KOLOKVIJI IN IZPITI IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika

Zbral: Martin Raič

2018/19

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
21. november 2018

1. [25] Dana je funkcija $f(x,y) = x^2 - \dfrac{1}{y}$.
   a) [5] Določite definicijsko območje funkcije f.
   b) [15] Narišite in označite nivojnice te funkcije za vrednosti $-2, -1, 0, 1, 2$.
   c) [5] Se da f zvezno razširiti na celo ravnino $\mathbb{R}^2$?
2. [25] Dana je funkcija $f(x,y) = e^{x^2y^2} + \dfrac{1}{1 - x^3y^3}$.
   a) [13] Razvijte to funkcijo v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0,0)$.
   b) [12] Izračunajte $\frac{\partial^{50} f}{\partial x^{24}\,\partial y^{26}}(0,0)$, $\frac{\partial^{50} f}{\partial x^{25}\,\partial y^{25}}(0,0)$, $\frac{\partial^{40} f}{\partial x^{20}\,\partial y^{20}}(0,0)$, $\frac{\partial^{36} f}{\partial x^{18}\,\partial y^{18}}(0,0)$.
3. [30] Dana je funkcija $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)\,e^{-x^2-y^2}$.
   a) [20] Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije f.
   b) [10] Ali so kateri od zgornjih lokalnih ekstremov tudi globalni? Utemeljite odgovor!
4. [30] Poiščite vse globalne minimume in maksimume funkcije $f(x,y) = 2x^3 + 3x + 2y^3 + y$ na množici $D = \{(x,y)\ ;\ x^4 + x^2 + 3y^4 + y^2 = 94\}$.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
22. januar 2019

1. [25] Izračunajte glavni ukrivljenosti ploskve:

$$\vec{r}(u,v) = \begin{bmatrix} 2e^u - e^v \\ e^u + 3e^v \\ 39(e^u + e^{-u}) - 4e^{uv} - 20(e^v + e^{-v}) \end{bmatrix}$$

pri $u = v = 0$. Klasificirajte točko.

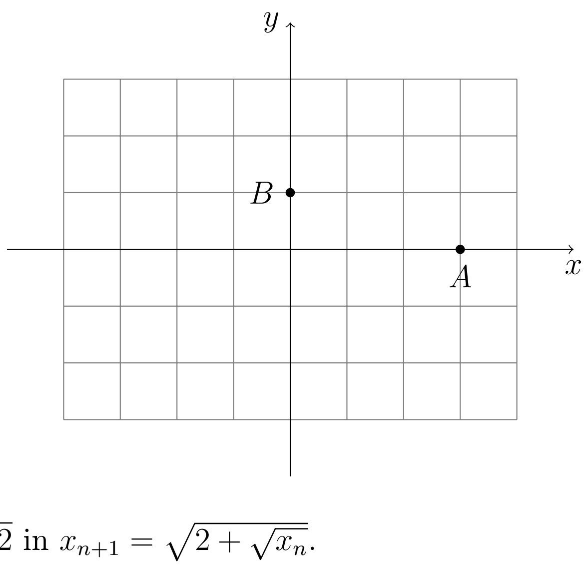
2. [30] Dan je sistem enačb:

$$x^2 - y^2 - z^3 + w^2 + 4 = 0$$
$$2xy + y^2 - 2z^2 + 3w^4 + 8 = 0$$

a) Pokažite, da se da dani sistem v neki okolici rešitve $(x,y,z,w) = (2,-1,2,1)$ enolično izraziti v obliki $(z,w) = \big(z(x,y), w(x,y)\big)$. Ali je v tej točki sistem rešljiv tudi v obliki $(x,z) = \big(x(y,w), z(y,w)\big)$? Kaj pa $(y,w) = \big(y(x,z), w(x,z)\big)$?

b) V točki $(x,y) = (2,-1)$ izračunajte z_x, z_y, w_x in w_y.

3. [25] Na spodnjo mrežo skicirajte množico točk na $\mathbb{R}^2$, ki so v metriki d_1 enako oddaljene od točk $A(3,0)$ in $B(0,1)$.



4. [30] Naj bo $x_0 = \sqrt{2}$ in $x_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n}}$.

a) Z uporabo Banachovega skrčitvenega načela pokažite, da zaporedje x_n konvergira k rešitvi enačbe $x^4 - 4x^2 - x + 4 = 0$, ki leži na intervalu $\left[\sqrt{2}, 2\right]$.

b) Izračunajte to rešitev na štiri decimalke natančno.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
25. april 2019

1. [25] Izračunajte integral $\displaystyle\int_1^e \int_{\ln y}^1 \sin(e^x - x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

2. [30] Izračunajte integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

   Kot znano lahko privzamete, da integral obstaja in da je zvezen v a, da lahko odvajate pod integralskim znakom ter da je $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

3. [25] Izračunajte vztrajnostni moment homogene okrogle krožnice z radijem R, ki jo zavrtimo okoli osi, ki gre skozi težišče in leži v ravnini krožnice.

4. [30] Izračunajte ploskovni integral $\displaystyle\iint_S \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \mathrm{d}P$, kjer je $\vec{R} = \begin{bmatrix} x^3 + y^2 z \\ x^2 z + y^3 \\ x^3 + y^3 \end{bmatrix}$, S pa je unija ploskve $\big\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, 0)\ ;\ 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi < 2\pi\big\}$, orientirane tako, da normala kaže navzdol, in ploskve $\big\{(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)\ ;\ 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \varphi < 2\pi\big\}$, orientirane tako, da normala kaže navzgor.

   Namig: kaj povezuje oba dela ploskve?

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

4. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
3. junij 2019

1. [30] Dana je prostorska krivulja: $\vec{r} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2\cos t - \sin t \end{bmatrix}$, ko gre t od 0 do 2π.

   a) Skicirajte jo! Za katero znano krivuljo gre?

   b) Izračunajte integral vektorskega polja $\vec{R} = \begin{bmatrix} y \sin^2 z \\ -x \cos^2 z \\ 2xy \sin z \cos z \end{bmatrix}$ po dani krivulji.

   Namig: Stokesov izrek.

2. [25] Dokažite, da je funkcija:

$$u(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y},$$

   definirana za $x \in \mathbb{R}$ in $y > 0$, realni del neke holomorfne funkcije spremenljivke $z = x + iy$. Izračunajte še pripadajoči imaginarni del (vsaj eno funkcijo, ki ustreza).

3. [25] Dana je funkcija:

$$f(z) := \frac{1}{e^{2z/3} - e^{-z/3}}.$$

   a) Določite, v katerih točkah ima f singularnosti. Vsako singularnost klasificiraj (pol določene stopnje ali bistvena singularnost).

   b) Izračunajte kompleksni integral $\oint_K f(z)\,\mathrm{d}z$, kjer je K krožnica s središčem v πi in polmerom 2π, orientirana pozitivno.

4. [30] Označimo z A zunanjost kroga v kompleksni ravnini s središčem v izhodišču in polmerom 5.

   a) Določite, kam funkcija $f(z) = \dfrac{1}{z - 4 - 3i}$ preslika množico A. Skiciraj preslikano množico.

   b) Katera konformna preslikava pa množico A bijektivno preslika na odprt krog s središčem v $2i$ in polmerom 2, ki mu odvzamemo središče?

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
10. junij 2019

1. [25] Dana je odvedljiva funkcija $f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
   a) [10] Pokažite, da za $g(x,y,z) = f(2x-2y, 2y-2z, 2z-2x)$ velja $g_x+g_y+g_z = 0$.
   b) [15] Denimo, da je f dvakrat zvezno odvedljiva. V enačbo $f_{xx}-f_{yy} = 0$ vpeljite nove koordinate $u = x^2 - y^2$ in $v = 2xy$: na koncu smejo nastopati le f, u, v.
2. [25] Izračunajte fleksijsko in torzijsko ukrivljenost krivulje:
$$\vec{r} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin(2t) - \sin t \\ \sin(2t) + 2\sin t \end{bmatrix}.$$
   Ali je krivulja ravninska?
3. [25] Izračunajte $\iiint_T z^2(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, kjer je T telo, podano z zvezami $0 \le x \le y$ in $0 \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}$.
4. [25] Dana je holomorfna funkcija $f(z) = \dfrac{1}{z(e^z-1)}$.
   a) [20] Poišči singularnosti in jih klasificiraj. Kjer gre za pol, poišči glavni del Laurentove vrste.
   b) [5] Izračunaj integral te funkcije po krožnici s središčem v $\frac{3}{2}\pi i$ in polmerom π, orientirani v nasprotni smeri urinega kazalca.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
19. avgust 2019

1. [25] Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = x\,e^{x+y}$ na območju $D := \{(x,y)\,;\, x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2\}$.

2. [25] Razvijte funkcijo $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

3. [25] Izračunajte $\displaystyle\int_C \vec{R}\,\mathrm{d}\vec{r}$, kjer je krivulja C parametrizirana z $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ za $t \in [0,1]$, vektorsko vektorsko polje pa je podano z $\vec{R} = (8x^2yz, 5z, -4xy)$.

4. [25] Izračunajte $\displaystyle\oint_K \frac{\cos(iz)}{2\sin z - 1}\,\mathrm{d}z$, kjer je K krožnica s središčem v izhodišču in polmerom $\pi/2$, orientirana v nasprotni smeri urinega kazalca.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
2. september 2019

1. [25] Klasificirajte (lokalni minimum, lokalni maksimum, sedlo) vse kritične točke funkcije:
$$f\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = 12x^4 + y^3 - 6xy\,.$$

2. [25] Izračunajte težišče zgornje polkrogle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$, ki ima gostoto $\rho(x,y,z) = z$.

3. [25] Izračunajte ploskovni integral $\iint_S \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle \,\mathrm{d}P$, kjer je $\vec{R} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, S pa je ploskev, določena s pogojema:
$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \quad \text{in} \quad z > \sqrt{3}\,,$$
orientirana navzgor.

4. [25] Naj bo A množica vseh kompleksnih števil, ki imajo imaginarno komponento večjo od 3.
   a) [15] Kam to množico preslika funkcija $f(z) = \dfrac{1}{z}$?
   b) [10] Katera konformna preslikava pa to množico preslika v odprt krog s središčem v izhodišču in polmerom 1?

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2017/18

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
4. december 2017

1. [25] Naj bo $M := \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. Funkcija $d\colon\ M \times M \to \mathbb{R}$ je podana po predpisu:

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{, če sta } x \text{ in } y \text{ istega predznaka,} \\ |x-y|-1 & \text{, če sta } x \text{ in } y \text{ različnih predznakov.} \end{cases}$$

   a) [15] Dokažite, da je d metrika na M.
   b) [10] Narišite odprto in zaprto kroglo okoli točke 2 s polmerom 2.

2. [25] Dana je funkcija $f(x) = 4 - \dfrac{x + \sin x}{3}$.

   a) [5] Dokažite, da ima enačba $f(x) = x$ na realni osi natanko eno rešitev.
   b) [10] Poiščite interval oblike $[0, a]$, na katerem bo f skrčitev.
   c) [10] Rešite enačbo $f(x) = x$ na pet decimalk natančno.

3. [35] Dana je funkcija $f(x) = \begin{cases} x^2 & ;\ x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ 0 & ;\ x \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$

   a) [25] Razvijte to funkcijo v trigonometrijsko Fourierovo vrsto.
   b) [10] Ali se dobljena vrsta na intervalu $[-\pi, \pi]$ ujema s funkcijo f? Kaj pa z njenima razvojema v vrsto sinusov in kosinusov na intervalu $[0, \pi]$? Svoj odgovor utemeljite!

4. [25] Dana je funkcija $f(x, y) = \ln(3 - x) + \ln y$.

   a) [15] Narišite njeno definicijsko območje in nivojnice za vrednosti -1, 0 in 1.
   b) [10] Pokažite, da so za f vsi mešani odvodi tretjega reda, kjer se odvaja dvakrat po x in enkrat po y, enaki, ne glede na vrstni red odvajanja.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **90 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
22. januar 2018
(spremenjen stil besedila)

1. [25] Dana je funkcija $f(x,y) = \dfrac{\ln(1-xy^2)}{y^2}$.

   a) [11] Razvijte to funkcijo v Taylorjevo vrsto okoli točke $(0,0)$.

   b) [14] Izračunajte $\dfrac{\partial^{41} f}{\partial x^{15}\,\partial y^{26}}(0,0)$ in $\dfrac{\partial^{10} f}{\partial x^{4}\,\partial y^{6}}(0,0)$.

2. [25] Klasificirajte (lokalni minimum, lokalni maksimum, sedlo) vse stacionarne točke funkcije $f(x,y) = xy\,e^{-x^2-y^2}$.

3. [25] Dana je enačba:

$$(x^2+y^2+z^2+9)^2 = 45(x^2+y^2)\,.$$

   a) [5] Rešite to enačbo na x pri $y=z=1$.

   b) [10] Pokažite, da ima ta enačba v okolici vsake rešitve, kjer je $y=z=1$, enolično izražavo oblike $x = x(y,z)$.

   c) [10] Vzemimo rešitev iz prejšnje točke, pri kateri je $y=z=1$ in $0<x<3$, in izražavo oblike $x=x(y,z)$ v njeni okolici. Izračunajte $\frac{\partial x}{\partial y}$ in $\frac{\partial x}{\partial z}$.

4. [35]

   a) [20] Parametrizirajte krivuljo:

$$y = e^z \sin z\,, \qquad x^2+y^2 = e^{2z}$$

   ter pri $z=0, x>0$ določite fleksijsko in torzijsko ukrivljenost.

   b) [15] Dana je ploskev:

$$\begin{aligned} x &= 8u^2 - 22uv + 5v^2 - 6v\,, \\ y &= -16u^2 + 68uv - 10v^2 + 3u - 3v\,, \\ z &= 16u^2 - 65uv + 10v^2 + 3u\,. \end{aligned}$$

   Pri $u=v=0$ določite Gaussovo ukrivljenost.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
19. april 2018
(spremenjen stil besedila)

1. [25] Za $x \geq 0$ izračunajte določeni integral:

$$\int_0^\infty \frac{\left(1 - e^{-xy}\right)\cos y}{y}\,\mathrm{d}y\,.$$

   Kot znano lahko privzamete, da je integral za $x \geq 0$ obstaja in da je zvezen.
   Pomoč: $\displaystyle\int e^{ay}\cos(by)\,\mathrm{d}y = \frac{e^{ay}\big(a\cos(by) + b\sin(by)\big)}{a^2 + b^2} + C.$

2. [30] Dan je dvojni integral $\displaystyle\iint_T \sin(9x^2+4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kjer je $T = \{(x,y)\ ;\ 9x^2+4y^2 \leq 1\}$ notranjost elipse.

   a) [10] Zapišite dani integral kot dvakratni integral v običajnih kartezičnih koordinatah: postavite ustrezne meje.
   b) [20] Izračunajte dani integral (ne nujno kot nadaljevanje prejšnje točke).

3. [30] Dan je homogen pokončen stožec s polmerom osnovne ploskve R in višino h.

   a) Izračunajte težišče tega stožca.
   b) Izračunajte vztrajnostni moment tega stožca okoli osi, ki gre skozi osnovno ploskev in je pravokotna na simetrijsko os. Izrazite ga z maso ter R in h.

4. [25] Določite, za katere $a \in \mathbb{R}$ obstaja integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{y^a}{1+y^{3a}}\,\mathrm{d}y$.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

4. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
14. junij 2018

1. Izračunajte vztrajnostni moment homogene žice, parametrizirane z:

$$x = (1 - t^2)\cos t\,, \quad y = (1 - t^2)\sin t\,, \quad z = 0\,; \qquad -1 < t < 1$$

   okoli osi z.

2. Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{R} = \begin{bmatrix} -xy\cos z \\ xy\cos z \\ (x^2 + y^2)\sin z \end{bmatrix}$ skozi ploskev:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 z\,; \quad -\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}\,,$$

   orientirano tako, da normala kaže stran od izhodišča.

3. Dana je množica:

$$A := \left\{ z \in \mathbb{C}\,;\, (1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} < 1 \right\}.$$

   a) Skicirajte to množico.
   b) Določite in skicirajte množico $f(A)$, kjer je $f(z) = \dfrac{z}{z - 1}$.

4. Izračunajte $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 + 4\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**.
Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika

22. junij 2018

1. [25] Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = (8x+5y^2)e^{-x^2-y^2}$ na enotskem krogu $x^2+y^2 \leq 1$.

2. [25] Izračunajte glavni ukrivljenosti ploskve:

$$\begin{aligned} x &= -2\,e^{2u} - 6\,e^{-2u} - 4\,e^{3v} + 9\,e^{u+v} + 9\,e^{-u-v}\,, \\ y &= 5\,e^{-u} + 5\,e^{2v}\,, \\ z &= 11\,e^{2u} + 8\,e^{-2u} - 3\,e^{3v} - 12\,e^{u+v} - 12\,e^{-u-v}\,. \end{aligned}$$

   pri $u = v = 0$.

3. [25] Izračunajte maso telesa

$$T = \{(x,y,z)\ ;\ x^2+4y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq x\}$$

   z gostoto $\rho(x,y,z) = 16z\,e^{-x^2-4y^2}$.

   Namig: uporabite prilagojene polarne koordinate $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, kjer sta a in b ustrezni polosi elipse.

4. [10] Določite, kam preslikava $f(z) = \dfrac{z}{z+2}$ preslika množico vseh kompleksnih števil s strogo pozitivno realno komponento.

5. [15] Izračunajte integral

$$\oint_K \frac{e^{\pi z}-1}{(z^2+4)^2}\,\mathrm{d}z\,,$$

   kjer je K sklenjena pot, ki gre od točke -1 premočrtno proti 1, nato premočrtno proti $3i$ in od tam spet premočrtno nazaj proti -1.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
20. avgust 2018

1. [25] Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = (x-3)y$ na omejenem območju, ki ga določata krivulja $y = x^2 - 8x$ in premica $y = x$.

2. [25] Dana je krivulja $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$.

   a) [10] Pri $t = 2$ zapišite enačbo tangente.

   b) [15] V vseh točkah izračunajte fleksijsko in torzijsko ukrivljenost.

3. Naj bo $a, b > 0$ ali $a, b < 0$. Izračunajte integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x} \, \mathrm{d}x \, .$$

   Kot znano lahko privzamete, da integral obstaja in da lahko odvajate pod integralskim znakom.

4. [25] Izračunajte iztok vektorskega polja $\vec{R} = \begin{bmatrix} x^3 z^2 \\ y^3 z^2 \\ (x^2 + y^2) z^3 \end{bmatrix}$ iz valja $x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1$.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
3. september 2018

1. [25] Zapišite razvoj funkcije
$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & ; -\pi \leq x \leq -\pi/2 \text{ ali } \pi/2 \leq x \leq \pi \\ 0 & ; -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \end{cases}$$
v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$ do vključno členov s $\cos(5x)$ in $\sin(5x)$.
Pomoč:
$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big], \quad \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big].$

2. [25] Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = xy + y - y\ln y + 2\,e^x - e^{2x}$.

3. [25] Izračunajte pretok vektorskega polja $\vec{R} = (y, -x, z)$ skozi ploskev S s parametrizacijo $\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$ za $u \in [0,1],\ v \in [0, 2\pi]$.

4. [25] Izračunajte $\displaystyle\oint_K \frac{\mathrm{d}z}{z^4 + 3z^2 - 4}$, kjer je K sklenjena pot, ki gre od $-3-3i$ premočrtno do $2+2i$, od tam premočrtno do $2-3i$ in od tam spet premočrtno do $-3-3i$.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2016/17

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
1. december 2016

1. [30] Funkcija $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je podana po predpisu:
$$d(x,y) = \begin{cases} |x^2 - y^2| & ;\ xy \geq 0 \\ |x^2 - y^2| + 1 & ;\ xy < 0\,. \end{cases}$$
   a) [10] Dokažite, da je d metrika na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   b) [10] V dani metriki določite odprto kroglo okoli točke 2 s polmerom 5.
   c) [10] Je d metrika tudi na $\mathbb{R}$?

2. [20] Dana je funkcija $f(x) = 5 + e^{-x}$.
   a) Poiščite interval oblike $[a, \infty)$, na katerem bo f skrčitev.
   b) Rešite enačbo $f(x) = x$ na pet decimalk natančno.

3. [20] Na prostoru realnih polinomov p, za katere je $p(0) = 0$, je definiran naslednji skalarni produkt:
$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 \frac{p(x)\,q(x)}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$
Določite koeficienta a in b, pri katerih bo polinom $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$ ortogonalen na polinoma $p_1(x) = x$ in $p_2(x) = x^2$.

4. [20] Dana je funkcija $f(x) = \sin \dfrac{x}{2}$.
   a) Razvijte to funkcijo v trigonometrijsko Fourierovo vrsto na intervalu $(-\pi, \pi)$.
   Namig: lahko si pomagate s formulama:
$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}\,,$$
$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}\,.$$
   b) Izračunajte vsoto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}$.
   Namig: Parsevalova enačba.

5. [20] Dana je funkcija $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{y}{x^2} - 1}$.
Skicirajte njeno definicijsko območje in nivojnici za vrednosti 1 in 2.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
26. januar 2017

1. [20] Dana je funkcija $f(x, y) = \ln(1 + x + y^2)$.
   a) Zapišite razvoj te funkcije v Taylorjevo vrsto okoli izhodišča do vključno členov 4. stopnje.
   b) Izračunajte $f_{xxyy}(0, 0)$.
2. [20] Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = 2x^2 + xy - 3y$ pri pogoju $4x^2 + 2xy + y^2 \leq 192$. Kot znano lahko privzamete, da je množica točk, ki izpolnjujejo slednji pogoj, omejena.
3. [20] Dana je enačba $3y + 2\sin(x + y) = 0$.
   a) Rešite enačbo na y pri $x = 0$ in utemeljite, da je rešitev ena sama.
   b) Pokažite, da obstaja taka okolica izhodišča, da je enačba za vse x iz te okolice enolično rešljiva na y. Tako postane y funkcija spremenljivke x.
   c) S pomočjo prvega odvoda približno rešite enačbo na y pri $x = 0{}^{\cdot}1$.
4. [20] Določite pritisnjeno krožnico na krivuljo $y = 3\sqrt{6x}$ pri $x = 24$.
5. [30] Dana je ploskev:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} -2\sin u - 10\cos u - 2\sin v - 19\cos v + 14\sin u \sin v \\ 4\sin u + 20\cos u + 7\sin v + 38\cos v - 28\sin u \sin v \\ 5\sin u - 20\cos u + 8\sin v - 38\cos v + 28\sin u \sin v \end{bmatrix},$$

   kjer (u, v) preteče neko okolico izhodišča. Pri $u = 0$ in $v = 0$:
   a) izračunajte glavni ukrivljenosti;
   b) klasificirajte točko;
   c) določite glavni smeri;
   d) v primernih novih koordinatah zapišite enačbo ploskve drugega reda, ki dano ploskev najbolje aproksimira. Skicirajte to ploskev.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
18. april 2017

1. [25] Izračunajte integral:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$
Kot znano lahko privzamete, da se sme odvajati pod integralskim znakom in da je integral zvezna funkcija parametra.

   Namig: integral najprej izračunajte za $a > 0$, nato pa upoštevajte zveznost in ustrezno simetrijo.

2. [20] Določite, za katere $a \geq 0$ obstaja integral:
$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^a}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. [15] Izračunajte dvojni integral:
$$\iint_{\substack{x<2y\\ y<2x}} e^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

4. [25] Naj bo $a > b > 0$ in naj bo K krogla s središčem v izhodišču in polmerom a, ki ji odvzamemo kroglo s središčem v izhodišču in polmerom b.

   a) Izračunajte integral $\displaystyle\iiint_K \frac{x^2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{9/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

   b) Ali obstaja posplošeni integral tega izraza po celi krogli s polmerom a?

5. [25] Izračunajte težišče homogenega telesa, določenega s pogojema:
$$0 < z < 1\,, \qquad x^2 + y^2 < 2zx\,.$$
Namig: ko integrirate, naj bo spremenljivka z zunanja.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

4. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
9. junij 2017

1. [20] Dano je vektorsko polje $\vec{R} = \begin{bmatrix} (1+ax)yz\,e^{-x} \\ (1+by)xz\,e^{-x} \\ (1+cz)xy\,e^{-x} \end{bmatrix}$.

   a) Določite, pri katerih a, b, c je to polje potencialno.

   b) Za vrednosti, pri katerih je potencialno, izračunajte potencial.

2. [20] Izračunajte integral vektorskega polja $\vec{R} = \begin{bmatrix} -yz \\ xz \\ z^2 \end{bmatrix}$ po robu valja:

$$x^2 + y^2 \le 1\,, \;\; 1 \le z \le 2\,,$$

   orientiranem tako, da normala kaže navzven (z drugimi besedami, izračunajte iztok iz valja).

3. [20] Poiščite konformno preslikavo, ki zunanjost kroga s središčem v i in polmerom 2 bijektivno preslika na odprt krog s središčem v $1/2$ in polmerom $1/2$, ki mu odvzamemo središče.

4. [30] Dana je funkcija $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2iz + 3}$.

   a) Razvijte funkcijo v Laurentovo vrsto, ki konvergira v punktirani okolici točke $-i$, in določite konvergenčno območje.

   b) Pri $-i$ klasificirajte singularnost in določite residuum.

   c) Na katerem maksimalnem odprtem kolobarju ali krogu pa konvergira Laurentova vrsta funkcije f, razvite okoli točke 0?

5. [20] Izračunajte integral:

$$\oint_K \frac{\cos z}{z^2 + 4}\,\mathrm{d}z\,,$$

   kjer je K pot, ki gre najprej premočrtno od $-1 - i$ do $3i$, nato od tam premočrtno do $1 - i$ in od tam premočrtno nazaj v $-1 - i$.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
21. avgust 2017

1. [20] Dana je funkcija $f(x) = 5 + 2\operatorname{arctg} x$.

   a) Določite poltrak oblike $[a, \infty)$, na katerem je f skrčitev.

   b) Na dobljenem poltraku rešite enačbo $f(x) = x$ na pet decimalk natančno.

2. [20] Določite globalne ekstreme funkcije:

$$f(x, y) = 2x^3 + 3xy^2$$

   na krivulji:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 1\,.$$

   Kot znano lahko privzamete, da je dana krivulja omejena.

3. [20] Določite tangentno ravnino in Gaussovo ukrivljenost ploskve $x^2y^2z = 4$ pri $x = 1, y = 2$.

4. [20] Naj bo $a, b, c > 0$ in $p \in \mathbb{R}$. Izračunajte pretok vektorskega polja:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} x\,e^{-x^2-y^2} \\ y\,e^{-x^2-y^2} \\ z\,e^{-x^2-y^2} \end{bmatrix}$$

   skozi ravnino $ax + by + cz = p$ v smeri navzgor.

5. [20] Izračunajte integral:

$$\oint_K \frac{z}{z^3 - 8}\,\mathrm{d}z\,,$$

   kjer je K lomljenka, ki gre od $2i$ premočrtno do $-2 + 2i$, od tam premočrtno do $-2 - 2i$, od tam premočrtno do $-2i$ in od tam spet premočrtno nazaj do $2i$.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
4. september 2017

1. [15] Določite notranjost in rob množice $\{1\} \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right] \cup \cdots$.

2. [20] Zapišite razvoj funkcije:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ;\, x \in \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \\ 0 & ;\, \text{sicer} \end{cases}$$

   v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$ do vključno členov s $\cos(6x)$ in $\sin(6x)$.

3. [20] Izračunajte maso hiperboloida:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1\,,$$

   katerega površinska gostota je enaka $\dfrac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+1}}$.

4. [25] Dano je vektorsko polje:

$$X = \frac{ax+y+z}{x+y+z} + 2\ln(x+y+z)\,, \quad Y = \frac{bx+y+z}{x+y+z}\,, \quad Z = \frac{cx}{x+y+z}\,.$$

   a) Določite parametre a, b in c, za katere bo to polje potencialno.
   b) Pri ustreznih vrednostih parametrov določite potencial danega polja.

5. [20] Izračunajte integral $\displaystyle\oint_K \frac{z}{z^2 - 4iz - 3}\,\mathrm{d}z$, kjer je K krožnica s središčem v izhodišču in polmerom 2, orientirana v nasprotni smeri urinega kazalca.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2015/16

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
17. november 2015

1. [20] Na množici $[0,4] \times \{0,1\}$ je definirana naslednja metrika:
$$d\big((x,0),(y,0)\big) = |x-y|\,,$$
$$d\big((x,0),(y,1)\big) = d\big((y,1),(x,0)\big) = 1 + \tfrac{1}{2}|x-y|\,,$$
$$d\big((x,1),(y,1)\big) = \tfrac{1}{2}|x-y|\,.$$
Narišite zaprto kroglo okoli točke $T(3,0)$ s polmerom $3/2$.

2. [15] Poiščite točko na premici $y = 3x$, ki je v metriki na ravnini:
$$d_1\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$
najbližje točki $(3,3)$.

3. [20] Dana je funkcija $f(x) = 5\pi - 2\operatorname{arctg} x$.
   a) Poiščite interval oblike $[a,\infty)$, na katerem je f skrčitev.
   b) Dokažite, da ima enačba $f(x) = x$ natanko eno rešitev, in to rešitev tudi izračunajte na štiri decimalke natančno.

4. [20] Dana je funkcija:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & ;\ 0 \le x \le \pi/2 \\ 1 & ;\ \pi/2 < x \le \pi \end{cases}\,.$$
   a) Izračunajte koeficiente razvoja v kosinusno Fourierovo vrsto na intervalu $(0,\pi)$ do vključno člena s $\cos(3x)$.
   b) Natančno narišite graf pripadajoče Fourierove vrste na intervalu $[-4\pi, 4\pi]$.

5. [15] Dana je funkcija $f(x,y) = \sqrt{4 - \ln x - \ln y}$. Skicirajte njeno definicijsko območje ter nivojnice za vrednosti 0, 2 in 4.

6. [10] Določite, za katere $r > 0$ je funkcija:
$$f(x,y) = \begin{cases} 4 - x^2 - y^2 & ;\ x^2 + y^2 < r^2 \\ x^2 + y^2 & ;\ x^2 + y^2 \ge r^2 \end{cases}$$
zvezna na celi ravnini.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
26. januar 2016

1. Izračunajte limito $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+4y^2}{1-2xy-\cos(x+2y)}$.

2. Določite točko na ploskvi $\dfrac{1}{x}+\dfrac{8}{y}+\dfrac{64}{z}=1$, ki je najbližje izhodišču.

3. Preslikava $\vec{F}\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je podana kot:

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{bmatrix},$$

   kjer je:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= e^{x+y} + z\,, \\ g(x,y,z) &= 3x + 2y + (1+z)(1+x^2+y^2)\,. \end{aligned}$$

   a) Izračunajte Jacobijevo matriko iz parcialnih odvodov za preslikavo $\vec{F}$.
   b) Utemeljite, da se da v določeni okolici točke $(x=0, y=0, z=-1)$ množica rešitev sistema $\vec{F}(x,y,z)=0$ izraziti v obliki $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \vec{G}(z)$.
   c) V prej podani točki določite Jacobijevo matriko iz parcialnih odvodov za preslikavo $\vec{G}$.
   d) Približno izračunajte x in y pri $z=-0'9$.

4. Določite, kje ima krivulja $y=x^4$ največjo ukrivljenost. Koliko tam znaša krivinski polmer?

5. Izračunajte glavni ukrivljenosti ploskve:

$$x=(1+z^2)\cos\varphi\,, \quad y=(1+2z^2)\sin\varphi\,, \quad z=z\,; \qquad 0\le\varphi<2\pi\,, \quad z\in\mathbb{R}$$

   pri $z=1$ in $\varphi=\pi/4$.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
19. april 2016

1. Določite, za katere $a \in \mathbb{R}$ obstaja integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1+x^a}{1+x^{3a}}\,\mathrm{d}x$.

2. Naj bo $a > 0$. Izračunajte integral:
$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax^4}}{x^4}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Izračunajte integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(4+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

4. Izračunajte ploščino lika, določenega z neenačbo:
$$(x^2+y^2)^2 < xy\,.$$

5. Izračunajte težišče homogenega telesa, določenega z neenačbo:
$$x^2+y^2 < z\sqrt{1-z^2}\,.$$

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

4. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
17. junij 2016

1. [20] Naj bo $a > b > 0$. Izračunajte vztrajnostni moment okoli osi z površine torusa:

$$\begin{aligned} x &= (a + b\cos\theta)\cos\varphi \\ y &= (a + b\cos\theta)\sin\varphi \\ z &= b\sin\theta \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le \theta < 2\pi \,, \end{aligned}$$

pri katerem je površinska gostota obratno sorazmerna z oddaljenostjo od simetrijske osi. Natančneje, za površinsko gostoto σ velja $\sigma = c/\sqrt{x^2 + y^2}$ za primerno konstanto $c > 0$.

2. [20] Izračunajte pretok vektorskega polja:

$$X = x(y^2 + z^2)\,, \quad Y = y(x^2 + z^2)\,, \quad Z = z^3$$

skozi rob enotske kocke $\{(x, y, z)\ ;\ 0 \le x, y, z \le 1\}$, orientiran navzven (z drugimi besedami, izračunajte iztok).

Namig: Gaussov izrek.

3. [30] Dana je kompleksna funkcija:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2\big(e^z - 1\big)}\,.$$

Klasificirajte vse singularnosti, v izhodišču pa določite še glavni del Laurentove vrste.

4. [20] Izračunajte integral:

$$\oint_K \frac{e^{\pi z/3}}{z^4 - 3z^2 - 4}\,\mathrm{d}z\,,$$

kjer je K krožnica s središčem v izhodišču in polmerom $3/2$, orientirana v nasprotni smeri urinega kazalca.

5. [20] Določite holomorfno funkcijo, ki kot preslikava iz $\mathbb{C}$ v $\mathbb{C}$ predstavlja rotacijo okoli točke $\sqrt{3} + i$ za kot $\pi/3$ v smeri urinega kazalca.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **110 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
25. avgust 2016

1. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = xy\,e^{-x-y}$ na območju:
$$D = \big\{(x,y)\ ;\ x \geq 0, y \geq 0, 3x + 4y \leq 18\big\}$$

2. Dana je prostorska krivulja:
$$x = \ln t\,, \quad y = t^2\,, \quad z = \frac{t^4}{2}\,.$$
Pri $x = 0$ izračunajte odvod koordinate y po naravnem parametru in fleksijsko ukrivljenost.

3. Izračunajte vztrajnostni moment okoli osi z homogenega telesa z gostoto ρ, določenega s pogojema:
$$(x^2 + y^2)^4 z\,e^z < 1\,, \qquad z > 0\,.$$

4. Dano je vektorsko polje:
$$X = (ax^2 + y^2 + z^2)xy^2z^2\,, \quad Y = (ay^2 + z^2 + x^2)yz^2x^2\,, \quad Z = (az^2 + x^2 + y^2)zx^2y^2\,.$$
Poiščite vrednosti parametra a, pri katerih je to polje potencialno, in za te vrednosti določite njegov potencial.

5. Izračunajte integral:
$$\oint_K \frac{\cos\frac{z}{3}}{z\sin z}\,\mathrm{d}z\,,$$
kjer je K krožnica s središčem v $\pi/2$ in polmerom π, orientirana v nasprotni smeri urinega kazalca.

Na izdelek obvezno vpišite ime, priimek in vpisno številko. Čas reševanja je **100 minut**. Vse odgovore je potrebno utemeljiti. Veliko uspeha!

2014/15

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
2. december 2014

1. [20] Dana je enačba:
$$x = \frac{x^3}{24} - \frac{x^5}{160} + 1\,.$$
   a) [10] Dokažite, da ima ta enačba natanko eno rešitev na $[-2, 2]$.
   Namig: odvod desne strani ocenite tako, da poiščete njegove ekstreme.
   b) [10] Izračunajte to rešitev na štiri decimalke natančno.

2. [25] Dana je funkcija $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$.
   a) [15] Zapišite razvoj te funkcije v Fourierovo vrsto na intervalu $(-\pi, \pi)$ do vključno členov s $\cos(4x)$ in $\sin(4x)$.
   Pomoč:
   $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big]$, $\quad\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big]$.
   b) [10] Izračunajte vsoto vrste $\dfrac{1}{1^2 - \frac{1}{4}} + \dfrac{1}{2^2 - \frac{1}{4}} + \dfrac{1}{3^2 - \frac{1}{4}} + \cdots$
   Namig: vstavite $x = \pi$.

3. [20] Dana je funkcija $f(x, y) = \ln\big(x + \sqrt{y-2}\big)$. Skicirajte njeno definicijsko območje in nivojnice za vrednosti -1, 0 in 1.

4. [25] Spremenljivko u gledamo tako kot funkcijo spremenljivk x in y kot tudi funkcijo spremenljivk r in φ, pri čemer velja:
$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,.$$
   a) [20] Izračunajte $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, če veste, da je $x\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.
   b) [5] Kakšna funkcija spremenljivk r in φ je torej u?

5. [20] Zapišite Taylorjev polinom 3. stopnje za funkcijo $f(x, y) = x\,e^{x+y^2}$ okoli izhodišča.

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
2. februar 2015

1. [25] Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije:

$$f(x, y) = 3 \ln y - 3\, e^{x^2} y^2 + x^3 - 6x\,.$$

2. [30] Preslikava $\vec{F}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ je podana kot:

$$\vec{F}(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} f(x, y, z, w) \\ g(x, y, z, w) \end{bmatrix}\,,$$

kjer je:

$$f(x, y, z, w) = e^z (w^3 - 8) - x\,,$$
$$g(x, y, z, w) = z\left(w^2 - \frac{2}{w}\right) - y\,.$$

a) [15] Izračunajte Jacobijevo matriko iz parcialnih odvodov za preslikavo $\vec{F}$.

b) [5] Utemeljite, da se da v določeni okolici točke $(x = 0, y = 6, z = 2, w = 2)$ množica rešitev sistema $\vec{F}(x, y, z, w) = 0$ izraziti v obliki $\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \vec{G}(x, y)$.

c) [5] V prej podani točki določite Jacobijevo matriko iz parcialnih odvodov za preslikavo $\vec{G}$.

d) [5] Prav tako v prej podani točki izračunajte še totalni diferencial spremenljivke z kot funkcije spremenljivk x in y, če je $\mathrm{d}x = 0^{\cdot}2$ in $\mathrm{d}y = -0^{\cdot}5$.

3. [20] Dana je prostorska krivulja:

$$x = e^{-t}\,, \quad y = 2t\,, \quad z = 2\, e^t\,.$$

Pri $x = 2$ izračunajte x', t. j. odvod koordinate x po naravnem parametru. Privzemite, da je x naraščajoča funkcija naravnega parametra.

4. [20] Na enotski sferi:

$$x = \cos\theta \cos\varphi\,, \quad y = \cos\theta \sin\varphi\,, \quad z = \sin\theta$$

izračunajte dolžino poti, določene s:

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + t}{1 - t}\,, \quad \theta = \arcsin t\,; \qquad 0 \le t \le 1\,.$$

5. [20] Dana je ploskev:

$$x = 2u + v + v^2\,, \quad y = u^2 - u + 3v\,, \quad z = u^2 + v^2\,.$$

Izračunajte njeno Gaussovo ukrivljenost v izhodišču.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
14. april 2015

1. Določite, za katere a obstaja posplošeni integral:
$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{(x+1)^{a+3}} + \frac{e^{-x}}{x^{a-3}} \right) \mathrm{d}x \,.$$

2. Izračunajte posplošeni integral s parametrom:
$$\int_0^\infty \frac{(xy+1)e^{-xy} - 1}{y^2} \,\mathrm{d}y \,.$$
Obstoja integrala ni potrebno utemeljevati.

3. Izračunajte integral $\displaystyle\int_0^\infty \big(1 - e^{-x}\big)^6 e^{-5x/2} \,\mathrm{d}x$.

4. Izračunajte integral $\displaystyle\iint_{\substack{1<y-2x<3 \\ 3<y/x<4}} \left(\frac{y}{x} - 2 \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$.
Namig: uvedite novi spremenljivki $u = y - 2x$, $v = y/x$.

5. Homogeno telo je določeno s pogojem:
$$\big(x^2 + y^2 + z^2\big)^6 < x^2 + y^2 \,.$$
Izračunajte njegov vztrajnostni moment okoli osi z.
Pomoč: $J_z = \displaystyle\iiint_D (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

4. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika

16. junij 2015

1. Določite, pri katerih vrednostih parametra a je vektorsko polje:

$$\vec{R} = (x+y+z)^a \begin{bmatrix} -y-z \\ x \\ x \end{bmatrix}$$

potencialno. Za take vrednosti tudi izračunajte njegov potencial.

Če potencial računate s krivuljnim integralom, pazite na singularnosti (integracijo začnite recimo v $(1,0,0)$).

2. Izračunajte ploskovni integral $\iint_A z\,\mathrm{d}P$, kjer je A ploskev, določena s pogojema:

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1\,, \qquad z > \sqrt{3}\,.$$

3. Izračunajte integral:

$$\oint_K \big(x \ln(x+y)\,\mathrm{d}x - y\ln(x+y)\,\mathrm{d}y\big)\,,$$

kjer je K krožnica s središčem v točki $(2,0)$ in polmerom 1, orientirana pozitivno.

4. Dana je kompleksna funkcija:

$$f(z) = \frac{1+e^z}{1+\operatorname{ch} z}\,.$$

V točki πi klasificirajte singularnost in zapišite glavni del Laurentove vrste.

5. Izračunajte integral:

$$\oint_K \frac{\mathrm{d}z}{z^4 - 16}\,,$$

kjer je K krožnica s središčem v točki $1+i$ in polmerom 2, orientirana pozitivno.

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
8. september 2015

1. Razvijte funkcijo $f(x) = |x|$ v Fourierovo vrsto na intervalu $(-1, 1)$.

2. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = (x - 3)y$ na omejenem območju, ki ga določata krivulji $y = 3x^2 - 3x$ in $y = x^2 + 5x$.

3. Naj bo $a \geq 0$. Izračunajte integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - (1 + ax)e^{-ax}}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
   Korakov ni potrebno utemeljevati.

4. Dana je krogla, katere gostota je premo sorazmerna z oddaljenostjo od središča. Izrazite njen vztrajnostni moment z maso in polmerom. Os naj gre skozi središče krogle.

5. Izračunajte integral:
$$\oint_K \frac{\mathrm{d}z}{z^4 + 4z^2}$$
   po krožnici okoli točke i s polmerom 2, orientirani v nasprotni smeri urinega kazalca.

2013/14

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
26. november 2013

1. Na ravnini je dana metrika:

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max\{|x_1 - x_2|, |2x_1 + y_1 - 2x_2 - y_2|\}\,.$$

   Narišite odprto kroglo okoli točke $T(1, 2)$ s polmerom 3.

2. Dano je zaporedje funkcij $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{nx + \frac{1}{n}}}$.

   a) Za $m > n$ izračunajte $d_1(f_m, f_n)$, kjer je $d_1(f, g) = \displaystyle\int_0^1 \big|f(x) - g(x)\big|\,\mathrm{d}x$.

   b) Ali je v prostoru zveznih funkcij na $[0, 1]$, opremljenem z metriko d_1, to zaporedje Cauchyjevo?

   c) Ali je v prej omenjenem prostoru to zaporedje konvergentno?

3. Dana je funkcija $f(x) = 8 + \sqrt[3]{x}$.

   a) Dokažite, da ima enačba $f(x) = x$ na $[0, \infty)$ natanko eno rešitev.

   b) Poiščite poln metrični prostor M, na katerem je f skrčitev (seveda mora funkcija f slikati M spet v M).

   c) Rešite enačbo $f(x) = x$ na tri decimalke natančno.

4. Dana je funkcija $f(x) = \begin{cases} x & ; -2\pi/3 < x < 2\pi/3 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$.

   a) Zapiščite člene razvoja te funkcije Fourierovo vrsto na intervalu $(-\pi, \pi)$ do vključno členov s $\sin(4x)$ in $\cos(4x)$.

   b) Naj bo s vsota omenjene Fourierove vrste. Izračunajte $s\big(-\frac{10\pi}{3}\big)$.

5. Dana je funkcija $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$. Narišite:

   a) njeno definicijsko območje;

   b) nivojnici $z = 0$ in $z = -1/2$;

   c) množico točk (x, y), kjer je $1 \le z \le 2$.

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika

20. januar 2014

1. [20] Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)e^{-x}$.

2. [20] Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = 5x + 6y$
pri pogoju $x^2 + xy + 2y^2 = 72$.

3. [20] Določite pritisnjeno krožnico, ki pripada krivulji $y = 2 \ln x$ pri $x = 1$.

4. [15] Določite tangentno ravnino na ploskev $\dfrac{xy}{z^3} = 2$ v točki, kjer so vse tri koordinate enake.

5. [30] Ploskev v prostoru je podana z enačbo $e^{xyz} - z = 0$.

   a) Določite z pri $x = 0, y = 0$; naj bo vse skupaj točka T.

   b) Dokažite, da se da v okolici točke T spremenljivka z izraziti kot funkcija spremenljivk x in y.

   c) Določite prve in druge parcialne odvode te funkcije v točki T.

   d) Izračunajte glavni ukrivljenosti dane ploskve v točki T.

   e) Ima funkcija iz točke b) v točki T lokalni ekstrem?

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
8. april 2014

1. Izračunajte integral s parametrom:

$$\int_0^\infty \left(\frac{a}{x^2} - \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^3} \right) \mathrm{d}x \,.$$

2. Izračunajte integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-(x-2)^2}\, \mathrm{d}x$.

3. Zamenjajte vrstni red integracije v integralu:

$$\int_2^3 \left(\int_0^{1/x^2} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \,.$$

4. Naj bo $a > 0$. Izračunajte volumen telesa, določenega s pogojema:

$$0 < x < a \,, \qquad y^2 + z^2 < 2xz \,.$$

5. Dana je polkrogla:

$$x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \,, \quad x > 0 \,,$$

   pri kateri je gostota premosorazmerna z x, t. j. $\rho = cx$. Izračunajte razmerje med njenim vztrajnostnim momentom okoli osi z in njeno maso.

4. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
10. junij 2014

1. Poiščite vektorsko polje, čigar rotor je vektorsko polje $(x, 0, -z)$.
   Namig: eno od komponent lahko postavite na nič.

2. Izračunajte vztrajnostni moment roba homogenega enakostraničnega trikotnika z maso m in stranico a okoli stranice.

3. Izračunajte iztok vektorskega polja:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} 2yz\ln(x+y+z) - x^2 \\ 2xz\ln(x+y+z) - y^2 \\ z^2 + 2(x+y)^2\ln(x+y+z) \end{bmatrix}$$

   iz valja $\{(x, y, z)\ ;\ x^2 + y^2 < 1,\ 3 < z < 4\}$.

4. Klasificirajte singularnost holomorfne funkcije $f(z) = \dfrac{1}{(1+e^{iz})(z-i)^2}$ pri $z = i$ in določite glavni del Laurentove vrste.

5. Izračunajte integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{5 - 3\sin t}\,\mathrm{d}t$.

6. Poiščite holomorfno funkcijo, ki kot preslikava zavrti kompleksno ravnino okrog točke $\sqrt{3} + i$ za kot $\pi/6$ v smeri urinega kazalca.

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
26. avgust 2014

1. Določite minimum funkcije $f(x,y,z) = xy^2z^4$ pri pogojih:

$$\frac{4}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 1\,; \quad x > 4\,,\ y > 2\,,\ z > 1\,.$$

2. Poiščite binormalo na krivuljo:

$$x = \sin t\,, \quad y = \cos(2t)\,,\ z = \sin(3t)$$

pri $t = 0$.

3. Izračunajte $F'(0)$, kjer je:

$$F(x) = \int_{\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+9}} \frac{e^{xy}}{y^2+1}\,\mathrm{d}y\,.$$

4. Izračunajte iztok vektorskega polja:

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{bmatrix}$$

iz stožca $0 < z < 2 - \sqrt{x^2+y^2}$.

5. Dana je funkcija kompleksne spremenljivke:

$$f(z) = \frac{1}{z\big(e^z - 1\big)} - \frac{1}{z^2}\,.$$

   a) Poiščite in klasificirajte njene singularnosti.
   b) Izračunajte integral te funkcije po krožnici s središčem v $5i$ in polmerom 6, orientirani v nasprotni smeri urinega kazalca.

2012/13

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
27. november 2012

1. [15 točk] Na ravnini $\mathbb{R}^2$ je podan predpis:

$$d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) := |x_1 - x_2| + |x_1 + y_1 - x_2 - y_2|\,.$$

   Dokažite, da je d metrika, in narišite odprto kroglo okoli točke $T(3,2)$ s polmerom 2.

2. [10 točk] Določite notranjost in rob množice $(-\infty, 0) \cup \left\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

3. [30 točk] Dana je funkcija $f(x) = 2(1 + e^{-x})$.

   a) Dokažite, da ima enačba $f(x) = x$ na realni osi natanko eno rešitev.

   b) Poiščite poln metrični prostor M, na katerem je f skrčitev (seveda mora funkcija f slikati M spet v M).

   c) Rešite enačbo $f(x) = x$ na tri decimalke natančno.

4. [15 točk] Razvijte funkcijo $f(x) = \pi - x$ v sinusno Fourierovo vrsto na intervalu $(0, \pi)$ in natančno narišite graf tako dobljene vrste vsaj na intervalu $[-3\pi, 3\pi]$.

5. [15 točk] Funkcijo $f(x) = 2x - 3$ razvijemo v Fourierovo vrsto na intervalu $(3, 5)$. Označimo z $\bar{f}$ dejansko vsoto dobljene vrste. Izračunajte $\bar{f}(0)$ in $\bar{f}(1)$.

6. [15 točk] Izračunajte prve parcialne odvode naslednjih funkcij:

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}\,, \quad g(x,y) = (3x + y^2)\, e^{1/x}\,, \quad h(x,y) = \ln(x \cos y)\,.$$

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
22. januar 2013

1. Spremenljivka z je funkcija spremenljivk x in y. Nadalje sta x in y naslednji funkciji spremenljivk u in v:
$$x = u\,e^{2v}\,, \qquad y = u + u\,e^{2v}\,.$$
Tako spremenljivka z postane tudi funkcija spremenljivk u in v. Izrazite pripadajoča parcialna odvoda $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ in $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ s parcialnima odvodoma $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ in $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ter z x in y.

2. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = (2+3x^2)y$ na krogu s središčem v $(0,2)$ in polmerom 1.

3. Dana je krivulja:
$$\vec{r} = \left(e^t, \frac{4\,e^{3t/2}}{3}, e^{2t}\right)\,.$$
Izračunajte $\vec{r}\,'$.

4. Parametrizirajte krivuljo:
$$y + xy + xz = z\,, \qquad x^2 + y = 1\,; \qquad x \neq 1\,.$$
Nadalje določite točko s koordinato $x = -2$ ter tam izračunajte fleksijsko in torzijsko ukrivljenost.

5. Dana je ploskev:
$$e^{xy-6} + z = 3\,.$$
Določite tangentno ravnino in Gaussovo ukrivljenost v točki $T(2,3,z)$.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
16. april 2013

1. Izračunajte $F'(1)$, kjer je:
$$F(x) = \int_{\ln x}^{x/2} \sqrt{(1-xy)(1+y)(1-y^2)}\,\mathrm{d}y\,.$$

2. Izračunajte integral $\displaystyle\iint_{\substack{0<x<y<2x\\ 2<xy<3}} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

   Namig: vpeljite primerne nove spremenljivke.

3. Izračunajte:
$$\text{a)}\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x\,, \qquad\qquad \text{b)}\quad \int_0^{\infty} (x+2)^2\, e^{-x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

4. Zamenjajte vrstni red integracije v integralu $\displaystyle\int_1^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.$

5. Dana je polkrogla:
$$x^2+y^2+z^2<1\,, \quad z>0\,,$$
   pri kateri je gostota premo sorazmerna s kvadratom višine, t. j. $\rho = cz^2$. Izračunajte njeno težišče in vztrajnostni moment okoli osi z.

4. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
13. junij 2013

1. Izračunajte:

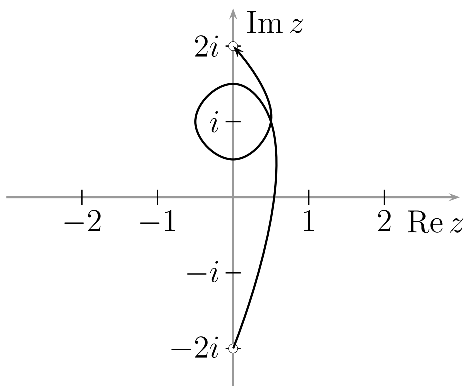
$$\text{a) } \operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^2}\,, \qquad \text{b) } \operatorname{grad}\big(\langle \vec{r}, \vec{a}\rangle - r^2\big)\,,$$

   kjer je $\vec{a}$ konstanten vektor.

2. Izračunajte krivuljni integral vektorskega polja $\vec{R} = \begin{bmatrix} y^2 - z^2 \\ z^2 - x^2 \\ x^2 - y^2 \end{bmatrix}$ po poti, ki gre od $(1, 0, 0)$ premočrtno proti $(0, 1, 0)$, nato premočrtno proti $(0, 0, 1)$ in od tam spet premočrtno nazaj proti $(1, 0, 0)$.

   Namig: lahko si pomagate s Stokesovim izrekom, ni pa nujno.

3. Izračunajte integral holomorfne funkcije $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)^2}$ po naslednji poti:



4. Klasificirajte singularnost holomorfne funkcije:

$$f(z) = \frac{z^2}{z - \sin z}\,,$$

   ki je v izhodišču, in tam določite glavni del Laurentove vrste.

5. Izračunajte integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$.

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
27. junij 2013

1. Poiščite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = (y^2 - 6xy)e^{-x}$.

2. Krivulja je dana kot presek ploskev $x + z = e^y$ in $x - z = e^{-y}$. Izračunajte njeno fleksijsko in torzijsko ukrivljenost pri $y = 0$.

3. Izračunajte težišče zgornje polovice enotske sfere, katere površinska gostota je sorazmerna s koordinato z, t. j. $\sigma = cz$.

4. Določite eksponente a, b in c, tako da bo vektorsko polje $\begin{bmatrix} 2\,x^a\,e^{y-z} \\ x^b\,e^{y-z} \\ -x^c\,e^{y-z} \end{bmatrix}$ potencialno.

   Za dobljene eksponente tudi izračunajte potencial.

5. Dana je holomorfna funkcija:

$$f(z) = \frac{1}{\cos z(4z^2 + \pi^2)^2}\,.$$

   a) Določite in klasificirajte vse singularnosti te funkcije.

   b) Izračunajte cirkulacijo te funkcije po krožnici s središčem v $\frac{\pi}{2}(1+i)$ in polmerom $\pi\sqrt{2}/2$, orientirani v nasprotni smeri urinega kazalca.

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
29. avgust 2013

1. Dana je funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & ; 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & ; \pi/2 < x < \pi \end{cases}$.

   a) Razvijte funkcijo f v sinusno Fourierovo vrsto na intervalu $(0, \pi)$.

   b) Narišite graf vsote dobljene Fourierove vrste na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Zapišite Taylorjev polinom 2. stopnje okoli izhodišča za funkcijo:

$$f(x, y) = e^{x^2+y} - e^{-x^2-y}\,.$$

3. Krivulja je podana kot presek ploskev $x + y^2 + z^2 = 0$ in $yz = 1$. Določite njeno fleksijsko in torzijsko ukrivljenost pri $z = 2$.

4. Izračunajte ploskovni integral $\displaystyle\iint_{x^2+y^2+z^2=1} u\,\mathrm{d}P$, kjer je u oddaljenost točke (x, y, z) od točke $(0, 0, 1)$.

5. Izračunajte integral kompleksne funkcije:

$$f(z) = \frac{e^z}{9z^2 + \pi^2}$$

   po krožnici s središčem v točki $3 - 4i$ s polmerom 5, orientirani v nasprotni smeri urinega kazalca.

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
12. september 2013

1. Določite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = y - x^2$ na enotskem krogu $x^2 + y^2 \leq 1$.

2. Izračunajte Gaussovo ukrivljenost ploskve $z = x^2 + y^2$ v točki $T(2, 4, 20)$.

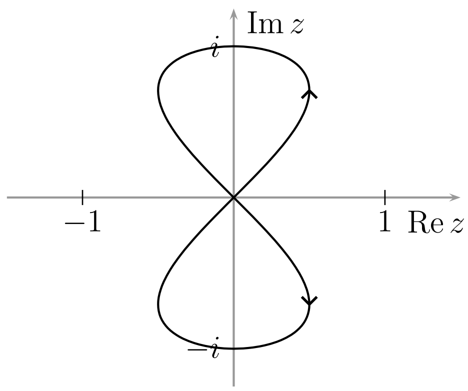
3. Izračunajte težišče homogenega telesa, določenega z neenačbami:

$$x^2 + y^2 < z^4 \,, \qquad \sqrt{x^2 + y^2} + z < 6 \,, \qquad z > 0 \,.$$

4. Dana je kompleksna funkcija $f(z) = \dfrac{1}{4z^2 + 1}$.

   a) Določite njene singularnosti.

   b) Izračunajte integral te funkcije po krivulji, prikazani na sliki:



2011/12

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
22. november 2011

1. [10 točk] Funkcija $d\colon\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je podana po predpisu:

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 2|x_1 - x_2|\,.$$

   Ali je d metrika na $\mathbb{R}^2$?

2. [20 točk + 5 točk bonusa] Dana je funkcija dveh spremenljivk:

$$d(m,n) = \left\{ \begin{array}{cl} \max\{\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\} & ;\ m \neq n \\ 0 & ;\ m = n \end{array} \right. .$$

   a) Dokažite, da je d metrika na množici naravnih števil.
   b) [bonus] Določite, ali je zaporedje $1, 2, 3, \ldots$ v tej metriki Cauchyjevo in ali je konvergentno. Če velja slednje, določite njegovo limito.

3. [20 točk + 5 točk bonusa] Dana je funkcija $f\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$, ki deluje po predpisu $f(x) = x^2 - x$.

   a) Izračunajte razdaljo med funkcijo f in funkcijo $g(x) = 1$, in sicer v maksimum metriki na prostoru zveznih funkcij na $[0,1]$.
   b) [bonus] Katera funkcija $g_a(x) = a$ je v tej metriki najbližje funkciji f?

4. [25 točk] Dana je funkcija $f(x) = 5 - \ln x$, ki jo gledamo na intervalu $[3,4]$.

   a) [10 točk] Dokažite, da funkcija f dani interval preslika vase in da je na njem skrčitev.
   b) [15 točk] Rešite enačbo $f(x) = x$ na dve decimalki natančno.

5. [25 točk] Dana je funkcija $f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & ;\ 0 \leq x \leq \pi/2 \\ x & ;\ \pi/2 < x < \pi \end{array} \right. .$

   a) [15 točk] Razvijte funkcijo f v kosinusno Fourierovo vrsto na intervalu $(0, \pi)$.
   b) [10 točk] Označimo vsoto dobljene Fourierove vrste z $\bar{f}$. Narišite graf te funkcije na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$. Posebej izračunajte še $\bar{f}(\pi/2)$.

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
17. januar 2012

1. Zapišite Taylorjev polinom 3. stopnje za funkcijo:
$$f(x,y) = \cos(x+y^2)$$
okoli izhodišča.

2. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = x\,e^y$ na območju, ki ga omejujeta abscisna os in krivulja $y = 1 - x^2$.

3. Spremenljivke x, y in z zadoščajo zvezi:
$$x\,e^{y+z} + 2y + z = 0\,.$$
   a) Poiščite vrednost spremenljivke z pri $x = 0$ in $y = 2$.
   b) Dokažite, da lahko v neki okolici te točke eksplicitno izrazimo $z = f(x,y)$.
   c) Izračunajte $f_x(0,2)$ in $f_y(0,2)$.

4. Parametrizirajte krivuljo $y = x^{3/2}$ z naravnim parametrom, tako da bo v izhodišču veljalo $s = 0$.

5. Dana je prostorska krivulja:
$$x = t^2\,, \quad y = \ln t\,, \quad z = -3t\,.$$
Pri $t = 1$ določite pritisnjeno ravnino ter izračunajte fleksijsko in torzijsko ukrivljenost.

6. Določite tangentno ravnino na ploskev:
$$x = u + v^2\,, \quad y = v + u^2\,, \quad z = uv$$
pri $u = 1$ in $v = 2$.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
10. april 2012

1. [25 točk] Dana je ploskev $\vec{r}(u,v) = \begin{bmatrix} u^2+v \\ u+v^2 \\ uv \end{bmatrix}$.

   a) Dokažite, da na njej obstaja natanko ena točka, ki ima koordinati $y=-2$ in $z=0$. Izračunajte še koordinato x te točke.

   b) Izračunajte Gaussovo ukrivljenost ploskve v tej točki.

2. [15 točk] Dana je funkcija:

$$F(x) = \int_{x/2}^{x} \frac{\sin(xy)}{y}\,\mathrm{d}y\,.$$

   Izračunajte $F'\big(\sqrt{\pi}\big)$.

3. [10 točk] Zamenjajte vrstni red integracije v dvakratnem integralu:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^{x+1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

4. [30 točk] Izračunajte integral:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 2z} x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

5. [30 točk] Izračunajte vztrajnostni moment homogenega standardnega tridimenzionalnega simpleksa:

$$x\ge 0\,,\quad y\ge 0\,,\quad z\ge 0\,,\quad x+y+z\le 1$$

   okoli osi x.

4. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
5. junij 2012

1. Dano je vektorsko polje $\vec{R} = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \\ 2x^3 \end{bmatrix} e^{ay+bz}$. Določite a in b tako, da bo potencialno, in izračunajte njegov potencial.

2. Izračunajte iztok vektorskega polja:
$$\vec{R} = \begin{bmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{bmatrix} \ln(x+y+z)$$
iz kocke $\{(x,y,z)\ ;\ 1 \leq x,y,z \leq 2\}$.

3. Določite holomorfno funkcijo, ki kot preslikava zavrti kompleksno ravnino za kot 120° v smeri urinega kazalca okoli točke $1+2i$.

4. Klasificirajte singularnosti holomorfne funkcije:
$$f(z) = \frac{z}{1-\cos z}$$
na enotskem krogu $|z| < 1$ in pri vseh določite glavni del Laurentove vrste.

5. Izračunajte integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{4+x^2}\,\mathrm{d}x$.

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
29. junij 2012

1. Funkcija $z = z(x, y)$ je podana implicitno z zvezo:
$$\sin(xyz) - z + y = 0\,.$$
Izračunajte $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)$ in $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)$.

2. Dokažite, da gre krivulja:
$$x = \ln t\,, \quad y = e^{t-1} - 1\,, \quad z = t^3 - 2t + 1$$
skozi izhodišče, ter tam določite tangento in izračunajte fleksijsko ukrivljenost.

3. Izračunajte $\displaystyle\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^4}\,\mathrm{d}x$.

4. Izračunajte ploskovni integral $\displaystyle\iint_A z\,\mathrm{d}P$, kjer je A ploskev $\{z = xy\ ;\ x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 < 1\}$.

5. Izračunajte integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+5)^2}$.

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
20. avgust 2012

1. Funkcija $d\colon\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ je podana po predpisu:
$$d(m,n)=\begin{cases}\min\{\frac{1}{m},\frac{1}{n}\} & ;\ m\neq n\\ 0 & ;\ m=n\end{cases}.$$
Ali je d metrika na $\mathbb{N}$?

2. Funkcija $z=z(x,y)$ je podana implicitno z zvezo:
$$e^{2x+yz}+(1+x)(2+y)z=0\,.$$
Izračunajte $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(0,0)$ in $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)$.

3. Dana je funkcija $F(a)=\displaystyle\int_a^{a^2}\frac{\mathrm{d}x}{\ln(a+x)}$. Izračunajte $F'(1)$.

4. Izračunajte integral:
$$\iiint_D (x^2+y^2)z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$
kjer je $D=\left\{(x,y,z)\ ;\ z\geq 0,\ \sqrt{x^2+y^2}+z\leq 2\right\}$.

5. Izračunajte $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1+\sin t}{2+\cos t}\,\mathrm{d}t$.

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika

3. september 2012

1. Funkcija $d\colon\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ je podana po predpisu:

$$d(m,n)=\begin{cases} m+n & ;\ m\neq n \\ 0 & ;\ m=n \end{cases}\ .$$

   Ali je d metrika na $\mathbb{N}$?

2. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y)=x\,e^{-y}$ na območju, ki ga omejujeta paraboli $y=x^2$ in $x=y^2$.

3. Poiščite naravni parameter pri krivulji, določeni z zvezama:

$$y=x^2\,,\qquad z=\frac{2x^3}{3}\,.$$

4. Izračunajte integral $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{0\le y\le x\\ x^2+y^2+z^2\le 1}} xy\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.
   Namig: pomagajte si s funkcijo beta.

5. Izračunajte ostanek (residuum) funkcije

$$f(z)=\frac{1}{z^2+2iz+4}$$

   v polu, ki leži nad realno osjo.

2010/11

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
16. november 2010

1. [15] Preslikava $d\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to [0,\infty)$ je podana po predpisu:

$$d(x,y) = |x^3 - y^3|\,.$$

   a) Pokažite, da je d metrika na $\mathbb{R}$.
   b) Določite odprto kroglo okoli točke 1 s polmerom 9.

2. [15] Poiščite točko na premici $y = 1 - 3x$, ki je v metriki na $\mathbb{R}^2$:

$$d_1\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

   najbližje izhodišču.

3. [15] Za vsako od množic $A = (-1,\infty) \setminus \{0,1\}$ in $B = \mathbb{Q} \cup [0,1]$ določite, ali je v običajni metriki na $\mathbb{R}$ odprta, zaprta ali nič od tega.

4. [20] Dokažite, da ima enačba:

$$x = \frac{1}{x^3} + 3$$

   na intervalu $[3,4]$ natanko eno rešitev. Rešitev tudi izračunajte na 4 decimalke natančno.

   Namig za dokaz in utemeljitev: pokažite, da funkcija $f(x) = \frac{1}{x^3} + 3$ interval $[3,4]$ preslika vase in da je na njem (v običajni metriki) skrčitev.

5. [20] Razvijte funkcijo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ;\ 0 \le x \le \pi/2 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$

   v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi,\pi]$.

6. [15] Funkcijo $f(x) = x+2$ razvijemo v Fourierovo vrsto na intervalu $[1,4]$. Označimo z $\bar{f}(x)$ dejansko vsoto te vrste. Izračunajte $\bar{f}(5)$ in $\bar{f}(7)$.

2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
25. januar 2011

1. [15] Spremenljivke x, y in z zadoščajo zvezi:

$$z^3 + xz = y\,.$$

   a) Izračunajte vrednost spremenljivke z pri $x = 0$ in $y = 8$ ter pokažite, da se da okoli te točke spremenljivka z izraziti kot diferenciabilna funkcija spremenljivk x in y.
   b) V prej omenjeni točki izračunajte $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ in $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. [15] Klasificirajte stacionarne točke funkcije:

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20\,.$$

3. [20] Na ravninski krivulji, podani z enačbo:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

   poiščite točko z največjo koordinato x.

4. [20] Ravninska krivulja je dana z zvezo $y = \ln x$.
   a) Izračunajte njeno ukrivljenost pri $x = 1$.
   b) Določite, kje je ukrivljenost po absolutni vrednosti največja.

5. [15] Izračunajte fleksijsko in torzijsko ukrivljenost prostorske krivulje:

$$x = 2t\,, \quad y = t^2\,, \quad z = \frac{t^3}{3}$$

   pri $x = 1$.

6. [15] Določite Gaussovo ukrivljenost ploskve $z = x^3y^2$ pri $x = y = 1$.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
20. april 2011

1. Določite, za katere x obstaja integral:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{t^x}\,\mathrm{d}t\,.$$

2. Izračunajte $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

   Namig: pomagajte si s funkcijo beta.

3. Izračunajte $\displaystyle\iint_D \frac{y}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kjer je D območje, ki ga omejujejo krivulje $xy = 1$, $xy = 8$, $y^2 = x$ in $y^2 = 64x$.

   Namig: vpeljite primerne nove koordinate, recimo $u = xy, v = y^2/x$.

4. Zamenjajte vrstni red integracije v dvakratnem integralu:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \int_0^{1+e^{-x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

5. Določite težišče osmine homogene krogle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x, y, z \geq 0$.

4. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
6. junij 2011

1. Določite parameter a, za katerega bo vektorsko polje:
$$\vec{R} = (x+y)^a(-z,-z,x+y)$$
potencialno. Za to vrednost parametra tudi izračunajte potencial.

2. Izračunajte težišče homogene krivulje:
$$y = x^2\,, \quad z = \frac{2x^3}{3}\,; \qquad -1 \leq x \leq 1\,.$$

3. Izračunajte pretok vektorskega polja:
$$\vec{R} = \frac{(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}$$
skozi plašč valja $x^2+y^2=1$, orientiran navzven.

4. Razvijte funkcijo:
$$f(z) = \frac{1}{z^2+z-2}$$
v Laurentovo vrsto okoli točke -2.

5. Izračunajte $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{3+2\cos x}$.

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
20. junij 2011

1. Dokažite, da ima enačba:
$$x = 100 \ln x$$
na intervalu $[600, 650]$ natanko eno rešitev. Rešitev tudi izračunajte na 2 decimalki natančno.

2. Dana je prostorska krivulja:
$$x = t^3 - t\,, \quad y = t^3 - 2t\,, \quad z = 2(t^3 - t^2)\,.$$
Pri $x = 1$ določite fleksijsko in torzijsko ukrivljenost ter še vektor glavne normale.

3. Izračunajte maso dela paraboloida:
$$z = x^2 + y^2\,; \quad z \leq 1\,,$$
katerega površinska gostota je enaka $\sigma = x^2 + y^2$.

4. Izračunajte pretok vektorskega polja:
$$X = x(y^2 + z^2)\,, \quad Y = y(x^2 + z^2)\,, \quad Z = z(x^2 + y^2)$$
skozi rob enotske krogle $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientiran navzven (gre torej za *iztok* iz krogle).

   Namig: Gaussov izrek.

5. Določite glavni del Laurentove vrste za funkcijo:
$$f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$$
v izhodišču.

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
29. junij 2011

1. Razvijte funkcijo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 < x < \pi/2 \\ -1 & ; -\pi/2 < x < 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

   v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

2. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x,y) = x^2 + 2y^4$ na enotski krožnici $x^2 + y^2 = 1$.

3. Dana je ploskev $\vec{r}(\rho,\varphi) = \begin{bmatrix} 2\rho\cos\varphi \\ \rho(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ \rho^2 \end{bmatrix}$.

   a) Dokažite, da na njej obstaja natanko ena točka, ki ima koordinati $x = 2$ in $y = 1$. Izračunajte še koordinato z te točke.

   b) V tej točki izračunajte glavni ukrivljenosti.

4. Zamenjajte vrstni red integracije v dvakratnem integralu:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

5. Izračunajte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+2z+5)}$.

   Namig: kompleksna integracija.

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
22. avgust 2011

1. Dana je funkcija:
$$f(x) = \frac{8}{(4+x)^2}\,.$$
   a) Dokažite, da je funkcija f skrčitev na intervalu $[0, \infty)$.
   b) Rešite enačbo $f(x) = x$ na tri decimalke natančno.
2. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x, y) = 3x^2 - 3x + 3y^2 - 4y$ na enotskem krogu $\{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
3. Izračunajte Gaussovo ukrivljenost ploskve $z = x^2(4 - y^2)$ pri $x = 1, y = 0$.
4. Izračunajte volumen prostorskega območja, določenega s pogojem $2 \leq z\, e^{x^2+y^2} \leq 3$.
5. Izračunajte $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{4\cos t - 5}$.
   Namig: kompleksna integracija.

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Praktična matematika
6. september 2011

1. Razvijte funkcijo:
$$f(x) = \begin{cases} -1 & ;\ -\pi < x < -\pi/2 \\ 1 & ;\ \pi/2 < x < \pi \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}$$
v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$. Narišite natančen graf dejanske vsote te vrste na danem intervalu.

2. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije:
$$f(x, y) = y\, e^{-x-y}$$
na trikotniku z oglišči $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ in $C(0, 2)$.

3. Določite točko, kjer ima prostorska krivulja:
$$x = \ln t\,, \quad y = 2t\,, \quad z = t^2$$
največjo fleksijsko ukrivljenost. Tam določite še torzijsko ukrivljenost.

4. Izračunajte trojni integral:
$$\iiint_K \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\,,$$
kjer je K enotska krogla.

5. Dokažite, da obstaja natanko en a, pri katerem je vektorsko polje (X, Y, Z), kjer je:
$$X = (y + z)^{a+1}\,, \quad Y = Z = -x(y + z)^a\,,$$
potencialno. Za tak a izračunajte njegov potencial.