20v - 3 \\ -65u + 20v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Od tod izračunamo koeficiente prve fundamentalne forme:

$$E = 18, \quad F = -9, \quad G = 45 \quad \text{in še} \quad \sqrt{EG - F^2} = 27.$$

Nadalje iz drugih parcialnih odvodov:

$$\vec{r}_{uu} = \begin{bmatrix} 16 \\ -32 \\ 32 \end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_{uv} = \begin{bmatrix} -22 \\ 68 \\ -65 \end{bmatrix}, \qquad \vec{r}_{vv} = \begin{bmatrix} 10 \\ -20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

dobimo še koeficiente druge fundamentalne forme:

$$L = 48, \quad M = -96, \quad N = 30.$$

in Gaussova ukrivljenost je enaka:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{32}{3}.$$

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 19. 4. 2018

1. Označimo dani integral z $F(x)$ in ga formalno odvajajmo:

$$F'(x) = \int_0^\infty e^{-xy} \cos y \, \mathrm{d}y \, .$$

Račun je pravilen na poljubnem intervalu (m, ∞), kjer je $m > 0$, ker lahko za poljubna $x > m$ in $y \geq 0$ ocenimo $|e^{-xy} \cos y| \leq e^{-my}$, integral $\int_0^\infty e^{-my} \, \mathrm{d}y$ pa obstaja. Torej je račun pravilen tudi na intervalu $(0, \infty)$. Z integriranjem po y dobimo:

$$F'(x) = \frac{e^{-xy}\big(\sin y - x \cos y\big)}{1 + x^2}\Bigg|_0^\infty = \frac{x}{1 + x^2} \, .$$

Integriramo še po x in dobimo:

$$F(x) = \tfrac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C \, .$$

To velja za vse $x > 0$, zaradi zveznosti pa tudi za vse $x \geq 0$. Očitno je $F(0) = 0$, torej je $C = 0$. Sklep: za vse $x \geq 0$ velja $F(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$.

2. a) $\displaystyle\int_{-1/3}^{1/3} \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{1-9x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{1-9x^2}} \sin(9x^2 + 4y^2) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$ ali $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \int_{-\frac{1}{3}\sqrt{1-4y^2}}^{\frac{1}{3}\sqrt{1-4y^2}} \sin(9x^2 + 4y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$

b) Z uvedno eliptičnih polarnih koordinat:

$$x = \tfrac{1}{3} r \cos\varphi \, , \quad y = \tfrac{1}{2} r \sin\varphi \, , \quad J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\cos\varphi & -\frac{1}{3} r \sin\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\varphi & \frac{1}{2} r \cos\varphi \end{vmatrix} = \tfrac{1}{6} r$$

dobimo, da je iskani integral enak:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \iint_{\substack{0<r<1 \\ 0\leq\varphi<2\pi}} \sin(r^2) \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi &= \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \sin(r^2) \, r \, \mathrm{d}r = \\ &= \frac{\pi}{6} \int_0^1 \sin t \, \mathrm{d}t = \\ &= \frac{\pi}{6}\big(1 - \cos 1\big) \, . \end{aligned}$$

3. a) Postavimo koordinatni sistem tako, da je osnovna ploskev na ravnini xy, središče osnovne ploskve pa v izhodišču. Vrh stožca naj bo točka $(0, 0, h)$. Če označimo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, je stožec določen z neenačbama $z > 0$, $\frac{r}{R} + \frac{z}{h} < 1$.

Zaradi simetrije ima težišče koordinati x in y enaki nič, koordinato z pa izračunamo s pomočjo cilindričnih koordinat:

$$\begin{aligned}
z^* &= \frac{1}{m} \iiint_{\substack{z>0 \\ r/R+z/h<1 \\ r>0 \\ 0<\varphi<2\pi}} \rho r z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z = \\
&= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \int_0^{h(1-r/R)} z \, \mathrm{d}z \, r \, \mathrm{d}r = \\
&= \frac{3}{\pi R^2 h} 2\pi \int_0^R \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 r \, \mathrm{d}r = \\
&= 3h \int_0^1 t(1-t)^2 \, \mathrm{d}t = \\
&= \frac{h}{4} \, .
\end{aligned}$$

b) Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da gre za os x. Iskani vztrajnostni moment je:

$$\begin{aligned}
J_x &= \iiint_{\substack{z>0 \\ r/R+z/h<1 \\ r>0 \\ 0<\varphi<2\pi}} \rho r (y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \\
&= \iiint_{\substack{z>0 \\ r/R+z/h<1 \\ r>0 \\ 0<\varphi<2\pi}} \rho r (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z = \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^R \int_0^{h(1-r/R)} dz \, r^3 \, \mathrm{d}r + \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \int_0^{h(1-r/R)} z^2 \, \mathrm{d}z \, r \, \mathrm{d}r = \\
&= \pi \rho h \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^3 \, \mathrm{d}r + \frac{2\pi\rho h^3}{3} \int_0^R \left(1 - \frac{r}{R}\right)^3 r \, \mathrm{d}r = \\
&= \pi \rho h R^4 \int_0^1 t^3 (1-t) \, \mathrm{d}t + \frac{2\pi\rho h^3 R^2}{3} \int_0^1 (1-t)^3 t \, \mathrm{d}t = \\
&= \pi \rho h R^2 \left(\frac{R^2}{20} + \frac{h^2}{30}\right) = \\
&= m \left(\frac{3R^2}{20} + \frac{h^2}{10}\right) .
\end{aligned}$$

4. Če je $a > 0$, se za velike y integrand obnaša približno tako kot y^{-2a}, zato postavimo domnevo, da integral obstaja za $a > \frac{1}{2}$. Zdaj moramo to še utemeljiti.

Za $a > \frac{1}{2}$ lahko ocenimo $\left|\frac{y^a}{1+y^{3a}}\right| < \frac{1}{y^{2a}}$. Ker integral slednjega obstaja, obstaja tudi prvotni integral.

Za $0 \le a \le \frac{1}{2}$ in $y \ge 1$ je tudi $y^{3a} \ge 1$, torej $1 + y^{3a} \le 2y^{3a}$, torej $\frac{y^a}{1+y^{3a}} \ge \frac{1}{2y^{2a}} \ge 0$. Ker integral slednjega ne obstaja, tudi prvotni integral ne obstaja.

Če pa je $a < 0$, se za velike y integrand obnaša približno tako kot y^a, zato postavimo domnevo, da integral obstaja za $a < -1$. Spet moramo to še utemeljiti.

Za $a < -1$ lahko ocenimo $\left|\frac{y^a}{1+y^{3a}}\right| < y^a$. Ker integral slednjega obstaja, obstaja tudi prvotni integral.

Za $-1 \leq a \leq 0$ in $y \geq 1$ je tudi $y^{3a} \leq 1$, torej $1 + y^{3a} \leq 2$, torej $\frac{y^a}{1+y^{3a}} \geq \frac{y^a}{2} \geq 0$. Ker integral slednjega ne obstaja, tudi prvotni integral ne obstaja.

Sklep: integral obstaja za $a \in \big(-\infty, -1\big) \cup \big(\frac{1}{2}, \infty\big)$.

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 14. 6. 2018

1. Izračunajmo najprej:

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= (1-t^2)^2 \,, \\
\dot{x} &= -2t\cos t - (1-t^2)\sin t \,, \\
\dot{y} &= -2t\sin t + (1-t^2)\cos t \,, \\
\dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= 1 + 2t^2 + t^4 = (1+t^2)^2 \,.
\end{aligned}
$$

Če torej z μ označimo dolžinsko gostoto, je iskani vztrajnostni moment enak:

$$
J_z = \mu \int_{-1}^{1} (1-t^2)^2 (1+t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{128\mu}{105} \,.
$$

2. Integral najlažje izračunamo s pomočjo Gaussovega izreka. Dana ploskev omejuje telo, določeno z neenačbami:

$$
x^2 + y^2 \le \cos^2 z \,; \quad -\frac{\pi}{2} \le z \le \frac{\pi}{2}
$$

orientirana pa je v smeri navzven. Iskani integral je torej enak:

$$
J = \iiint_{\substack{x^2+y^2 \le \cos^2 z \\ -\pi/2 \le z \le \pi/2}} (x - y + x^2 + y^2)\cos z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \,.
$$

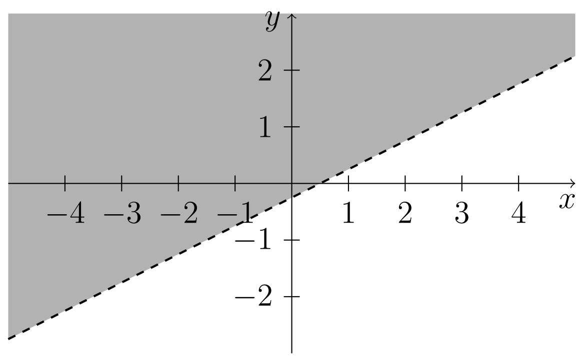
Z uvedbo cilindričnih koordinat:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi & \qquad r &\ge 0 \\
y &= r\sin\varphi & \qquad 0 &\le \varphi < 2\pi \\
z &= z & \qquad J &= r
\end{aligned}
$$

dobimo:

$$
\begin{aligned}
J &= \iiint_{\substack{0 \le r \le \cos z \\ 0 \le \varphi < 2\pi \\ -\pi/2 \le z \le \pi/2}} \left(r^2\cos\varphi - r^2\sin\varphi + r^3\right)\cos z \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos z} \int_0^{2\pi} \left(r^2\cos\varphi - r^2\sin\varphi + r^3\right)\cos z \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \\
&= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos z} r^3 \,\mathrm{d}r \cos z \,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 z \,\mathrm{d}z = \\
&= \pi \int_0^{\pi/2} \cos^5 z \,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{\pi}{2}\,\mathrm{B}\left(3, \frac{1}{2}\right) = \\
&= \frac{8\pi}{15} \,.
\end{aligned}
$$

3. a) Če zapišemo $z = x + iy$, množico A določa neenačba $2x - 4y < 1$. To je odprta polravnina, prikazana na naslednji sliki:



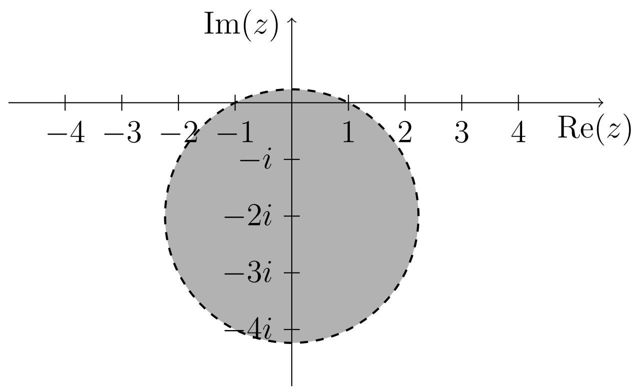
b) Naj bo $B := f(A)$. Točka w pripada množici B natanko tedaj, ko obstaja tak $z \in A$, da je $w = f(z)$, to pa je natanko tedaj, ko je $z = f^{-1}(w)$. Enačba $w = \frac{z}{z-1}$, v kateri za neznanko vzamemo z, ima edino rešitev $z = \frac{w}{w-1}$, če je $w \neq 1$ (sicer pa nima rešitve). Torej je kar $f^{-1}(w) = \frac{w}{w-1}$: funkcija f je inverzna sama sebi. Točka w torej pripada množici B natanko tedaj, ko je:

$$(1 + 2i)\,\frac{w}{w - 1} + (1 - 2i)\,\frac{\bar{w}}{\bar{w} - 1} < 1\,.$$

Neenačbo lahko pomnožimo z $(w - 1)(\bar{w} - 1) = (w - 1)\overline{(w - 1)} > 0$. Po krajšem računu dobimo:

$$w\bar{w} - 2iw + 2i\bar{w} < 1\,.$$

Če zapišemo $z = x + iy$, dobimo $x^2 + y^2 + 4y < 1$ oziroma $x^2 + (y + 2) < 5$. Gre torej za odprt krog s središčem v točki $-2i$ in polmerom $\sqrt{5}$ (ki ne vsebuje točke 1). Slika:



4. Označimo dani integral z J. Vanj uvedemo substitucijo:

$$z = e^{it}\,, \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\,, \quad \mathrm{d}z = i\,e^{it}\,\mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

Integracijska pot, t. j. interval od 0 do 2π, se preslika v enotsko krožnico, orientirano pozitivno; označimo jo s K. Po krajšem računu dobimo:

$$J = \frac{1}{i} \oint_K \frac{z}{(2z^2 + 5z + 2)^2}\,\mathrm{d}z\,.$$

Imenovalec $(2z^2 + 5z + 2)^2 = (2z + 1)^2(z + 2)^2$ ima dve ničli druge stopnje – pri $z = -1/2$ in $z = -2$. Le prva leži v območju, ki ga omejuje krivulja K, torej v enotskem krogu. Tam ima funkcija:

$$f(z) = \frac{z}{(2z^2 + 5z + 2)^2}$$

pol druge stopnje. Sledi:

$$J = 2\pi\,\mathrm{Res}\big(f, -\tfrac{1}{2}\big) = 2\pi \lim_{z\to -1/2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{z}{(z+2)^2} = 2\pi\,\frac{2 - z}{(z+2)^3}\bigg|_{z=-1/2} = \frac{40\pi}{27}\,.$$

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 22. 6. 2017

1. Iz parcialnih odvodov:

$$f_x(x,y) = \big(8 - 2x(8x+5y^2)\big)e^{-x^2-y^2}\,, \qquad f_y(x,y) = \big(10y - 2y(8x+5y^2)\big)e^{-x^2-y^2}$$

dobimo stacionarne točke v notranjosti. Lotimo se najprej f_y. Ena možnost je, da je $y = 0$. V tem primeru je $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Druga možnost pa je, da je $8x + 5y^2 = 5$, od koder najprej sledi $x = 4/5$, toda za ta x ne obstaja noben ustrezen realen y.

Poiščimo še stacionarne točke na robu. Nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$L = (8x+5y^2)e^{-x^2-y^2} - \lambda(x^2+y^2)\,.$$

Iz parcialnih odvodov:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \big(8-2x(8x+5y^2)\big)e^{-x^2-y^2} - 2\lambda x\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = \big(10y-2y(8x+5y^2)\big)e^{-x^2-y^2} - 2\lambda y$$

spet dobimo, da mora biti bodisi $y = 0$ bodisi $\lambda = \big(10y - 2y(8x+5y^2)\big)e^{-x^2-y^2}$. V prvem primeru je $x = \pm 1$, v drugem pa pride $x = 4/5$, $y = \pm 3/5$.

Izračunamo funkcijsko vrednost v vseh kandidatih za ekstreme:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\, 0\right) = 4\sqrt{2}\,e^{-1/2} \doteq 3{\cdot}43\,, \qquad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\, 0\right) = -4\sqrt{2}\,e^{-1/2} \doteq -3{\cdot}43\,,$$

$$f(1,0) = \frac{8}{e} \doteq 2{\cdot}94\,, \qquad f(-1,0) = -\frac{8}{e} \doteq -2{\cdot}94\,,$$

$$f\left(\frac{4}{5},\, \pm\frac{3}{5}\right) = \frac{41}{5e} \doteq 3{\cdot}02$$

in zaključimo, da je:

$$\min_{x^2+y^2\le 1} f(x,y) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\, 0\right) = -4\sqrt{2}\,e^{-1/2}\,,$$

$$\max_{x^2+y^2\le 1} f(x,y) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\, 0\right) = 4\sqrt{2}\,e^{-1/2}\,.$$

2. V dani točki velja $\vec{r}_u = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$ in $\vec{r}_v = \begin{bmatrix} -12 \\ 10 \\ -9 \end{bmatrix}$, torej $E = 125$, $F = -200$, $G = 325$ in $\sqrt{EG - F^2} = 25$. Izračunamo še $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$. Nadalje velja $\vec{r}_{uu} = \begin{bmatrix} -14 \\ 5 \\ 52 \end{bmatrix}$,

$\vec{r}_{uv} = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ -24 \end{bmatrix}$ in $\vec{r}_{vv} = \begin{bmatrix} -18 \\ 20 \\ -51 \end{bmatrix}$, torej $L = 50$, $M = -30$ in $N = -30$. Za glavni smeri izračunamo:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 50 & -30 \\ -30 & -30 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 125 & -200 \\ -200 & -325 \end{bmatrix}\right) = 25(25\lambda^2 - 20\lambda - 96)\,.$$

To je enako nič pri $\lambda_1 = 12/5$ in $\lambda_2 = -8/5$. To sta iskani glavni ukrivljenosti.

3. Masa je enaka:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_{\substack{x^2+4y^2\le 1 \\ 0\le z\le x}} 16z\, e^{-x^2-4y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \\ &= 16 \iint_{\substack{x^2+4y^2\le 1 \\ x\ge 0}} \int_0^x z\, \mathrm{d}z\, e^{-x^2-4y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \\ &= 8 \iint_{\substack{x^2+4y^2\le 1 \\ x\ge 0}} x^2\, e^{-x^2-4y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Z uvedbo modificiranih polarnih koordinat $x = r\cos\varphi$, $y = \frac{1}{2} r\sin\varphi$, $J = \frac{1}{2} r$ dobimo:

$$m = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi \int_0^\infty r^3\, e^{-r^2}\, \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^\infty r^3\, e^{-r^2}\, \mathrm{d}r = \pi \int_0^1 t\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \pi\left(1 - \frac{2}{e}\right)\,.$$

4. Kompleksno število w bo v sliki natanko tedaj, ko bo obstajalo tako kompleksno število z z $z + \bar{z} > 0$, da bo $w = f(z)$. Slednje pa velja natanko tedaj, ko je $z = \frac{2w}{1-w}$ (in $w \neq 1$). Torej bo w v sliki natanko tedaj, ko bo $w \neq 1$ in:

$$\frac{2w}{1-w} + \frac{2\bar{w}}{1-\bar{w}} > 0\,.$$

Poračunamo in dobimo $4w\bar{w} - 2w - 2\bar{w} < 0$. Če pišemo $w = x + iy$, dobimo $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4}$. Gre torej za odprt krog s središčem v $\frac{1}{2}$ in polmerom $\frac{1}{2}$ (ki ne vsebuje točke 1).

5. Funkcija $f(z) = \frac{e^{\pi z}-1}{(z^2+4)^2}$ ima singularnost pri $z = 2i$ in $z = -2i$. Integracijska pot obkroži le $2i$, in sicer v nasprotni smeri urinega kazalca. Zato bo iskani integral enak $2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i)$. Imenovalec ima pri $2i$ ničlo druge stopnje, števec pa ima tam ničlo prve stopnje. To pomeni, da ima funkcija f pol prve stopnje. Sledi:

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \lim_{z\to 2i} (z - 2i)\, f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{e^{\pi z} - 1}{(z+2i)^2(z-2i)} = -\frac{1}{16} \lim_{z\to 2i} \frac{e^{\pi z} - 1}{z - 2i} = -\frac{\pi}{16}\,,$$

iskani integral pa je enak $-\dfrac{\pi^2 i}{8}$.

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 20. 8. 2018

1. Na desni je skica definicijskega območja.

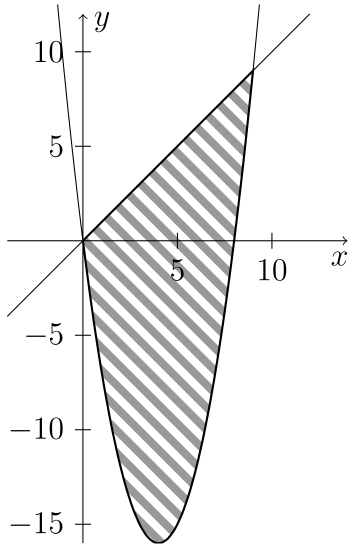
Oglišči: $f(0,0) = 0, \quad f(9,9) = 54$.

Rob $y = x^2 - 8x$: $f(x, x^2 - 8x) = x^3 - 11x^2 + 24x$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, x^2 - 8x) = 3x^2 - 22x + 24 = (3x-4)(x-6)$, $f\left(\frac{4}{3}, -\frac{80}{9}\right) = \frac{400}{27}, \quad f(6,-12) = -36$.

Rob $y = x$: $f(x,x) = x^2 - 3x, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,x) = 2x - 3$, $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$.

Notranjost: $\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 3, \quad f(3,0) = 0$.

Torej je $\min_D f = f(6,-12) = -36$ in $\max_D f = f(9,9) = 54$.



2. a) Velja $\dot{\vec{r}} = (1, 2t, 3t^2)$. Pri $t = 2$ je $\vec{r} = (2,4,8)$ in $\dot{\vec{r}} = (1,4,12)$. Iskana premica je torej $\dfrac{X-2}{1} = \dfrac{Y-4}{4} = \dfrac{Z-8}{12}$.

b) Velja:

$$\ddot{\vec{r}} = (0, 2, 6t)\,, \quad \dddot{\vec{r}} = (0,0,6)\,, \quad \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = (6t^2, -6t, 2)\,.$$

Fleksijska ukrivljenost: $\kappa = \dfrac{\left\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right\|}{\left\|\dot{\vec{r}}\right\|^3} = \sqrt{\dfrac{36t^4 + 36t^2 + 4}{(9t^4 + 4t^2 + 1)^3}}$.

Torzijska ukrivljenost: $\tau = \dfrac{\left\langle \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}} \right\rangle}{\left\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right\|^2} = \dfrac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}$.

3. Označimo $F(a,b) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ay) - \operatorname{arctg}(by)}{y}$ in obravnavajmo a kot parameter, b pa kot konstanto. Privzemimo najprej, da je $a, b > 0$. Z odvajanjem dobimo:

$$F_a(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{1 + a^2 y^2} = \frac{\pi}{a}\,.$$

Sledi, da za poljubna $a, b > 0$ velja:

$$F(a,b) = \pi \ln a + C(b)\,,$$

kjer je C neka funkcija. A ker je $F(b,b) = 0$, mora biti $C(b) = -\pi \ln b$. Torej za poljubna $a, b > 0$ velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \pi \ln \frac{a}{b}\,.$$

Če pa a in b zamenjamo z nasprotnima vrednostma, integrand prevrže predznak, medtem ko se desna stran v zgornjem izrazu ne spremeni. Za $a, b < 0$ torej integral prav tako obstaja in velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x} \, \mathrm{d}x = -\pi \ln \frac{a}{b} = \pi \ln \frac{b}{a} \, .$$

4. Najlažje gre z Gaussovom izrekom – iskani integral je enak:

$$J := \iiint_{\substack{x^2+y^2 \le 1 \\ -1 \le z \le 1}} 6(x^2 + y^2) z^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .$$

Z uvedbo cilindričnih koordinat dobimo

$$J = 12\pi \int_0^1 r^3 \, \mathrm{d}r \int_{-1}^1 z^2 \, \mathrm{d}z = 2\pi \, .$$

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 3. 9. 2018

1. Ker je funkcija liha, so vsi koeficienti pri kosinusih enaki nič. Vrsta se torej izraža kot sinusna Fourierova vrsta:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,,$$

kjer je:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(2x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\Big[\cos\big((n-2)x\big) - \cos\big((n+2)\big)\Big]\,\mathrm{d}x\,.$$

Za vse $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(mx)\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin(m\pi/2)}{m}\,,$$

za $m = 0$ pa je:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(mx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Iskani delni razvoj je:

$$F_5(x) = -\frac{4}{3\pi}\sin x + \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{4}{5\pi}\sin(3x) + \frac{4}{21}\sin(5x)\,.$$

2. $f_x(x,y) = y + 2\,e^x - 2\,e^{2x}$, $\quad f_y(x,y) = x - \ln y$.
Edina stacionarna točka je $T\big(-\ln\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\big)$.
$f_{xx}(x,y) = 2\,e^x - 4\,e^{2x}$, $\quad f_{xy}(x,y) = 1$, $\quad f_{yy}(x,y) = -\dfrac{1}{y}$.
V edini stacionarni točki je $H = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$. Ker je $\det H = 3 > 0$ in sta diagonalca negativna, je tam lokalni maksimum.

3. $\vec{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $\quad \vec{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$, $\quad \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\sin v, -\cos v, u)$.
Iskani pretok je enak:

$$\iint_S \langle \vec{R}, \vec{N}\rangle\,\mathrm{d}P = \iint_{\substack{u\in[0,1]\\ v\in[0,2\pi]}} \left\langle \begin{bmatrix} u\sin v \\ -u\cos v \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ u \end{bmatrix} \right\rangle = \int_0^1 u\,\mathrm{d}u \int_0^{2\pi} (1+v)\,\mathrm{d}v =$$
$$= \pi + \pi^2\,.$$

4. Ker je $z^4+3z^2-4=(z^2+4)(z^2-1)=(z-2i)(z+2i)(z-1)(z+1)$, ima integrand $f(z)=\frac{1}{z^4+3z^2-4}$ pole $2i$, $-2i$, 1 in -1. V trikotniku D, ki ga omejuje krivulja K, sta pola $-2i$ in 1. Torej je treba izračunati ostanka:

$$\operatorname{Res}(f,-2i)=\lim_{z\to-2i}\frac{z+2i}{z^4+3z^2-4}=\left.\frac{1}{(z-2i)(z-1)(z+1)}\right|_{z=-2i}=-\frac{i}{20}\,,$$
$$\operatorname{Res}(f,1)=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z^4+3z^2-4}=\left.\frac{1}{(z-2i)(z+2i)(z+1)}\right|_{z=1}=\frac{1}{10}\,.$$

Ker je krivulja K orientirana negativno, je:

$$\oint_K f(z)\,\mathrm{d}z=-2\pi i\big(\operatorname{Res}(f,-2i)+\operatorname{Res}(f,1)\big)=\frac{1}{10}+\frac{\pi i}{5}\,.$$

2016/17

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 1. 12. 2016

1. a) Očitno je $d(x,x) = 0$, saj je $x^2 \geq 0$ in $|x^2 - x^2| = 0$.

Če je $d(x,y) = 0$, mora biti $xy > 0$, obenem pa tudi $x^2 = y^2$, torej bodisi $x = y$ bodisi $x = -y$. A slednja možnost odpade, saj bi bilo $xy < 0$.

Vsi deli definicije so simetrični glede na menjavo spremenljivk x in y, zato je simetrična tudi funkcija d.

Naj bo $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Če je $xz > 0$, je:

$$d(x,y) + d(y,z) \geq |x^2 - y^2| + |y^2 - z^2| \geq |x^2 - z^2| = d(x,z)\,.$$

Če pa je $xz < 0$, je bodisi $xy < 0$ in $yz > 0$ bodisi $xy > 0$ in $yz < 0$. V obeh primerih je:

$$d(x,y) + d(y,z) = |x^2 - y^2| + |y^2 - z^2| + 1 \geq |x^2 - z^2| + 1 = d(x,z)\,.$$

b) $\bigl(-\sqrt{8}, 0\bigr) \cup (0,3)$.

c) Ne, saj je $d(1/2,-1/2) = 1$, medtem ko je $d(1/2,0) = 1/4$ in $d(0,-1/2) = 1/4$, torej je $d(1/2,-1/2) > d(1/2,0) + d(0,-1/2)$.

2. a) Funkcija mora interval $[a,\infty)$ preslikati samega vase, poleg tega pa mora obstajati tak $q < 1$, da je $|f'(x)| \leq q$ za vse $x \in [a,\infty)$. Funkcija f preslika interval $[a,\infty)$ na interval $(5, 5 + e^{-a}]$, torej ga preslika samega vase, če je $a \leq 5$. Nadalje iz $\sup_{x \geq a} |f'(x)| = e^{-a}$ sledi, da bo f skrčitev, če bo veljalo še $a > 0$. Sklep: f je skrčitev na $[a,\infty)$, če je $0 < a \leq 5$.

b) Rešitev je limita zaporedja približkov $x_1 = 5$, $x_{n+1} = f(x)$. Prvih nekaj ustrezno zaokroženih približkov je:

$$5\,,\ 5\text{'}006738\,,\ 5\text{'}006693\,,\ 5\text{'}006693\,,\ldots$$

To pomeni, da je ustrezno zaokrožena rešitev 5'00669.

3. Velja:

$$\begin{aligned}
\langle p, p_1 \rangle &= \int_0^1 (x^3 + ax^2 + bx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2}\,, \\
\langle p, p_2 \rangle &= \int_0^1 (x^4 + ax^3 + bx^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5} + \frac{a}{4} + \frac{b}{3}\,.
\end{aligned}$$

Oboje izenačimo z nič in po krajšem računu dobimo $a = -6/5$ in $b = 3/10$.

4. a) Ker je funkcija liha, bodo v Fourierovi vrsti nastopili samo členi s sinusi. Enaki so:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big[\cos\Big(\big(n-\tfrac{1}{2}\big)x\Big) - \cos\Big(\big(n+\tfrac{1}{2}\big)x\Big)\Big] = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\Big(\big(n-\tfrac{1}{2}\big)\pi\Big)}{n-\tfrac{1}{2}} - \frac{\sin\Big(\big(n+\tfrac{1}{2}\big)\pi\Big)}{n+\tfrac{1}{2}}\right] = \\
&= (-1)^{n+1}\,\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}\,.
\end{aligned}$$

Iskana Fourierova vrsta je torej:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}\sin(nx)\,.$$

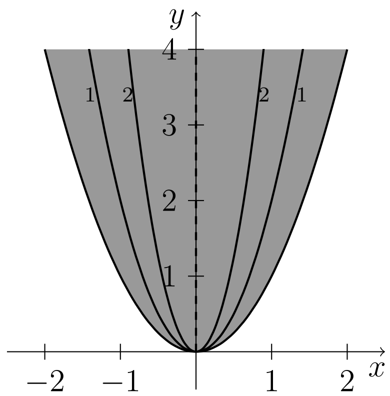
b) Po Parsevalovi enačbi je:

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8n}{\pi(4n^2-1)}\right)^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \pi\,.$$

Ko uredimo, dobimo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{64}\,.$$

5. Definicijsko območje je množica točk (x, y), za katere je $x \neq 0$ in $y \geq x^2$. Skica:



Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 26. 1. 2017

1. a) $T_4(x,y) = x + y^2 - \frac{1}{2}x^2 - xy^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + x^2y^2 - \frac{1}{2}y^4$.
b) $f_{xxyy}(0,0) = 4$.

2. Ker je dana množica poleg tega, da je omejena, tudi zaprta, sta maksimum in minimum nujno doseženа. Ker je funkcija diferenciabilna, se lahko to zgodi kvečjemu v stacionarni točki v notranjosti ali pa na robu. V notranjosti iz parcialnih odvodov:

$$f_x(x,y) = 4x + y\,, \qquad f_y(x,y) = x - 3$$

dobimo stacionarno točko $T_1(3,-12)$, kjer velja $f(3,-12) = 18$. Ta točka je res v notranjosti, ker za $x = 3$ in $y = -12$ velja $4x^2 + 2xy + y^2 = 108 \le 192$.

Na robu pa nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$L = 2x^2 + xy - 3y - \lambda(4x^2 + 2xy + y^2 - 192)$$

in odvajamo:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (4x+y)(1-2\lambda)\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = x - 3 - 2\lambda(x+y)\,.$$

Iz $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ dobimo, da mora biti bodisi $4x + y = 0$ bodisi $\lambda = \frac{1}{2}$. Pri prvi možnosti izrazimo $y = -4x$, vstavimo v stranski pogoj in dobimo kandidata $T_2(4,-16)$ in $T_3(-4,16)$. Ker je $x + y \ne 0$, obstaja tudi λ, za katerega je $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$. Pri $\lambda = \frac{1}{2}$ pa iz $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ dobimo $y = -3$, iz stranskega pogoja pa nato $4x^2 - 6x = 183$, od koder dobimo še točki $T_4\left(\frac{3+\sqrt{741}}{4}\right)$ in $T_5\left(\frac{3-\sqrt{741}}{4}\right)$. V vseh dobljenih točkah izračunamo funkcijske vrednosti:

$$f(4,-16) = 16\,, \qquad f(-4,16) = -80\,,$$

$$f\left(\frac{3+\sqrt{741}}{4}, -3\right) = f\left(\frac{3-\sqrt{741}}{4}, -3\right) = \frac{201}{2} = 100\text{'}5\,.$$

Sledi:

$$\min_{4x^2+2xy+y^2=192} f(x,y) = f(-4,16) = -80\,,$$

$$\max_{4x^2+2xy+y^2=192} f(x,y) = f\left(\frac{3+\sqrt{741}}{4}, -3\right) = f\left(\frac{3-\sqrt{741}}{4}, -3\right) = \frac{201}{2}\,.$$

3. a) Uganemo rešitev $y = 0$. Da je ena sama, se da utemeljiti na vsaj tri načine:

- Ker je $F_y(0,y) = 3 + 2\cos y \ge 1$, je funkcija F pri $x = 0$ strogo naraščajoča v y.

- Enačbo prepišemo v $2\sin y = -3y$. Za $|y| \le \pi/2$ je funkcija $y \mapsto 2\sin y$ strogo naraščajoča, funkcija $y \mapsto -3y$ pa strogo padajoča, zato je rešitev na tem intervalu res ena sama. Za $|y| > \pi/2$ pa je $2|\sin y| \le 2$, medtem ko je $|3y| > 3\pi/2 > 2$, torej tam ni rešitve.
- Enačbo prepišemo v $y = -\frac{2}{3}\sin y$. Ker je funkcija $y \mapsto -\frac{2}{3}\sin y$ na celi realni osi skrčitev, ima po Banachovem skrčitvenem načelu največ eno negibno točko.

b) Pišimo $F(x,y) = 3y + 2\sin(x+y)$. Velja:

$$F_x(x,y) = 2\cos(x+y)\,, \qquad F_y(x,y) = 3 + 2\cos(x+y)\,.$$

Ker je $F_y(0,0) = 5$, po izreku o implicitni funkciji obstaja taka funkcija f, da v neki okolici točke $(0,0)$ velja, da je $F(x,y) = 0$ natanko tedaj, ko je $y = f(x)$.

c) Velja $f'(0) = -\dfrac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)} = -\dfrac{2}{5}$. Iskana približna rešitev je:

$$y = f(0\text{'}1) \approx f(0) + f'(0)(0\text{'}1 - 0) \doteq -0\text{'}04\,.$$

Točen rezultat: $-0\text{'}03998559$.

4. $y = 36, \quad y' = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2x}} = \dfrac{3}{4}, \quad y'' = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2x\sqrt{2x}} = -\dfrac{1}{64},$
$\vec{n} = (-3/5, 4/5), \quad \kappa = -1/125, \quad \frac{1}{\kappa}\vec{n} = (75, -100).$
Pritisnjena krožnica: $(X-99)^2 + (Y+64)^2 = 15625$.

5. Velja:

$$\vec{r}_u = \begin{bmatrix} -2\cos u + 10\sin u + 14\cos u\sin v \\ 4\cos u - 20\sin u - 28\cos u\sin v \\ 5\cos u + 20\sin u + 28\cos u\sin v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix},$$
$$\vec{r}_v = \begin{bmatrix} -2\cos v + 19\sin v + 14\sin u\cos v \\ +7\cos v - 38\sin v - 28\sin u\cos v \\ +8\cos v + 38\sin v + 28\sin u\cos v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Od tod izračunamo koeficiente prve fundamentalne forme, iz njih pa koeficient pri diferencialu ploščine:

$$E = 45\,, \quad F = 72\,, \quad G = 117\,, \quad \sqrt{EG - F^2} = 9\,.$$

Nadalje iz vektorskega produkta $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$ in drugih parcialnih odvodov:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{uu} &= \begin{bmatrix} 2\sin u + 10\cos u - 14\sin u \sin v \\ -4\sin u - 20\cos u + 28\sin u \sin v \\ -5\sin u + 20\cos u - 28\sin u \sin v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -20 \\ 20 \end{bmatrix}, \\
\vec{r}_{uv} &= \begin{bmatrix} 14\cos u \cos v \\ -28\cos u \cos v \\ 28\cos u \cos v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -28 \\ 28 \end{bmatrix}, \\
\vec{r}_{vv} &= \begin{bmatrix} 2\sin v + 19\cos v - 14\sin u \sin v \\ -7\sin v - 38\cos v + 28\sin u \sin v \\ -8\sin v + 38\cos v - 28\sin u \sin v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ -38 \\ 38 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dobimo še koeficiente druge fundamentalne forme:

$$L = -30\,, \quad M = -42\,, \quad N = -57\,.$$

Iz:

$$\det\left(\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\right) = 81\,\lambda^2 + 27\,\lambda - 54 = 27(\lambda + 1)(3\lambda - 2)$$

dobimo glavni ukrivljenosti $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 2/3$. Ker sta nasprotnih predznakov, je točka hiperbolična. Glede na to ima ploskev drugega reda, ki najbolje aproksimira ploskev, v primernih ortonormiranih koordinatah (ξ, η, ζ) z isto orientacijo enačbo $\zeta = -\frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{3}\eta^2$. Končno za glavni smeri nastavimo enačbo:

$$\left(\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0\,.$$

Pripadajoča glavna smer je smer vektorjev $\alpha\vec{r}_u + \beta\vec{r}_v$.

- Za $\lambda = -1$ dobimo $\alpha = -2\beta$ in glavno smer, določeno z vektorjem $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
- Za $\lambda = 2/3$ dobimo $2\alpha = -3\beta$ in glavno smer, določeno z vektorjem $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 18. 4. 2017

1. Označimo dani integral z $F(a)$. Po odvajanju dobimo, da za $a > 0$ velja:

$$\begin{aligned}F'(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2ax^2}{(1+x^2)(1+a^2x^2)}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2a}{a^2-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+a^2x^2}\right]\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2a}{a^2-1}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{a}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \\ &= \frac{2\pi}{a+1}\end{aligned}$$

(predpostavka $a > 0$ je potrebna za veljavnost zadnje enakosti). Nazaj integriramo in dobimo $F(a) = 2\pi\ln(a+1) + C$. Zaradi zveznosti to velja tudi za $a = 0$, torej je $F(0) = C$. Neposredno iz definicije pa dobimo $F(0) = 0$, zato je $C = 0$. Torej $a \geq 0$ velja $F(a) = 2\pi\ln(a+1)$. Iz definicije pa vidimo tudi, da je funkcija F soda, torej velja $F(a) = 2\pi\ln\big(|a|+1\big)$.

2. Ker je integrand za vse a omejen na $[0,1]$, je obstoj danega integrala ekvivalenten obstoju ustreznega integrala v mejah od 1 do ∞. Za $a > 1/2$ integral obstaja, ker je $\frac{1}{(1+x^2)^a} \leq \frac{1}{x^{2a}}$, za integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^{2a}}\,\mathrm{d}x$ pa je znano, da za $a > 1/2$ obstaja. Za $a \leq 1/2$ pa dani integral ne obstaja, ker za $x \geq 1$ velja $1 + x^2 \leq 2x^2$ in torej $\frac{1}{(1+x^2)^a} \geq \frac{1}{2^a x^{2a}} > 0$, za integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^{2a}}$ pa je znano, da za $a < 1/2$ ne obstaja.

3. Dani integral je enak:

$$\int_0^\infty \int_{x/2}^{2x} e^{-x-y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(e^{-3x/2} - e^{-3x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,.$$

4. Z uvedbo sferičnih koordinat:

$$x = r\cos\theta\cos\varphi\,, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi\,, \quad z = r\sin\theta\,; \quad J = r^2\cos\theta$$

dobimo, da je dani integral enak:

$$J := \iiint\limits_{\substack{b<r<a \\ -\pi/2<\theta<\pi/2 \\ 0<\varphi<2\pi}} \frac{\cos^5\theta\sin^2\theta\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = J_1 J_2 J_3\,,$$

kjer je:

$$J_1 = \int_b^a \frac{\mathrm{d}r}{r} = \ln\frac{a}{b}\,,$$

$$J_2 = \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 4\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 2\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)} = \frac{\pi}{4}\,,$$

$$J_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2}\cos^5\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{B}\left(3, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(3)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{16}{105}\,.$$

Sledi $J = \dfrac{4\pi}{105} \ln \dfrac{a}{b}$.
b) Integral ne obstaja, ker ne obstaja limita, ko gre b proti nič.

5. Označimo koordinate težišča z x^*, y^* in z^*. Najprej opazimo, da je telo simetrično glede na ravnino xz in je zato $y^* = 0$. Izračunajmo maso:

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^1 \int_0^{2z} \int_{-\sqrt{2zx-x^2}}^{\sqrt{2zx-x^2}} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z = \\
&= 2 \int_0^1 \int_0^{2z} \sqrt{2zx - x^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z = \\
&= 8 \int_0^1 \int_0^1 z^2 t^{1/2} (1-t)^{1/2} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z = \\
&= 8 \, \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \int_0^1 z^2 \, \mathrm{d}z = \\
&= \frac{\pi}{3} \, .
\end{aligned}
$$

Preostali dve koordinati sta enaki:

$$
\begin{aligned}
x^* &= \frac{1}{m} \int_0^1 \int_0^{2z} \int_{-\sqrt{2zx-x^2}}^{\sqrt{2zx-x^2}} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z = \\
&= \frac{2}{m} \int_0^1 \int_0^{2z} x\sqrt{2zx - x^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z = \\
&= \frac{16}{m} \int_0^1 \int_0^1 z^3 t^{3/2} (1-t)^{1/2} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z = \\
&= \frac{16}{m} \mathrm{B}\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \int_0^1 z^3 \, \mathrm{d}z = \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

in

$$
\begin{aligned}
z^* &= \frac{1}{m} \int_0^1 \int_0^{2z} \int_{-\sqrt{2zx-x^2}}^{\sqrt{2zx-x^2}} z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z = \\
&= \frac{2}{m} \int_0^1 \int_0^{2z} z\sqrt{2zx - x^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z = \\
&= \frac{8}{m} \int_0^1 \int_0^1 z^3 t^{1/2} (1-t)^{1/2} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z = \\
&= \frac{8}{m} \mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \int_0^1 z^3 \, \mathrm{d}z = \\
&= \frac{3}{4} \, .
\end{aligned}
$$

Rešitve četrtega kolokvija iz matematike 2

1. Iz:

$$\operatorname{rot}\vec{R} = \begin{bmatrix} (cz - by)x\,e^{-x} \\ (ax + x + cxz - cz)y\,e^{-x} \\ (by - bxy - ax - x)z\,e^{-x} \end{bmatrix}$$

ugotovimo, da je polje potencialno natanko tedaj, ko je $a = -1$ in $b = c = 0$. Iz nedoločenih integralov:

$$\int (1 - x)yz\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = xyz\,e^{-x} + C_1(y, z)\,,$$

$$\int xz\,e^{-x}\,\mathrm{d}y = xyz\,e^{-x} + C_2(x, y)\,,$$

$$\int xy\,e^{-x}\,\mathrm{d}z = xyz\,e^{-x} + C_3(x, y)$$

dobimo, da je iskani potencial skalarno polje $u = xyz\,e^{-x} + C$.

2. *Prvi način*: neposredno. Rob valja razdelimo na spodnjo ploskev P_1, zgornjo ploskev P_2 in plašč P_3. Vse troje parametriziramo:

$$\begin{array}{lll} P_1: & x = \rho\cos\varphi\,,\ y = \rho\sin\varphi\,,\ z = 1 & ;\ \ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi \\ P_2: & x = \rho\cos\varphi\,,\ y = \rho\sin\varphi\,,\ z = 2 & ;\ \ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi \\ P_3: & x = \cos\varphi\,,\ y = \sin\varphi\,,\ z = z & ;\ \ 1 \le z \le 2,\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{array}$$

Pri P_1 in P_2 velja:

$$\vec{r}_\rho = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\quad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}\ ;\quad \vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix}\,.$$

Parametrizacija ploskve P_1 je torej nasprotna orientaciji roba valja, parametrizacija ploskve P_2 pa je skladna z orientacijo roba valja. Pri P_3 pa velja:

$$\vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\quad \vec{r}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ ;\quad \vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

in orientacija je spet skladna z orientacijo roba valja.

Če ploskve P_1, P_2 in P_3 orientiramo skladno s parametrizacijami, velja:

$$\iint_{P_1} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle\,\mathrm{d}P = \iint_{\substack{0\le\rho\le1 \\ 0\le\varphi<2\pi}} \left\langle \begin{bmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix} \right\rangle = \iint_{\substack{0\le\rho\le1 \\ 0\le\varphi<2\pi}} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \pi\,,$$

$$\iint_{P_2} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle\,\mathrm{d}P = \iint_{\substack{0\le\rho\le1 \\ 0\le\varphi<2\pi}} \left\langle \begin{bmatrix} -2\rho\sin\varphi \\ 2\rho\cos\varphi \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix} \right\rangle = \iint_{\substack{0\le\rho\le1 \\ 0\le\varphi<2\pi}} 4\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi\,,$$

$$\iint_{P_3} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle\,\mathrm{d}P = \iint_{\substack{0\le\varphi<2\pi \\ 1\le z\le2}} \left\langle \begin{bmatrix} -z\sin\varphi \\ z\rho\cos\varphi \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0\,.$$

Iskani integral le torej enak:

$$-\iint_{P_1} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P + \iint_{P_2} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P + \iint_{P_3} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \, \mathrm{d}P = 3\pi \, .$$

Drugi način: uporabimo Gaussov izrek – iskani integral je enak:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{R} \, \mathrm{d}V = \iiint_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ 1 \leq z \leq 2}} 2z \, \mathrm{d}z \, ,$$

kjer je V poln valj. Z uporabo cilindričnih koordinat:

$$\begin{gathered} x = \rho \cos \varphi \, , \quad y = \rho \sin \varphi \, , \quad z = z \, , \quad J = \rho \quad ; \\ 0 \leq \rho \leq 1 \, , \; 0 \leq \varphi < 2\pi \, , \; 1 \leq z \leq 2 \end{gathered}$$

dobimo, da je iskani integral enak:

$$\iiint_{\substack{0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 1 \leq z \leq 2}} 2\rho z \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}z = 3\pi \, ,$$

kar je isto kot prej.

3. Ena od rešitev je preslikava $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, kjer je:

$$f_1(z) = z - i \, , \quad f_2(z) = \frac{1}{z} \, , \quad f_3(z) = z + \frac{1}{2} \, .$$

Dobimo:

$$f(z) = \frac{1}{z - i} + \frac{1}{2} = \frac{2 - i + z}{2(z - i)} \, .$$

4. a) Z uvedbo nove spremenljivke $w = z + i$, $z = w - i$ dobimo:

$$\begin{aligned} f(z) = g(w) &= \frac{1}{(z+i)(z-3i)} = \\ &= \frac{1}{w(w-4i)} = \\ &= \frac{i}{4w} \frac{1}{1 + \frac{i}{4} w} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{i}{4} \right)^{n+1} w^{n-1} = \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{i}{4} \right)^{k+2} w^k = \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{i}{4} \right)^{k+2} (z+i)^k \, . \end{aligned}$$

Vrsta konvergira do prve singularnosti. Ker ima funkcija singularnosti $-i$ in $3i$, je konvergenčni polmer enak 4. A za $|z + i| = 4$ so vsi členi vrste po absolutni vrednosti enaki $1/16$, torej ne gredo proti nič, kar pomeni, da vrsta divergira. Vrsta torej konvergira natanko tedaj, ko je $0 < |z + i| < 4$.

b) Gre za pol prve stopnje, residuum pa je enak $i/4$.

c) V točki 0 ni singularnosti, najbližja je pri $-i$. Laurentova vrsta torej konvergira na odprtem enotskem krogu in to je maksimalni odprt krog, na katerem konvergira.

5. Integrand:

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 4}$$

ima dve singularnosti, $2i$ in $-2i$. A integracijska pot obkroži le singularnost $2i$, in sicer enkrat v negativni smeri. Iskani integral je torej enak:

$$-2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i) = -2\pi i \lim_{z \to 2i} (z - 2i)\, f(z) = -\frac{\pi \cos(2i)}{2} = -\frac{\pi \operatorname{ch} 2}{2} = -\frac{\pi\left(e^2 - e^{-2}\right)}{4} =$$
$$= -5\text{˙}697\,.$$

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 21. 8. 2017

1. a) Iz:
$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$
dobimo, da je $f'(x) \ge 0$ in $f'(x) < 1$, brž ko je $x < -1$ ali pa $x > 1$. Ustrezni poltraki so torej kvečjemu $[a, \infty)$, kjer je $a > 1$. Toda f mora poltrak $[a, \infty)$ tudi preslikati samega vase, kar je res, če je $f(a) \ge a$. To bo vsekakor res za $0 \le a \le 5$: takrat bo $f(a) \ge 5 \ge a$. Ustrezen je torej kateri koli poltrak $[a, \infty)$, kjer je $1 < a \le 5$.

b) Iz začetnega približka $x_1 = 5$ dobimo naslednje zaporedje približkov:
$$5\,,\ 7{\cdot}746802\,,\ 7{\cdot}884841\,,\ 7{\cdot}889288\,,\ 7{\cdot}889429\,,\ 7{\cdot}889434\,,\ 7{\cdot}889434\,, \ldots$$
Enakost zadnjih dveh zaokroženih vrednosti pomeni, da je v resnici $|x_7 - x_6| < 10^{-6}$. Na intervalu $[5, \infty)$ velja $f'(x) \le 1/13$. Če je torej x iskana rešitev, to pomeni, da je $|x - x_7| \le \frac{1}{12}|x_7 - x_6| < 8{\cdot}4 \cdot 10^{-8}$. Poleg tega, ker je odvod pozitiven in $x_2 > x_1$, zaporedje približkov narašča. Sledi ocena:
$$7{\cdot}889434 - 5 \cdot 10^{-7} \le x \le 7{\cdot}889434 + 5 \cdot 10^{-7} + 8{\cdot}4 \cdot 10^{-8}$$
oziroma:
$$7{\cdot}889433500 \le x \le 7{\cdot}889434584\,,$$
kar pomeni, da rešitev, zaokrožena na pet decimalk, zagotovo pride $7{\cdot}88943$.

2. Dana krivulja je, poleg tega, da je omejena, tudi zaprta množica, torej so globalni ekstremi doseženi v stacionarnih točkah, te pa lahko dobimo s pomočjo Lagrangeove metode. Nastavimo:
$$L = 2x^3 + 3xy^2 - \lambda(x^4 + x^2y^2 + y^4 - 1)$$
in odvajamo:
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 6x^2 + 3y^2 - \lambda(4x^3 + 2xy^2)\,,$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 6xy - \lambda(2x^2y + 4y^3)\,.$$
Izenačimo z nič in opazimo, da lahko iz prve enačbe izpostavimo $2x^2 + y^2$, ki na dani krivulji ni nikoli enak nič. Dobimo $\lambda = 3/(2x)$. Vstavimo v drugo enačbo, uredimo in dobimo $x^2 = 2y^2$. Vstavimo še v stranski pogoj in dobimo $7y^4 = 1$. Dobimo štiri možne rešitve:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{7}},\ y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{7}}: && f(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}, && \text{globalni maksimum}\,,\\
x &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{7}},\ y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{7}}: && f(x,y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}, && \text{globalni minimum}\,,\\
x &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{7}},\ y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{7}}: && f(x,y) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}, && \text{globalni minumum}\,,\\
x &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{7}},\ y = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{7}}: && f(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}, && \text{globalni maksimum}\,.
\end{aligned}$$

3. Najprej iz enačbe ploskve dobimo $z = 1$. Ploskev lahko zapišemo v eksplicitni obliki:

$$z = \frac{4}{x^2 y^2} \,.$$

Iz prvih parcialnih odvodov:

$$z_x = -\frac{8}{x^3 y^2} = -2 \,, \qquad z_y = -\frac{8}{x^2 y^3} = -1$$

dobimo enačbo tangentne ravnine:

$$2X + Y + Z = 5 \,.$$

Za izračun ukrivljenosti najprej potrebujemo:

$$EG - F^2 = 1 + z_x^2 + z_y^2 = 6 \,.$$

Nato izračunamo druge parcialne odvode:

$$z_{xx} = \frac{24}{x^4 y^2} = 6 \,, \qquad z_{xy} = \frac{16}{x^3 y^3} = 2 \,, \qquad z_{yy} = \frac{24}{x^2 y^4} = \frac{3}{2}$$

in iz njih koeficiente druge fundamentalne forme:

$$L = \sqrt{6} \,, \qquad M = \frac{\sqrt{6}}{3} \,, \qquad N = \frac{\sqrt{6}}{4} \,.$$

Gaussova ukrivljenost je enaka:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{5}{36} \,.$$

4. Ravnino parametriziramo: $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \frac{1}{c}(p - ax - by) \end{bmatrix}$ in izračunamo:

$$\vec{r}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/c \end{bmatrix} \,, \qquad \vec{r}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -b/c \end{bmatrix} \,, \qquad \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{bmatrix} a/c \\ b/c \\ 1 \end{bmatrix} \,.$$

Ker ima vektorski produkt $\vec{r}_x \times \vec{r}_y$ zadnjo komponento pozitivno, se njegova smer ujema z izbrano smerjo pretoka, zato je le-ta enak:

$$\Phi := \iint_{\mathbb{R}^2} \left\langle \begin{bmatrix} x\, e^{-x^2-y^2} \\ y\, e^{-x^2-y^2} \\ \frac{1}{c}\,(p - ax - by)\, e^{-x^2-y^2} \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} a/c \\ b/c \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{p}{c} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \,.$$

Z uvedbo polarnih koordinat dobimo:

$$\Phi = \frac{p}{c} \iint_{\substack{r>0 \\ 0<\varphi<2\pi}} r\, e^{-r^2} \, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi p}{c} \int_0^\infty r\, e^{-r^2} \, \mathrm{d}r = \frac{\pi p}{c} \,.$$

5. Iz razcepa $z^3 - 8 = (z-2)(z^2+2z+4) = (z-2)\big(z+1-\sqrt{3}\,i\big)\big(z+1-\sqrt{3}\,i\big)$ sledi, da ima integrand $f(z) = \frac{z}{z^3-8}$ tri pole prve stopnje, in sicer pri 2, $-1+\sqrt{3}\,i$ in $-1-\sqrt{3}\,i$. Integracijska krivulja obkroži le pola $-1+\sqrt{3}\,i$ in $-1-\sqrt{3}\,i$, in sicer enkrat v pozitivni smeri. Torej velja:

$$
\begin{aligned}
&\oint_K \frac{z}{z^3-8}\,\mathrm{d}z = \\
&\quad = 2\pi i\Big[\mathrm{Res}\big(f, -1+\sqrt{3}\,i\big) + \mathrm{Res}\big(f, -1-\sqrt{3}\,i\big)\Big] = \\
&\quad = 2\pi i\left[\left.\frac{z}{(z-2)\big(z+1-\sqrt{3}\,i\big)}\right|_{z=-1+\sqrt{3}\,i} + \left.\frac{z}{(z-2)\big(z+1+\sqrt{3}\,i\big)}\right|_{z=-1-\sqrt{3}\,i}\right] \\
&\quad = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{-3+\sqrt{3}\,i} - \frac{1+\sqrt{3}\,i}{3+\sqrt{3}\,i}\right) = \\
&\quad = -\frac{\pi i}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 4. 9. 2017

1. Notranjost: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right) \cup \cdots$.
Rob: $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, 0\right\}$.

2. Opazimo, da je funkcija f soda, zato so vsi členi s sinusi enaki nič in razvoj se tako ujema s kosinusno Fourierovo vrsto. Torej je enak:

$$\bar{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\,,$$

kjer je:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,, \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi} \left(\sin \frac{2n\pi}{3} - \sin \frac{n\pi}{3} \right).
\end{aligned}$$

Izračunamo koeficiente od a_1 do a_6 in dobimo:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cos(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cos(4x) + \cdots$$

3. Hiperboloid parametriziramo kar eksplicitno:

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

in izračunamo ploščinski element:

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2 - 1}\,.$$

Upoštevajoč, da je lahko z pozitiven ali negativen, nastavimo:

$$\begin{aligned}
m &= 2 \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{1}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= 2 \iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{1}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

Z uporabo polarnih koordinat:

$$x = r \cos\varphi\,, \quad y = r \sin\varphi\,, \quad J = r$$

dobimo:

$$m = 2 \int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{r\sqrt{r^2 - 1}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{r\sqrt{r^2 - 1}}\,\mathrm{d}r\,.$$

S substitucijo $t = \sqrt{r^2 - 1}$ dobimo:

$$m = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = 2\pi^2\,.$$

4. a) Iz:

$$\operatorname{rot}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{1}{(x+y+z)^2}\begin{bmatrix} (b-1-c)x \\ (3-a)x+(2-c)y+(2-c)z \\ (a-3)x+(b-3)y+(b-3)z \end{bmatrix}$$

dobimo, da je dano polje potencialno pri $a = b = 3$ in $c = 2$.

b) Integracija komponent nam da:

$$\begin{aligned}
\int X\,\mathrm{d}x &= \int\left(3 - \frac{2(y+z)}{x+y+z} + 2\ln(x+y+z)\right)\mathrm{d}x = \\
&= 2x\ln(x+y+z) + x - 2y - 2z + C_1(y,z)\,, \\
\int Y\,\mathrm{d}y &= \int\left(1 + \frac{2x}{x+y+z}\right)\mathrm{d}y = \\
&= y + 2x\ln(x+y+z) + C_2(x,z)\,, \\
\int Z\,\mathrm{d}z &= 2x\ln(x+y+z) + C_3(x,y)\,.
\end{aligned}$$

Nedoločeni integrali pridejo skupaj, če je $C_1(y,z) = 3y + 2z$, $C_2(x,z) = x$ in $C_3(x,y) = x + y$. Možni potenciali danega vektorskega polja so torej:

$$u = 2x\ln(x+y+z) + x + y + C\,.$$

5. Iz $z^2 - 4iz - 3 = (z-i)(z-3i)$ dobimo, da ima integrand dva pola, i in $3i$, oba prve stopnje. Torej je integral enak:

$$\begin{aligned}
2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{z}{z^2-4iz-3}\,, z = i\right) &= 2\pi i\lim_{z\to i}\left[(z-i)\,\frac{z}{z^2-4iz-3}\right] = \\
&= 2\pi i\,\frac{z}{z-3i}\bigg|_{z=i} = \\
&= -\pi i\,.
\end{aligned}$$

2015/16

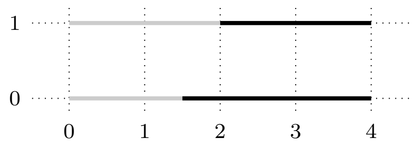
Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 17. 11. 2015

Praktična matematika

1. Točka $(x, 0)$ pripada iskani krogli natanko tedaj, ko je $|x-3| \leq 3/2$. V okviru realnih števil je ta neenačba izpolnjena natanko tedaj, ko je $3/2 \leq x \leq 9/2$, a le za $3/2 \leq x \leq 4$ se točka dejansko nahaja v dani množici. Točka $(x, 1)$ pa pripada krogli natanko tedaj, ko je $1 + \frac{1}{2}|x-3| \leq 3/2$, kar je natanko tedaj, ko je $|x-3| \leq 1$, to pa je natanko tedaj, ko je $2 \leq x \leq 4$; vse take točke so v dani množici. Iskana krogla je torej množica:

$$\big([3/2, 4] \times \{0\}\big) \cup \big([2, 4] \cup \{1\}\big)\,.$$

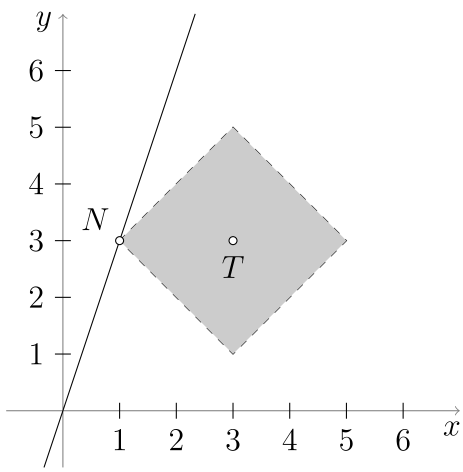
Slika:



2. Velja:

$$d_1\big((x, 3x), (3, 3)\big) = |x-3| + |3x-3| = \begin{cases} 6-4x & ;\ x \leq 1 \\ 2x & ;\ 1 \leq x \leq 2 \\ 4x-6 & ;\ x \geq 2 \end{cases},$$

kar je minimalno pri $x = 1$. Iskana točka je torej $N(1, 3)$. Slika:



3. Ker je $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ za vse x, je tudi $f(x) > 4\pi$. Če torej postavimo $a = 4\pi$, f preslika interval $[4\pi, \infty)$ vase. Za $x \geq 4\pi$ velja:

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}\,, \qquad |f'(x)| \leq \frac{2}{1+16\pi^2} < 0\text{'}013\,,$$

torej je f na intervalu $[4\pi, \infty]$ skrčitev. Ta interval je zaprta podmnožica realne osi, ki je poln metrični prostor, zato je poln metrični prostor. Po Banachovem skrčitvenem načelu ima enačba $f(x) = x$ na tem intervalu natanko eno rešitev, ki jo dobimo z iteracijo. Poleg tega, ker je odvod negativen, iskana rešitev vedno leži med dvema zaporednima približkoma. Za začetni približek $x_1 = 4\pi$ dobimo naslednje zaporedje približkov:

$$12\text{'}56637\,,\ 12\text{'}72519\,,\ 12\text{'}72322\,,\ 12\text{'}72324\,,$$

torej je iskana rešitev v zahtevani natančnosti enaka 12'7232.

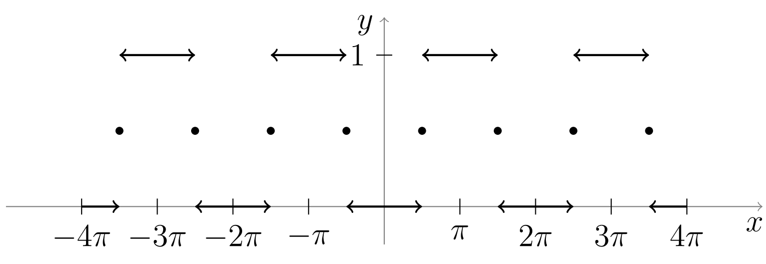
Opomba. Za $x < 4\pi$ dana enačba nima rešitve, ker tudi za te x velja $f(x) > 4\pi$.

4. a) Koeficienti:

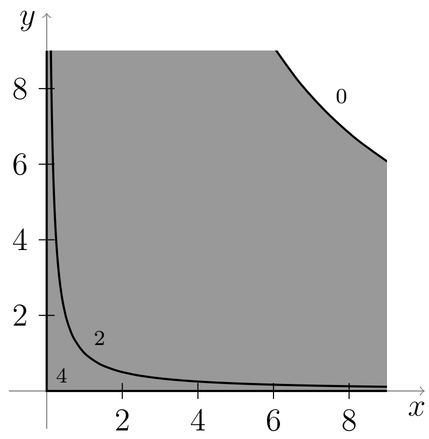
$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}x = 1\,,\\
a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\,,\\
a_2 &= \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(2x)\,\mathrm{d}x = 0\,,\\
a_3 &= \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3\pi}\,.
\end{aligned}$$

Ustrezni del Fourierove vrste je torej $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi}\cos x + \dfrac{2}{3\pi}\cos(3x)$.

b) Graf:



5. Funkcija je definirana, če je $x > 0$, $y > 0$ in $4 - \ln x - \ln y \geq 0$, t. j. $xy \leq e^4$. Nivojnica za $f(x, y) = z$ je krivulja $xy = e^{4-z^2}$. Slika:



6. Funkcija f je zlepek funkcij:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 4 - x^2 - y^2 \qquad && \text{za} \quad (x,y) \in D_1 = \{(x,y)\ ;\ x^2+y^2 < r^2\}\,, \\ f_2(x,y) &= x^2 + y^2 && \text{za} \quad (x,y) \in D_2 = \{(x,y)\ ;\ x^2+y^2 \geq r^2\}\,, \end{aligned}$$

ki sta naravno definirani na celi ravnini in sta povsod tam zvezni, saj sta elementarni.

Vzemimo točko (a,b). Funkcija f je zagotovo zvezna za $a^2+b^2 < r^2$: taka točka pripada D_1 in je zunaj D_2, zato je dovolj preveriti, da je $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f_1(x,y) = f_1(a,b)$, to pa sledi iz zveznosti funkcije f_1. Podobno je f zvezna za $a^2+b^2 > r^2$, saj tedaj dana točka pripada D_2 in je zunaj D_1.

Preostanejo le še točke na mejni krožnici, t. j. $a^2+b^2 = r^2$. V taki točki bo f zvezna natanko tedaj, ko bo veljalo:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in D_1}} f_1(x,y) = f_2(a,b) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in D_2}} f_2(x,y)\,.$$

A zaradi zveznosti funkcij f_1 in f_2, ki ju lahko gledamo na celi ravnini, bo f zvezna natanko tedaj, ko bo $f_1(a,b) = f_2(a,b)$, torej $4 - a^2 - b^2 = a^2 + b^2$. To pa velja natanko tedaj, ko je $4 - r^2 = r^2$, torej $r = \sqrt{2}$. Za to (in samo za to) vrednost je funkcija f zvezna na celi ravnini.

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 26. 2. 2016

Praktična matematika

1. Razvijmo imenovalec v Taylorjevo vrsto:

$$1-2xy-\cos(x+2y) = 1-2xy-1+\frac{(x+2y)^2}{2}-\frac{(x+2y)^2}{24}+\cdots =$$
$$= \frac{x^2+4y^2}{2}-\frac{(x+2y)^4}{24}+\cdots$$

Pišimo $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ in vstavimo v limito. Dobimo:

$$\frac{r^2(\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi)}{\frac{1}{2}r^2(\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi)-\frac{1}{24}r^3(\cos\varphi+\sin\varphi)^4+\cdots}$$

oziroma:

$$\frac{2}{1-\frac{1}{12}r^2\frac{(\cos\varphi+\sin\varphi)^4}{1+3\sin^2\varphi}+\cdots},$$

od koder sledi, da je iskana limita enaka 2.

2. Nalogo lahko prevedemo na iskanje minimuma funkcije $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ pri pogoju $\frac{1}{x}+\frac{8}{y}+\frac{64}{z} = 1$. Nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$L = x^2+y^2+z^2-\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{8}{y}+\frac{64}{z}\right).$$

Iz parcialnih odvodov dobimo enačbe:

$$2x+\frac{\lambda}{x^2} = 0\,, \qquad 2y+\frac{8\lambda}{y^2} = 0\,, \qquad 2z+\frac{64\lambda}{z^2} = 0\,,$$

od koder dobimo:

$$-\frac{\lambda}{2} = x^3 = \frac{y^3}{8} = \frac{z^3}{64}\,,$$

od koder sledi $y = 2x$, $z = 4x$. Ko vstavimo v pogoj, dobimo $x = 21$, $y = 42$, $z = 84$.

3. a) $J\vec{F} = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} & 1 \\ 3+2x(1+z) & 2+2y(1+z) & 1+x^2+y^2 \end{bmatrix}$.

b) in c) Uporabimo izrek o implicitni funkciji. V podani točki velja:

$$J\vec{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{x,y} & J_z \end{bmatrix}\,,$$

kjer je:

$$J_{x,y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad J_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Rešitev sistema lahko lokalno izrazimo v obliki $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{G}(z)$, ker je matrika $J_{x,y}$ obrnljiva. Jacobijeva matrika iz parcialnih odvodov funkcije $\vec{G}$ je v tej podani točki enaka:

$$J\vec{G} = -J_{x,y}^{-1} J_z = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} .$$

d) $x \approx -0˙1, \quad y \approx -0˙2$.
Točen rezultat: $x \doteq 0˙1051819, \quad y \doteq -0˙2105424$.

4. a) Ukrivljenost je enaka:

$$\kappa = \frac{12x^2}{(1+16x^6)^{3/2}} ,$$

je nenegativna in gre proti nič, brž ko gre x proti plus ali minus neskončno. Maksimum je torej dosežen v stacionarni točki. Odvajamo:

$$\frac{d\kappa}{dx} = \frac{24x(1-56x^6)}{(1+16x^6)^{5/2}}$$

in dobimo, da je ukrivljenost največja pri $x = \pm 1/\sqrt[6]{56}$. Tam je enaka $\frac{2}{9}\, 7^{7/6}$, krivinski polmer pa je enak $\frac{9}{2}\, 7^{-7/6} \doteq 0˙465$.

5. Iz prvih parcialnih odvodov:

$$\vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -(1+z^2)\sin\varphi \\ (1+2z^2)\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \vec{r}_z = \begin{bmatrix} 2z\cos\varphi \\ 4z\sin\varphi \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

dobimo koeficiente prve fundamentalne forme:

$$E = \frac{13}{2} , \quad F = 4 , \quad G = 11$$

Izračunamo še:

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{111/2} , \qquad \vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Nadalje iz drugih parcialnih odvodov:

$$\vec{r}_{\varphi\varphi} = \begin{bmatrix} -(1+z^2)\cos\varphi \\ -(1+2z^2)\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{r}_{\varphi z} = \begin{bmatrix} -2z\sin\varphi \\ 4z\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\vec{r}_{zz} = \begin{bmatrix} 2\cos\varphi \\ 4\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo koeficiente druge fundamentalne forme:

$$L = -6\sqrt{2}\,, \quad M = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{111}}\,, \quad N = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{111}}\,.$$

Končno iz:

$$\det\left(\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left[97\,\lambda^2 + \frac{49\sqrt{2}}{\sqrt{111}}\,\lambda - \frac{170}{111}\right]$$

dobimo glavni ukrivljenosti $\lambda_{1,2} = \dfrac{-49 \pm \sqrt{35381}}{97\sqrt{222}}$ oziroma $\lambda_1 \doteq 0\dot{}0962$ in $\lambda_2 \doteq -0\dot{}1641$.

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 19. 4. 2016

1. Oglejmo si funkcijo:

$$f_a(x) = \frac{1 + x^a}{1 + x^{3a}}\,.$$

Za $a \le 0$ je $\lim_{x\to\infty} f_a(x) = 1$, zato integral ne obstaja. Za $a > 0$ pa je funkcija na intervalu $[0,1]$ zvezna in omejena, zato integral obstaja natanko tedaj, ko obstaja $\int_1^\infty f_a(x)\,\mathrm{d}x$. Če je $a > 0$, se funkcija f_a za velike x obnaša tako kot x^{-2a}, zato domnevamo, da integral obstaja za $a > 1/2$. In res, za $0 < a \le 1/2$ in $x \ge 1$ omejimo:

$$f_a(x) > \frac{x^a}{x^{3a} + x^{3a}} = \frac{1}{2x^{2a}}$$

in integral slednje funkcije ne obstaja. Za $a > 1/2$ in $x \ge 1$ pa omejimo:

$$|f_a(x)| \le \frac{1}{x^{3a}} + \frac{1}{x^{2a}}$$

in integrala obeh funkcij res obstajata. Sklep: dani integral obstaja natanko za $a \ge 1/2$.

2. Označimo:

$$f(a,x) := \frac{1 - e^{-ax^4}}{x^4}\,, \qquad F(a) := \int_0^\infty f(a,x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Najprej opazimo, da obstaja integral $F(1)$. Funkcija $x \mapsto f(1,x)$ je namreč zvezna na $(0,\infty)$ in ima limito, ko gre x proti nič, zato obstaja integral $\int_0^1 f(1,x)\,\mathrm{d}x$. Poleg tega pa je tudi $|f(1,x)| \le 1/x^4$, zato obstaja tudi integral $\int_1^\infty f(1,x)\,\mathrm{d}x$.

Integral odvajajmo. Velja:

$$f_a(a,x) = e^{-ax^4}\,.$$

Ta funkcija je zvezna v a in v x. Izberimo $0 < m < 1$. Za $a \ge m$ in $x > 0$ ocenimo:

$$|f_a(a,x)| \le e^{-mx^4} =: h_m(x)\,.$$

S substitucijo $t = ax^4$ izračunamo:

$$\int_0^\infty e^{-ax^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4a^{1/4}} \int_0^\infty t^{-3/4} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4a^{1/4}}\,.$$

Torej integral $\int_0^\infty h_m(x)\,\mathrm{d}x$ obstaja. Sledi, da integral $F(a)$ obstaja za vse $a \ge m$ in tam velja:

$$F'(a) = \int_0^\infty e^{-ax^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{4a^{1/4}}\,.$$

Ker je bil m poljuben, vse to v resnici velja za vse $a > 0$. Za te a sledi:

$$F(a) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{3}\, a^{3/4} + C\,,$$

kjer je C neka konstanta. Ker je $F(0) = 0$, je $C = 0$, če je le F zvezna v 0. Za eksakten dokaz tega pa v prvotni integral uvedemo substitucijo $s = a^{1/4}x$ in dobimo zvezo $F(a) = a^{3/4}F(1)$. To pa je možno je, če je $C = 0$ (in sledi tudi, da je F zvezna v 0). Velja torej:

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^4}}{x^4}\, \mathrm{d}x = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{3}\, a^{3/4} .$$

3. Iskani integral izrazimo v obliki:

$$J = \frac{1}{16}\int_0^\infty \frac{x^2}{\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^2}\, \mathrm{d}x .$$

S substitucijo $t = x^2/4$ dobimo:

$$J = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\,\Gamma(2)} = \frac{\pi}{8} .$$

4. Po uvedbi polarnih koordinat:

$$x = r\cos\varphi , \quad y = r\sin\varphi ; \qquad J = r$$

dobimo, da je iskana ploščina enaka:

$$\begin{aligned}
\iint_{\substack{r>0 \\ r^2<\cos\varphi\sin\varphi \\ 0<\varphi<2\pi}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi &= \iint_{\substack{0<\varphi<2\pi \\ \cos\varphi\sin\varphi>0 \\ 0<r<\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi + \int_\pi^{3\pi/2}\int_0^{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \frac{1}{2} .
\end{aligned}$$

5. Najprej opazimo, da mora veljati $0 < z < 1$. Z uporabo cilindričnih koordinat:

$$x = r\cos\varphi , \quad y = r\sin\varphi , \quad z = z , \quad J = r$$

izračunamo maso telesa:

$$\begin{aligned}
m = \rho \iiint_{\substack{0<z<1 \\ 0<r<\sqrt{z\sqrt{1-z^2}} \\ 0\le\varphi<2\pi}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z &= \\
= 2\pi\rho \int_0^1\int_0^{\sqrt{z\sqrt{1-z^2}}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z &= \\
= \pi\rho\int_0^1 z\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z .
\end{aligned}$$

S substitucijo $t = \sqrt{1 - z^2}$ dobimo:

$$m = \pi\rho \int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{\pi\rho}{3} \, .$$

Označimo težišče z (x^*, y^*, z^*). Zaradi simetrije je $x^* = y^* = 0$. Tretja koordinata pa je enaka:

$$\begin{aligned}
z^* &= \frac{\rho}{m} \iiint\limits_{\substack{0<z<1 \\ 0<r<\sqrt{z\sqrt{1-z^2}} \\ 0\le\varphi<2\pi}} z \, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z = \\
&= \frac{2\pi\rho}{m} \int_0^1 z \int_0^{\sqrt{z\sqrt{1-z^2}}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z = \\
&= \frac{\pi\rho}{m} \int_0^1 z^2 \sqrt{1 - z^2} \, \mathrm{d}z \, .
\end{aligned}$$

S substitucijo $t = z^2$ dobimo:

$$z^* = \frac{\pi\rho}{2m} \int_0^1 \sqrt{t}\sqrt{1-t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi\rho}{2m} \, \mathrm{B}\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right) = \frac{\pi\rho}{2m} \, \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)} = \frac{\pi^2\rho}{16m} = \frac{3\pi}{16} \, .$$

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 17. 6. 2016

1. Računajmo:

$$\vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -(a + b\cos\theta)\sin\varphi \\ (a + b\cos\theta)\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_\theta = \begin{bmatrix} -b\sin\theta\cos\varphi \\ -b\sin\theta\sin\varphi \\ b\cos\theta \end{bmatrix},$$

$$E = (a + b\cos\theta)^2, \quad F = 0, \quad G = b^2.$$

Površinska gostota torusa je enaka:

$$\sigma = \frac{c}{a + b\cos\theta},$$

iskani vztrajnostni moment pa je enak:

$$\begin{aligned} J_z &= \iint_{0 \le \varphi, \theta < 2\pi} bc(a + b\cos\theta)^2 \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = \\ &= 2\pi bc \int_0^{2\pi} (a + b\cos\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta = \\ &= 2\pi bc \left(2\pi a^2 + \pi b^2\right) = \\ &= 2\pi^2 bc(2a^2 + b^2). \end{aligned}$$

2. Izračunajmo:

$$\operatorname{div} \vec{R} = x^2 + y^2 + 5z^2.$$

Po Gaussovem izreku je iskani pretok enak:

$$\Phi = \iiint_{0 < x,y,z < 1} (x^2 + y^2 + 5z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \frac{7}{3}.$$

3. Imenovalec je enak nič, če je bodisi $z^2 = 0$ bodisi $e^z - 1 = 0$. Slednje velja, če je $z = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$; to zajema tudi primer, ko je $z = 0$. Pri $n = 0$ ima imenovalec ničlo tretje, pri $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ pa prve stopnje.

Velja $\sin(2n\pi i) = i \operatorname{sh}(2n\pi)$, kar je enako nič le pri $n = 0$. Pri $z = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ima torej funkcija pol prve stopnje, pri $z = 0$ pa pol druge stopnje. Tam izračunajmo še ustrezna koeficienta v Laurentovi vrsti. Najprej nastavimo:

$$c_{-2} = \lim_{z \to 0} z^2 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{e^z - 1}.$$

Z uporabo L'Hôpitalovega pravila dobimo:

$$c_{-2} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{e^z} = 1.$$

Nastavimo še:

$$c_{-1} = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\sin z}{e^z - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z\,(e^z-1) - \sin z\, e^z}{(e^z-1)^2}\,.$$

Spet z uporabo L'Hôpitalovega pravila dobimo:

$$c_{-1} = \lim_{z\to 0} \frac{-\sin z\,(2e^z - 1)}{2\,e^z(e^z-1)} = -\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{e^z-1}\lim_{z\to 0}\frac{2e^z-1}{2\,e^z} = -\frac{1}{2}\,.$$

Glavni del Laurentove vrste je torej enak:

$$\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z}\,.$$

4. Integral je enak vsoti residuov v vseh singularnostih v notranjosti kroga, ki ga omejuje K. Singularnosti pa so tam, kjer ima imenovalec ničle. Razstavimo:

$$z^4 - 3z^2 - 4 = (z^2+1)(z^2-4) = (z+i)(z-i)(z-2)(z+2)\,.$$

V notranjosti kroga sta i in $-i$. Če z f označimo integrand, velja:

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{e^{\pi i/3}}{(i+i)(i^2-4)} = \frac{-\sqrt{3}+i}{20}\,,$$
$$\mathrm{Res}(f,-i) = \frac{e^{-\pi i/3}}{(-i-i)((-i)^2-4)} = \frac{-\sqrt{3}-i}{20}\,,$$

Iskani integral je torej enak:

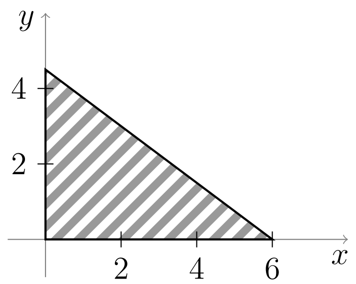
$$2\pi i\Big[\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,-i)\Big] = -\frac{\pi\sqrt{3}}{5}\,i\,.$$

5. $f(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right)\left(z - \sqrt{3} - i\right) + \sqrt{3} + i\big) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right)z + 2i.$

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 25. 8. 2016

Praktična matematika

1. Skica definicijskega območja:



Oglišča: $f(0,0) = f(6,0) = f(0,9/2) = 0$.
Rob $y = 0$, $0 < x < 6$: $f(x,0) = 0$.
Rob $x = 0$, $0 < y < 9/2$: $f(0,y) = 0$.
Rob $y = \frac{3}{4}(6-x)$, $0 < x < 6$: $f\big(x, \frac{3}{4}(6-x)\big) = \frac{3}{4}x(6-x)e^{-(18+x)/4}$,
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\big(x, \frac{3}{4}(6-x)\big) = \frac{3}{16}(24 - 14x + x^2)e^{-(18+x)/4}$.
Stacionarna točka $(2,3)$ leži na robu območja, stacionarna točka $(12, -9/2)$ pa ne.
Velja $f(2,3) = 6\,e^{-5} \doteq 0˙0404$.
Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (1-x)y\,e^{-x-y}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x(1-y)\,e^{-x-y}$, $\quad f(1,1) = e^{-2} \doteq 0˙135$.
Torej je $\min\limits_D f = f(x,0) = f(0,y) = 0$ in $\max\limits_D f = f(1,1) = e^{-2}$.

2. Iz odvodov:

$$\dot{x} = \frac{1}{t}\,, \quad \dot{y} = 2t\,, \quad \dot{z} = 2t^3$$

dobimo odvod naravnega parametra:

$$\dot{s} = \pm\sqrt{\frac{1}{t^2} + 4t^2 + 4t^6} = \pm\left(\frac{1}{t} + 2t^3\right)\,.$$

Odvod koordinate y po naravnem parametru je enak:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{\dot{y}}{\dot{s}} = \pm\frac{2t}{\frac{1}{t} + 2t^3} = \pm\frac{2t^2}{1 + 2t^4}\,.$$

Pri $x = 0$ je $t = 1$ in $y' = \pm 2/3$.

Za fleksijsko ukrivljenost imamo vsaj dve možnosti.

Prva možnost: odvajamo po naravnem parametru, pri čemer lahko izberemo pozitivni predznak. Najprej dobimo:

$$\vec{t} = \frac{1}{1+2t^4}\begin{bmatrix}1\\2t^2\\2t^4\end{bmatrix}.$$

Še enkrat odvajamo in dobimo:

$$\vec{t}\,' = \frac{1}{\left(\frac{1}{t}+2t^3\right)(1+2t^4)^2}\begin{bmatrix}-8t^3\\4t(1-2t^4)\\8t^3\end{bmatrix} = \frac{4t}{1+2t^4)^3}\begin{bmatrix}-2t^2\\1-2t^4\\2t^2\end{bmatrix}.$$

Pri $t=1$ je $\vec{t}\,' = \frac{4}{27}\begin{bmatrix}-2\\-1\\2\end{bmatrix}$, fleksijska ukrivljenost pa je enaka $\kappa = \|\vec{t}\,'\| = 4/9$.

Druga možnost: odvajamo po izvirnem parametru in vstavimo $t=1$:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix}t^{-1}\\2t\\2t^3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}, \qquad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix}-t^{-2}\\2\\6t^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\\6\end{bmatrix}, \qquad \dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix}8\\-8\\4\end{bmatrix}$$

Fleksijska ukrivljenost je enaka:

$$\kappa = \frac{\left\|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\right\|}{\left\|\dot{\vec{r}}\right\|^3} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9},$$

kar je isto kot prej.

3. Iskani vztrajnostni moment je enak:

$$J = \rho \iiint_{\substack{(x^2+y^2)^4 z\,e^z<1\\ z>0}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Z uvedbo cilindričnih koordinat:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z\,, \quad J = r$$

se integral prevede na:

$$\begin{aligned}
J &= \rho \iiint_{\substack{r^8 z\,e^z<1\\ z>0\\ 0<\varphi}} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\
&= \rho\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^{z^{-1/8}\,e^{-z}} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{\pi\rho}{2}\int_0^\infty z^{-1/2}\,e^{-4z}\,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{\pi\rho}{4}\int_0^\infty t^{-1/2}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{\pi\sqrt{\pi}\,\rho}{4}\,.
\end{aligned}$$

4. Najprej izračunamo:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = (2az^2 + 2x^2 + 4y^2)x^2yz\,, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = (4z^2 + 2x^2 + 2ay^2)x^2yz\,,$$

torej je:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = (2a-4)(z^2 - y^2)x^2yz\,.$$

To je identično enako nič le za $a = 2$. Iz simetrije sledi, da je v tem primeru tudi $\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0$ in $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0$, torej $\operatorname{rot}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = 0$. Dano polje je torej potencialno natanko tedaj, ko je $a = 2$.

Potencial polja dobimo na tri načine kot nedoločeni integral:

$$\int (2x^2 + y^2 + z^2)xy^2z^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)x^2y^2z^2 + A(y,z)\,,$$
$$\int (x^2 + 2y^2 + z^2)x^2yz^2\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)x^2y^2z^2 + B(x,z)\,,$$
$$\int (x^2 + y^2 + 2z^2)x^2y^2z\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)x^2y^2z^2 + C(x,y)\,,$$

torej je enak:

$$\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)x^2y^2z^2 + D\,,$$

kjer je D poljubna konstanta.

5. Integrand:

$$f(z) = \frac{\cos\frac{z}{3}}{z\sin z}$$

ima pole v točkah $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; znotraj krožnice K ležita pola 0 in π, zato je:

$$\oint_K f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\Big[\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,\pi)\Big]\,.$$

V točki 0 ima f pol druge stopnje, zato je:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,0) &= \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(z\,f(z)\big) = \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z\cos\frac{z}{3}}{\sin z} = \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{\cos\frac{z}{3}\sin z - \frac{1}{3}z\sin\frac{z}{3} - z\cos\frac{z}{3}\cos z}{\sin^2 z}\,.\end{aligned}$$

Z uporabo L'Hôpitalovega pravila dobimo:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f,0) &= \lim_{z\to 0}\frac{-\frac{2}{3}\sin\frac{z}{3}\sin z + \frac{8}{9}z\cos\frac{z}{3}\sin z}{2\sin z\cos z} = \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{-\frac{2}{3}\sin\frac{z}{3} + \frac{8}{9}z\cos\frac{z}{3}}{2\cos z} = \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

V točki π pa ima f pol prve stopnje, zato je:

$$\operatorname{Res}(f,\pi) = \lim_{z\to\pi}\big((z-\pi)\,f(z)\big) = \lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)\cos\frac{z}{3}}{z\sin z} = \frac{1}{2\pi}\lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)}{\sin z}\,.$$

Ponovno uporabimo L'Hôpitalovo pravilo in dobimo:

$$\operatorname{Res}(f,\pi) = \frac{1}{2\pi}\lim_{z\to\pi}\frac{1}{\cos z} = -\frac{1}{2\pi}\,.$$

Dani integral je torej enak:

$$\oint_K f(z)\,\mathrm{d}z = -i\,.$$

2014/15

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 2. 12. 2014

Praktična matematika

1. Označimo $f(x) = \dfrac{x^3}{24} - \dfrac{x^5}{160} + 1$. Prva dva odvoda sta:

$$f'(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{32}\,, \qquad f''(x) = \frac{x}{4} - \frac{x^3}{8}\,.$$

Drugi odvod ima ničle v $-\sqrt{2}$, 0 in $\sqrt{2}$, torej prvi odvod zavzame ekstrem na $[-2,2]$ kvečjemu v -2, $-\sqrt{2}$, 0, $\sqrt{2}$ in 2. Ker je $f'(\pm 2) = f'(0) = 0$ in $f'\big(\pm\sqrt{2}\big) = 1/8$, mora biti $0 \le f'(x) \le 1/8$ za vse $x \in [-2,2]$. Med drugim to pomeni tudi, da je f tam naraščajoča, torej za $x \in [-2,2]$ velja $-2 \le 13/15 = f(-2) \le f(x) \le f(2) = 17/15 \le 2$, zato f preslika interval $[-2,2]$ spet v $[-2,2]$. Iz ocene odvoda sledi, da je tam tudi skrčitev. Za začetni približek $x_1 = 0$ dobimo naslednje zaporedje približkov:

$$0\,,\ 1\,,\ 1\text{˙}03542\,,\ 1\text{˙}03881\,,\ 1\text{˙}03915\,,\ 1\text{˙}03918\,,\ 1\text{˙}03918\,\ldots$$

Ob upoštevanju zaokrožitvenih napak dobimo, da je razlika med zadnjima dvema približkoma kvečjemu 10^{-5}, torej je rešitev od zadnjega približka oddaljena kvečjemu za:

$$\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}} \cdot 10^{-5} < 1\text{˙}5 \cdot 10^{-6}\,.$$

Glede na to, da so približki dobljeni z zaokroženjem na zadnjo decimalko, sledi, da je rešitev nekje med 1˙0391735 in 1˙0391865. Zaokroženo na štiri decimalke to vsekakor znese 1˙0392.

2. a) Ker je funkcija soda, so koeficienti pred sinusi enaki nič in lahko računamo kar koeficiente v kosinusni Fourierovi vrsti. Iz:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}\cos(kx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \Big(\cos\big[\big(k+\tfrac{1}{2}\big)x\big] + \cos\big[\big(k-\tfrac{1}{2}\big)x\big]\Big)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2k+1}\sin\big[\big(k+\tfrac{1}{2}\big)\pi\big] + \frac{1}{2k-1}\sin\big[\big(k-\tfrac{1}{2}\big)\pi\big]\end{aligned}$$

dobimo iskani razvoj:

$$f_4(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi}\cos x - \frac{4}{15\pi}\cos(2x) + \frac{4}{35\pi}\cos(3x) - \frac{4}{63\pi}\cos(4x)\,.$$

b) Celotni Fourierov razvoj je:

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2 - \frac{1}{4}} - \frac{\cos(2x)}{2^2-\frac{1}{4}} + \frac{\cos(3x)}{3^2-\frac{1}{4}} - \frac{\cos(4x)}{4^2-\frac{1}{4}} + \cdots\right]$$

Ker je f zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, je vsota $\bar{f}$ Fourierove vrste enaka kar sami funkciji f. Če vstavimo $x = \pi$, dobimo:

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1^2 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2^2 - \frac{1}{4}} + \frac{\cos(3x)}{3^2 - \frac{1}{4}} + \frac{\cos(4x)}{4^2 - \frac{1}{4}} + \cdots\right],$$

od koder sledi:

$$\frac{1}{1^2 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2^2 - \frac{1}{4}} + \frac{\cos(3x)}{3^2 - \frac{1}{4}} + \frac{\cos(4x)}{4^2 - \frac{1}{4}} + \cdots = 2\,.$$

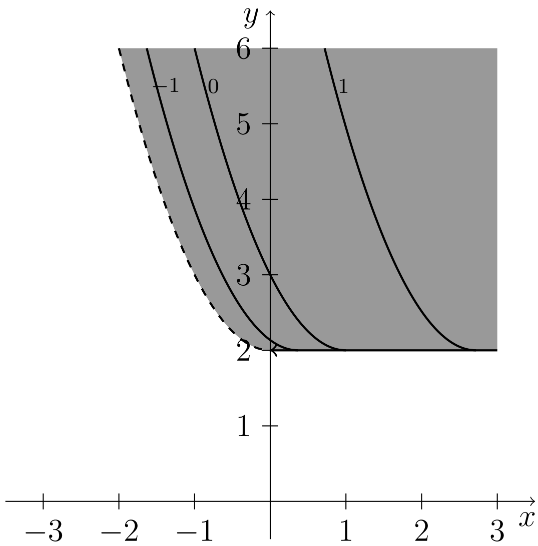
3. Točka je v definicijskem območju natanko tedaj, ko velja:

$$y \geq 2, \qquad x > -\sqrt{y-2}$$

Pri $x \leq 0$ je to ekvivalentno $y > 2 + x^2$, pri $x > 0$ pa je to ekvivalentno $y \geq 2$. Nivojnico za dani vrednost z pa lahko zapišemo v obliki:

$$x \leq e^z, \quad y = 2 + \left(e^z - x\right)^2.$$

Slika:



4. a) Računamo:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi = \frac{1}{r}\left(x\,\frac{\partial u}{\partial x} + y\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\,.$$

b) Spremenljivka u kot funkcija spremenljivk r in φ ni odvisna od r. Zapišemo jo lahko torej kot funkcijo le spremenljivke φ.

5. Iz Taylorjevega razvoja za eksponentno funkcijo:

$$e^{x+y^2} = 1 + x + y^2 + \frac{(x+y^2)^2}{2} + \frac{(x+y^2)^3}{6} + \cdots$$

dobimo Taylorjev polinom:

$$T_3(x,y) = x + x^2 + xy^2 + \frac{x^3}{2}\,.$$

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 2. 2. 2015

Praktična matematika

1. $f_x(x,y) = -6xy^2\,e^{x^2} + 3x^2 - 6, \quad f_y(x,y) = -6y\,e^{x^2} + \dfrac{3}{y}.$

Stacionarni točki: $T_1\left(-1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right), \quad T_2\left(2,\ \dfrac{e^{-2}}{\sqrt{2}}\right)$

(**pozor**, zaradi definicijskega območja mora biti $y > 0$).

$f_{xx}(x,y) = -6(2x^2+1)y^2\,e^{x^2} + 6x, \quad f_{xy}(x,y) = -12xy\,e^{x^2},$

$f_{yy}(x,y) = -6\,e^{x^2} - \dfrac{3}{y^2}.$

V T_1 je $H = \begin{bmatrix} -15 & 6\sqrt{2e} \\ 6\sqrt{2e} & -12\,e \end{bmatrix}$ in $K = 108\,e$, zato je tam lokalni maksimum.

V T_2 pa je $H = \begin{bmatrix} -15 & -12\,e^2\sqrt{2} \\ -12\,e^2\sqrt{2} & -12\,e^4 \end{bmatrix}$ in $K = -108\,e^4$, zato tam ni ekstrema (je sedlo).

2. a) $J\vec{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & e^z(w^3-8) & 3\,e^z w^2 \\ 0 & -1 & w^2 - \frac{2}{w} & 2z\left(w + \frac{1}{w^2}\right) \end{bmatrix}.$

b) in c) *Prvi način.* Uporabimo izrek o implicitni funkciji. V podani točki velja:

$$J\vec{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 12\,e^2 \\ 0 & -1 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{x,y} & J_{z,w} \end{bmatrix},$$

kjer je:

$$J_{x,y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad J_{z,w} = \begin{bmatrix} 0 & 12\,e^2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Rešitev sistema lahko lokalno izrazimo v obliki $\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \vec{G}(x,y)$, ker je matrika $J_{z,w}$ obrnljiva. Jacobijeva matrika iz parcialnih odvodov funkcije $\vec{G}$ je v tej podani točki enaka:

$$J\vec{G} = -J_{z,w}^{-1} J_{x,y} = \begin{bmatrix} e^{-2}/4 & -1/3 \\ -e^{-2}/12 & 0 \end{bmatrix}.$$

Drugi način. Opazimo, da je sistem $\vec{F}(x,y,z,w) = 0$ ekvivalenten sistemu $\vec{H}(z,w) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, kjer je:

$$\vec{H}(z,w) = \begin{bmatrix} e^z(w^3-8) \\ z\left(w^2 - \frac{2}{w}\right) \end{bmatrix}.$$

Vektorska funkcija $\vec{G}$ je torej inverzna funkcija vektorske funkcije $\vec{H}$, zato se lahko skličemo na izrek o inverzni preslikavi. V podani točki je Jacobijeva matrika vektorske funkcije $\vec{H}$ enaka:

$$J\vec{H} = \begin{bmatrix} 0 & 12\,e^2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

in je nesingularna, zato inverzna funkcija lokalno obstaja in njena Jacobijeva matrika je enaka:

$$J\vec{G} = (J\vec{H})^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-2}/4 & -1/3 \\ -e^{-2}/12 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) $\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\,e^{-2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\,\mathrm{d}y \doteq 0\text{˙}173$.

3. Iz:

$$\dot{x} = -e^{-t}\,, \quad \dot{y} = 2\,, \quad \dot{z} = 2\,e^{t}$$

izračunamo:

$$\dot{s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{e^{-2t} + 4 + 4\,e^{2t}} = \pm\bigl(e^{-t} + 2\,e^{t}\bigr)$$

Torej je:

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \mp\frac{e^{-t}}{e^{-t} + 2\,e^{t}} = \mp\frac{1}{1 + 2\,e^{2t}}\,.$$

Ker je x naraščajoča funkcija naravnega parametra, mora biti:

$$x' = \frac{1}{1 + 2\,e^{2t}}\,.$$

Pri $x = e^2$ je $t = -\ln 2$ in $x' = 2/3$.

4. Iz odvodov:

$$\vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{r}_\theta = \begin{bmatrix} -\cos\varphi\sin\theta \\ -\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

dobimo koeficiente prve fundamentalne forme:

$$E = \cos^2\theta\,, \quad F = 0\,, \quad G = 1\,.$$

Sledi:

$$l = \int_0^1 \sqrt{\cos^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Zdaj odvajamo še oba parametra:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{1-t^2}\,, \quad \dot{\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

in dobimo:

$$\cos^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 = (1-t^2)\cdot\frac{1}{(1-t^2)^2} + \frac{1}{1-t^2} = \frac{2}{1-t^2}\,.$$

Sledi:

$$l = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\,.$$

Opomba. Seveda lahko dolžino izračunamo tudi neposredno, tako da že na začetku koordinate x, y in z izrazimo s parametrom t. Tako sicer ne potrebujemo diferencialne geometrije ploskev (prve fundamentalne forme), zato pa naletimo na znatno bolj zapletene izraze.

5. Najprej izračunamo, da v izhodišču velja $u = v = 0$. Iz prvih parcialnih odvodov:

$$\vec{r}_u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2u-1 \\ 2u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{r}_v = \begin{bmatrix} 2v+1 \\ 3 \\ 2v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

izračunamo koeficiente prve fundamentalne forme:

$$E = 5\,, \quad F = -1\,, \quad G = 10\,, \quad \sqrt{EG - F^2} = 7\,.$$

Nadalje iz vektorskega produkta v izhodišču:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

in drugih parcialnih odvodov:

$$\vec{r}_{uu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\,, \quad \vec{r}_{uv} = 0\,, \quad \vec{r}_{vv} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

izračunamo še koeficiente druge fundamentalne forme:

$$L = 2\,, \quad M = 0\,, \quad N = 2\,.$$

Gaussova ukrivljenost je torej enaka:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{4}{49} \doteq 0\text{'}0816\,.$$

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 15. 4. 2015

Praktična matematika

1. Integrand je vsota dveh členov. Ker sta oba nenegativna, integral obstaja natanko tedaj, ko obstajata oba integrala:

$$J_1 := \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^{a+3}}\,\mathrm{d}x \quad \text{in} \quad J_2 := \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{a-3}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Ker je:

$$J_1 = \int_1^\infty \frac{1}{t^{a+3}}\,\mathrm{d}t\,,$$

ta integral obstaja natanko tedaj, ko je $a + 3 > 1$, t. j. $a > -2$. Integral J_2 pa se ujema s tistim iz funkcije gama in obstaja za $a - 3 < 1$, t. j. za $a < 4$. Sklep: dani integral obstaja natanko za $-2 < a < 4$.

2. Označimo:

$$F(x) := \int_0^\infty \frac{(xy+1)e^{-xy} - 1}{y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Po odvajanju dobimo:

$$F'(x) = -\int_0^\infty x\,e^{-xy}\,\mathrm{d}y = -1\,.$$

Račun utemeljimo s tem, da za $0 < u \le x \le v$ velja $\left|x\,e^{-xy}\right| \le v\,e^{-uy}$, integral $\int_0^\infty v\,e^{-uy}\,\mathrm{d}y$ pa obstaja. Ko nazaj integriramo, dobimo $F(x) = -x + C$. Ker je $F(0) = 0$, je $C = 0$, torej je $F(x) = -x$.

3. Označimo dani integral z J. S substitucijo $t = e^{-x}$ dobimo:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 (1-t)^6\,t^{3/2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{B}\left(\frac{5}{2}, 7\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(7)}{\Gamma\left(\frac{19}{2}\right)} = \\ &= \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot 720}{\frac{17}{2}\cdot\frac{15}{2}\cdot\frac{13}{2}\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}} = \\ &= \frac{2014}{255255} \doteq 0\text{'}00802\,. \end{aligned}$$

4. S substitucijo $u = y - 2x$, $v = y/x$ dobimo:

$$x = \frac{u}{v-2}\,, \quad y = \frac{uv}{v-2}\,, \quad J = \frac{u}{(v-2)^2}$$

in velja:

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{1<y-2x<3\\3<y/x<4}} \left(\frac{y}{x} - 2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{\substack{1<u<3\\3<v<4}} \frac{u}{v-2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_1^3 u\,\mathrm{d}u \int_2^4 \frac{\mathrm{d}v}{v-2} = \\ &= 4\ln 2 \doteq 2\text{'}773\,. \end{aligned}$$

5. Ker je telo homogeno, je gostota konstantna, torej povsod enaka recimo ρ. Vztrajnostni moment je torej enak:

$$J_z = \rho \iiint_{(x^2+y^2+z^2)^6<x^2+y^2} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Po uvedbi sferičnih koordinat:

$$x = r\cos\theta\cos\varphi\,,\quad y = r\cos\theta\sin\varphi\,,\quad z = r\sin\theta\,;\qquad J = r^2\cos\theta$$

dobimo:

$$\begin{aligned}
J_z &= \rho \iiint_{\substack{0<r<\cos^{1/5}\theta\\ -\pi/2<\theta<\pi/2\\ 0\le\varphi<2\pi}} r^4\cos^3\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= 2\pi\rho\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\int_0^{\cos^{1/5}\theta} r^4\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{2\pi\rho}{5}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{2\pi\rho}{5}\,\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \\
&= \frac{3\pi^2\rho}{20}\,.
\end{aligned}$$

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 16. 6. 2015

Praktična matematika

1. Po krajšem računu dobimo:

$$\operatorname{rot}\vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -(a+2)(x+y+z)^a \\ -(a+2)(x+y+z)^a \end{bmatrix},$$

od koder sledi, da je dano vektorsko polje potencialno natanko tedaj, ko je $a = -2$. Potencial lahko dobimo z integracijo komponent polja:

$$\begin{aligned} u &= \int (-y-z)(x+y+z)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{y+z}{x+y+z} + C_1(y,z) = \\ &= \int x(x+y+z)^{-2}\,\mathrm{d}y = -\frac{x}{x+y+z} + C_2(x,z) = \\ &= \int x(x+y+z)^{-2}\,\mathrm{d}z = -\frac{x}{x+y+z} + C_3(x,y)\,. \end{aligned}$$

Možni potenciali so torej:

$$u = -\frac{x}{x+y+z} + K_1 = \frac{y+z}{x+y+z} + K_2\,,$$

kjer je $K_1 = K_2 + 1$.

2. Možni sta vsaj dve smiselni parametrizaciji.
Prva parametrizacija: $z = 2\sqrt{1-x^2-y^2}$, $x^2+y^2 < 1/4$. Tedaj je:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,, \qquad EG - F^2 = \frac{1+3x^2+3y^2}{1-x^2-y^2}\,.$$

Iskani integral je enak:

$$J = 2\iint_{x^2+y^2<1/4} \sqrt{1+3x^2+3y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Po uvedbi polarnih koordinat dobimo:

$$\begin{aligned} J &= 2\iint_{\substack{0\le r<1/2\\0\le\varphi<2\pi}} r\sqrt{1+3r^2}\,\mathrm{d}r = 4\pi\int_0^{1/2}\sqrt{1+3r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{3}\int_0^{7/4}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{4\pi}{9}\left(\frac{7\sqrt{7}}{8} - 1\right). \end{aligned}$$

Druga parametrizacija: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = 2\sqrt{1-r^2}$, $0 \le r < 1/2$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Tedaj je:

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -\frac{2r}{\sqrt{1-r^2}} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial\vec{R}}{\partial\varphi} = \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad EG - F^2 = \frac{r^2(1+3r^2)}{1-r^2}.$$

Iskani integral je tako enak:

$$J = 2\iint_{\substack{0\le r<1/2 \\ 0\le\varphi<2\pi}} r\sqrt{1+3r^2}\,\mathrm{d}r\,,$$

kar je isto kot prej.

3. Uporabimo Greenovo formulo. Če označimo:

$$X := x\ln(x+y)\,, \qquad Y := -y\ln(x+y)\,,$$

velja:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{y}{x+y}\,, \qquad \frac{\partial X}{\partial Y} = \frac{x}{x+y}\,,$$

torej je $\dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial Y} = -1$. Iskani integral je zato enak $-\pi$.

4. Pišimo $f(x) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, kjer je:

$$\begin{aligned} g(z) &= 1 + e^z\,, & g(\pi i) &= 0\,,\\ g'(z) &= e^z\,, & g'(\pi i) &= -1\,,\\ h(z) &= 1 + \operatorname{ch} z\,, & h(\pi i) &= 0\,,\\ h'(z) &= \operatorname{sh} z\,, & h'(\pi i) &= 0\,,\\ h''(z) &= \operatorname{ch} z\,, & h''(\pi i) &= -1\,. \end{aligned}$$

Števec ima ničlo prve, imenovalec pa ničlo druge stopnje, kar pomeni, da ima funkcija f pol prve stopnje. Edini koeficient v glavnem delu Laurentove vrste je enak:

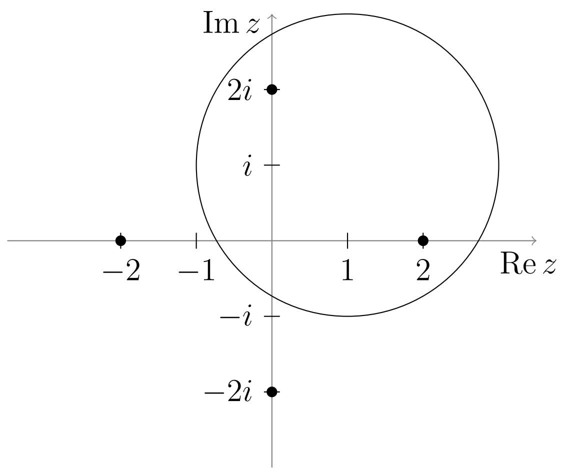
$$c_{-1} = \lim_{z\to\pi i}(z-\pi i)\frac{1+e^z}{1+\operatorname{ch} z}\,.$$

Po dvakratni uporabi L'Hôpitalovega pravila dobimo $c_{-1} = 2$, torej je glavni del Laurentove vrste enak $-2(z-\pi i)^{-1}$.

5. Najprej razstavimo imenovalec:

$$z^4 - 16 = (z-2)(z+2)(z-2i)(z+2i)\,.$$

Torej ima integrand štiri pole prve stopnje: 2, -2, $2i$ in $-2i$. Znotraj krožnice, po kateri integriramo, pa sta le 2 in $2i$:



Torej je:

$$\begin{aligned}\oint_K \frac{\mathrm{d}z}{z^4-16} &= 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4-16}, z=2\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4-16}, z=2i\right)\right] = \\ &= 2\pi i\left[\left.\frac{1}{(z+2)(z^2+4)}\right|_{z=2}+\left.\frac{1}{(z+2i)(z^2i4)}\right|_{z=2i}\right] = \\ &= \frac{\pi}{16}(-1+i)\,.\end{aligned}$$

Rešitve izpita iz matematike 2z dne 8. 9. 2015

Praktična matematika

1. Ker je interval simetričen okoli izhodišča, funkcija pa soda, so vsi koeficienti pred sinusi enaki nič, pri koeficientih pred kosinusi pa lahko uporabimo simetrijo. Velja torej:

$$a_0 = \int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 1$$

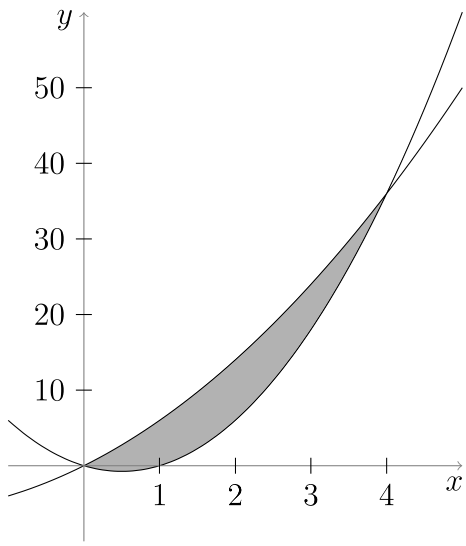
in za $n \geq 1$:

$$a_n = \int_{-1}^{1} |x| \cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{n^2\pi^2}\big(1 - (-1)^n\big)\,.$$

Torej za $-1 < x < 1$ velja:

$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left[\cos(\pi x) + \frac{\cos(3\pi x)}{3^2} + \frac{\cos(5\pi x)}{5^2} + \cdots\right]\,.$$

2. Najprej določimo območje, za ta namen pa moramo poiskati presečišča krivulj. Enačba $3x^2 - 3x = x^2 + 5x$ ima rešitvi $x_1 = 0$ in $x_2 = 4$. Območje je množica $D := \{(x,y)\,;\, 0 \leq x \leq 4,\ 3x^2 - 3x \leq y \leq x^2 + 5x\}$, prikazana na sliki:



Vrednosti v ogliščih: $f(0,0)=0, \quad f(4,36)=36$.
Na robu $y=3x^2-3x$, $0<x<4$, je $f(x,3x^2-3x)=3x^3-12x^2+9x$,
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,3x^2-3x)=9x^2-24x+9$, stacionarni točki:
$x=\frac{4+\sqrt{7}}{3}, \quad f\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3},1+\sqrt{7}\right)=\frac{2-4\sqrt{7}}{3} \doteq -2\dot{}86;$
$x=\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \quad f\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3},1-\sqrt{7}\right)=\frac{2+4\sqrt{7}}{3} \doteq 4\dot{}19.$
Na robu $y=x^2+5x$, $0<x<4$, je $f(x,x^2+5x)=x^3+2x^2-15x$,
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,x^2+5x)=3x^2+4x-15$, stacionarna točka:
$x=\frac{5}{3}, \quad f\left(\frac{5}{3},\frac{100}{9}\right)=-\frac{400}{27} \doteq -14\dot{}81.$
Stacionarna točka $x=-3$ ni v definicijskem območju.
Končno velja še $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=x-3$, stacionarna točka $(3,0)$ ni v definicijskem območju.
Sklep: $\min_D f=f\left(\frac{5}{3},\frac{100}{9}\right)=-\frac{400}{27}, \quad \max_D f=f(4,36)=36.$

3. Označimo iskani integral z $F(a)$. Z odvajanjem pod integralskim znakom dobimo:

$$F'(a)=\int_0^\infty a\,e^{-ax}\,\mathrm{d}x=1\,,$$

torej mora veljati $F(a)=a+C$. Toda ker je $F(0)=0$, je kar $F(a)=a$.

4. Označimo z m maso, z R pa polmer krogle. Nadalje obstaja taka konstanta c, da je gostota ρ v poljubni točki znotraj krogle, ki je za r oddaljena od izhodišča, enaka cr. Postavimo koordinatni sistem tako, da bo geometrijsko središče krogle v izhodišču. Tako izračunamo maso:

$$\begin{aligned} m &= c\iiint_{x^2+y^2+z^2<R^2} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\ &= c\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^R r^3\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \pi c R^4\,. \end{aligned}$$

Zaradi simetrije so vztrajnostni momenti okoli vseh osi skozi izhodišče enaki. Izračunamo jih lahko kot vztrajnostni moment okoli osi z:

$$\begin{aligned} J &= c\iiint_{x^2+y^2+z^2<R^2} (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\ &= c\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^R r^5\cos^3\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{2\pi c R^6}{9} = \\ &= \frac{2mR^2}{9}\,. \end{aligned}$$

5. Iz $z^4+4z^2 = z^2(z-2i)(z+2i)$ sledi, da ima funkcija:

$$f(z) = \frac{1}{z^4+4z^2}$$

pri $z=0$ pol druge stopnje, pri $z=2i$ in $z=-2i$ pa pol prve stopnje. Glede na integracijsko krivuljo K bo veljalo:

$$\oint_K f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\big[\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,2i)\big]\,.$$

Ostanka sta enaka:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,2i) &= \lim_{z\to 2i}(z-2i)\,f(z) = \left.\frac{1}{z^2(z+2i)}\right|_{z=2i} = \frac{i}{16}\,,\\ \mathrm{Res}(f,0) &= \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big[z^2 f(z)\big] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0}\frac{1}{z^2+4} = \left.\frac{2z}{(z^2+4)^2}\right|_{z=0} = 0\,.\end{aligned}$$

Ostanek v izhodišču dokaj lahko dobimo tudi z razvojem v Laurentovo vrsto:

$$f(z) = \frac{1}{4z^2}\,\frac{1}{1+\frac{z^2}{4}} = \frac{1}{4z^2}\left(1-\frac{z^2}{4}+\frac{z^4}{16}-\cdots\right) = \frac{1}{4z^2}-\frac{1}{16}+\frac{z^2}{64}-\cdots$$

Sledi $\displaystyle\oint_K \frac{\mathrm{d}z}{z^4+4z^2} = -\frac{\pi}{8}$.

2013/14

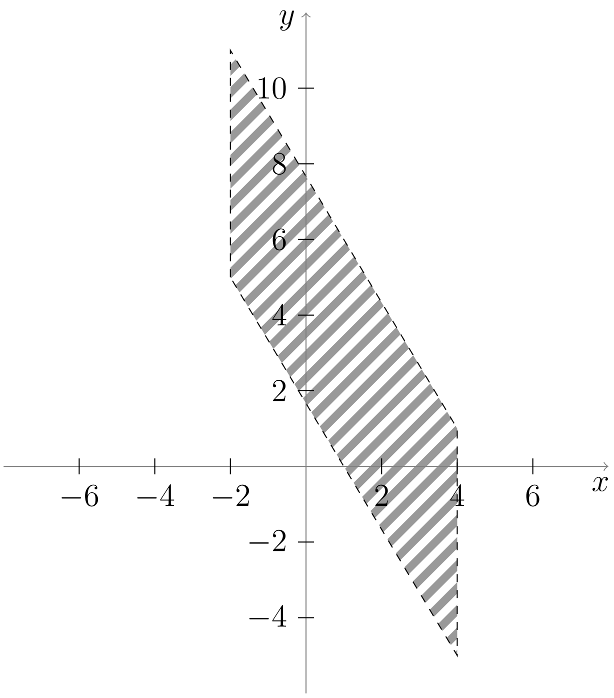
Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 26. 11. 2013

Praktična matematika

1. Iskana množica je:

$$\begin{aligned} K\big((1,2),3\big) &= \big\{(x,y)\ ;\ \max\{|x-1|, |2x+y-4|\} < 3\big\} = \\ &= \big\{(x,y)\ ;\ |x-1| < 3, |2x+y-4| < 3\big\} = \\ &= \big\{(x,y)\ ;\ -3 < x-1 < 3, -3 < 2x+y-4 < 3\big\} = \\ &= \big\{(x,y)\ ;\ -2 < x < 4, 1-2x < y < 7-2x\big\}\,. \end{aligned}$$

Slika:



2. a) Velja:

$$\begin{aligned} d_1(f_m, f_n) &= \int_0^{1/(mn)} \left(\frac{1}{\sqrt{mx + \frac{1}{m}}} - \frac{1}{\sqrt{nx + \frac{1}{n}}} \right) \mathrm{d}x + \\ &\qquad + \int_{1/(mn)}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{nx + \frac{1}{n}}} - \frac{1}{\sqrt{mx + \frac{1}{m}}} \right) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{n}\sqrt{n + \frac{1}{n}} - \frac{2}{m}\sqrt{m + \frac{1}{m}} + \left(\frac{4}{m} - \frac{4}{n}\right) \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{m}}\,. \end{aligned}$$

b) Ob upoštevanju, da je $m > n$, ocenimo:

$$d_1(f_m, f_n) \leq \frac{2}{n}\sqrt{n + \frac{1}{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} + \frac{2}{\sqrt{n}}\,,$$

kar gre proti nič, ko gre n proti neskončno. Torej je zaporedje Cauchyjevo.

c) Ker prostor zveznih funkcij na $[0,1]$ v metriki d_1 ni poln, ne moremo takoj reči, da je zaporedje konvergentno. Pač pa $f_n(x)$ za vse $x > 0$ konvergira proti nič, zato postavimo domnevo, da zaporedje f_n v metriki d_1 konvergira proti nič. In res velja:

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{nx + \frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}}\right)\,,$$

kar gre proti nič, ko gre n proti neskončno.

3. a) in b) Za $0 \leq x < 8$ je $f(x) \geq 8 > x$, torej enačba tam nima rešitve. Za $x \geq 8$ pa je $f(x) \geq 8$ in $0 \leq f'(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}} \leq \dfrac{1}{12}$, torej f poln metrični prostor $M = [8, \infty)$ slika samega vase in je na njem skrčitev; enačba $f(x) = x$ ima tam natanko eno rešitev. Zato ima dana enačba tudi na $[0, \infty)$ natanko eno rešitev.

c) Rešitev je limita zaporedja približkov $x_1 = 8$, $x_{n+1} = f(x)$. Prvih nekaj ustrezno zaokroženih približkov je:

$$8\,,\ 10\,,\ 10\text{˙}15443\,,\ 10\text{˙}16547\,,\ 10\text{˙}16625\,,\ldots$$

Razlika med zadnjima dvema približkoma je manjša od 0˙00079, torej je razlika med zadnjim približkom in pravim rezultatom manjša od:

$$\frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{1}{12}} \cdot 0\text{˙}00079 < 0\text{˙}00008\,,$$

kar pomeni, da je končni rezultat nekje med 10˙16624 in 10˙16634 (upoštevali smo še zaokrožitvene napake). Vsekakor so pri zaokrožitvi 10˙166 vse tri decimalke točne.

4. a) Ker je funkcija liha, se Fourierova vrsta ujema s sinusno, t. j.:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,,$$

kjer je:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi/3} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \\
&= -\frac{4}{3n}\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{2n\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

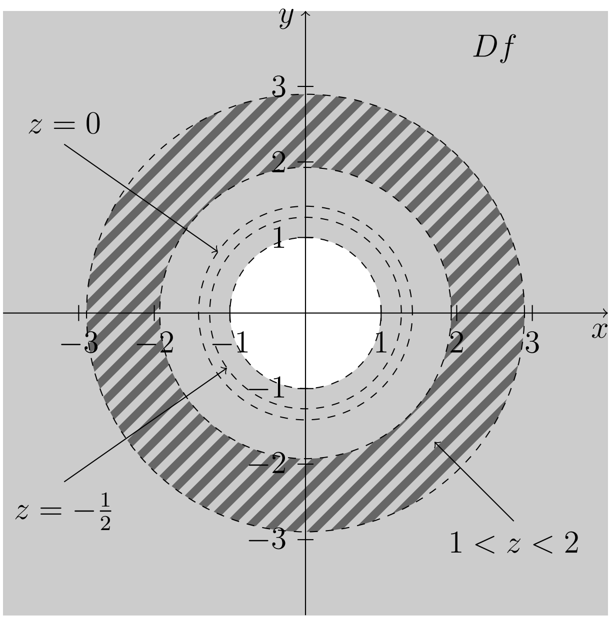
Delna vsota do vključno člena s $\sin(4x)$ je torej:

$$s_4(x) = \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) \sin x + \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\right) \sin(2x) - \frac{4}{9} \sin(3x) + \left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{16\pi}\right) \sin(4x)\,.$$

b) Velja:

$$s\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = s\left(-\frac{10\pi}{3} + 4\pi\right) = s\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[\lim_{y\uparrow 2\pi/3} f(y) + \lim_{y\downarrow 2\pi/3} f(x)\right] = \frac{\pi}{3}\,.$$

5. Definicijsko območje je množica točk (x, y), za katere je $x^2 + y^2 > 1$, to pa je zunanjost enotskega kroga. Nivojnico $z = 0$ določa pogoj $x^2 + y^2 = 2$, torej je to krožnica okoli izhodišča s polmerom $\sqrt{2}$, nivojnico $z = -3$ pa določa pogoj $x^2 + y^2 = 1 + e^{-1/2}$, torej je to krožnica okoli izhodišča s polmerom $\sqrt{1 + e^{-1/2}}$. Končno je pogoj $1 < z < 2$ ekvivalenten pogoju $\sqrt{1 + e} < x^2 + y^2 < \sqrt{1 + e^2}$. Slika:



Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 20. 1. 2014

Praktična matematika

1. $f_x(x,y) = (-x^2 - xy - y^2 + 2x + y)e^{-x}$, $\quad f_y(x,y) = (x+2y)e^{-x}$.
Stacionarni točki: $T_1(0,0)$, $\quad T_2(2,-1)$.
$f_{xx}(x,y) = (x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y + 2)e^{-x}$, $\quad f_{xy}(x,y) = (-x - 2y + 1)e^{-x}$,
$f_{yy}(x,y) = 2\,e^{-x}$.
V T_1 je $H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ in $K = 3$, zato je tam lokalni minimum.
V T_2 pa je $H = \begin{bmatrix} -1/e^2 & 1/e^2 \\ 1/e^2 & 2/e^2 \end{bmatrix}$ in $K = -3/e^4$, zato tam ni ekstrema (je sedlo).

2. Nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$L = 5x + 6y - \lambda(x^2 + xy + 2y^2)\,,$$

za katero velja $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 5 - \lambda(2x+y)$ in $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 6 - \lambda(x+4y)$. Iz izražave:

$$\lambda = \frac{5}{2x+y} = \frac{6}{x+4y}$$

dobimo $x = 2y$. Ko upoštevamo še pogoj $x^2 + xy + 2y^2 = 72$, dobimo stacionarni točki $T_1(6,3)$ in $T_2(-6,-3)$. Ko na njiju izračunamo funkcijo f, dobimo:

$$\min_D f = f(-6,-3) = -48 \quad \text{in} \quad \max_D f = f(6,3) = 48\,,$$

kjer je $D = \{(x,y)\ ;\ x^2 + xy + 2y^2 = 72\}$.

3. Najprej izračunamo: $y = 0$, $\quad y' = \dfrac{2}{x} = 2$ in $y'' = -\dfrac{2}{x^2} = -2$.
Normalni vektor: $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$.
Predznačeni krivinski polmer: $\dfrac{1}{\kappa} = \dfrac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{y''} = -\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.
Središče pritisnjene krožnice: $(1,0) + \dfrac{1}{\kappa}\,\vec{n} = (6, -5/2)$.
Pritisnjena krožnica: $(X-6)^2 + \left(Y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$.

4. Velja $x = y = z = 1/2$. Smer normalnega vektorja lahko dobimo na vsaj tri načine:
Prvi način: pišimo $F(x,y,z) = \dfrac{xy}{z^3} - 2$. Iz:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{z^3} = 4\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{z^3} = 4\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{3xy}{z^4} = -12$$

dobimo, da ima normalni vektor isto smer kot $(4,4,-12)$ ali tudi kar kot $(1,1,-3)$.

Drugi način: izrazimo $z = \sqrt[3]{\dfrac{xy}{2}}$. Iz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{y}{2x^2}} = -\frac{1}{3}\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{2y^2}} = -\frac{1}{3}$$

dobimo, da ima normalni vektor ima isto smer kot $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ oziroma kar $(-1,-1,3)$ ali tudi $(1,1,-3)$.

Tretji način: izrazimo $x = \dfrac{2z^3}{y}$. Iz:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{2z^3}{y^2} = -1\,, \qquad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{6z^2}{y} = 3$$

dobimo, da ima normalni vektor ima isto smer kot $(1,1,-3)$.

Tangentna ravnina: $X + Y - 3Z + \frac{1}{2} = 0$ ali tudi $2X + 2Y - 6Z + 1 = 0$.

5. a) $z = 1$.

b) Sledi iz izreka o implicitni funkciji: ploskev lahko podamo v obliki $F(x,y,z) = 0$, kjer je $F(x,y,z) = e^{xyz} - z$. Očitno je funkcija F parcialno zvezno odvedljiva, velja pa tudi $F_z(x,y,z) = xy\,e^{xyz} - 1$ in $F_z(0,0,1) = -1 \neq 0$.

c) Po odvajanju osnovne zveze dobimo:

$$\begin{array}{lrl}
\dfrac{\partial}{\partial x}: & \left(yz + xy\,\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) e^{xyz} - \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0\,, \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial y}: & \left(xz + xy\,\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) e^{xyz} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0\,, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}: & \left(y\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) e^{xyz} + \left(yz + xy\,\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 e^{xyz} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0\,, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0\,, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}: & \left(z + x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial z}{\partial y} + xy\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\mathrm{d}\partial y}\right) e^{xyz} + \qquad\qquad & \\[2ex]
 & + \left(yz + xy\,\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\left(xz + xy\,\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) e^{xyz} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0\,, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 1\,, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}: & \left(x\,\dfrac{\partial z}{\partial y} + xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) e^{xyz} + \left(xz + xy\,\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 e^{xyz} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0\,.
\end{array}$$

d) $E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad L = 0, \quad M = 1, \quad N = 0$.

Iz karakteristične enačbe $\lambda^2 - 1 = 0$ dobimo glavni ukrivljenosti $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 1$.

e) Točka T je sicer stacionarna, a ker je $H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ in $K = -1$, tam ni ekstrema.

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 8. 4. 2014

Praktična matematika

1. Označimo $F(a) = \int_0^\infty \left(\frac{a}{x^2} - \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^3} \right) \mathrm{d}x$. Po odvajanju dobimo:

$$F'(a) = \int_0^\infty \frac{a^2}{1 + a^2 x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \, |a| \, .$$

Zdaj moramo to nazaj integrirati. To naredimo posebej za pozitivne in za negativne a, upoštevamo pa tudi, da je lahko $a = 0$. Dobimo:

$$F(a) = \frac{\pi a |a|}{4} = \frac{\pi a^2}{4} \operatorname{sgn}(a) \, .$$

2. Označimo:

$$J := \int_{-\infty}^\infty x \, e^{-(x-2)^2} \, \mathrm{d}x \, .$$

Prvi način: uvedemo substitucijo $u = x - 2$. Dobimo $J = J_1 + J_2$, kjer je:

$$J_1 = \int_{-\infty}^\infty u \, e^{-u^2} \, \mathrm{d}u \, , \qquad J_2 = 2 \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} \, \mathrm{d}u \, .$$

Integrala J_1 in J_2 gresta oba po intervalu, ki je simetričen okrog izhodišča, pri čemer pa je integrand v J_1 liha, v J_2 pa soda funkcija. Sledi:

$$J = J_2 = 4 \int_0^\infty e^{-u^2} \, \mathrm{d}u \, .$$

Z nadaljnjo substitucijo $t = u^2$ dobimo:

$$J = J_2 = 2 \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} \, \mathrm{d}t = 2\Gamma \left(\frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{\pi} \, .$$

Drugi način: uvedemo substitucijo $t = (x-2)^2$, a pri tem moramo biti previdni, saj za $x < 2$ velja $x = 2 - \sqrt{t}$, $\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\sqrt{t}}$, medtem ko za $x < 2$ velja $x = 2 + \sqrt{t}$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Zato moramo integral razdeliti na dva dela – pišimo $J = J_1 + J_2$, kjer je:

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{-\infty}^2 x \, e^{-(x-2)^2} \, \mathrm{d}x = \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \left(2 - \sqrt{t}\right) e^{-t} \, \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(2t^{-1/2} - 1\right) e^{-t} \, \mathrm{d}t = \\
&= \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \Gamma(1)}{2} = \\
&= \frac{2\sqrt{\pi} - 1}{2}
\end{aligned}$$

in:

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_2^\infty x\, e^{-(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \bigl(2+\sqrt{t}\bigr)\, e^{-t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \bigl(2t^{-1/2}+1\bigr)\, e^{-t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{2\Gamma\bigl(\frac{1}{2}\bigr)+\Gamma(1)}{2} = \\
&= \frac{2\sqrt{\pi}+1}{2}\,,
\end{aligned}
$$

Ko seštejemo, dobimo $J = 2\sqrt{\pi}$.

3. $\displaystyle\int_0^{1/9}\left(\int_2^3 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_{1/9}^{1/4}\left(\int_2^{1/\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$

4. *Prvi način*: telo lahko opišemo z naslednjimi ekvivalentnimi pogoji:

$$
0 < x < a\,, \quad -x < y < x\,, \quad x - \sqrt{x^2-y^2} < z < x + \sqrt{x^2-y^2}\,.
$$

Sledi:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_0^a \int_{-x}^x \sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 4\int_0^a \int_0^x \sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= 4\int_0^a x \int_0^x \sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
$$

S substitucijo $t = y^2/x^2$ dobimo:

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}y &= \frac{x}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{x}{2}\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{1/2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{x}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \\
&= \frac{x}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \\
&= \frac{\pi x}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Do tega lahko pridemo tudi tako, da opazimo, da je integral $\int_0^x \sqrt{x^2-y^2}\,\mathrm{d}y$ ploščina četrtine kroga s polmerom x in je torej enak $\pi x^2/4$. Tako je končno:

$$
V = \pi\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi a^3}{3}\,.
$$

Drugi način: volumen zapišemo kot trojni integral, ki ga zastavimo v obliki:

$$V = \int_0^a \iint_{y^2+z^2<2xz} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,.$$

Neenačbo $y^2+z^2<2xz$ lahko prepišemo v obliki $(z-x)^2+y^2<x^2$, kar pomeni, da gre za krog s polmerom x. Integral forme $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ po tem krogu je natančno njegova ploščina, ki je enaka πx^2. Sledi:

$$V = \pi \int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi a^3}{3}\,.$$

5. Uvedemo sferične koordinate:

$$x = r\cos\theta\cos\varphi\,,\quad y = r\cos\theta\sin\varphi\,,\quad z = r\sin\theta\,;\qquad J = r^2\cos\theta$$

Masa polkrogle je enaka:

$$m = \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2<R^2\\ x>0}} cx\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = c\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^R r^3\cos^2\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi c R^4}{4}\,,$$

vztrajnostni moment okoli osi z pa je enak:

$$\begin{aligned}
J_z &= \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2<R^2\\ x>0}} cx(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&= c\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^R r^5\cos^4\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{2cR^6}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{cR^6}{3}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right) = \\
&= \frac{cR^6}{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \\
&= \frac{\pi c R^6}{8}\,.
\end{aligned}$$

Torej je $J_z = \dfrac{mR^2}{2}$.

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 10. 6. 2014

Praktična matematika

1. Označimo iskano vektorsko polje z $\vec{R} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$. Izkaže se, da lahko na nič postavimo *katero koli* njegovo komponento. Če postavimo $X = 0$, dobimo:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = x\,, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -z\,.$$

Iz druge in tretje enačbe dobimo $Y = -xz + C_2(y, z)$ in $Z = C_3(y, z)$. Opazimo, da je, če postavimo $C_2(y, z) = C_3(y, z) = 0$, tudi prva enačba izpolnjena. Dobili smo vektorsko polje:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ -xz \\ 0 \end{bmatrix}.$$

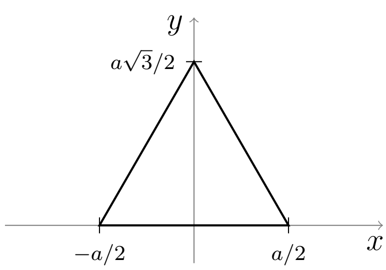
Opazimo, da je pri tej rešitvi tudi $Z = 0$, zato tega primera ne bomo posebej obravnavali. Pač pa si oglejmo še primer, ko postavimo $Y = 0$. Dobimo:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = x\,, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = z\,.$$

Iz prve in tretje enačbe dobimo $X = yz + C_1(x, z)$ in $Z = xy + C_3(x, z)$. Opazimo, da je, če postavimo $C_1(x, z) = C_3(x, z) = 0$, tudi druga enačba izpolnjena. Dobili smo vektorsko polje:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} yz \\ 0 \\ xy \end{bmatrix}.$$

2. Trikotnik postavimo v koordinatni sistem:



Tako je tisto, kar iščemo, vztrajnostni moment okoli osi x. Rob trikotnika ima dolžinsko gostoto $\mu = m/(3a)$, njegove stranice pa lahko parametriziramo v obliki:

$$\begin{aligned}
K_1\colon &\quad x = t\,,\ y = 0,\ z = 0 \quad ; \quad -\frac{a}{2} \le t \le \frac{a}{2}\,,\\
K_2\colon &\quad x = t\,,\ y = \sqrt{3}\left(t + \frac{a}{2}\right)\,,\ z = 0 \quad ; \quad -\frac{a}{2} \le t \le 0\,,\\
K_3\colon &\quad x = t\,,\ y = \sqrt{3}\left(\frac{a}{2} - t\right)\,,\ z = 0 \quad ; \quad - \le t \le \frac{a}{2}\,.
\end{aligned}$$

Iskani vztrajnostni momemt je tako enak:

$$J = \mu \int_{K_1} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}s + \mu \int_{K_2} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}s + \mu \int_{K_3} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}s\,.$$

Na K_1 je $y = z = 0$, zato je $\int_{K_1} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}s = 0$. Zaradi simetrije okoli osi y je $\int_{K_2} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}s = \int_{K_3} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}s$. Torej je dovolj izračunati slednji integral. Na stranici K_3 je:

$$\dot{x} = 1\,, \quad \dot{y} = -\sqrt{3}\,, \quad \dot{z} = 0\,, \quad \text{torej} \quad \mathrm{d}s = 2\,\mathrm{d}t\,.$$

Sledi:

$$J = 2\mu \int_{K_3} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}s = 3\mu \int_0^{a/2} (a - 2t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{\mu a^3}{2} = \frac{ma^2}{6}\,.$$

3. Uporabimo Gaussov izrek, po katerem je iskani iztok enak:

$$\Phi = \iiint_{\substack{x^2+y^2<1\\ 3<z<4}} \operatorname{div} \vec{R}\,\mathrm{d}V\,.$$

Iz:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial x} &= \frac{2yz}{x+y+z} - 2x\,,\\
\frac{\partial Y}{\partial y} &= \frac{2xz}{x+y+z} - 2y\,,\\
\frac{\partial Z}{\partial z} &= 2z + 2\frac{(x+y)^2}{x+y+z}
\end{aligned}$$

po krajšem računu dobimo $\operatorname{div} \vec{R} = 2z$. Sledi:

$$\Phi = 2 \iiint_{\substack{x^2+y^2<1\\ 3<z<4}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Po uvedbi cilindričnih koordinat:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,; \qquad r > 0\,, \quad 0 \le \varphi < 2\pi\,; \qquad J = r$$

dobimo:

$$\Phi = 2 \iiint_{\substack{0\le r<1\\ 3<z<4}} rz\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = 4\pi \int_0^1 r\,\mathrm{d}r \int_3^4 z\,\mathrm{d}z = 7\pi\,.$$

4. Pri $z = i$ je $1 + e^{iz} = 1 + 1/e \neq 0$, zato je tam pol druge stopnje. Koeficienta glavnega dela Laurentove vrste sta enaka:

$$c_{-2} = \lim_{z \to i} (z-i)^2 f(z) = \left. \frac{1}{1+e^{iz}} \right|_{z=i} = \frac{e}{e+1}\,,$$

$$c_{-1} = \lim_{z \to i} \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right|_{z=i} \Big[(z-i)^2 f(z) \Big] = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right|_{z=i} \frac{1}{1+e^{iz}} = - \left. \frac{i\, e^{iz}}{\big(1+e^{iz}\big)^2} \right|_{z=i} = - \frac{ie}{(e+1)^2}\,.$$

Z drugimi besedami, glavni del Laurentove vrste je:

$$-\frac{ie}{(e+1)^2(z-i)^2} + \frac{e}{(e+1)(z-i)}\,.$$

5. Substitucija $z = e^{it}$, $\sin t = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$, nam da:

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{\sin t \,\mathrm{d}t}{5 - 3\sin t} = \oint_K f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

kjer je K pozitivno orientirana enotska krožnica, funkcija f pa je definirana po predpisu:

$$f(z) = \frac{i(z^2-1)}{z(3z^2 - 10iz - 3)} = \frac{i(z^2-1)}{z(3z-i)(z-3i)}\,.$$

Funkcija f ima tri singularnosti: 0, $i/3$ in $3i$. Le prvi dve ležita znotraj enotskega kroga, zato velja:

$$I = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}\left(f, \frac{i}{3}\right) \right]\,.$$

Ker gre obakrat za pol prve stopnje, je:

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z\, f(z) = \left. \frac{i(z^2-1)}{3z^2 - 10iz - 3} \right|_{z=0} = \frac{i}{3}\,,$$

$$\operatorname{Res}\left(f, \frac{i}{3}\right) = \lim_{z \to i/3} \left(z - \frac{i}{3}\right) f(z) = \left. \frac{i(z^2-1)}{3z(z-3i)} \right|_{z=i/3} = -\frac{5i}{12}\,.$$

Sledi $I = \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$.

6. Iskana funkcija je:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{-\pi i/6}\big(z - \sqrt{3} - i\big) + \sqrt{3} + i = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)\big(z - \sqrt{3} - i\big) + \sqrt{3} + i = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) z - 2 + \sqrt{3} + i\,. \end{aligned}$$

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 26. 8. 2014

Praktična matematika

1. Najprej opazimo, da je $f(x,y,z) > 4 \cdot 2^2 \cdot 1^4 = 16$, zato je funkcija navzdol omejena. Poleg tega pa gre, ko se funkcija bliža robu definicijskega območja (torej ko gre $x \downarrow 4$, $y \downarrow 2$ ali $z \downarrow 1$), vsaj ena od koordinat proti neskončno, zato gre tudi $f(x,y,z)$ proti neskončno. To pomeni, da minimum funkcije na definicijskem območju sovpada z minimumom na zaprtem in omejenem podobmočju in da je zavzet v notranji, se pravi stacionarni točki. To lahko poiščemo z metodo Lagrangeovih multiplikatorjev:

$$
\begin{aligned}
L &= xy^2z^4 - \lambda\left(\frac{4}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z}\right), \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= y^2z^4 + \frac{4\lambda}{x^2}, \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 2xyz^4 + \frac{2\lambda}{y^2}, \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= 4xy^2z^3 + \frac{\lambda}{z^2}.
\end{aligned}
$$

Izrazimo:

$$
-\frac{4\lambda}{xy^2z^4} = x = 4y = 16z
$$

Ko to vstavimo še v pogoj $4/x + 2/y + 1/z = 1$, dobimo:

$$
\min_{\substack{4/x+2/y+1/z=1\\ x>4,y>2,y>1}} f(x,y,z) = f\left(28,\ 7,\ \frac{7}{4}\right) = \frac{7^7}{4^3} = \frac{823543}{64} = 12867{\dot{}}859375\,.
$$

2. Izračunajmo:

$$
\vec{r} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos(2t) \\ \sin(3t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \cos t \\ -2\sin(2t) \\ 3\cos(3t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -4\cos(2t) \\ -9\sin(3t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

Smerni vektor binormale je vzporeden z vektorskim produktom:

$$
\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}
$$

zato je binormala določena z enačbo:

$$
\frac{X}{3} = -Y\,, \quad Z = 1\,.
$$

3. Z odvajanjem dobimo:

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+9}}\,\frac{e^{x\sqrt{x+9}}}{x+10} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,\frac{e^{x\sqrt{x+1}}}{x+2} + \int_{\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+9}} \frac{y\,e^{xy}}{y^2+1}\,\mathrm{d}y\,.$$

Sledi:

$$F'(0) = \frac{1}{60} - \frac{1}{4} + \int_1^3 \frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = -\frac{7}{30} + \frac{\ln 5}{2} \doteq 0{\cdot}571\,.$$

4. Po Gaussovem izreku je iskani iztok enak:

$$\Phi = \iiint_{0<z<2-\sqrt{x^2+y^2}} 4z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Z uporabo cilindričnih koordinat:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi & \qquad r &> 0 \\ y &= r\sin\varphi & \qquad 0 \le \varphi &< 2\pi \\ z &= z & \qquad J &= r \end{aligned}$$

dobimo:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iiint_{\substack{0<z<2-r\\ r>0\\ 0\le\varphi<2\pi}} 4rz\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\ &= \iiint_{\substack{0\le\varphi<2\pi\\ 0<r<2\\ 0<z<2-r}} 4rz\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\ &= 4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r\int_0^{2-r} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r = \\ &= 4\pi\int_0^2 r(2-r)^2\,\mathrm{d}r = \\ &= \frac{16\pi}{3}\,. \end{aligned}$$

5. a) Edina možna singularnost je v izhodišču, saj ima funkcija $z \mapsto e^z - 1$ le tam ničlo, in sicer prve stopnje. Zato ima funkcija $z \mapsto \frac{1}{z(e^z-1)}$ pol druge stopnje. Za to funkcijo najprej izračunajmo naslednji koeficient v Laurentovi vrsti:

$$c_{-2} = \lim_{z\to 0} z^2\,\frac{1}{z(e^z-1)} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = 1\,.$$

To pa pomeni, da je c_{-2} za celotno funkcijo f enak nič. Torej ima f pol kvečjemu prve stopnje in njen residuum lahko izračunamo kar kot:

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z\,f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z - e^z + 1}{z(e^z-1)} = \lim_{z\to 0}\frac{z + 1 - \bigl(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\bigr)}{z\bigl(z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\bigr)} = -\frac{1}{2}\,,$$

od koder sledi, da f v izhodišču ima pol prve stopnje.

b) Ker je $|5i| < 6$, dana krožnica vsebuje izhodišče, zato je iskani integral enak $-\pi$.

2012/13

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 27. 11. 2012

Praktična matematika

1. Očitno je $d\big((x,y),(x,y)\big) = 0$. Če je $d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |x_1 + y_1 - x_2 - y_2| = 0$, to pomeni, da je $|x_1 - x_2| = 0$ in $|x_1 + y_1 - x_2 - y_2| = 0$, od koder najprej dobimo $x_1 = x_2$, nato pa še $y_1 = y_2$.

Simetrija sledi iz sodosti absolutne vrednosti:

$$\begin{aligned} d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) &= |x_1 - x_2| + |x_1 + y_1 - x_2 - y_2| = \\ &= |-(x_1 - x_2)| + |-(x_1 + y_1 - x_2 - y_2)| = \\ &= |x_2 - x_1| + |x_2 + y_2 - x_1 - y_1| = \\ &= d\big((x_2,y_2),(x_1,y_1)\big)\,. \end{aligned}$$

Za dokaz trikotniške neenakosti pa upoštevamo trikotniško neenakost za absolutno vrednost:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_3| &= |(x_1 - x_2) + (x_2 - x_3)| \le |x_1 - x_2| + |x_1 - x_3| \\ |x_1 + y_1 - x_3 - y_3| &= |(x_1 + y_1 - x_2 - y_2) + (x_2 + y_2 - x_3 - y_3)| \le \\ &\le |x_1 + y_1 - x_2 - y_2| + |x_1 + y_1 - x_3 - y_3| \end{aligned}$$

in ko seštejemo obe oceni, dobimo želeno trikotniško neenakost $d\big((x_1,y_1),(x_3,y_3)\big) \le d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) + d\big((x_2,y_2),(x_3,y_3)\big)$.

Iskana krogla je množica točk (x,y), ki zadoščajo neenačbi $|x-3| + |x+y-5| < 2$, ki jo lahko zapišemo tudi v obliki $|x-3| < 2 - |x+y-5|$, ta pa je ekvivalentna sistemu neenačb:

$$x - 3 < 2 - |x+y-5|\,, \quad 3 - x < 2 - |x+y-5|$$

oziroma:

$$|x+y-5| < 5 - x\,, \quad |x+y-5| < x - 1\,,$$

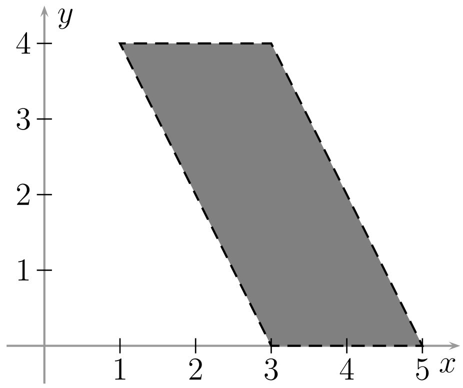
kar je spet ekvivalentno sistemu:

$$\begin{aligned} x + y - 5 &< 5 - x \\ 5 - x - y &< 5 - x \\ x + y - 5 &< x - 1 \\ 5 - x - y &< x - 1\,, \end{aligned}$$

tega pa lahko zapišemo v obliki:

$$0 < y < 4 \quad \text{in} \quad 6 < 2x + y < 10$$

Slika:



2. Notranjost: $(-\infty, 0)$, rob: $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

3. a) Rešitve dane enačbe ustrezajo ničlam funkcije $g(x) = f(x) - x$. Ker je g elementarna, je zvezna in ker je $g'(x) = -2\,e^{-x} - 1 < 0$, je g strogo padajoča. Nadalje je $g(0) = 2 > 0$ in $g(3) \doteq -0{\cdot}9 < 0$, zato ima g na intervalu $(0, 2)$ natanko eno ničlo, na intervalih $(-\infty, 0]$ in $[3, \infty)$ pa nobene: na prvem je $g(x) \geq g(0) > 0$, na drugem pa je $g(x) \leq g(3) < 0$. Torej ima g na celi realni osi natanko eno ničlo oz. dana enačba natanko eno rešitev.

b) Tak metrični prostor je npr. interval $[1, \infty)$. Za poljuben $x \geq 1$ namreč velja $f(x) \geq 2 \geq 1$ in še $|f'(x)| = 2\,e^{-x} \leq 2\,e^{-1} \doteq 0{\cdot}736 < 1$.

c) Za začetni približek $x_0 = 1$ dobimo naslednje zaporedje približkov:

$$1\,,\ 2{\cdot}73576\,,\ 2{\cdot}12969\,,\ 2{\cdot}23775\,,\ 2{\cdot}21340\,,\ 2{\cdot}21866\,,\ 2{\cdot}21751\,,\ 2{\cdot}21776\,.$$

Ker je $f'(x) = -2\,e^{-x} < 0$, rešitev enačbe leži med poljubnima zaporednima približkoma, torej v zahtevani natančnosti znaša $2{\cdot}218$.

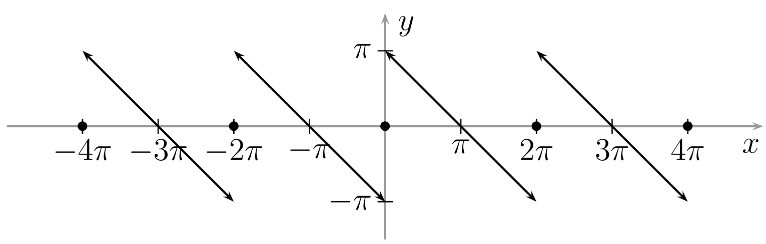
4. Iz:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}$$

dobimo:

$$f(x) = 2\left[\sin x + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \cdots\right].$$

Graf:



5. Velja:

$$\bar{f}(0) = \bar{f}(4) = f(4) = 5\,,$$
$$\bar{f}(1) = \bar{f}(3) = \bar{f}(5) = \frac{1}{2}\big(\lim_{x\downarrow 3} f(x) + \lim_{x\uparrow 5} f(x)\big) = \frac{1}{2}\big(f(3) + f(5)\big) = 5\,.$$

6. $f_x(x,y) = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$

$g_x(x,y) = \left(3 - \dfrac{3}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}\right) e^{1/x}, \quad g_y(x,y) = 2y\, e^{1/x},$

$h_x(x,y) = \dfrac{1}{x}, \quad h_y(x,y) = -\operatorname{tg} y.$

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 22. 1. 2013

Praktična matematika

1. Najprej iz verižnega pravila dobimo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = e^{2v}\,\frac{\partial z}{\partial x} + (1 + e^{2v})\,\frac{\partial z}{\partial y}\,,\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 2u\,e^{2v}\,\frac{\partial z}{\partial x} + 2u\,e^{2v}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,.\end{aligned}$$

Zdaj moramo to izraziti še z x in y. Velja $u = y - x$, torej $e^{2v} = x/(y - x)$. Sledi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{x}{y-x}\,\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{y-x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,,\\ \frac{\partial z}{\partial v} &= 2x\,\frac{\partial z}{\partial x} + 2x\,\frac{\partial z}{\partial y}\,.\end{aligned}$$

2. Iz parcialnih odvodov:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 + 3x^2$$

dobimo, da je v notranjosti ekstremov ni. Ekstreme na robu, ki ima enačbo $x^2 + (y - 2)^2 = 1$, lahko poiščemo na vsaj dva načina.

Prvi način: vse izrazimo z y. Glede na to, da je $x = \pm\sqrt{1 - (y - 2)^2}$, rob razpade na dva dela, ki se stikata v dveh ogliščih, kjer velja:

$$f(0, 1) = 2\,, \qquad f(0, 3) = 6\,.$$

V notranjosti obeh dobljenih delov roba pa velja:

$$z = f(x, y) = \Big(2 + 3\big(1 - (y - 2)^2\big)\Big)y = -3y^3 + 12y^2 - 7y$$

Poiskati moramo stacionarne točke te funkcije za $1 < y < 3$. Iz $\mathrm{d}z/\mathrm{d}y = -9y^2 + 24y - 7$ dobimo $y = 1/3$ in $y = 7/3$. Ker mora biti $1 \le y \le 3$, v poštev pride le $y = 7/3$. Za to vrednost spremenljivke y najprej izračunamo $x = \pm 2\sqrt{2}/3$, nato pa še $z = 98/9$.

Minimum naše funkcije je torej 2, maksimum pa $98/9 \doteq 10{\cdot}889$.

Drugi način: z Lagrangeovimi multiplikatorji. Nastavimo:

$$L = (2 + 3x^2)y - \lambda\big(x^2 + (y - 2)^2\big)$$

in dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 6xy - 2\lambda x &= 0\,,\\ 2 + 3x^2 - 2\lambda(y - 2) &= 0\,,\\ x^2 + (y - 2)^2 &= 1\,.\end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo, da mora biti bodisi $x = 0$ bodisi $\lambda = 3y$. Če je $x = 0$, iz tretje enačbe dobimo, da mora biti bodisi $y = 1$ bodisi $y = 3$, če je $\lambda = 3y$, pa iz druge enačbe dobimo $2 + 3x^2 - 6y(y-2) = 0$. Ko od tega odštejemo trikratnik tretje enačbe, dobimo $2 - 6y(y-2) - 3(y-2)^2 = -3$ oziroma $5 - (y-2)(9y-6) = 0$ oziroma $-9y^2 + 24y - 7 = 0$, kar nam spet da $y = 1/3$ in $y = 7/3$. Dobimo torej natančno iste kandidate za ekstreme kot pri prvem načinu.

3. Velja:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \left(e^t,\ 2\,e^{3t/2},\ 2\,e^{2t}\right), \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right\| = \sqrt{e^{2t} + 4\,e^{3t} + 4\,e^{4t}} = e^t + 2\,e^{2t}\,.$$

Sledi:

$$\vec{r}\,' = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{e^t + 2\,e^{2t}}\left(e^t,\ 2\,e^{3t/2},\ 2\,e^{2t}\right) = \left(\frac{1}{1+2\,e^t},\ \frac{2\,e^{t/2}}{1+2\,e^t},\ \frac{2\,e^t}{1+2\,e^t}\right).$$

4. Najprej iz druge enačbe izrazimo $y = 1 - x^2$. Ko to vstavimo v prvo enačbo, dobimo:

$$(1+x)(1-x^2) = (1-x)z\,.$$

Ker je $x \neq 1$, lahko delimo z $1 - x$ in dobimo iskano parametrizacijo:

$$y = 1 - x^2\,, \qquad z = (1+x)^2\,.$$

Pri $x = -2$ je $y = -3$ in $z = 1$. Nadalje, če s piko označimo odvod po x, velja:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= (1, -2x, 2(1+x)) = (1, 4, -2)\,, \\ \ddot{\vec{r}} &= (0, -2, 2)\,, \\ \dddot{\vec{r}} &= (0, 0, 0)\,. \end{aligned}$$

V naši točki torej velja:

$$\kappa = \frac{\left\|(1,4,-2) \times (0,-2,2)\right\|}{\left\|(1,4,-2)\right\|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{21\sqrt{7}} \doteq 0'0509\,.$$

Ker je povsod $\dddot{\vec{r}} = 0$, je torzijska ukrivljenost ω povsod enaka nič. Naša krivulja je torej ravninska. Iz parametrizacije se da razbrati, da leži na ravnini $-2x + y + z = 2$.

5. Najprej izrazimo $z = 3 - e^{xy-6}$, torej v dani točki velja $z = 2$. Nato izračunamo še:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -y\,e^{xy-6}\,, & p &= -3\,, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -x\,e^{xy-6}\,, & q &= -2\,, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -y^2\,e^{xy-6}\,, & r &= -9\,, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &= -(1+xy)\,e^{xy-6}\,, & s &= -7\,, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -x^2\,e^{xy-6}\,, & t &= -4\,. \end{aligned}$$

Tangentna ravnina: $3X + 2Y + Z = 14$.
Velja $EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2 = 14$, $L = -\dfrac{9}{\sqrt{14}}$, $M = -\dfrac{7}{\sqrt{14}}$ in $N = -\dfrac{4}{\sqrt{14}}$.
Gaussova ukrivljenost: $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\dfrac{13}{196} \doteq -0\text{˙}0663$.

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 16. 4. 2013

Praktična matematika

1. Velja:

$$
\begin{aligned}
F'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)} - \\
- \frac{1}{x}\sqrt{(1-x\ln x)(1+\ln x)\big(1-(\ln x)^2\big)} - \\
- \int_{\ln x}^{x/2} \frac{y\sqrt{(1+y)(1-y^2)}}{2\sqrt{(1-xy)}}\,\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}
$$

Sledi:

$$F'(1) = \frac{3}{8} - 1 - \frac{1}{2}\int_0^{1/2} y(1+y)\,\mathrm{d}y = -\frac{5}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{48} = -\frac{17}{24}\,.$$

2. Označimo naš integral z I. S substitucijo:

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}, \quad x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y = \sqrt{uv}, \quad J = \frac{1}{2v}$$

dobimo:

$$I = \frac{1}{2}\iint_{\substack{2<u<3\\1<v<2}} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\,.$$

3. a) Označimo iskani integral z I_1. Z upoštevanjem sodosti, substitucijo $t = x^2$ in prevedbo na funkcijo beta dobimo:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 2\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{\Gamma(2)} = \\
&= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} = \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

b) Velja:

$$\int_0^\infty (x+2)^2\,e^{-x+1}\,\mathrm{d}x = e\int_0^\infty (x^2+4x+4)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = e\,(2! + 4\cdot 1! + 4\cdot 0!) = 10e\,.$$

4. Dani integral je dvojni integral po območju, določeno s pogojema:

$$1 < x < 2\,, \qquad x^2 < y < 2x\,,$$

ki sta ekvivalentna pogojem:

$$1 < y < 4\,, \qquad \frac{y}{2} < x < \sqrt{y}\,, \qquad 1 < x < 2\,.$$

Za $y \leq 2$ sta druga dva pogoja ekvivalentna pogoju $1 < x < \sqrt{y}$, za $y \geq 2$ pa pogoju $\frac{y}{2} < x < \sqrt{y}$. Integral z zamenjanim vrstnim redom je torej vsota integralov:

$$\int_1^2 \int_1^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_2^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

5. Nalogo najlažje rešimo z vpeljavo sferičnih koordinat:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\cos\varphi \\ y &= r\cos\theta\sin\varphi \\ z &= r\sin\theta \\ J &= r^2\cos\theta\,, \end{aligned}$$

čeprav gre tudi s cilindričnimi. Masa:

$$m = c\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2<1\\ z>0}} z^2\,\mathrm{d}z = c\iiint_{\substack{0\le r<1\\ 0\le\varphi<2\pi\\ 0\le\theta\le\pi/2}} r^4\sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2c\pi}{15}\,.$$

Zaradi simetrije je težišče v točki $T^*(0,0,z^*)$, kjer je:

$$z^* = \frac{c}{m}\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2<1\\ z>0}} z^3\,\mathrm{d}z = \frac{c}{m}\iiint_{\substack{0\le r<1\\ 0\le\varphi<2\pi\\ 0\le\theta\le\pi/2}} r^5\sin^3\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{c\pi}{12m} = \frac{5}{8}\,.$$

Vztrajnostni moment okoli osi z pa je:

$$\begin{aligned} J_z &= c\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2<1\\ z>0}} (x^2+y^2)z^2\,\mathrm{d}z = c\iiint_{\substack{0\le r<1\\ 0\le\varphi<2\pi\\ 0\le\theta\le\pi/2}} r^6\sin^2\theta\cos^3\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= c\iiint_{\substack{0\le r<1\\ 0\le\varphi<2\pi\\ 0\le\theta\le\pi/2}} r^6(\sin^2\theta - \sin^4\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4c\pi}{105}\,. \end{aligned}$$

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 13. 6. 2013

Praktična matematika

1. a) Iz $\dfrac{\vec{r}}{r^2} = \dfrac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$ dobimo:

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Izračunajmo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2+z^2} &= \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,,\\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2+z^2} &= \frac{z^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,,\\
\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{x^2+y^2+z^2} &= \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Po seštetju in krajšanju končno dobimo:

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{r^2}\,.$$

b) Če pišemo $\vec{a} = (u,v,w)$, lahko dano skalarno polje zapišemo v obliki:

$$\langle\vec{r},\vec{a}\rangle - r^2 = ux + vy + wz - x^2 - y^2 - z^2\,.$$

Parcialni odvodi so:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\langle\vec{r},\vec{a}\rangle - r^2\Big) = u - 2x\,,\quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\langle\vec{r},\vec{a}\rangle - r^2\Big) = v - 2y\,,\quad \frac{\partial}{\partial z}\Big(\langle\vec{r},\vec{a}\rangle - r^2\Big) = w - 2z\,.$$

Sledi:

$$\operatorname{grad}\big(\langle\vec{r},\vec{a}\rangle - r^2\big) = \vec{a} - 2\vec{r}\,.$$

2. *Prvi način*: neposredno. Integral razdelimo na tri dele: naj gre K_1 premočrtno od $(1,0,0)$ proti $(0,1,0)$, K_2 premočrtno od $(0,1,0)$ proti $(0,0,1)$ in K_3 premočrtno od $(0,0,1)$ proti $(1,0,0)$. Na K_1 vpeljemo parametrizacijo:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix}1-t\\ t\\ 0\end{bmatrix}\,,\quad \mathrm{d}\vec{r} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\mathrm{d}t\,,\quad \vec{R} = \begin{bmatrix}t^2\\ -t^2+2t-1\\ 1-2t\end{bmatrix}\,;\quad t \text{ gre od } 0 \text{ do } 1\,,$$

iz katere sledi:

$$\int_{K_1}\vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1(-2t^2+2t-1)\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{3}\,.$$

Podobno dobimo še $\displaystyle\int_{K_2} \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_{K_3} \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{2}{3}$. Dani integral je torej enak -2.

Drugi način: s pomočjo Stokesovega izreka. Dana krivulja omejuje trikotnik, ki ga določajo enačba in neenačbe:

$$x + y + z = 1\,, \quad x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,, \quad z \geq 0\,.$$

Parametriziramo ga lahko v obliki:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 - x - y \end{bmatrix}\,; \qquad x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,, \quad x + y \leq 1\,.$$

Preverimo, ali izbrana parametrizacija porodi orientacijo, ki je skladna orientaciji roba. Velja:

$$\vec{r}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\,, \quad \vec{r}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\,, \quad \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\,, \quad \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\,.$$

Nadalje na K_1 (glej prvi način) velja:

$$\vec{r}_t = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\,, \quad \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\,.$$

Vektorski produkt $\vec{t} \times \vec{N} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ kaže stran od trikotnika, saj je za dovolj majhen $\varepsilon > 0$ točka $\vec{r} + \varepsilon \vec{t} \times \vec{N}$ od trikotnika oddaljena za red velikosti ε, medtem ko točka $\vec{r} - \varepsilon \vec{t} \times \vec{N}$ leži na trikotniku. Zato parametrizaciji trikotnika in njegovega roba določata skladni orientaciji teh dveh objektov.

Preden uporabimo Stokesov izrek, potrebujemo še rotor. Velja:

$$\operatorname{rot} \vec{R} = \begin{bmatrix} -2y - 2z \\ -2z - 2x \\ -2x - 2y \end{bmatrix}\,,$$

na izbranem trikotniku, ki ga označimo z S, pa je:

$$\operatorname{rot} \vec{R} = \begin{bmatrix} 2x - 2 \\ 2y - 2 \\ -2 \end{bmatrix}\,,$$

Torej je:

$$\int_K \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \langle \operatorname{rot} \vec{R}, \vec{N} \rangle \,\mathrm{d}P = \iint_{\substack{x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1}} \left\langle \begin{bmatrix} 2x - 2 \\ 2y - 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = -\iint_{\substack{x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 1}} 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= -2\,,$$

kar je isto kot prej.

3. Integral lahko izračunamo kar tako kot v realnem, saj ima integrand primitivno funkcijo – s substitucijo $w = z^2 + 1$, $\mathrm{d}w = 2z\,\mathrm{d}z$, dobimo:

$$\int \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}w}{w^2} = -\frac{1}{2w} + C = -\frac{1}{2(z^2+1)} + C\,.$$

Za vrednost iskanega integrala je pomembno le še to, da gre integracijska krivulja K od $-2i$ do $2i$. Velja torej:

$$\int_K \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)} = -\left.\frac{1}{2(z^2+1)}\right|_{-2i}^{2i} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0\,.$$

Opomba. Integral bi lahko izračunali tudi z vpeljavo substitucije v določeni integral. Dobili bi integral po novi krivulji, ki bi šla od -3 do -3 in bi bila torej sklenjena. In čeprav bi šla okoli pola, je integral enak nič, ker ima novi integrand $w \mapsto 1/(2w^2)$ primitivno funkcijo $w \mapsto -1/(2w)$.

4. Števec ima v izhodišču ničlo druge stopnje. Iz Taylorjeve vrste:

$$z - \sin z = \frac{z^3}{6} - \frac{z^5}{120} + \cdots$$

pa dobimo, da ima imenovalec ničlo tretje stopnje. Torej ima funkcija f pol prve stopnje. Zato glavni del Laurentove vrste sestavlja le člen $c_{-1}z^{-1}$, kjer je:

$$c_{-1} = \lim_{z\to 0} z\,f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^3}{z - \sin z} = \lim_{z\to 0}\frac{z^3}{\frac{z^3}{6} - \cdots} = -6\,.$$

5. Označimo $f(z) = z^2/(z^4+16)$. Ker je $\lim_{|z|\to\infty} z\,f(z) = 0$, je integral enak vsoti ostankov (residuov) funkcije f na zgornji polravnini, pomnoženi z $2\pi i$. Ker je $z^4 + 16 = 0$ pri $z^2 = \pm 4i$, torej pri $z = \sqrt{2}(1+i)$, $z = \sqrt{2}(1-i)$, $z = \sqrt{2}(-1+i)$ in $z = \sqrt{2}(-1-i)$, je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+16}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\Big[\mathrm{Res}\big(f, \sqrt{2}(1+i)\big) + \mathrm{Res}\big(f, \sqrt{2}(-1+i)\big)\Big]\,.$$

Ker ima imenovalec $\big(z-\sqrt{2}(1+i)\big)\big(z-\sqrt{2}(1-i)\big)\big(z-\sqrt{2}(-1+i)\big)\big(z-\sqrt{2}(-1-i)\big)$ same enostavne ničle, so vsi poli prve stopnje. Torej velja:

$$\mathrm{Res}\big(f, \sqrt{2}(1+i)\big) = \left.\frac{z^2}{\big(z-\sqrt{2}(-1+i)\big)\big(z-\sqrt{2}(1-i)\big)\big(z-\sqrt{2}(-1-i)\big)}\right|_{z=1+i} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{16}$$

in:

$$\mathrm{Res}\big(f, \sqrt{2}(-1+i)\big) = \left.\frac{z^2}{\big(z-\sqrt{2}(1+i)\big)\big(z-\sqrt{2}(1-i)\big)\big(z-\sqrt{2}(-1-i)\big)}\right|_{z=1+i} = \frac{\sqrt{2}(-1-i)}{16}\,.$$

Sledi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+16}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \left(\frac{\sqrt{2}(1-i)}{16} + \frac{\sqrt{2}(-1-i)}{16} \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\,.$$

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 27. 6. 2013

Praktična matematika

1. $f_x(x,y) = (-6y - y^2 + 6xy)\,e^{-x}$, $\quad f_y(x,y) = (2y - 6x)\,e^{-x}$.
Stacionarni točki: $T_1(0,0)$, $T_2(2,6)$.
$f_{xx}(x,y) = (12y + y^2 + 6xy)\,e^{-x}$, $\quad f_{xy}(x,y) = (-6 - 2y + 6x)\,e^{-x}$, $\quad f_{yy}(x,y) = 2\,e^{-x}$.
V T_1 je $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = -6$, $f_{yy} = 2$ in $K = -36$, zato tam ni ekstrema.
V T_2 pa je $f_{xx} = 180\,e^{-2}$, $f_{xy} = -6\,e^{-2}$, $f_{yy} = 2\,e^{-2}$ in $K = 324\,e^{-4}$, zato je tam lokalni minimum.

2. Krivuljo lahko parametriziramo z y:

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \operatorname{ch} y\,, \quad y = y\,, \quad z = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \operatorname{sh} y\,.$$

Po odvajanju in vstavljanju $y = 0$ dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \operatorname{sh} y = 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = 1\,, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \operatorname{ch} y = 1\,.$$

Če torej s piko označimo odvod po y, je $\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Po ponovnem odvajanju dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \operatorname{ch} y = 1\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}y^2} = 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}y^2} = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \operatorname{sh} y = 0\,, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in še:

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3} = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \operatorname{sh} y = 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}y^3} = 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}y^3} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \operatorname{ch} y = 1\,, \quad \dddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sledi:

$$\|\dot{\vec{r}}\| = \sqrt{2}\,, \quad \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\,, \quad \|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| = \sqrt{2}\,, \quad \kappa = \frac{1}{2}$$

in še:

$$[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}] = -1\,, \quad \omega = -\frac{1}{2}\,.$$

3. Označimo dano zgornjo polovico sfere z S_+. Iz standardne parametrizacije:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta \end{bmatrix}\,; \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\,, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

dobimo:

$$\vec{r}_\theta = \begin{bmatrix} -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$E = 1\,, \quad F = 0\,, \quad G = \cos^2\theta\,, \quad EG - F^2 = \cos^2\theta\,.$$

Sedaj lahko izračunamo maso:

$$m = \iint_{S_+} cz\,\mathrm{d}P = c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \pi c\,.$$

Zaradi simetrije ima težišče koordinati x in y enaki nič. Za izračun koordinate z potrebujemo še integral:

$$\iint_{S_+} cz^2\,\mathrm{d}P = c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi c}{3}\,,$$

iz katerega dobimo $z^* = 2/3$. Z drugimi besedami, težišče je na dveh tretjinah višine.

4. Iz:

$$\operatorname{rot}\begin{bmatrix} 2\,x^a\,e^{y-z} \\ x^b\,e^{y-z} \\ -x^c\,e^{y-z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x^b - x^c)\,e^{y-z} \\ (c\,x^{c-1} - 2\,x^a)\,e^{y-z} \\ (bx^{b-1} - 2\,x^a)\,e^{y-z} \end{bmatrix}$$

dobimo, da je polje potencialno natanko tedaj, ko je $b = c$, $a = c-1$, $c = 2$, $a = b-1$ in $b = 2$, torej natanko tedaj, ko je $a = 1$, $b = 2$ in $c = 2$. Iz nedoločenih integralov:

$$\begin{aligned} \int 2x\,e^{y-z}\,\mathrm{d}x &= x^2\,e^{y-z} + C_1(y,z)\,, \\ \int x^2\,e^{y-z}\,\mathrm{d}y &= x^2\,e^{y-z} + C_2(x,z)\,, \\ -\int x^2\,e^{y-z}\,\mathrm{d}z &= x^2\,e^{y-z} + C_2(x,y) \end{aligned}$$

dobimo potencial $u = x^2\,e^{y-z} + C$.

5. a) Pri $z = \pm\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, so poli prve stopnje, pri $z = \pm\pi i/2$ pa sta pola druge stopnje.

b) Dana krožnica obkroži singularnosti v $\pi/2$ in $\pi i/2$. Ostanek v prvi singularnosti je enak:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(f, \frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{z\to\pi/2}\left(z - \frac{\pi}{2}\right) f(z) = \lim_{z\to\pi/2}\frac{z - \frac{\pi}{2}}{\cos z(4z^2 + \pi^2)} = \frac{1}{2\pi^2}\lim_{z\to\pi/2}\frac{z - \frac{\pi}{2}}{\cos z} = \\ &= -\frac{1}{2\pi^2}\,, \end{aligned}$$

ostanek v drugi singularnosti pa se izraža v obliki:

$$\operatorname{Res}\left(f,\ \frac{\pi i}{2}\right)=\lim_{z\to\pi i/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big[(z-\pi i)^2\,f(z)\Big]\,.$$

Iz zapisa:

$$f(z)=\frac{1}{\cos z(2z+\pi i)^2(2z-\pi i)^2}$$

dobimo:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(f,\frac{\pi i}{2}\right)&=\lim_{z\to\pi i/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\cos z\,(2z+\pi i)^2}=\\&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\pi i/2}\Big[\cos^{-1}z\,(2z+\pi i)^{-2}\Big]=\\&=\Big(\cos^{-2}z\ \sin z\,(2z+\pi i)^{-2}-4\cos^{-1}z\,(2z+\pi i)^{-3}\Big)\Big|_{z=\pi i/2}\,.\end{aligned}$$

Izračunajmo:

$$\cos\frac{\pi i}{2}=\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}=\frac{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}{2}\,,\quad \sin\frac{\pi i}{2}=i\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}=\frac{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}{2}\,i\,,$$

Sledi:

$$\operatorname{Res}\left(f,\ \frac{\pi i}{2}\right)=-\left(\frac{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}{2\pi^2\big(e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}\big)^2}+\frac{1}{\pi^3\big(e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}\big)}\right)i$$

Po izreku o ostankih je iskani integral enak:

$$\begin{aligned}\oint_K f(z)\,\mathrm{d}z&=2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(f,\ \frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{Res}\left(f,\ \frac{\pi i}{2}\right)\right]=\\&=\frac{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}{\pi\big(e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}\big)^2}+\frac{2}{\pi^2\big(e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}\big)}-\frac{i}{\pi}\,.\end{aligned}$$

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 29. 8. 2013

Praktična matematika

1. Iz:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{n} - \frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \\
&= \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{2}{\pi n^2} & ;\ n = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ \frac{1}{n} & ;\ n = 2, 4, 6, 8, 10, \ldots \\ \frac{1}{n} + \frac{2}{\pi n^2} & ;\ n = 3, 7, 11, 15, \ldots \end{cases}
\end{aligned}$$

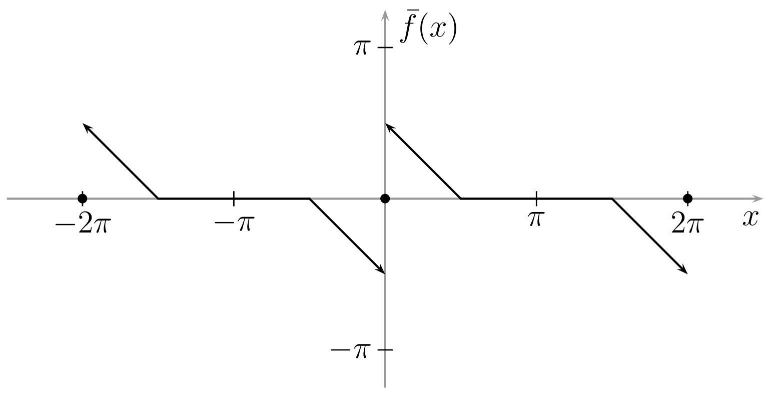
dobimo:

$$\begin{aligned}
\bar{f}(x) = \sin x + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(4x)}{4} + \cdots - \\
- \frac{2}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin(3x)}{3^2} + \frac{\sin(5x)}{5^2} - \frac{\sin(7x)}{7^2} + \cdots\right),
\end{aligned}$$

kjer je $\bar{f}$ periodična s periodo 2π in:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 0 & ;\ -\pi \le x \le -\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} - x & ;\ -\frac{\pi}{2} \le x < 0 \\ 0 & ;\ x = 0 \\ \frac{\pi}{2} - x & ;\ 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & ;\ \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}.$$

Graf:



2. $T_2(x, y) = 2x^2 + 2y$.

3. Najprej krivuljo parametriziramo z z:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{z^2} + z^2 \\ \frac{1}{z} \\ z \end{bmatrix}.$$

Če s piko označimo odvod po z, dobimo:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{z^3} + 2z \\ -\frac{1}{z^2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/4 \\ -1/4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{z^4} + 2 \\ \frac{2}{z^3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/8 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} \frac{24}{z^5} \\ -\frac{6}{z^4} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -3/8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sledi:

$$\|\dot{\vec{r}}\| = \frac{\sqrt{306}}{4}, \qquad \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 13/8 \\ 47/32 \end{bmatrix}, \qquad \|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| = \frac{\sqrt{6897}}{32}, \qquad [\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}] = -\frac{51}{64}.$$

Torej je:

$$\kappa = \frac{2\sqrt{6897}}{306\sqrt{306}} \doteq 0{\cdot}0310, \qquad \omega = -\frac{816}{6897} \doteq 0{\cdot}118.$$

4. Iz standardne parametrizacije enotske sfere $\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ dobimo:

$$\vec{r}_\theta = \begin{bmatrix} -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \cos^2\theta, \quad EG - F^2 = \cos^2\theta$$

in še:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2} = \sqrt{\cos^2\theta + (\sin\theta - 1)^2} = \sqrt{2(1 - \sin\theta)}$$

Sledi:

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1} u \,\mathrm{d}P = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sqrt{2(1-\sin\theta)}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

S substitucijo $t = 1 - \sin\theta$ dobimo:

$$\iint_{x^2+y^2+z^2=1} u \,\mathrm{d}P = 2\pi\sqrt{2} \int_0^2 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{16\pi}{3}.$$

5. Uporabimo izrek o ostankih. Iz zapisa:

$$f(z) = \frac{e^z}{9\left(z - \frac{\pi i}{3}\right)\left(z + \frac{\pi i}{3}\right)}$$

je razvidno, da ima funkcija dva pola prve stopnje: enega v $\pi i/3$ in drugega v $-\pi i/3$. Toda le drugi leži znotraj krožnice, po kateri integriramo. Torej je:

$$\oint_K f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f, -\frac{\pi i}{3}\right) .$$

Ker gre za pol prve stopnje, je:

$$\operatorname{Res}\left(f, -\frac{\pi i}{3}\right) = \lim_{z\to -\pi i/3}\left(z + \frac{\pi i}{3}\right) f(z) = \left.\frac{e^z}{z - \frac{\pi i}{3}}\right|_{z=-\pi i/3} = -\frac{\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{2\pi i}{3}} =$$
$$= \frac{3}{4\pi}\left(\sqrt{3} + i\right) .$$

Sledi $\oint_K f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{3}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$.

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 12. 9. 2013

Praktična matematika

1. Najprej izračunamo:

$$f_x(x,y) = -2x\,, \qquad f_y(x,y) = 1\,.$$

Ker odvod po y nikoli ni enak nič, v notranjosti ni stacionarnih točk. Ekstreme na robu pa je možno poiskati na vsaj dva načina.

Prvi način: s pomočjo Lagrangeovih multiplikatorjev. Nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$F = y - x^2 - \lambda(x^2 + y^2)$$

Velja:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2(1+\lambda)x\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - 2\lambda y\,.$$

Torej je bodisi $x = 0$ bodisi $\lambda = -1$. V prvem primeru je $y = \pm 1$, torej izračunamo $f(0,1) = 1$ in $f(0,-1) = -1$. V drugem primeru, ko je $\lambda = -1$, pa dobimo $y = -1/2$ in posledično $x = \pm\sqrt{3}/2$. Torej izračunamo $f\big(-\sqrt{3}/2, -1/2\big) = f\big(\sqrt{3}/2, -1/2\big) = -5/4$. Če torej z D označimo enotski krog, velja:

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}\,,$$
$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = f(0,1) = 1\,.$$

Drugi način: na robu neposredno izrazimo $x^2 = 1 - y^2$, torej iščemo ekstreme funkcije $g(y) = y - 1 + y^2$ za $-1 \le y \le 1$. Velja $g(-1) = -1$ in $g(1) = 1$. Iz odvoda $g'(y) = 1 + 2y$ dobimo stacionarno točko $y = -1/2$, torej izračunamo še $g(-1/2) = -5/4$, se pravi, da je $\min_{-1\le y\le 1} g(y) = g(-1/2) = -5/4$ in $\max_{-1\le y\le 1} g(y) = g(1) = 1$. To se ujema z ekstremi, dobljenimi pri prvem načinu.

2. Velja:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\,, \qquad p = 4\,,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\,, \qquad q = 8\,,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\,, \qquad r = 2\,,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0\,, \qquad s = 0\,,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\,, \qquad t = 2\,.$$

Sledi $EG - F^2 = 1 + p^2 + q^2 = 81$, $L = 2/9$, $M = 0$ in $N = 2/9$.

Gaussova ukrivljenost: $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = \dfrac{4}{6561} \doteq 6{\cdot}097 \cdot 10^{-4}$.

3. V cilindričnih koordinatah:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z$$

telo določajo neenačbe:

$$\sqrt{r} < z < 6 - r\,, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi\,.$$

Neenačba $\sqrt{r} < 6 - r$ velja za $0 \le r < 4$. Tako dobimo ekvivalentna različico teh neenačb, primerno za integriranje:

$$0 \le \varphi < 2\pi\,, \quad 0 \le r < 4\,, \quad \sqrt{r} < z < 6 - r\,.$$

Sledi:

$$V = \iiint\limits_{\substack{0\le\varphi<2\pi\\ 0\le r<4\\ \sqrt{r}<z<6-r}} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^4\bigl(6 - r - \sqrt{r}\bigr)\,\mathrm{d}r = \frac{64\,\pi}{3}\,.$$

Ker je telo simetrično tako v koordinati x kot tudi koordinati y, sta ustrezni koordinati težišča obe enaki nič. Torej je potrebno izračunati le še koordinato z, zanjo pa integral:

$$\iiint\limits_{\substack{0\le\varphi<2\pi\\ 0\le r<4\\ \sqrt{r}<z<6-r}} z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^4\int_{\sqrt{r}}^{6-r} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r = \pi\int_0^4\Bigl[(6-r)^2 - r\Bigr]\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{184\,\pi}{3}\,.$$

Torej je težišče točka $T\left(0, 0, \dfrac{23}{8}\right)$.

4. a) $i/2$, $-i/2$.

b) Krivulja ovije singularnost $i/2$ v nasprotni smeri urinega kazalca, singularnost $-i/2$ pa v smeri urinega kazalca. Če krivuljo označimo s K, sledi:

$$\oint_K f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(f, \frac{i}{2}\right) - \operatorname{Res}\left(f, -\frac{i}{2}\right)\right]\,.$$

Velja:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f, \frac{i}{2}\right) &= \lim_{z\to i/2}\left(z - \frac{i}{2}\right) f(z) = \\
&= \lim_{z\to i/2}\left(z - \frac{i}{2}\right)\frac{1}{4\left(z - \frac{i}{2}\right)\left(z + \frac{i}{2}\right)} = \\
&= \left.\frac{1}{2(2z + i)}\right|_{z=i/2} = \\
&= -\frac{i}{4}
\end{aligned}$$

in podobno:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f, -\frac{i}{2}\right) &= \lim_{z\to -i/2}\left(z+\frac{i}{2}\right) f(z) = \\
&= \lim_{z\to -i/2}\left(z+\frac{i}{2}\right) \frac{1}{4\left(z-\frac{i}{2}\right)\left(z+\frac{i}{2}\right)} = \\
&= \left.\frac{1}{2(2z-i)}\right|_{z=-i/2} = \\
&= \frac{i}{4}\,.
\end{aligned}$$

Torej je $\oint_K f(z)\,\mathrm{d}z = \pi$.

2011/12

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 22. 11. 2011

Praktična matematika

1. Funkcija d ni metrika, ker je npr. $d\big((0,0),(0,1)\big) = 0$.

2. a) Ker za poljubna $m, n \in \mathbb{N}$ velja $\max\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\} > 0$, je res $d(m,n) \geq 0$ in $d(m,n) = 0 \Leftrightarrow m = n$. Simetrija je očitna. Dokažimo še trikotniško neenakost:

$$d(m,p) \leq d(m,n) + d(n,p)\,.$$

Če je $m = p$, je leva stran enaka nič in neenakost je očitna. Nadalje, če je $m = n$ ali $n = p$, velja enakost. Če pa so vsa tri stevila različna, velja:

$$\begin{aligned} d(m,p) &= \max\left\{\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{p}\right\} \leq \\ &\leq \max\Big\{\max\left\{\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{n}\right\}, \max\left\{\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{p}\right\}\Big\} \leq \\ &\leq \max\left\{\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{n}\right\} + \max\left\{\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{p}\right\} = \\ &= d(m,n) + d(n,p)\,. \end{aligned}$$

b) Naj bo $\varepsilon > 0$. Brž ko je $m, n > 1/\varepsilon$, je $d(m,n) < \varepsilon$, torej je zaporedje Cauchyjevo. Ni pa to zaporedje konvergentno: če je namreč $m \in \mathbb{N}$, je $d(m,n) = \frac{1}{m}$, brž ko je $n > m$, se pravi, da m ne more biti limita.

3. a) Če je d maksimum metrika, velja:

$$d(f,g) = \max_{x \in [0,1]} |x^2 - x - 1|\,.$$

Izraz na desni je enak maksimalni absolutni vrednosti funkcije $h(x) = x^2 - x - 1$ v robnih in stacionarnih točkah na $[0,1]$. Funkcija h ima stacionarno točko $1/2$ in velja $h(0) = -1$, $h(1/2) = -5/4$ in $h(1) = -1$. Torej je $d(f,g) = 5/4$.

b) Razdalja $d(f,g_a)$ je enaka maksimalni absolutni vrednosti funkcije $h_a(x) = x^2 - x - a$ v robnih in stacionarnih točkah na $[0,1]$. Tudi funkcija h ima stacionarno točko $1/2$ ter velja $h_a(0) = -a$, $h_a(1/2) = -1/4 - a$ in $h(1) = -a$. Torej velja:

$$d(f,g_a) = \max\left\{|a|, \left|-\tfrac{1}{4} - a\right|\right\} = \begin{cases} -a & ;\ a \leq -\frac{1}{8} \\ a + \frac{1}{4} & ;\ a \geq -\frac{1}{8} \end{cases}$$

in minimum je dosežen pri $a = -1/8$.

4. a) Velja $f'(x) = -\frac{1}{x}$, torej na $[3,4]$ velja $-\frac{1}{3} \leq f'(x) < 0$. To med drugim pomeni tudi, da je f padajoča funkcija. Nadalje velja $f(3) \doteq 3{\dot{}}901388 \in [3,4]$ in $f(4) \doteq 3{\dot{}}613076 \in [3,4]$. Ker je f padajoča, tudi za vsak $x \in [3,4]$ velja $3 \leq f(4) \leq f(x) \leq f(3) \leq 4$, torej f zares slika $[3,4]$ v $[3,4]$. Ker je tam $|f'(x)| \leq \frac{1}{3}$, je f na tem intervalu res skrčitev.

b) Če iteriramo $x_{n+1} = f(x_n)$, za $x_1 = 3$ dobimo:

$$3\,,\ 3{\dot{}}901388\,,\ 3{\dot{}}638668\,,\ 3{\dot{}}708382\,,\ 3{\dot{}}689404\,,\ 3{\dot{}}694535\,,\ 3{\dot{}}693145\ \ldots$$

od koder zaključimo, da je iskani koren v zahtevani natančnosti enak $3{\dot{}}69$.

5. Iz:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \pi\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}\,,$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} x\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{\pi n^2}\Big(\cos(n\pi) - \cos\frac{n\pi}{2}\Big) = \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{n} - \frac{2}{\pi n^2} & ;\ n = 1, 5, 9, 13, \ldots \\ \frac{4}{\pi n^2} & ;\ n = 2, 6, 10, 14, \ldots \\ \frac{1}{n} - \frac{2}{\pi n^2} & ;\ n = 3, 7, 11, 15, \ldots \\ 0 & ;\ n = 4, 8, 12, 16, \ldots \end{cases}\end{aligned}$$

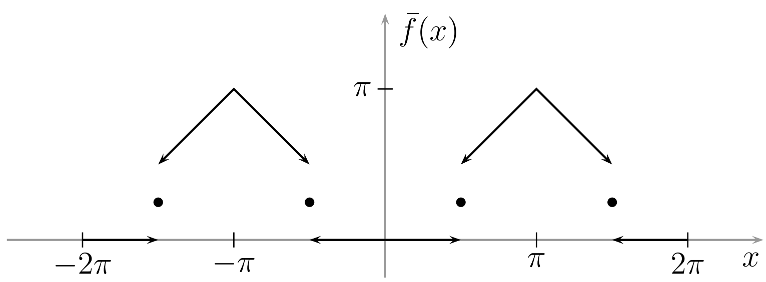
dobimo:

$$\begin{aligned}\bar f(x) = {} & \frac{3\pi}{8} - \\ & - \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)\cos x - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2\pi}\right)\cos(5x) - \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{5^2\pi}\right)\cos(9x) - \cdots \\ & + \frac{1}{\pi}\cos(2x) + \frac{1}{3^2\pi}\cos(6x) + \frac{1}{5^2\pi}\cos(10x) + \cdots \\ & + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2\pi}\right)\cos(3x) + \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{7^2\pi}\right)\cos(7x) + \left(\frac{1}{11} - \frac{2}{11^2\pi}\right)\cos(11x) + \cdots\,,\end{aligned}$$

kjer je $\bar f$ periodična s periodo 2π in:

$$\bar f(x) = \begin{cases} -x & ;\ -\pi \le x < -\pi/2 \\ \pi/4 & ;\ x = -\pi/2 \\ 0 & ;\ x - \pi/2 < x < \pi/2 \\ \pi/4 & ;\ x = \pi/2 \\ x & ;\ \pi/2 < x \le \pi \end{cases}\,.$$

Iz zgoraj zapisanega je razvidno, da je $\bar f(\pi/2) = \pi/4$. Graf:



Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 17. 1. 2012

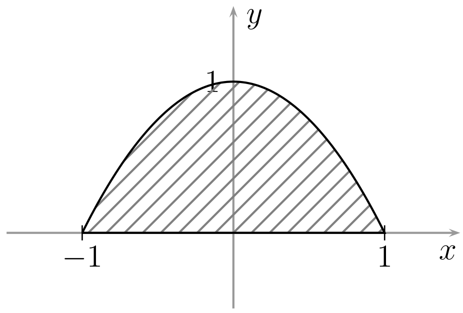
Praktična matematika

1. Iz:

$$\cos(x+y^2) = 1 - \frac{(x+y^2)^2}{2} + \frac{(x+y^2)^4}{24} - \cdots$$

dobimo $T_4(x,y) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - xy^2 - \dfrac{y^4}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

2. Skica definicijskega območja:



Oglišči: $f(-1,0) = -1, \quad f(1,0) = 1$.
Rob $y=0$: $f(x,0) = x$, tam ni ekstremov.
Rob $x = 1-x^2$, $-1 < y < 1$: $f(x, 1-x^2) = x\, e^{1-x^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,1-x^2) = (1-2x^2)e^{1-x^2}$,

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2e}}{2}, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2e}}{2}.$$

Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x\, e^y$, stacionarnih točk v notranjosti ni.

Ker je $e > 2$, je tudi $\dfrac{\sqrt{2e}}{2} > \dfrac{\sqrt{2 \cdot 2}}{2} = 1$, zato je:

$$\min_D f = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2e}}{2} \qquad \text{in} \qquad \max_D f = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2e}}{2}.$$

3. Pri $x = 0$ in $y = 2$ je $z = -4$. Nasploh pa je zveza oblike $F(x,y,z) = 0$, kjer je $F(x,y,z) = x\, e^{y+z} + 2y + z$. Velja:

$$\begin{aligned} F_x(x,y,z) &= e^{y+z}, & F_y(x,y,z) &= x\, e^{y+z} + 2, & F_z(x,y,z) &= x\, e^{y+z} + 1, \\ F_x(0,2,-4) &= e^{-2}, & F_y(0,2,-4) &= 2, & F_z(0,2,-4) &= 1. \end{aligned}$$

Ker je F parcialno zvezno odvedljiva funkcija in ker je $F_z(0,2,-4) \neq 0$, lahko po izreku o implicitni funkciji v okolici točke $(0,2,-4)$ eksplicitno izrazimo $z = f(x,y)$ in velja:

$$f_x(0,2) = -\frac{F_x(0,2,-4)}{F_z(0,2,-4)} = -e^{-2}, \qquad f_y(0,2) = -\frac{F_y(0,2,-4)}{F_z(0,2,-4)} = -2.$$

4. Naravni parameter usmerimo recimo tako, da bo:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,,$$

od koder sledi:

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2} + C\,.$$

Če postavimo npr. $C = 0$, dobimo naravno parametrizacijo:

$$x = s^{2/3} - \frac{4}{9}\,, \qquad y = \left(s^{2/3} - \frac{4}{9}\right)^{3/2}\,.$$

5. Najprej izračunamo koordinate in odvode:

	V splošnem	Pri $t = 1$
$\vec{r}$	$(t^2, \ln t, -3t)$	$(1, 0, -3)$
$\dot{\vec{r}}$	$(2t, 1/t, -3)$	$(2, 1, -3)$
$\ddot{\vec{r}}$	$(2, -1/t^2, 0)$	$(2, -1, 0)$
$\dddot{\vec{r}}$	$(0, 2/t^3, 0)$	$(0, 2, 0)$

Pritisnjena ravnina je pravokotna na vektor $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = (-3, -6, -4)$ in njena enačba je $3x + 6y + 4z + 9 = 0$.

Fleksijska ukrivljenost: $\kappa = \dfrac{\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\|}{\|\dot{\vec{r}}\|^3} = \dfrac{\sqrt{61}}{14\sqrt{14}}$.

Torzijska ukrivljenost: $\omega = \dfrac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}]}{\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\|^2} = -\dfrac{12}{61}$.

6. Velja $\vec{r}_u = (1, 2u, v)$ in $\vec{r}_v = (2v, 1, u)$. Pri $u = 1$ in $v = 2$ je:

$$\vec{r} = (5, 3, 2)\,, \quad \vec{r}_u = (1, 2, 2)\,, \quad \vec{r}_v = (4, 1, 1)\,.$$

Tangentna ravnina je pravokotna na vektor $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (0, 7, -7)$ in njena enačba je $y - z = 1$.

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 10. 4. 2012

Praktična matematika

1. a) Najprej iz $z = 0$ sledi $u = 0$ ali pa $v = 0$. Če je $u = 0$, iz $y = -2$ sledi $v^2 = -2$, kar ne more biti res. Če pa je $v = 0$, iz $y = -2$ sledi $u = -2$ in nato $x = 4$. Iskana točka je torej $T(4, -2, 0)$.

b) Iz prvih parcialnih odvodov:

$$\vec{r}_u = \begin{bmatrix} 2u \\ 1 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2v \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

dobimo koeficiente prve fundamentalne forme:

$$E = 17\,, \quad F = -4\,, \quad G = 5$$

in koeficient pri diferencialu ploščine je enak $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{69}$. Nadalje iz drugih parcialnih odvodov:

$$\vec{r}_{uu} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{uv} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{vv} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo še koeficiente druge fundamentalne forme:

$$L = -\frac{4}{\sqrt{69}}\,, \quad M = -\frac{1}{\sqrt{69}}\,, \quad N = -\frac{16}{\sqrt{69}}\,.$$

Gaussova ukrivljenost: $K = \dfrac{63}{69^2} = \dfrac{7}{529}$.

2. Velja:

$$F'(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x}{2}} + \int_{x/2}^{x} \cos(xy)\,\mathrm{d}y = \frac{2\Big(\sin(x^2) - \sin\frac{x^2}{2}\Big)}{x}\,,$$

torej je $F'\big(\sqrt{\pi}\big) = -\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.

3. Velja:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^{x+1} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\substack{x\ge 0 \\ 0\le y\le x+1}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \mathrm{d}y \int_{y-1}^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

4. Označimo iskani integral z J.

Prvi način: uvedemo običajne sferične koordinate:

$$x = r\cos\theta\cos\varphi\,, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi\,, \quad z = r\sin\theta\,; \qquad J = r^2\cos\theta$$

in dobimo:

$$\begin{aligned}
J &= \iiint_{\substack{0\le\varphi<2\pi\\ 0\le\theta\le\pi/2\\ 0\le r\le 2\sin\theta}} r^6\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos^5\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\sin\theta} r^6\,\mathrm{d}r\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta = \\
&= 4\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\frac{2^7}{7}\int_0^{\pi/2}\sin^7\theta\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \frac{128}{7}\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\mathrm{B}(4,3) = \\
&= \frac{128}{7}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)}\,\frac{\Gamma(4)\,\Gamma(3)}{\Gamma(7)} = \\
&= \frac{128}{7}\cdot\frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{60} = \\
&= \frac{4\pi}{105}\,.
\end{aligned}$$

Drugi način: uvedemo cilindrične koordinate:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z\,; \qquad J = r$$

in dobimo:

$$\begin{aligned}
J &= \iiint_{\substack{0\le\varphi<2\pi\\ r^2+z^2\le 2z}} r^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\
&= \iiint_{\substack{0\le\varphi<2\pi\\ 0\le r\le 1\\ 1-\sqrt{1-r^2}\le z\le 1+\sqrt{1-r^2}}} r^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\
&= 2\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^5\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r = \\
&= 4\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 t^2\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t = \\
&= 2\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\mathrm{B}\left(3,\frac{3}{2}\right) = \\
&= 2\,\frac{\Gamma\left[\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)}\,\frac{\Gamma(3)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \\
&= 2\cdot\frac{\pi}{8}\cdot\frac{16}{105} = \\
&= \frac{4\pi}{105}\,.
\end{aligned}$$

Tretji način: uvedemo iste cilindrične koordinate kot prej, le da integriramo v drugačnem vrstnem redu:

$$
\begin{aligned}
J &= \iiint_{\substack{0\le\varphi<2\pi \\ r^2+z^2\le 2z}} r^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\
&= \iiint_{\substack{0\le\varphi<2\pi \\ 0\le z\le 2 \\ 0\le r\le\sqrt{2z-z^2}}} r^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\
&= 2\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^2\int_0^{\sqrt{2z-z^2}} r^5\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = \\
&= 8\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\frac{1}{6}\int_0^2(2z-z^2)^3\,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{2}{3}\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\int_0^2(8z^3-12z^4+6z^5-z^6)\,\mathrm{d}z = \\
&= \frac{2}{3}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)}\left(32-\frac{384}{5}+64-\frac{128}{7}\right) = \\
&= \frac{\pi}{8}\cdot\frac{32}{35} = \\
&= \frac{4\pi}{105}\,.
\end{aligned}
$$

Četrti način: uvedemo premaknjene sferične koordinate, in sicer tako, da je središče v točki $(0,0,1)$:

$$
x = r\cos\theta\cos\varphi\,,\quad y = r\cos\theta\sin\varphi\,,\quad z = 1 + r\sin\theta\,;\qquad J = r^2\cos\theta\,.
$$

Dobimo:

$$
\begin{aligned}
J &= \iiint_{\substack{0\le\varphi<2\pi \\ -\pi/2\le\theta\le\pi/2 \\ 0\le r\le 1}} r^6\cos^2\varphi\sin^2\varphi\cos^5\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^6\,\mathrm{d}r = \\
&= 8\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^6\,\mathrm{d}r = \\
&= \frac{2}{7}\,\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\mathrm{B}\left(3,\frac{1}{2}\right) = \\
&= \frac{2}{7}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)}\,\frac{\Gamma(3)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \\
&= \frac{2}{7}\cdot\frac{\pi}{8}\cdot\frac{16}{15} = \\
&= \frac{4\pi}{105}\,.
\end{aligned}
$$

5. Če z ρ označimo gostoto simpleksa, velja:

$$J_x = \rho \iiint_{\substack{x,y,z\geq 0\\ x+y+z\leq 1}} (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Toda zaradi simetrije velja tudi kar:

$$\begin{aligned}
J_x &= 2\rho \iiint_{\substack{x,y,z\geq 0\\ x+y+z\leq 1}} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&= 2\rho \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,z^2\,\mathrm{d}z = \\
&= 2\rho \int_0^1 \int_0^{1-z} (1-y-z)\,\mathrm{d}y\,z^2\,\mathrm{d}z = \\
&= \rho \int_0^1 z^2(1-z)^2\,\mathrm{d}z = \\
&= \rho\,\mathrm{B}(3,3) = \\
&= \rho\,\frac{\big[\Gamma(3)\big]^2}{\Gamma(6)} = \\
&= \frac{\rho}{30}\,.
\end{aligned}$$

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 5. 6. 2012

Praktična matematika

1. Najprej iz:

$$\operatorname{rot} \vec{R} = \begin{bmatrix} (2a-b)x^3 \\ (b-6)x^2 \\ (3-a)x^2 \end{bmatrix} e^{ay+bz}$$

dobimo, da je polje potencialno natanko tedaj, ko je $a = 3$ in $b = 6$. Njegov potencial je enak:

$$\frac{x^3}{3} e^{3y+6z} + C \,.$$

2. Nalogo najhitreje rešimo z uporabo Gaussovega izreka. Ni namreč težko izračunati $\operatorname{div} \vec{R} = 2$. Če našo kocko označimo s Q, potem velja:

$$\iint_{\partial Q} \vec{R}\vec{N}\, \mathrm{d}P = \iiint_Q \operatorname{div} \vec{R}\, \mathrm{d}V = 2\, V(Q) = 2 \,.$$

Nalogo pa lahko rešimo tudi neposredno. Kocka ima šest osnovnih ploskev:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x,y,z)\ ;\ 1 \le x,y \le 2,\ z = 1\}\,, & A_2 &= \{(x,y,z)\ ;\ 1 \le x,y \le 2,\ z = 2\}\,,\\ A_3 &= \{(x,y,z)\ ;\ 1 \le x,z \le 2,\ y = 1\}\,, & A_4 &= \{(x,y,z)\ ;\ 1 \le x,z \le 2,\ y = 2\}\,,\\ A_5 &= \{(x,y,z)\ ;\ 1 \le y,z \le 2,\ x = 1\}\,, & A_6 &= \{(x,y,z)\ ;\ 1 \le y,z \le 2,\ x = 2\}\,. \end{aligned}$$

Ploskvi A_1 in A_2 lahko parametriziramo kar z x in y. Na ploskvi A_1 normala kaže navzdol, zato je $\vec{R}\vec{N}\, \mathrm{d}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, torej je:

$$\iint_{A_1} \vec{R}\vec{N}\, \mathrm{d}P = -\iint_{1 \le x,y \le 2} (x+y) \ln(x+y+1)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \,.$$

Na ploskvi A_2 pa normala kaže navzgor, zato je $\vec{R}\vec{N}\, \mathrm{d}P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, torej je:

$$\iint_{A_2} \vec{R}\vec{N}\, \mathrm{d}P = \iint_{1 \le x,y \le 2} (x+y) \ln(x+y+2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \,.$$

Izračunajmo:

$$
\begin{aligned}
\iint_{1\le x,y\le 2} (x+y)\ln(x+y+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_1^2\int_1^2 (x+y)\ln(x+y+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_1^2 \left(\frac{(x+y)^2-a^2}{2}\ln(x+y+a) - \frac{(x+y)^2}{4} + a(x+y)\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} \mathrm{d}y = \\
&= \int_1^2 \bigg(\frac{(y+2)^2-a^2}{2}\ln(y+a+2) - \frac{(y+1)^2-a^2}{2}\ln(y+a+1) - \\
&\qquad - \frac{2y+3}{4} + a\bigg)\mathrm{d}y = \\
&= \bigg(\frac{(y+2)^3-3a^2(y+2)-2a^3}{6}\ln(y+a+2) - \\
&\qquad - \frac{(y+1)^3-3a^2(y+1)-2a^3}{6}\ln(y+a+1) - \\
&\qquad - \frac{(y+a)^2}{6} - \frac{y+a}{2} - \frac{7}{18} + \frac{a^2}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{3y}{4} + ay\bigg)\bigg|_1^2 = \\
&= \frac{32-6a^2-a^3}{3}\ln(a+4) - \frac{27-9a^2-2a^3}{3}\ln(a+3) + \\
&\qquad + \frac{4-3a^2-a^3}{3}\ln(a+2) + \frac{2a}{3} - \frac{5}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Sledi:

$$
\iint_{A_1}\vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P = -\frac{25}{3}\ln 5 + \frac{16}{3}\ln 4 + \frac{11}{6}\,, \qquad \iint_{A_2}\vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P = \frac{25}{3}\ln 5 - \frac{16}{3}\ln 4 - \frac{7}{6}\,,
$$

torej je:

$$
\iint_{A_1}\vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P + \iint_{A_2}\vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P = \frac{2}{3}\,.
$$

Podobno je tudi:

$$
\iint_{A_3}\vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P + \iint_{A_4}\vec{R}\vec{N}\mathrm{d}P = \iint_{A_5}\vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P + \iint_{A_6}\vec{R}\vec{N}\mathrm{d}P = \frac{2}{3}\,.
$$

Sledi $\displaystyle\iint_{\partial Q}\vec{R}\vec{N}\,\mathrm{d}P = 2$, tako kot prej.

3. Vrtež razdelimo na tri korake in na vsakem koraku spremljamo, kako se preslika točka z.

Prvi korak: premik za $-(1+2i)$. Točka z se preslika v $z_1 := z - 1 - 2i$.

Drugi korak: vrtež za 120° v smeri urinega kazalca, kar je za kot $-2\pi/3$ v pozitivni smeri. Točka z se zdaj preslika v:

$$z_2 := \left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right) z_1 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right) z_1 =$$

$$= -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i\sqrt{3}\right) z + \frac{1}{2} - \sqrt{3} + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right).$$

Tretji korak: premik za $1 + 2i$. Točka z se zdaj preslika v:

$$z_2 + 1 + 2i = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i\sqrt{3}\right) z + \frac{3}{2} - \sqrt{3} + \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right).$$

4. Singularnost je tam, kjer je imenovalec enak nič, torej $\cos z = 1$. To velja za $z = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Edina singularnost v enotskem krogu je torej izhodišče. Iz Taylorjevega razvoja:

$$1 - \cos z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \cdots$$

sledi, da ima imenovalec ničlo druge stopnje, števec pa ima seveda ničlo prve stopnje. Torej ima funkcija f v izhodišču pol prve stopnje. Glavni del Laurentov vrste torej vsebuje le člen z residuom, ki je enak:

$$c_{-1} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2}{1 - \cos z} = 2\,.$$

Glavni del Laurentove vrste je torej $2/z$.

5. Velja:

$$J := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\, \mathrm{d}x}{4 + x^2} = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, \mathrm{d}z\,,$$

kjer je $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{4 + x^2} = \dfrac{e^{iz}}{(z - 2i)(z + 2i)}$. Za $\operatorname{Im} z \geq 0$ velja:

$$\left|e^{iz}\right| = \left|e^{-y+ix}\right| = e^{-y}\left|e^{ix}\right| = e^{-y} \leq 1\,,$$

torej za $|z| > 2$ velja:

$$|zf(z)| \leq \frac{|z|}{|z|^2 - 4}\,,$$

od koder sledi $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ \operatorname{Im} z \geq 0}} zf(z) = 0$.

Funkcija f ima dva pola stopnje 1, in sicer v $2i$ in $-2i$. Torej bo:

$$J = \operatorname{Re}\Big[2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i)\Big]\,.$$

Ker gre za pol prve stopnje, je:

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \left.\frac{e^{iz}}{z + 2i}\right|_{z=2i} = -\frac{i}{4e^2}$$

in zato $J = \dfrac{\pi}{2e^2}$.

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 29. 6. 2012

Praktična matematika

1. Če je $x = y = 0$, je očitno tudi $z = 0$. Po parcialnem odvajanju zveze dobimo:

$$\cos(xyz)\left(yz + xy\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\partial z}{\partial x} = 0\,,$$
$$\cos(xyz)\left(xz + xy\,\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0\,.$$

Ko vstavimo $x = y = z = 0$, dobimo:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = 1\,.$$

Zdaj pa še enkrat parcialno odvajajmo po x. Dobimo:

$$-\sin(xyz)\left(yz + xy\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \cos(xyz)\left(2y\,\frac{\partial z}{\partial x} + xy\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0\,,$$

od koder po vstavitvi sledi še $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

2. Krivulja gre skozi izhodišče, ker je pri $t = 1$ (in samo tam) $x = y = z = 0$. Iz:

$$\dot{x} = \frac{1}{t} = 1\,, \qquad \dot{y} = e^{t-1} = 1\,, \qquad \dot{z} = 3t^2 - 2 = 1$$

sledi enačba tangente $x = y = z$. Nadalje iz:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{t^2} = -1\,, \qquad \ddot{y} = e^{t-1} = 1\,, \qquad \ddot{z} = 6t = 6$$

dobimo, da v izhodišču velja:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$\|\dot{\vec{r}}\| = \sqrt{3}\,, \qquad \|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| = \sqrt{78}$$

in končno $\kappa = \dfrac{\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\|}{\|\dot{\vec{r}}\|^3} = \dfrac{\sqrt{78}}{3\sqrt{3}} \doteq 1{\cdot}700$.

3. Označimo iskani integral z J. S substitucijo $t = x^4$ dobimo:

$$J = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\,\frac{3}{2}\right)}{4} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{4\,\Gamma(3)} = \frac{\pi}{32}\,.$$

4. Označimo iskani integral z J. Najprej izračunamo:

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + x^2 + y^2 \,.$$

Sledi:

$$J = \iint_{\substack{x,y \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 1}} xy\,\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \,.$$

Po uvedbi standardnih polarnih koordinat dobimo:

$$J = \int_O^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r$$

Substituciji $s = \sin\varphi$, $t = 1 + r^2$ nam dasta:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 s\,\mathrm{d}s \int_1^2 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{2}-1}{6} \,.$$

5. Označimo:

$$f(z) = \frac{1}{(x^2+2z+5)^2} = \frac{1}{(z+1+2i)^2(z+1-2i)^2} \,.$$

Očitno je $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$. Nadalje ima funkcija f dva pola druge stopnje: pri $-1-2i$ in $-1+2i$. Le slednji leži na zgornji polravnini, zato je:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1+2i) = \\
&= 2\pi i \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right|_{z=-1+2i} \frac{1}{(z+1+2i)^2} = \\
&= -\left.\frac{4\pi i}{(z+1+2i)^3}\right|_{-1+2i} = \\
&= \frac{\pi}{16} \,.
\end{aligned}$$

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 20. 8. 2012

Praktična matematika

1. Funkcija d ni metrika na $\mathbb{N}$, ker ne velja trikotniška neenakost: velja $d(1,2) = 1/2$, medtem ko je $d(1,5) + d(5,2) = 1/5 + 1/5 = 2/5 < 1/2$.

2. Ko v dano zvezo:

$$e^{2x+yz} + (1+x)(2+y)z = 0 \tag{1}$$

vstavimo $x = 0$ in $y = 0$, dobimo $z = -1/2$. Nadalje, ko zvezo (1) parcialno odvajamo po x, dobimo:

$$e^{2x+yz}\left(2 + y\,\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (2+y)z + (1+x)(2+y)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

in ko sem vstavimo $x = 0$, $y = 0$ in $z = -1/2$, dobimo $\frac{\partial z}{\partial x} = -1/2$. Ko pa zvezo (1) parcialno odvajamo po y, dobimo:

$$e^{2x+yz}\left(z + y\,\frac{\partial z}{\partial y}\right) + (1+x)z + (1+x)(2+y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

in ko spet vstavimo $x = 0$, $y = 0$ in $z = -1/2$, dobimo $\frac{\partial y}{\partial x} = 1/2$. Končno še zvezo (2) parcialno odvajamo po x. Dobimo:

$$e^{2x+yz}\left(2 + y\,\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + e^{2x+yz}\,y\,\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} + 2(2+y)\frac{\partial z}{\partial x} + (1+x)(2+y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

in ko vstavimo $x = 0$, $y = 0$, $z = -1/2$ in $\frac{\partial z}{\partial x} = -1/2$, dobimo še $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -1$.

3. Velja:

$$F'(a) = \frac{2a}{\ln(a+a^2)} - \frac{1}{\ln(2a)} - \int_a^{a^2} \frac{\mathrm{d}x}{(a+x)\big(\ln(a+x)\big)^2}\,,$$

od koder dobimo:

$$F'(1) = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} - \int_1^1 \frac{\mathrm{d}x}{(a+x)\big(\ln(a+x)\big)^2} = \frac{1}{\ln 2}\,.$$

4. Označimo iskani integral z J. Po prevedbi na cilindrične koordinate:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z\,; \quad J = r$$

dobimo:

$$J = \iiint_{\substack{r\ge 0\\ 0\le\varphi\le 2\pi\\ r+z\le 2}} r^3 z^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Od tod naprej gre na vsaj dva smiselna, bolj ali manj ekvivalentna načina.

Prvi način. Iz:

$$J = 2\pi \int_0^2 \int_0^{2-r} r^3 z^2 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r = \frac{2\pi}{3} \int_0^2 r^3 (2-r)^2 \, \mathrm{d}r$$

s substitucijo $r = 2t$ dobimo:

$$J = \frac{256\pi}{3} \int_0^1 t^3 (1-t)^3 \, \mathrm{d}t = \frac{256\pi}{3} \, \mathrm{B}(4,4) = \frac{256\pi}{3} \, \frac{\big(\Gamma(4)\big)^2}{\Gamma(8)} = \frac{256\pi}{3} \, \frac{(3!)^2}{7!} = \frac{64\pi}{105} \, .$$

Drugi način. Iz:

$$J = 2\pi \int_0^2 \int_0^{2-z} r^3 z^2 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2} \int_0^2 (1-z)^4 z^2 \, \mathrm{d}r$$

s substitucijo $z = 2t$ dobimo:

$$J = 64\pi \int_0^1 t^2 (1-t)^4 \, \mathrm{d}t = 64\pi \, \mathrm{B}(5,3) = 64\pi \, \frac{\Gamma(5)\,\Gamma(3)}{\Gamma(8)} = 64\pi \, \frac{4!\,2!}{7!} = \frac{64\pi}{105} \, .$$

5. Substitucija $z = e^{it}$, $\cos t = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, $\sin t = \dfrac{1}{2i}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$, nam da:

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin t}{2 + \cos t} \, \mathrm{d}t = \oint_K f(z) \, \mathrm{d}z \, ,$$

kjer je K pozitivno orientirana enotska krožnica, funkcija f pa je definirana po predpisu:

$$f(z) = \frac{-z^2 - 2iz + 1}{z(z^2 + 4z + 1)} = \frac{-z^2 - 2iz + 1}{z\big(z + 2 - \sqrt{3}\big)\big(z + 2 + \sqrt{3}\big)} \, .$$

Funkcija f ima tri singularnosti: 0, $-2 + \sqrt{3}$ in $-2 - \sqrt{3}$. Le prvi dve ležita znotraj enotskega kroga, zato velja:

$$I = 2\pi i \Big[\mathrm{Res}(f, 0) + \mathrm{Res}\big(f, -2 + \sqrt{3}\big) \, .$$

Ker gre obakrat za pol prve stopnje, je:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, 0) &= \lim_{z \to 0} z f(z) = \left. \frac{-z^2 - 2iz + 1}{z^2 + 4z + 1} \right|_{z=0} = 1 \, , \\
\mathrm{Res}\big(f, -2 + \sqrt{3}\big) &= \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \big(z + 2 - \sqrt{3}\big) f(z) = \\
&= \left. \frac{-z^2 - 2iz + 1}{z\big(z + 2 + \sqrt{3}\big)} \right|_{z=-2+\sqrt{3}} = \\
&= \frac{6 - 4\sqrt{3} - 2\big(2 - \sqrt{3}\big)i}{2\sqrt{3}\big(2 - \sqrt{3}\big)} = \\
&= -1 - \frac{i}{\sqrt{3}} \, .
\end{aligned}$$

Sledi $I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

Opomba. V integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{2+\cos t}\,\mathrm{d}t$ lahko povsem legitimno uvedemo substitucijo $x = \cos t$ in dobimo $\displaystyle -\int_1^1 \frac{\mathrm{d}x}{2+x} = 0$. Zato bi bilo dovolj izračunati le $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t}$.

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 3. 9. 2012

Praktična matematika

1. Neposredno iz definicije razberemo, da je $d(m,m) = 0$ in $d(m,n) > 0$ za $m \neq 0$. Prav tako neposredno iz definicije (in komutativnosti seštevanja) sledi, da je d simetrična: $d(m,n) = d(n,m)$. Pri dokazu trikotniške neenakosti:

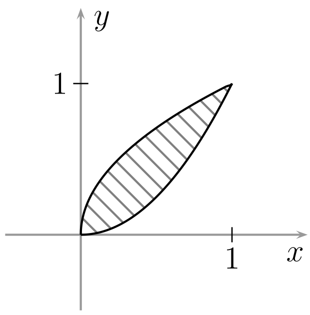
$$d(m,p) \leq d(m,n) + d(n,p)$$

pa se je dovolj omejiti na primer, ko so vsa tri števila različna – sicer neenakost sledi že iz pozitivnosti. Če so vsa tri števila različna, pa se neenakost prevede na:

$$m + p \leq m + n + n + p\,,$$

kar je tudi očitno res. Torej je d res metrika.

2. Definicijsko območje funkcije lahko zapišemo kot $D = \{(x,y)\ ;\ y \geq x^2,\ x \geq y^2\}$ in opazimo, da na njem velja še $0 \leq x, y \leq 1$. Skica:



Oglišči: $f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = 1/e$.

Rob $y = x^2$, $0 < x < 1$: $f(x,x^2) = x\,e^{-x^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,x^2) = (1-2x^2)e^{-x^2}$, stacionarna točka: $\big(\sqrt{2}/2, 1/2\big)$, velja $f\big(\sqrt{2}/2, 1/2\big) = 1/\sqrt{2e}$.

Rob $x = y^2$, $0 < x < 1$: $f(y^2,y) = y^2\,e^{-y}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(y^2,y) = (2y - y^2)e^{-y}$, stacionarni točki $(0,0)$ in $(4,2)$ ne pripadata temu delu roba (in prvo smo že obravnavali pri ogliščih).

Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{-y}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -x\,e^{-y}$, v notranjosti ni stacionarnih točk.

Ker je $e > 2$, je $1/\sqrt{2e} > 1/e$.

Torej je $\min\limits_D f = f(0,0) = 0$ in $\max\limits_D f = f(\sqrt{2}/2, 1/2) = 1/\sqrt{2e} \doteq 0{\cdot}429$.

3. Za izhodiščni parameter lahko postavimo kar $t = x$. Tedaj je:

$$\dot{x} = 1\,, \qquad \dot{y} = 2t\,, \qquad \dot{z} = 2t^2\,,$$

od koder dobimo $\dot{s}^2 = 1 + 4t^2 + 4t^4 = (1 + 2t^2)^2$, torej je $\dot{s} = \pm(1 + 2t^2)$, kar nam da:

$$s = s_0 \pm \left(t + \frac{2t^3}{3}\right) = s_0 \pm \left(x + \frac{2x^3}{3}\right).$$

4. S pomočjo sferičnih koordinat:

$$x = r\cos\theta\cos\varphi\,, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi\,, \quad z = r\sin\theta\,; \qquad J = r^2\cos\theta$$

dobimo:

$$\begin{aligned} J &= \iiint\limits_{\substack{0\le y\le x\\ x^2+y^2+z^2\le 1}} xy\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\ &= \iiint\limits_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le\pi/4\\ -\pi/2\le\theta\le\pi/2}} r^4\sqrt{1-r^2}\cos\varphi\sin\varphi\cos^3\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

in prevedba na trikratni integral nam da $J = J_1 J_2 J_3$, kjer je:

$$J_1 = \int_0^1 r^4\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r\,, \qquad J_2 = \int_0^{\pi/4}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,, \qquad J_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Integrala J_2 in J_3 se da izračunati elementarno – s substitucijo $t = \sin\varphi$ oz. $t = \sin\theta$. Dobimo:

$$J_2 = \int_0^{\sqrt{2}/2} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\,, \qquad J_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-1}^{1}(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\,.$$

V integral J_1 pa uvedemo substitucijo $t = r^2$. Dobimo:

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{3/2}(1-t)^{1/2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{B}\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\,\Gamma(4)} = \frac{\pi}{32}\,,$$

torej je $J = \dfrac{\pi}{96}$.

5. Poli so natanko tam, kjer je imenovalec enak nič. Iz formule za rešitev kvadratne enačbe dobimo:

$$z_{1,2} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4-16}}{2} = \left(-1 \pm \sqrt{5}\right)i\,,$$

torej lahko pišemo tudi:

$$f(z) := \frac{1}{z^2 + 2iz + 4} = \frac{1}{\left(z + \left(1+\sqrt{5}\right)i\right)\left(z + \left(1-\sqrt{5}\right)i\right)}\,.$$

Nad realno osjo je pol $\big(-1+\sqrt{5}\big)i$, in sicer prve stopnje. Torej je:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\big(f;\big(-1\pm\sqrt{5}\big)i\big) &= \lim_{z\to(-1+\sqrt{5})i}\big(z+\big(1-\sqrt{5}\big)i\big)f(z) = \frac{1}{z+\big(1+\sqrt{5}\big)i}\bigg|_{z=(-1+\sqrt{5})i} = \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{5}} = -\frac{i\sqrt{5}}{10}\,.\end{aligned}$$

Opomba. V kompleksnem sicer ni korektno uporabljati korenskega znaka ($\sqrt{\cdot}$) samega po sebi. Korektno pa ga je uporabljati skupaj z obema možnima predznakoma ($\pm\sqrt{\cdot}$), v kolikor le-ta dva nista povezana s kakšnimi drugimi predznaki.

2010/11

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 16. 11. 2010

Praktična matematika

1. a) Očitno je $d(x,y) \geq 0$ in velja $d(x,y) = 0$ natanko tedaj, ko je $x^3 = y^3$, to pa je natanko tedaj, ko je $x = y$. Nadalje je $d(y,x) = |y^3 - x^3| = |x^3 - y^3| = d(x,y)$. Končno velja še:

$$d(x,z) = |x^3 - z^3| = |x^3 - y^3 + y^3 - z^3| \leq |x^3 - y^3| + |y^3 - z^3| = d(x,y) + d(y,z)\,,$$

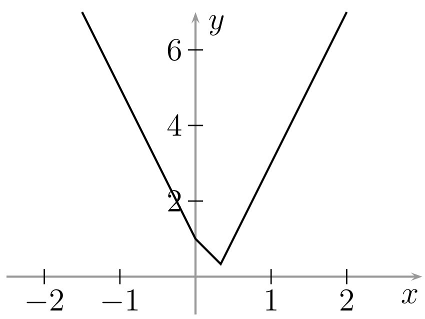
torej je d res metrika.

b) Želeno odprto kroglo tvorijo vsa števila x, za katera je $|x^3 - 1^3| < 9$, torej $-9 < x^3 - 1 < 9$, torej $-8 < x^3 < 10$, kar pomeni, da je to interval $\bigl(-2, \sqrt[3]{10}\bigr)$.

2. Točke na dani premici lahko opišemo kot pare $(x, 1-3x)$ in velja:

$$d_1\bigl((x, 1-3x), (0,0)\bigr) = |x| + |1 - 3x|\,.$$

Izraz, kakršen je na desni, zavzame ekstrem kvečjemu v točkah preloma (kjer pride katera od linearnih funkcij pod absolutno vrednostjo na nič), med dvema točkama preloma, kjer ima enako vrednost, ali na poltraku, kjer je konstanten. Iz grafa in tabele:



x	$\lvert x\rvert + \lvert 1-3x\rvert$
$-\infty$	∞
0	1
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
∞	∞

odčitamo, da je minimum dosežen pri $x = \frac{1}{3}$, torej v točki $T\bigl(\frac{1}{3}, 0\bigr)$.

3. Množica A je odprta, ker je unija odprtih intervalov: $A = (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$. Ni pa zaprta, ker točka 0 ne pripada A, medtem ko se v vsaki okolici točke 0 nahaja točka, ki pripada A.

Množica B ni odprta, ker je $0 \in B$, medtem ko se v vsaki okolici točke 0 nahaja točka, ki ni v B. Prav tako ni zaprta, ker $\sqrt{B} \notin B$, medtem ko se v vsaki okolici točke $\sqrt{2}$ nahaja točka, ki je v B.

4. Naj bo:

$$f(x) = \frac{1}{x^3} + 3\,.$$

Velja $f'(x) = -3x^{-4}$ in za $x \in [3,4]$ je $-3/3^4 \leq f'(x) \leq 0$. Torej je f na tem intervalu padajoča. Nadalje je $f(3) = 3\frac{1}{27} \in [3,4]$ in $f(4) = 3\frac{1}{64} \in [3,4]$; ker je f padajoča, mora potemtakem interval $[3,4]$ spet preslikati v $[3,4]$. Torej je f

tam skrčitev, zato ima enačba $f(x) = x$ natanko eno rešitev, ki jo dobimo kot limito rekurzivno podanega zaporedja $x_{n+1} = f(x_n)$. Če postavimo $x_1 = 3$, dobimo zaporedje približkov:

$$3\text{˙}037037\,,\ 3\text{˙}035698\,,\ 3\text{˙}035746\,,\ 3\text{˙}035744\,,\ 3\text{˙}035744\,,$$

od koder zaključimo, da je rešitev v predpisani natančnosti 3˙0357.

5. Iz:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\,,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(nx)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} = \begin{cases} 1/(n\pi) & ;\ n = 1, 5, 9, 13, \dots \\ 0 & ;\ n = 2, 4, 6, 8, \dots \\ -1/(n\pi) & ;\ n = 3, 7, 11, 15, \dots \end{cases}\,,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(nx)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1-\cos(n\pi/2)}{n\pi} = \begin{cases} 1/(n\pi) & ;\ n = 1, 3, 5, 7, 9 \dots \\ 2/(n\pi) & ;\ n = 2, 6, 10, 14, \dots \\ 0 & ;\ n = 4, 8, 12, 16, \dots \end{cases}\,,$$

dobimo:

$$\begin{aligned}\bar{f}(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\cos(5x)}{5} - \cdots\right) + \\ + \frac{1}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right) + \\ + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(6x)}{6} + \frac{\sin(10x)}{10} + \cdots\right)\,,\end{aligned}$$

kjer je $\bar{f}$ periodična s periodo 2π in:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 1 & ;\ 0 < x < \pi/2 \\ 1/2 & ;\ x \in \{0, \pi/2\} \\ 0 & ;\ x \in [-\pi, 0) \cup (\pi/2, \pi] \end{cases}\,.$$

6. $\bar{f}(5) = \bar{f}(5-3) = \bar{f}(2) = f(2) = 4$,
$\bar{f}(7) = \bar{f}(7-3) = \bar{f}(4) = \frac{1}{2}\big[f(1) + f(4)\big] = \frac{9}{2}$.

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 25. 1. 2011

Praktična matematika

1. a) Če vstavimo $x = 0$ in $y = 8$, dobimo $z^3 = 8$, torej $z = 2$. Če zvezo zapišemo v obliki $F(x, y, z) = 0$, kjer je $F(x, y, z) = z^3 + xz - y$, je očitno, da je F diferenciabilna funkcija. Nadalje je $F_z(x, y, z) = 3z^2 + x$ in $F_z(0, 8, 2) = 12 \neq 0$, torej se da po izreku o implicitni funkciji spremenljivka z v okolici točke $x = 0, y = 8, z = 2$ res izraziti kot diferenciabilna funkcija spremenljivk x in y.

b) Zvezo kar parcialno odvajamo po x in y, pri čemer pa z obravnavamo kot funkcijo spremenljivk x in y. Dobimo:

V splošnem: V naši točki:

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + z + x \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \,, \qquad 12 \frac{\partial z}{\partial x} + 2 = 0 \,, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{6} \,,$$

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \,, \qquad 12 \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{12} \,.$$

2. $f_x(x, y) = 3x^2 - 6y - 39, \quad f_y(x, y) = 2y - 6x + 18.$

Stacionarni točki: $T_1(1, -6), \quad T_2(5, 6).$

$f_{xx}(x, y) = 6x, \quad f_{xy}(x, y) = -6, \quad f_{yy}(x, y) = 2.$

V T_1 je $H = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ in $K = -24$, torej tam ni ekstrema.

V T_2 pa je $H = \begin{bmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$ in $K = 24$, torej je tam lokalni minimum.

3. *Prvi način.* Iščemo maksimum spremenljivke x pri pogoju (vezi):

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0 \,,$$

torej nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$L = x - \lambda(x^2 + y^2)^2 + 2\lambda(x^2 - y^2) \,.$$

Velja $\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - 4\lambda x(x^2 + y^2) + 2\lambda x$ in $\frac{\partial L}{\partial y} = -4\lambda y(x^2 + y^2) - 2\lambda y$. Iz $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ dobimo $-2\lambda y(2x^2 + 2y^2 + 1) = 0$. Zadnji faktor ne more biti nič, torej je bodisi $\lambda = 0$ bodisi $y = 0$. Za $\lambda = 0$ ne more biti $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, za $y = 0$ pa iz vezi dobimo $x^4 - 2x^2 = 0$, kar je res za $x = 0$ in $x = \pm\sqrt{2}$. Maksimalna vrednost koordinate x bo torej $\sqrt{2}$.

Drugi način. Spremenljivko x proglasimo za odvisno, spremenljivko y pa za neodvisno (torej si predstavljamo, da ima krivulja enačbo $x = x(y)$). Tedaj bo x maksimalen, če se bodisi ne da lokalno izraziti kot diferenciabilna funkcija spremenljivke y bodisi je $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = 0$. Iz:

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) \,, \quad F_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2) - 4x$$

ugotovimo, da se x ne da lokalno izraziti, kvečjemu če je $x = 0$ (sledi $y = 0$) ali pa $x^2 + y^2 = 1$ (to pa je v točkah $T_1\big(\sqrt{3}/2, 1/2\big)$, $T_2\big(\sqrt{3}/2, -1/2\big)$, $T_3\big(-\sqrt{3}/2, 1/2\big)$ in $T_4\big(-\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2\big)\big)$.

Kjer se x da izraziti kot diferenciabilna funkcija spremenljivke y, pa odvajamo po y:

$$4(x^2+y^2)\left(x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+y\right)-4x\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+4y=0\,,$$

torej je:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{(x^2+y^2+1)y}{(x^2+y^2-1)x}$$

Desna stran je enaka nič, če je $y = 0$, od koder tako kot pri prvem načinu dobimo $x = \pm\sqrt{2}$. Ko to primerjamo z ostalimi kandidati, vidimo, da je maksimalna vrednost koordinate x enaka $\sqrt{2}$.

4. Velja:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{x^2}\,,\qquad \kappa=\frac{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}=-\frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}\,.$$

Pri $x = 1$ je torej $\kappa = -2^{-3/2} = -1/\big(2\sqrt{2}\big)$. Sicer pa iz:

$$\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}x}=\frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{5/2}}$$

dobimo, da je ukrivljenost (po absolutni vrednosti) maksimalna pri $x = \sqrt{2}/2$.

5. Ker je $x = 2t = 1$, je $t = \frac{1}{2}$. Nadalje gremo lahko na vsaj dva načina.

Prvi način: z uporabo splošnih formul za fleksijsko in torzijsko ukrivljenost. Velja:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}&=(2,2t,t^2)=\big(2,1,\tfrac{1}{4}\big)\,,\\ \ddot{\mathbf{r}}&=(0,2,2t)=(0,2,1)\,,\\ \dddot{\mathbf{r}}&=(0,0,2)=(0,0,2)\,.\end{aligned}$$

Nadalje je:

$$\|\dot{\mathbf{r}}\|=\tfrac{9}{4}\,,\quad \dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}=\big(\tfrac{1}{2},-2,4\big)\,,\quad \|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\|=\tfrac{9}{2}\,.$$

Fleksijska ukrivljenost: $\kappa = \dfrac{\|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3} = \dfrac{32}{81}$.

Torzijska ukrivljenost: $\omega = \dfrac{(\dot{\mathbf{r}},\ddot{\mathbf{r}},\dddot{\mathbf{r}})}{\|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\|^2} = \dfrac{32}{81}$.

Drugi način: po definiciji ukrivljenosti. Podobno kot prej izračunamo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}&=(2,2t,t^2)\,, & \dot{\mathbf{r}}\big|_{t=1/2}&=\big(2,1,\tfrac{1}{4}\big)\,,\\ \|\dot{\mathbf{r}}\|&=\sqrt{4+4t^2+4t^4}=2+t^2\,, & \|\dot{\mathbf{r}}\|\big|_{t=1/2}&=\tfrac{9}{4}\,.\end{aligned}$$

Iz $\|\dot{\mathbf{r}}\|$ bi lahko dobili naravni parameter $s = 2t + t^3/3$, vendar pa je izražava z naravnim parametrom težka. Vseeno pa lahko odvod katere koli spremenljivke, recimo u, po naravnem parametru izrazimo z odvodom po t s pomočjo verižnega pravila:

$$u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dot{u}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} .$$

Tako dobimo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} = \mathbf{r}' &= \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} = \left(\frac{2}{2+t^2}, \frac{2t}{2+t^2}, \frac{t^2}{2+t^2}\right) , \\
\dot{\mathbf{t}} &= \left(-\frac{4t}{(2+t^2)^2}, \frac{4-2t^2}{(2+t^2)^2}, \frac{4t}{(2+t^2)^2}\right) , & \dot{\mathbf{t}}\Big|_{t=1/2} &= \frac{8}{81}(4,-7,4) , \\
\kappa = \|\mathbf{t}'\| &= \frac{\dot{\mathbf{t}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} , & \kappa\Big|_{t=1/2} &= \frac{32}{81} .
\end{aligned}$$

Nadalje je:

$$\begin{aligned}
\|\dot{\mathbf{t}}\| &= \frac{\sqrt{16+16t^2+4t^4}}{(2+t^2)^2} = \frac{2}{2+t} , \\
\mathbf{n} &= \frac{\dot{\mathbf{t}}}{\|\dot{\mathbf{t}}\|} = \left(-\frac{2t}{2+t^2}, \frac{2-t^2}{2+t^2}, \frac{2t}{2+t^2}\right) , & \mathbf{n}\Big|_{t=1/2} &= \frac{1}{9}(4,7,4) , \\
\mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \left(\frac{t^2}{2+t^2}, -\frac{2t}{2+t^2}, \frac{2}{2+t^2}\right) , & \mathbf{b}\Big|_{t=1/2} &= \frac{1}{9}(1,-4,8) ,
\end{aligned}$$

pri čemer bi lahko binormalo dobili tudi po formuli $\mathbf{b} = \dfrac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}$. Končno je:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{b}} &= \left(\frac{4t}{(2+t^2)^2}, \frac{2t^2-4}{(2+t^2)^2}, -\frac{4t}{(2+t^2)^2}\right) , & \dot{\mathbf{b}}\Big|_{t=1/2} &= \frac{8}{81}(4,-7,-4) , \\
\mathbf{b}' &= \frac{\dot{\mathbf{b}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} , & \mathbf{b}'\Big|_{t=1/2} &= \frac{32}{729}(4,-7,-4) = \\
& & &= -\frac{32}{81}\mathbf{n}\Big|_{t=1/2} ,
\end{aligned}$$

od koder dobimo še torzijsko ukrivljenost: $\omega\big|_{t=1/2} = 32/81$.

6. Ploskev je podana v eksplicitni obliki, kar pomeni, da je parametrizirana kar z x in y. Velja torej:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= (x, y, x^3y^2) , \\
\mathbf{r}_x &= (1, 0, 3x^2y^2) , & \mathbf{r}_x\Big|_{x=y=1} &= (1,0,3) , \\
\mathbf{r}_y &= (0, 1, 2x^3y) , & \mathbf{r}_y\Big|_{x=y=1} &= (0,1,2) ,
\end{aligned}$$

od koder dobimo $E = 10$, $F = 6$, $G = 5$ in še $EG - F^2 = 14$. Nadalje iz:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{xx} &= (0,0,6xy^2)\,, & \mathbf{r}_{xx}\big|_{x=y=1} &= (0,0,6)\,,\\ \mathbf{r}_{xy} &= (0,0,6x^2y)\,, & \mathbf{r}_{xy}\big|_{x=y=1} &= (0,0,6)\,,\\ \mathbf{r}_{yy} &= (0,0,2x^3)\,, & \mathbf{r}_{yy}\big|_{x=y=1} &= (0,0,2) \end{aligned}$$

dobimo $L = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$, $M = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$ in $N = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

Gaussova ukrivljenost: $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\dfrac{6}{49}$.

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 20. 4. 2011

Praktična matematika

1. Označimo $f(t,x) := \dfrac{e^{-tx}}{t^x}$. Integral razdelimo na dvoje. Ker za $0 \le t \le 1$ velja $\min\{e^{-x}, 1\} \le e^{-tx} \le \max\{e^{-x}, 1\}$, integral $\int_0^1 f(t,x)\,\mathrm{d}t$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira integral $\int_0^1 \mathrm{d}t/t^x$, le-ta pa konvergira za $x < 1$. Integral $\int_1^\infty f(t,x)\,\mathrm{d}t$ pa za $x \le 0$ zagotovo divergira, saj je integrand konstanten ali pa narašča proti neskončno. Za $x > 0$ pa omenjeni integral konvergira, ker gre eksponentna funkcija proti nič hitreje kot katera koli potenca.

Sklep: integral konvergira za $0 < x < 1$.

2. Najprej zaradi simetrije velja:

$$I := \int_{-3}^{3} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

S substitucijo $x^2 = 9t$ dobimo:

$$I = 9\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\,\mathrm{d}t = 9\,\mathrm{B}\big(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\big) = 9\,\frac{\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{\Gamma(2)} = \frac{9\pi}{2}\,.$$

3. Krivulje omejujejo eno samo (omejeno) območje $1 \le xy \le 8$, $x \le y^2 \le 64x$. S substitucijo:

$$u = xy\,,\ v = \frac{y^2}{x}\,,\ x = u^{2/3}v^{-1/3}\,,\ y = u^{1/3}v^{1/3}\,,\ J = \frac{1}{3v}$$

dobimo:

$$\iint_{\substack{1\le xy\le 8\\ x\le y^2\le 64x}} \frac{y}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\iint_{\substack{1\le u\le 8\\ 1\le v\le 64}} v^{-1/2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_1^8 \mathrm{d}u \int_1^{64} v^{-1/2}\,\mathrm{d}v = \frac{98}{3}\,.$$

4. Dani integral najprej pretvorimo v dvojni integral:

$$\iint_{\substack{x\ge 0\\ 0\le y\le 1+e^{-x}}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Če želimo, da gre zunanji integral po y, notranji pa po x, moramo vse neenačbe, v katerih nastopata obe spremenljivki, rešiti na x. V našem primeru je to neenačba $y \le 1 + e^{-x}$. Če je $y \le 1$, to velja za vsak x, sicer pa velja za $x \le -\ln(y-1)$. Ta neenačba pa je združljiva s pogojem $x \ge 0$ le tedaj, ko je $-\ln(y-1) \ge 0$, to pa je tedaj, ko je $y \le 2$. Tako dobimo, da se naš integral prevede na naslednjo vsoto dvakratnih integralov:

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^{\ln(y-1)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

5. Masa danega telesa je sicer znana, a jo vseeno še enkrat izračunamo. Po uvedbi sferičnih koordinat:

$$x = r\cos\theta\cos\varphi\,, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi\,, \quad z = r\sin\theta\,, \quad J = r^2\cos\theta$$

dobimo:

$$\begin{aligned} m &= \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ x,y,z\ge 0}} \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho\iiint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\varphi\le\pi/2\\ 0\le\theta\le\pi/2}} r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \rho\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\rho\,\pi}{6} \end{aligned}$$

Težišče ima koordinate (x^*, y^*, z^*), kjer je:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{1}{m}\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ x,y,z\ge 0}} \rho\,x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\rho}{m}\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{\rho\,\pi}{16m} = \frac{3}{8}\,, \\ y^* &= \frac{1}{m}\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ x,y,z\ge 0}} \rho\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\rho}{m}\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{\rho\,\pi}{16m} = \frac{3}{8}\,, \\ z^* &= \frac{1}{m}\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2\le 1\\ x,y,z\ge 0}} \rho\,z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{\rho}{m}\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \\ &= \frac{\rho\,\pi}{16m} = \frac{3}{8}\,. \end{aligned}$$

Opomba: da so vse tri koordinate enake, je jasno iz simetrije. Dovolj je torej izračunati samo eno koordinato.

Rešitve kolokvija iz matematike 2 z dne 6. 6. 2011

Praktična matematika

1. Iz:

$$\operatorname{rot}\vec{R} = \begin{bmatrix} (a+2)(x+y)^a \\ -(a+2)(x+y)^a \\ 0 \end{bmatrix}$$

razberemo, da je polje potencialno natanko tedaj, ko je $a = -2$. Njegov potencial je polje $u(x, y, z) = \dfrac{z}{x+y}$.

2. Najprej izračunamo $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$ in $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2x^2$. Če dolžinsko gostoto označimo z ρ, velja:

$$\begin{aligned} m &= \int_{-1}^{1} \rho \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\, \mathrm{d}x = \\ &= \rho \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 4x^2 + 4x^4}\, \mathrm{d}x = \\ &= 2\rho \int_{0}^{1} (1 + 2x^2)\, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{10}{3}\, \rho\,. \end{aligned}$$

Težišče je točka s koordinatami (x^*, y^*, z^*), kjer je:

$$x^* = \frac{1}{m} \int_{-1}^{1} \int \rho x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\, \mathrm{d}x = \frac{3}{10} \int_{-1}^{1} x(1 + 2x^2)\, \mathrm{d}x = 0\,,$$

$$y^* = \frac{1}{m} \int_{-1}^{1} \int \rho y \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\, \mathrm{d}x = \frac{3}{10} \int_{-1}^{1} x^2(1 + 2x^2)\, \mathrm{d}x = \frac{11}{25}\,,$$

$$z^* = \frac{1}{m} \int_{-1}^{1} \int \rho z \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}\, \mathrm{d}x = \frac{3}{10} \int_{-1}^{1} \frac{2x^3}{3} (1 + 2x^2)\, \mathrm{d}x = 0\,.$$

3. Plašč valja najprej parametriziramo:

$$x = \cos\varphi\,, \quad y = \sin\varphi\,, \quad z = z\,; \qquad 0 \le \varphi < 2\pi\,, \quad z \in \mathbb{R}\,.$$

in v izbranih koordinatah zapišemo vektorsko polje, ki ga integriramo:

$$\vec{R} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + z^2} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{bmatrix}$$

Nato izračunamo:

$$\vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Ker zgornji vektorski produkt vedno kaže iz valja, je pretok enak:

$$\Phi = \iint_{\substack{0 \le \varphi < 2\pi \\ z \in \mathbb{R}}} \frac{1}{1+z^2} \left\langle \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = 2\pi^2 .$$

4. Če pišemo $f(z) = g(w)$, kjer je $z = -2 + w$, velja:

$$g(w) = \frac{1}{w(w-3)} = -\frac{1}{3w\big(1 - \frac{w}{3}\big)} = -\frac{1}{3w} - \frac{1}{9} - \frac{w}{27} - \frac{w^2}{81} - \cdots .$$

Sledi:

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{3(z+2)} - \frac{1}{9} - \frac{z+2}{27} - \frac{(z+2)^2}{81} - \cdots = \\ &= -\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+2}} (z+2)^n . \end{aligned}$$

5. Substitucija $z = e^{ix}$, $\cos x = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$, nam da:

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3 + 2\cos x} = \frac{1}{i} \oint_K f(z) \, \mathrm{d}z ,$$

kjer je K pozitivno orientirana enotska krožnica, funkcija f pa je definirana po predpisu:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 1} = \frac{1}{\big(z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\big)\big(z + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\big)} .$$

Funkcija f ima dve singularnosti, $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ in $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Le prva leži znotraj enotskega kroga, zato velja:

$$I = 2\pi \operatorname{Res}\big(f, -\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\big) .$$

Ker gre za pol prve stopnje, je:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\big(f, -\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\big) &= \lim_{z \to -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} \big(z + \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\big) f(z) = \\ &= \left. \frac{1}{\big(z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\big)} \right|_{z = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} . \end{aligned}$$

Sledi $I = \dfrac{2\pi\sqrt{5}}{5}$.

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 20. 6. 2011

Praktična matematika

1. Označimo $f(x) = 100 \ln x$. Očitno je f naraščajoča; ker je $f(600) \doteq 639{\cdot}69$ in $f(650) \doteq 647{\cdot}70$, funkcija preslika interval $I := [600, 650]$ vase. Ker za $x \in I$ velja $0 \le f'(x) = 100/x \le 1/6$, je f na I skrčitev, torej na I obstaja natanko ena rešitev enačbe $f(x) = x$, ki jo dobimo z iteracijo. Iz zaporedja približkov:

$$650\,,\ 647{\cdot}6972\,,\ 647{\cdot}3423\,,\ 647{\cdot}2875\,,\ 647{\cdot}279\,,\ 647{\cdot}2778\,,\ 647{\cdot}2775\,,\ 647{\cdot}2775$$

dobimo rešitev v predpisani natančnosti $647{\cdot}28$.

2. Velja:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 3t^2 - 1 \\ 3t^2 - 2 \\ 6t^2 - 4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 6t \\ 6t \\ 12t - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \dddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

in nadalje:

$$\|\dot{\vec{r}}\| = 3\,, \quad \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| = 2\sqrt{17}\,,$$

$$(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} -14 \\ 20 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \|(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}\| = 6\sqrt{17}\,.$$

Glavna normala: $\dfrac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}}{\|(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}\|} = \dfrac{1}{3\sqrt{17}} \begin{bmatrix} -7 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Fleksijska ukrivljenost: $\kappa = \dfrac{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3} = \dfrac{2\sqrt{17}}{27}$.

Torzijska ukrivljenost: $\omega = \dfrac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|^2} = \dfrac{6}{17}$.

3. Najprej izračunajmo kvadrat ploščinskega elementa:

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2\,.$$

Masa je torej enaka:

$$m = \iint_{z \le 2} \sigma \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{x^2 + y^2 \le 1} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Po uvedbi polarnih koordinat $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $J = r$ dobimo:

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \sqrt{1 + 4r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^1 r^3 \sqrt{1 + 4r^2}\,\mathrm{d}r\,.$$

S substitucijo $t = 1 + 4r^2$ dobimo:

$$m = \frac{\pi}{16} \int_1^5 (t-1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{5\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{60} \right) \pi\,.$$

4. Če z B označimo kroglo in z $\vec{R} = (X, Y, Z)$ dano vektorsko polje, po Gaussovem izreku velja:

$$I := \iint_{\partial B} \langle \vec{R}, \vec{n} \rangle \,\mathrm{d}S = \iiint_B \operatorname{div} \vec{R} \,\mathrm{d}V = \iiint_B 2(x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Po uvedbi sferičnih koordinat:

$$x = r\cos\theta\cos\varphi\,, \quad y = r\cos\theta\sin\varphi\,, \quad z = r\sin\theta\,, \quad J = r^2\cos\theta$$

dobimo:

$$I = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^4 \cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \frac{8\pi}{5}\,.$$

5. Ker ima funkcija $z \mapsto e^z - 1$ v izhodišču ničlo prve stopnje, ima funkcija f tam pol druge stopnje. Koeficienta glavnega dela Laurentove vrste sta torej enaka:

$$\begin{aligned} c_{-2} &= \lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1\,, \\ c_{-1} &= \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big[z^2 f(z)\big] = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1 - z\,e^z}{(e^z-1)^2} = -\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Z drugimi besedami, glavni del Laurentove vrste je enak $\dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{2z}$.

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 29. 6. 2011

Praktična matematika

1. Najprej opazimo, da je funkcija f liha, zato je dovolj gledati sinusno Fourierovo vrsto:

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,,$$

kjer je:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

Velja torej:

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & ;\ n = 1,3,5,\ldots \\ \frac{4}{n\pi} & ;\ n = 2,6,10\ldots \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}.$$

in zato:

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right) + \\ + \frac{2}{\pi}\left(\sin(2x) + \frac{\sin(6x)}{3} + \frac{\sin(10x)}{5} + \cdots\right).$$

2. *Prvi način.* Nastavimo Lagrangeovo funkcijo:

$$L = x^2 + 2y^4 - \lambda(x^2+y^2)$$

in dobimo sistem enačb:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 8y^3 - 2\lambda y = 0$$
$$x^2 + y^2 = 1\,.$$

Iz prve enačbe dobimo, da mora biti bodisi $x = 0$ bodisi $\lambda = 1$. Če je $x = 0$, iz tretje enačbe sledi $y = \pm 1$, kar je konsistentno z drugo enačbo pri $\lambda = 4$. Če je $\lambda = 1$, pa iz druge enačbe dobimo $y = 0$ (od koder sledi $x = \pm 1$) ali $y = \pm\frac{1}{2}$ (od koder sledi $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, pri čemer je predznak neodvisen od predznaka spremenljivke y). Kandidati za ekstrem so zbrani v naslednji tabeli:

x	y	$f(x,y)$
0	1	2
0	-1	2
1	0	1
-1	0	1

x	y	$f(x,y)$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$

,

iz katere razberemo, da je minimum funkcije enak $\frac{7}{8}$, maksimum pa 2.

Drugi način. Iz izražave $y^2 = 1 - x^2$ dobimo:

$$f(x,y) = 2 - 3x^2 + 2x^4 =: g(x)\,,$$

torej je potrebno poiskati le ekstremne vrednosti funkcije ene spremenljivke, t. j. funkcije g na intervalu $[-1,1]$. Iz $g'(x) = -6x + 8x^3$ dobimo naslednje kandidate za ekstrem:

x	$g(x)$
-1	1
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{7}{8}$
0	2
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{7}{8}$
1	1

.

Torej je minimum enak $\frac{7}{8}$, maksimum pa 2.

3. a) Najprej iz $x = 2$ sledi $\rho\cos\varphi = 1$, nato pa iz $y = 1$ dobimo še $\rho\sin\varphi = 0$. Ker je $\rho\cos\varphi = 1$, je $\rho \neq 0$, torej je $\sin\varphi = 0$, torej $\cos\varphi = \pm 1$ in $\rho = \pm 1$ (predznak se ujema s predznakom v prejšnji enačbi), zato je $z = \rho^2 = 1$. Točka $T(2,1,1)$ je dosežena pri naslednjih vrednostih parametrov:

$$\rho = 1\,, \quad \varphi = 2k\pi \quad \text{in še} \quad \rho = -1\,, \quad \varphi = (2k+1)\pi\,; \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

b) Iz prvih parcialnih odvodov:

$$\vec{r}_\rho = \begin{bmatrix} 2\cos\varphi \\ \cos\varphi + \sin\varphi \\ 2\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm 2 \\ \pm 1 \\ \pm 2 \end{bmatrix}\,, \quad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -2\rho\sin\varphi \\ \rho(\cos\varphi - \sin\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ker se vsi predznaki $\pm$ ujemajo s predznakom parametra ρ, dobimo, da so koeficienti prve fundamentalne forme v naši točki enaki:

$$E = 9\,, \quad F = \pm 1\,, \quad G = 1$$

in koeficient pri diferencialu ploščine je enak $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{8}$. Nadalje iz drugih parcialnih odvodov:

$$\vec{r}_{\rho\rho} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\,, \quad \vec{r}_{\rho\varphi} = \begin{bmatrix} -2\sin\varphi \\ \cos\varphi - \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix}\,, \quad \vec{r}_{\varphi\varphi} = \begin{bmatrix} -2\rho\cos\varphi \\ -\rho(\sin\varphi + \cos\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo še koeficiente druge fundamentalne forme:

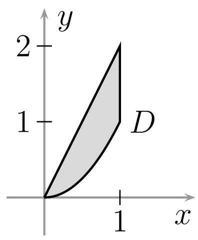
$$L = \pm\sqrt{2}\,, \quad M = 0\,, \quad N = \pm\sqrt{2}\,.$$

Predznaki v $\pm$ se spet ujemajo s predznakom parametra ρ. Iz:

$$\det\left(\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\right) = 8\lambda^2 \mp 10\sqrt{2}\,\lambda + 2$$

dobimo, da sta glavni ukrivljenosti pri $\rho = 1$ enaki $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\big(5 \pm \sqrt{17}\big)$, pri $\rho = -1$ pa $\dfrac{\sqrt{2}}{8}\big(-5 \pm \sqrt{17}\big)$.

4. Dani integral najprej izrazimo kot dvojni integral:



$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kjer je:

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y)\ ;\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 2x\} = \\ &= \left\{(x,y)\ ;\ 0 \le y \le 1,\ \frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y}\right\} \cup \left\{(x,y)\ ;\ 1 \le y \le 2,\ \frac{y}{2} \le x \le 1\right\} \end{aligned}$$

(glej sliko). Po zamenjavi vrstnega reda se torej dani integral izraža kot:

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_{y/2}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

5. Naj bo:

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+2z+5)}\,.$$

Iz ocene:

$$|zf(z)| \le \frac{|z|}{(|z|^2-1)(|z|^2-2|z|-5)}\,,$$

ki zagotovo velja velja za $|z| \ge 4$, najprej dobimo, da je $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$. Nadalje iz razcepa:

$$(z^2+1)(z^2+2z+5) = (z-i)(z+i)(z+1-2i)(z+1+2i)$$

dobimo, da ima f štiri pole stopnje 1, od katerih dva (i in $-1+2i$) ležita na zgornji polravnini. Torej je:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= 2\pi i\Big[\mathrm{Res}(f,i)+\mathrm{Res}(f,1+2i)\Big] = \\
&= 2\pi i\Bigg[\left.\frac{1}{(z+i)(z+1-2i)(z+1+2i)}\right|_{z=i} + \\
&\qquad + \left.\frac{1}{(z+i)(z-i)(z+1+2i))}\right|_{z=-1+2i}\Bigg] = \\
&= \pi\left(\frac{1}{4+2i}-\frac{1}{4+8i}\right) = \\
&= \frac{3\pi}{20}\,.
\end{aligned}
$$

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 22. 8. 2011

Praktična matematika

1. a) Očitno f slika $[0,\infty)$ v $[0,\infty)$. Nadalje velja $f'(x) = -\frac{16}{(8+x)^3}$. Za $x \in [0,\infty)$ je torej $-\frac{16}{8^3} = -\frac{1}{32} \le f'(x) < 0$, torej je f na tem intervalu res skrčitev.
b) Ker je f skrčitev, edino rešitev zahtevane enačbe dobimo kot limito kot limito rekurzivno podanega zaporedja $x_{n+1} = f(x_n)$. Če postavimo $x_1 = 0$, dobimo zaporedje približkov:

$$0\text{˙}5\,,\ 0\text{˙}3950617\,,\ 0\text{˙}4141523\,,\ 0\text{˙}4105777\,,\ 0\text{˙}4112435\,,\ 0\text{˙}4111194\,,$$

od koder zaključimo, da je rešitev v predpisani natančnosti 0˙411.

2. Za kandidate za ekstrem v notranjosti izračunajmo prve parcialne odvode:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 3\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 4\,,$$

iz katerih dobimo točko $(1/2, 2/3)$ in izračunamo $f(1/2, 2/3) = -25/12$. Na robu pa gledamo vezani ekstrem z Lagrangeovo funkcijo $L(x,y;\lambda) = 3x^2 - 3x + 3y^2 - 4y - \lambda(x^2+y^2)$. Dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 6x - 3 - 2\lambda x &= 0 \\ 6y - 4 - 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1\,, \end{aligned}$$

čigar rešitev sta točki $(-3/5, -4/5)$ in $(3/5, 4/5)$. Velja $f(-3/5,-4/5) = 28/5$ in $f(3/5, 4/5) = 2/5$. Torej velja:

$$\min_{x^2+y^2\le 1} f(x,y) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{25}{12}\,, \quad \max_{x^2+y^2\le 1} f(x,y) = f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = -\frac{28}{5}\,.$$

3. Ploskev je podana v eksplicitni obliki, kar pomeni, da je parametrizirana kar z x in y. Velja torej:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \big(x, y, x^2(4-y^2)\big)\,, \\ \mathbf{r}_x &= \big(1, 0, 2x(4-y^2)\big)\,, & \mathbf{r}_x\big|_{x=1,y=0} &= (1,0,8)\,, \\ \mathbf{r}_y &= (0, 1, -2x^2y)\,, & \mathbf{r}_y\big|_{x=1,y=0} &= (0,1,0)\,, \end{aligned}$$

od koder dobimo $E = 65$, $F = 0$, $G = 1$ in še $EG - F^2 = 65$. Nadalje iz:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{xx} &= (0,0,8-2y^2)\,, & \mathbf{r}_{xx}\big|_{x=y=1} &= (0,0,8)\,, \\ \mathbf{r}_{xy} &= (0,0,4xy)\,, & \mathbf{r}_{xy}\big|_{x=y=1} &= (0,0,0)\,, \\ \mathbf{r}_{yy} &= (0,0,-4x^2)\,, & \mathbf{r}_{yy}\big|_{x=y=1} &= (0,0,-2) \end{aligned}$$

dobimo $L = \dfrac{8}{\sqrt{65}}$, $M = 0$ in $N = -\dfrac{2}{\sqrt{65}}$.
Gaussova ukrivljenost: $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\dfrac{16}{4225}$.

4. Z uvedbo cilindričnih koordinat:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z\,, \quad J = r$$

dobimo:

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_{2 \le z\, e^{x^2+y^2} \le 3} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&= \iiint_{\substack{r \ge 0 \\ 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le 2 \le z\, e^{r^2} \le 3}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^\infty r \int_{2\,e^{-r^2}}^{3\,e^{-r^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}r = \\
&= 2\pi \int_0^\infty r\,e^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,.
\end{aligned}$$

S substitucijo $t = r^2$ končno dobimo $V = \pi \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = \pi$.

5. Substitucija $z = e^{it}$, $\cos t = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$, nam da:

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{4\cos t - 5} = \frac{1}{i}\oint_K f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

kjer je K pozitivno orientirana enotska krožnica, funkcija f pa je definirana po predpisu:

$$f(z) = \frac{z^2+1}{2z(2z^2-5z+2)} = \frac{z^2+1}{2z(2z-1)(z-2)}\,.$$

Funkcija f ima tri singularnosti, 0, 1/2 in 2. Le prvi dve ležita znotraj enotskega kroga, zato velja:

$$I = 2\pi\Big[\mathrm{Res}\big(f,0\big) + \mathrm{Res}\big(f,\tfrac{1}{2}\big)\Big]\,.$$

Ker gre obakrat za pol prve stopnje, je:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\big(f,0\big) &= \lim_{z\to 0} z\,f(z) = \left.\frac{z^2+1}{2(2z-1)(z-2)}\right|_{z=0} = \frac{1}{4}\,, \\
\mathrm{Res}\big(f,\tfrac{1}{2}\big) &= \lim_{z\to 1/2}\big(z-\tfrac{1}{2}\big)\,f(z) = \left.\frac{z^2+1}{4z(z-2)}\right|_{z=1/2} = -\frac{5}{12}\,.
\end{aligned}$$

Sledi $I = -\pi/3$.

Rešitve izpita iz matematike 2 z dne 6. 9. 2011

Praktična matematika

1. Ker je funkcija liha, je dovolj razviti v sinusno Fourierovo vrsto:

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)\,,$$

kjer je:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos(n\pi)\right)$$

oziroma:

$$b_n = \begin{cases} 2/(n\pi) & ;\ n = 1, 3, 5, \ldots \\ -4/(n\pi) & ;\ n = 2, 6, 10, \ldots \\ 0 & ;\ n = 4, 8, 12, \ldots \end{cases}.$$

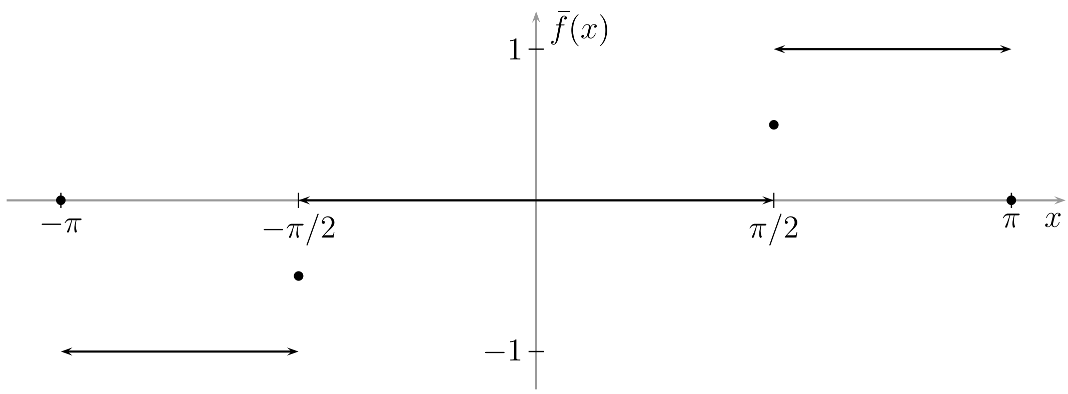
Z drugimi besedami,

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right) - \\ - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(8x)}{8} + \frac{\sin(12x)}{12} + \cdots\right).$$

Velja:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x = -\pi \\ -1 & ;\ -\pi < x < -\pi/2 \\ -1/2 & ;\ x = -\pi/2 \\ 0 & ;\ -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1/2 & ;\ x = -\pi/2 \\ 1 & ;\ \pi/2 < x < \pi \\ 0 & ;\ x = \pi \end{cases}.$$

Graf:



2. Oglišča: $f(0,0) = f(1,0) = 0, \quad f(0,2) = 2\,e^{-2} \doteq 0{\cdot}271.$
Rob AB: $f(x,0) = 0.$
Rob AC: $f(0,y) = y\,e^{-y}, \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(0,y) = (1-y)\,e^{-y}, \quad f(0,1) = e^{-1} \doteq 0{\cdot}368.$
Rob BC: $f(x, 2-2x) = (2-2x)e^{x-2}, \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, 2-2x) = -2x\,e^{x-2}.$
Notranjost: $f_x(x,y) = -y\,e^{-x-y}, \quad f_y(x,y) = (1-y)\,e^{-x-y},$
tam ni stacionarnih točk.
Sklep: če z Δ označimo naš trikotnik, velja:

$$\min_{\Delta} f = f(x,0) = 0 \ \ (0 \le x \le 1)\,, \quad \max_{\Delta} f = f(0,1) = e^{-1}\,.$$

3. Najprej izračunamo:

$$\dot{\mathbf{r}} = \left(\frac{1}{t}, 2, 2t\right)\,, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \left(-\frac{1}{t^2}, 0, 2\right)\,, \quad \dddot{\mathbf{r}} = \left(\frac{2}{t^3}, 0, 0\right)\,.$$

Od tod dobimo:

$$\|\dot{\mathbf{r}}\| = \frac{1}{t} + 2t\,, \quad \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \left(4, -\frac{4}{t}, \frac{2}{t^2}\right)\,, \quad \|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\| = 4 + \frac{2}{t^2}\,,$$

torej je fleksijska ukrivljenost enaka:

$$\kappa = \frac{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|}{\|\dot{\mathbf{r}}\|^3} = \frac{2t}{(1+2t^2)^2}\,.$$

Iz odvoda:

$$\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}t} = \frac{2(1-6t^2)}{(1+2t^2)^3}$$

dobimo stacionarni točki $t = \pm\sqrt{6}$, toda le $\sqrt{6}$ je v definicijskem območju krivulje. Ker je $\lim_{t\to 0} \kappa = \lim_{t\to\infty} \kappa = 0$, mora biti tam maksimum. Torzijska ukrivljenost je tam enaka:

$$\omega = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}})}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|^2} = \frac{t}{(1+2t^2)^2} = \frac{\sqrt{6}}{169}\,.$$

4. Označimo:

$$J := \iiint_K \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

Prvi način: s sferičnimi koordinatami. Po prevedbi na trikratni integral dobimo:

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^2}{4}\,.$$

Drugi način: s cilindričnimi koordinatami. Po prevedbi na trikratni integral dobimo:

$$J = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 z^2 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_{-1}^1 z^2\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z$$

Slednji integral lahko izračunamo na več načinov. S substitucijo $z = \sin t$ se prevede na:

$$J = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \bigl(1 - \sin(4t)\bigr) \,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} \,,$$

lahko pa po upoštevanju sodosti uvedemo tudi substitucijo $w = z^2$ in dobimo:

$$J = 4\pi \int_0^1 z^2 \sqrt{1 - z^2} \,\mathrm{d}z = 2\pi \int_0^1 w^{1/2} (1 - w)^{1/2} = 2\pi \,\mathrm{B}\bigl(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\bigr) = 2\pi \frac{\Gamma\bigl(\frac{3}{2}\bigr)^2}{\Gamma(3)} = \frac{\pi^2}{4} \,.$$

Pri prevedbi trojnega na trikratni integral pa je smiseln še en vrstni red integracije, pri katerem dobimo:

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-z^2}} z^2 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi}{3} \int_0^1 (1 - r^2)^{3/2} \,\mathrm{d}r$$

in tudi tega lahko izračunamo na enega izmed prej prikazanih načinov.

5. Iz:

$$\operatorname{rot} \vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ (a+2)(y+z)^a \\ -(a+2)(y+z)^a \end{bmatrix}$$

razberemo, da je polje potencialno natanko tedaj, ko je $a = -2$. Njegov potencial je polje $u(x, y, z) = \dfrac{x}{y + z}$.