REŠITVE NOVEJŠIH KOLOKVIJEV IN IZPITOV IZ MATEMATIKE

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

Zbral: Martin Raič

2009/10

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 25. 11. 2009

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Z ozirom na to, da izraz pod absolutno vrednostjo pride na nič pri $x = -1/2$, imenovalec pa pri $x = -1$, ločimo tri primere. Vsakič neenačbo pomnožimo z imenovalcem.

Za $x < -1$ je neenačba ekvivalentna $-1 - 2x < x + 1$, torej $x > -2/3$, kar nam ne da nobenih delnih rešitev.

Za $-1 < x \leq -1/2$ je neenačba ekvivalentna $-1 - 2x > x + 1$, torej $x < -2/3$, kar nam ne da delno rešitev $x \in (-1, -2/3)$.

Za $x \geq -1/2$ je neenačba ekvivalentna $2x + 1 > x + 1$, torej $x > 0$, kar nam da delno rešitev $x \in (0, \infty)$.

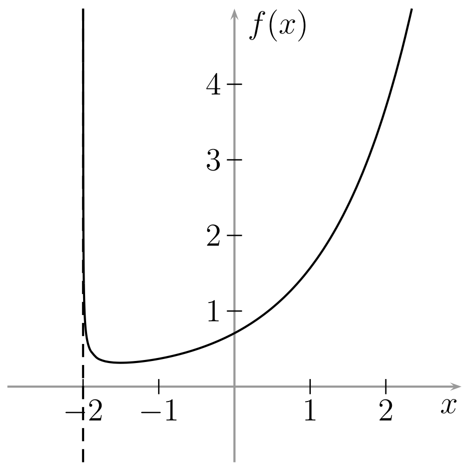
Rešitev naše neenačbe je torej $x \in (-1, -2/3) \cup (0, \infty)$.

2. $y = 2$, $x = z - 2$; $z \in \mathbb{R}$ ali pa $y = 2$, $z = x + 2$; $x \in \mathbb{R}$.

3. $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^2+1} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt{9n^2+1} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{\sqrt{9 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt{9+0} - \sqrt{1+0}}{\sqrt{9+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}.$$

4. $Df = (-2, \infty)$, $\quad Zf = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{e^{3/2}}, \infty\right)$. $\quad f'(x) = \dfrac{e^x\left(x + \frac{3}{2}\right)}{(x+2)^{3/2}}$.

Funkcija pada na $(-2, -3/2]$ in narašča na $[-3/2, \infty)$. Pri $x = -3/2$ je globalni minimum. Graf:



Rešitve kolokvija iz matematike z dne 27. 1. 2010

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Velja:

$$S = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$$

(uporabili smo substitucijo $t = e^x$, $\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x$).

2. Konvergenco lahko utemeljimo na vsaj tri načine:

- po kvocientnem kriteriju: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{10n} = \frac{1}{10} < 1$;
- po korenskem kriteriju: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{10} = \frac{1}{10} < 1$;
- po Leibnizevem kriteriju: vrsta je alternirajoča in absolutne vrednosti členov padajo proti 0, ker je:

  $$\frac{n}{10^n} > \frac{n+1}{10^{n+1}}$$

  (saj je $10n > n+1$, brž ko je $n > 1/9$) in tudi:

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^n} = 0\,.$$

Iz prvih nekaj delnih vsot:

$$S_1 = -0{\cdot}1\,,\ S_2 = -0{\cdot}08\,,\ S_3 = -0{\cdot}083\,,\ S_4 = -0{\cdot}0826\,,\ S_5 = -0{\cdot}08265$$

in lastnosti vrst, ki izpolnjujejo Leibnizev kriterij, razberemo, da biti mora vrednost vrste med -0.08265 in -0.0826. Zaokrožena na štiri decimalke bo torej -0.0826.

3. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x+y} - 2x,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x+y} - 2y.$

Stacionarna točka: $T_1(1/2, 1/2)$ (točka $T_2(-1/2,-1/2)$ ni v definicijskem območju).

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{(x+y)^2} - 2,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{1}{(x+y)^2},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\dfrac{1}{(x+y)^2} - 2.$

$Hf\left(\tfrac12,\tfrac12\right) = \begin{bmatrix}-3 & -1\\ -1 & -3\end{bmatrix},\quad \det Hf\left(\tfrac12,\tfrac12\right) = 8 > 0,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\tfrac12,\tfrac12\right) = -3 < 0.$

V $T_1(1/2,1/2)$ je torej lokalni maksimum.

4. Splošna rešitev: $y = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{-4x} - \frac12\,e^{-2x}$.

Partikularna rešitev, ki izpolnjuje začetna pogoja: $y = \frac13\,e^{-x} + \frac16\,e^{-4x} - \frac12\,e^{-2x}$.

5. Vseh možnih vlečenj, pri katerih ne gledamo vrstnega reda izvlečnih kart, je $\binom{16}{4} = 1820$. Ugodna vlečenja dobimo tako, da izberemo po eno karto vsake barve. Za vsako imamo 4 možnosti in lahko poljubno kombiniramo. Ugodnih vlečenj je zato $4^4 = 256$, verjetnost pa $\dfrac{256}{1820} = \dfrac{64}{455} \doteq 0{\cdot}141$.

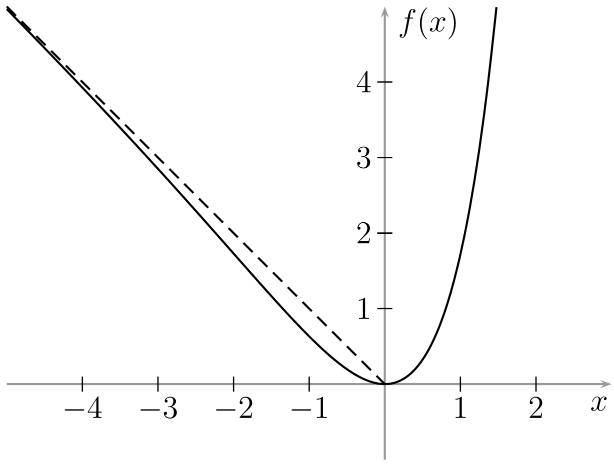
Rešitve izpita iz matematike z dne 9. 2. 2010

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Za $x = -1$ neenačba nima pomena, sicer pa jo množimo z $x + 1$.
Za $x < -1$ dobimo $x^2 + 2 > x^2 + x$, torej $x < 2$, kar da delno rešitev $x \in (-\infty, -1)$.
Za $x > -1$ dobimo $x^2 + 2 < x^2 + x$, torej $x > 2$, kar da delno rešitev $x \in (2, \infty)$.
Končna rešitev je torej $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

2. Ploščina: $\sqrt{3}$, kot pri oglišču B: $\pi/3 = 60°$.

3. $f'(x) = x\,e^x + e^x - 1$. Za $x < 0$ je $x\,e^x < 0$ in $e^x - 1 < 0$, torej je $f'(x) < 0$. Za $x > 0$ pa je $x\,e^x > 0$ in $e^x - 1 > 0$, torej je $f'(x) > 0$. Torej funkcija pada na $(-\infty, 0]$ in narašča na $[0, \infty)$.
$f''(x) = (x + 2)e^x$. Funkcija je konveksna na $[-2, \infty)$ in konkavna na $(-\infty, -2]$. Graf:



4. Velja $S = \displaystyle\int_0^2 \left(\frac{4x+1}{(x+1)^2} - 1\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{2x - x^2}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.
S substitucijo $t = x + 1$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, dobimo:
$$S = \int_1^3 \frac{4t - t^2 - 3}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left(4\ln t - t + \frac{3}{t}\right)\Big|_1^3 = 4(\ln 3 - 1) \doteq 0{\dot{}}394.$$

5. $y\,\mathrm{d}y = \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$, $\quad y^2 = C - \dfrac{2}{x}$, $\quad$ splošna rešitev: $y = \pm\sqrt{C - \dfrac{2}{x}}$.

Iz začetnega pogoja dobimo $C = 6$ in partikularno rešitev $y = -\sqrt{6 - \dfrac{2}{x}}$.

Rešitve izpita iz matematike z dne 7. 6. 2010

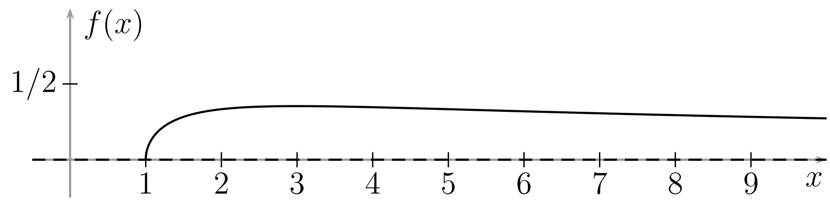
BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. $X = A^{-1}(A^{\mathrm{T}} - I) = -\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix} 13/2 & 1/2 \\ -7/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+2}\right)^{2n-3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}\right]^2\left[\dfrac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right]^{-3} = \left(\dfrac{e^{-1}}{e^2}\right)^2 \cdot 1^{-3} = e^{-6}.$

3. $Df = [1,\infty), \quad f'(x) = \dfrac{3-x}{2(x+1)^2\sqrt{x-1}}.$

Funkcija narašča na $[1,3]$ in pada na $[3,\infty)$. Pri $x = 3$ je globalni maksimum, $Zf = \big[0, \sqrt{2}/4\big]$. Graf:



4. $V = \pi\displaystyle\int_0^2 \big(x^2(2-x)\big)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^2 (4x^4 - 4x^5 + x^6)\,\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{4x^5}{5} - \frac{4x^6}{6} + \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^2 =$
$= \dfrac{128\pi}{105}.$

5. $e^y\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x, \quad e^y = \dfrac{x^2}{2} + C.$

Splošna rešitev: $y = \ln\left(\dfrac{x^2}{2} + C\right).$

Partikularna rešitev: $y = \ln\dfrac{x^2+1}{2}.$

Rešitve izpita iz matematike z dne 21. 6. 2010

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. $x = -3 - 4z,\ y = -2 - \frac{3}{2}z,\ z \in \mathbb{R}$ ali
$x = \frac{7}{3} + \frac{8}{3}y,\ z = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}y,\ y \in \mathbb{R}$ ali
$y = \frac{3}{8}x - \frac{7}{8},\ z = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x,\ x \in \mathbb{R}$.

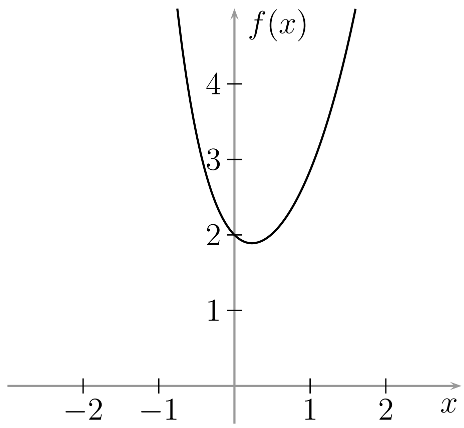
2. *Prvi način.* Ker gresta števec in imenovalec proti nič, lahko uporabimo L'Hôpitalovo pravilo. Dobimo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos x\sqrt{x+9}} = \frac{1}{6}\,.$$

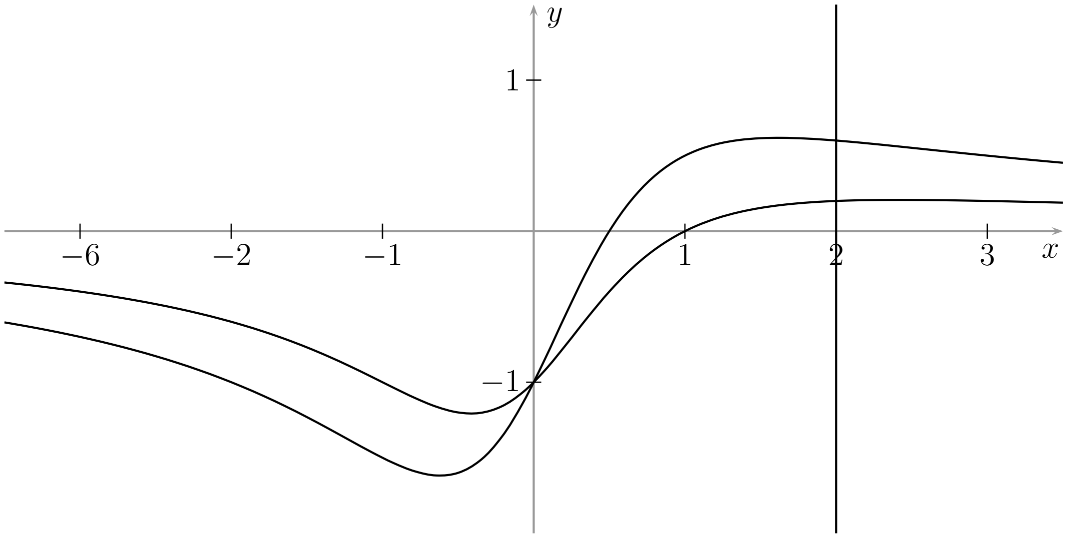
Drugi način. Neposredno izračunamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\big(\sqrt{x+9}-3\big)\big(\sqrt{x+9}+3\big)}{\sin x\big(\sqrt{x+9}+3\big)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \frac{1}{6}\,.$$

3. $Df = \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^x - 2e^{-2x}$.
Funkcija narašča na $\big[\frac{1}{3}\ln 2, \infty\big)$ in pada na $\big(-\infty, \frac{1}{3}\ln 2\big]$. Pri $x = \frac{1}{3}\ln 2$ je globalni minimum in tam je vrednost funkcije enaka $2^{1/3} + 2^{-2/3} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.
$Zf = \big[\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}, \infty\big)$. Graf:



4. Krivulji se sekata pri $x = 0$. Slika:



Ploščina je torej enaka:

$$S = \int_0^2 \left(\frac{2x-1}{x^2+1} - \frac{x-1}{x^2+1} \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

S substitucijo $t = x^2+1$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ dobimo:

$$S = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{\ln 5}{2} \doteq 0{\cdot}805\,.$$

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x(y^2-4)$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y(x^2-1)$.
Stacionarne točke: $T_1(0,0)$, $T_2(1,2)$, $T_3(1,-2)$, $T_4(-1,2)$, $T_5(-1,-2)$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(y^2-4)$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 4xy$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(x^2-1)$,
$\Delta = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = -12x^2y^2 - 16x^2 - 4y^2 + 16.$
V T_1 je lokalni maksimum, drugod pa ni ekstrema.

Rešitve izpita iz matematike z dne 27. 8. 2010

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Ker je $A = A^{\mathrm{T}}$, lahko nastavimo $A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$. Iz:

$$AE = \begin{bmatrix} x+y & x+y \\ y+z & y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2z \end{bmatrix} = 2A$$

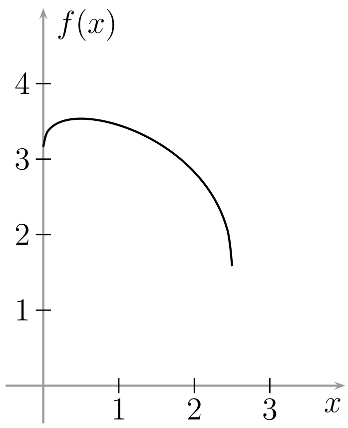
dobimo $x = y = z$. Iskane matrike so torej vse, ki so oblike $\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} = xE$.

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{9n^2+5} - \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{9+5n^{-2}} - \sqrt{1+n^{-2}}} = \frac{1}{\sqrt{9+0} - \sqrt{1-0}} = \frac{1}{2}$.

3. $Df = \left[0, \frac{5}{2}\right]$, $\quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{10-4x}}$.

Funkcija narašča na $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ in pada na $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$. Pri $x = \frac{1}{2}$ je globalni maksimum in tam je vrednost funkcije enaka $\sqrt{\dfrac{1}{2}} + \sqrt{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

$Zf = \left[\sqrt{\dfrac{5}{2}}, \sqrt{10}\right]$. Graf:



4. $\displaystyle V = \pi \int_0^{\pi/2} \big[f(x)\big]^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\pi/2} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t \; = -\frac{\pi}{2}\cos t\Big|_0^{\pi} = \pi$.

5. $\dfrac{\mathrm{d}y}{y-1} = \mathrm{d}x, \quad \ln\dfrac{y-1}{C} = x$.

Splošna rešitev: $y = 1 + C\,e^x$.

Partikularna rešitev: $y = 1 - e^x$.

Rešitve izpita iz matematike z dne 8. 9. 2010

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. $B(1, 2, 3)$, $\quad S = \sqrt{21} \doteq 4{\cdot}58$.

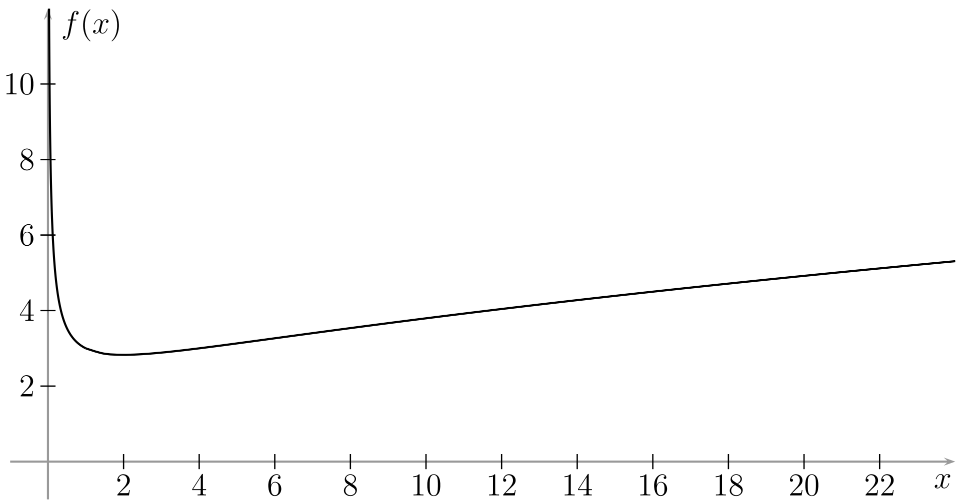
2. Po L'Hôpitalovem pravilu dobimo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2\ln x - \ln(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x+2}}{1} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2+2} = \frac{3}{4}\,.$$

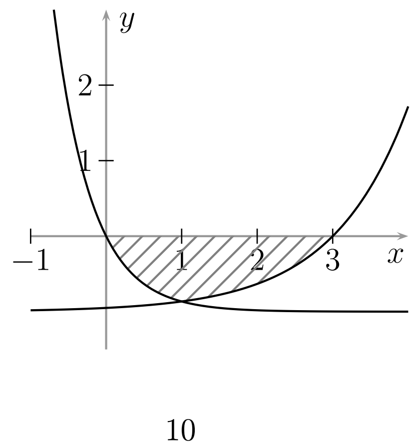
3. $Df = (0, \infty)$, $\quad f'(x) = \dfrac{x-2}{2x\sqrt{x}}$.

Funkcija narašča na $[2, \infty)$ in pada na $(0, 2)$. Pri $x = 2$ je globalni minimum in tam je vrednost funkcije enaka $2\sqrt{2}$.

$Zf = \big[2\sqrt{2}, \infty\big)$. Graf:



4. Prva krivulja seka absciso pri $x = 3$, druga pri $x = 0$; krivulji se sekata pri $x = 1$.
Slika:



Ploščina je torej enaka:

$$
\begin{aligned}
S &= -\int_0^1 \left(e^{-2x} - 1\right) \mathrm{d}x - \int_1^3 \left(e^{x-3} - 1\right) \mathrm{d}x = \\
&= 3 - \int_0^1 e^{-2x} \, \mathrm{d}x - \int_1^3 e^{x-3} \, \mathrm{d}x = \\
&= 3 + \left. \frac{e^{-2x}}{2} \right|_0^1 - \left. e^{x-3} \right|_1^3 = \\
&= \frac{3}{2}\left(1 + e^{-2}\right) \doteq 1.70\,.
\end{aligned}
$$

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + y, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 4y.$

Stacionarne točke: $T_1(0,0), T_2\left(\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}\right), T_3\left(-\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 1, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \quad \Delta = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 48x^2 - 1.$

V T_1 ni ekstrema, v T_2 in T_3 pa je lokalni minimum.

2008/09

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 18. 11. 2008

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. a) Iz $a_n = \dfrac{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ in pravil za računanje limit dobimo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

b) Za vsak $\varepsilon > 0$ je neenačba $\left|a_n - 3\right| < \varepsilon$ ekvivalentna:

$$\frac{4 \cdot 2^n}{2^n + 3^n} < \varepsilon$$

in nadalje:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n > \frac{1}{4\varepsilon} - 1$$

Z logaritmiranjem dobimo:

$$n > \frac{\ln\left(\frac{1}{4\varepsilon} - 1\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

Za naš ε je desna stran (do zaokrožitvenih napak natančno) enaka $\ln 399/\ln(3/2) \doteq 14{\cdot}77$, torej se členi od limite razlikujejo za manj kot ε od vključno 15. člena dalje.

2. $Df = [-\ln 4, \infty)$, $\quad Zf = [0, 2)$, $\quad f^{-1}(x) = -\ln(4 - x^2)$ (za $x \in Zf$).

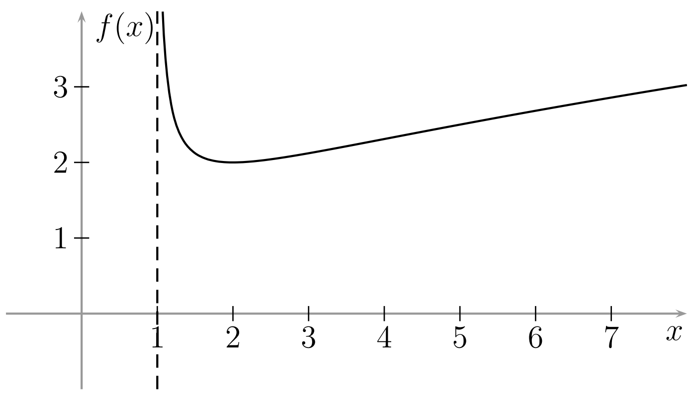
3. $a = 3$, $b = -1$.

4. $f'(x) = \dfrac{x - 2}{2(x-1)^{3/2}}$.

Funkcija pada na $(1, 2]$ in narašča na $[2, \infty)$. Pri $x = 2$ je globalni minimum.

$f''(x) = \dfrac{4 - x}{4(x-1)^{5/2}}$.

Funkcija je konveksna na $(1, 4]$ in konkavna na $[4, \infty)$. Pri $x = 4$ je prevoj. Graf:



5. $T_5(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^5$.

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 18. 12. 2008

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. S substitucijo $t = e^x + 1$, $\mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x$, dobimo:

$$\int \frac{e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2} = \int \frac{t-1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \ln|t| + \frac{1}{t} + C =$$
$$= \ln\left(e^x+1\right) + \frac{1}{e^x+1} + C\,.$$

2. $l = \displaystyle\int_1^2 \sqrt{1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4x}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{121}{48}.$

3. Naša premica gre skozi točko $A(2,2,0)$ in ima smerni vektor $\vec{s} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$. Velja:

$$\vec{s} \times \overrightarrow{AT} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\\0\end{bmatrix},$$

razdalja pa je enaka:

$$r = \frac{\|\vec{s} \times \overrightarrow{AT}\|}{\|s\|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3\,.$$

4. Enačba je ekvivalentna $AX = B^{\mathrm{T}}$ in ima rešitev:

$$X = A^{-1}B^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}4&5\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&-5\\1&-2&7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&2&5\\1&0&3\end{bmatrix}.$$

5. a) Če od druge enačbe odštejemo prvo, dobimo $4y = 4$, torej $y = -1$. Če pa od tretje enačbe odštejemo dvakratnik prve, dobimo $5y = 3$, torej $y = 3/5$, kar je protislovje.

b) Približna rešitev, ki po principu najmanjših kvadratov najbolje ustreza, je rešitev sistema z razširjeno matriko:

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\-2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3\\1&2&7\\2&1&9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6&2&28\\2&9&17\end{bmatrix},$$

torej sistema:

$$\begin{aligned}6x + 2y &= 28\\ 2x + 9y &= 17\,,\end{aligned}$$

ki ima rešitev $x = 109/25$, $y = 23/25$.

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 22. 1. 2009

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. a) Krivulja bo sklenjena, če bo $a - a^2 = 0$ in $a - a^3 = 0$, kar velja pri $a = 0$ in $a = 1$. Zgornja meja bo torej $a = 1$.

b) $S = \int_0^1 x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (t - t^2)(1 - 3t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(t - t^2 - 3t^3 + 3t^4\big)\,\mathrm{d}t =$
$= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \frac{3t^4}{4} + \frac{3t^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{60}.$

2. Iz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{2}$$

dobimo edino stacionarno točko $T(2, -2)$. Nadalje velja:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}.$$

Ker v točki T velja $H = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 1/16$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -1/4$, je tam maksimum.

3. $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2+\cos\varphi}} \big[(4 + 2\cos\varphi) - (-2 - \cos\varphi)\big]\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi =$
$= \int_0^{2\pi} (6 + 3\cos\varphi)\,\frac{r^2}{2}\Big|_0^{1/\sqrt{2+\cos\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2}\,\mathrm{d}\varphi = 3\pi.$

4. $\frac{\mathrm{d}y_H}{y_H} = \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \ln\frac{y_H}{C} = x + \ln x, \quad y_H = C\,x\,e^x.$
$C'(x) = \frac{1}{x^2}, \quad C(x) = -\frac{1}{x} + D, \quad y = (-1 + Dx)e^x.$

5. Karakteristična enačba $\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 5$ in $\lambda_2 = -3$, kar nam da splošno rešitev $y = C_1\,e^{5x} + C_2\,e^{-3x}$.
Iz $y' = 5C_1\,e^{5x} + -3C_2\,e^{-3x}$ in začetnih pogojev dobimo $C_1 + C_2 = 0$ in $5C_1 - 3C_2 = 4$. Rešitev tega je $C_1 = 1/2$ in $C_2 = -1/2$, torej je ustrezna partikularna rešitev $y = \frac{1}{2}e^{5x} - \frac{1}{2}e^{-3x}$.

Rešitve izpita iz matematike z dne 28. 1. 2009

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}} = 2.$

b) Iz neenačbe:

$$\left|\frac{2n^2-3}{n^2-2} - 2\right| < 0\dot{}05$$

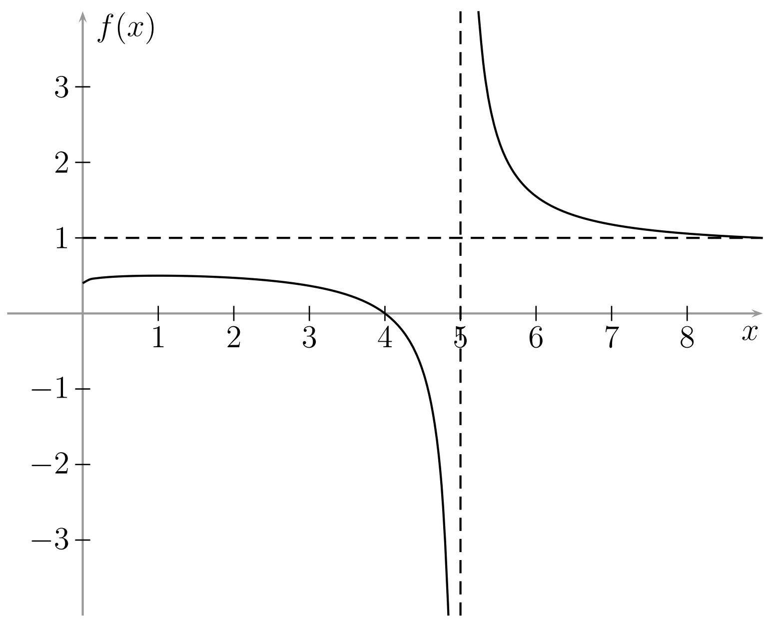
po množenju z $20(n^2-2)$ za $n > 1$ dobimo $n^2 > 22$ (za $n = 1$ pa se $a_1 = 1$ od limite razlikuje za več kot ε). Členi se torej od limite razlikujejo za manj kot ε od vključno 5. naprej.

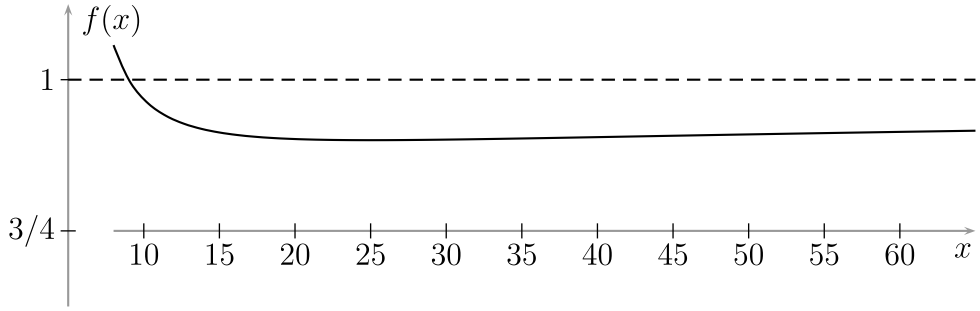
2. $Df = [0,\infty) \setminus \{5\} = [0,5) \cup (5,\infty)$, $\quad Zf = (-\infty, 1/4] \cup [9/10, \infty)$.

Ničla: $x = 4$, pol: $x = 5$, asimptota: $y = 1$.

$f'(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}{2\sqrt{x}(x-5)^2}.$

Funkcija narašča na $[0,1]$ in $[25,\infty)$, pada pa na $[0,5)$ in $(5,25]$. Pri $x = 1$ je lokalni maksimum, pri $x = 25$ pa lokalni minimum. Graf (v dveh delih):





3. a) $x = 3 + 2t$, $y = 2$, $z = 5 - 4t$.

b) $P(17/5, 2, 21/5)$.

4. $l = \int_0^3 \sqrt{\left(3 - 3\sqrt{t}\right)^2 + \left(3 + 3\sqrt{t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = 3\sqrt{2}\int_0^3 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}(1+t)^{3/2}\Big|_0^3 =$
$= 14\sqrt{2}$.

5. $e^y\,\mathrm{d}y = 2e^{2x}\,\mathrm{d}x, \quad e^y = e^{2x} + C, \quad y = \ln\left|e^{2x} + C\right|$.

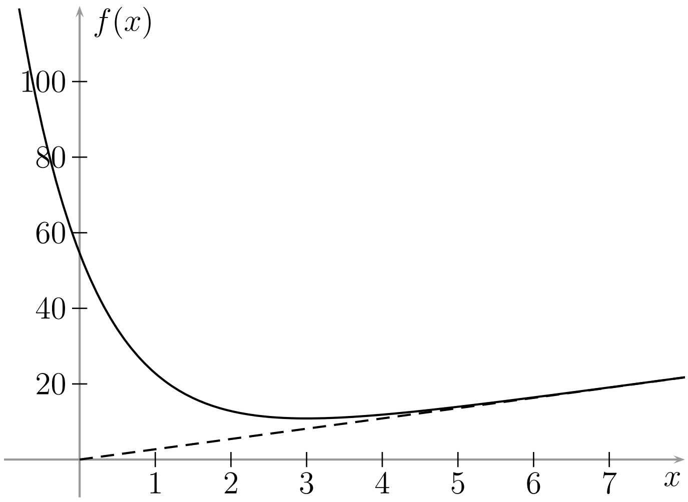
Če želimo, da gre rešitev skozi izhodišče, mora biti $C = 0$ in iskana rešitev je $y = 2x$.

Rešitve izpita iz matematike z dne 6. 5. 2009

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Za $x \leq -4$ dobimo $-x(x+4) < 5$ oziroma $x^2 + 4x + 5 > 0$, kar velja za vsak x. Od tod dobimo delno rešitev $(-\infty, -4]$.
Za $x \geq -4$ dobimo $x(x+4) < 5$ oziroma $(x-1)(x+5) < 0$, kar velja za $-5 < x < 1$. Od tod dobimo delno rešitev $[-4, 1)$.
Rešitev naše neenačbe je torej $x \in (-\infty, 1)$.

2. $Df = \mathbb{R}, \quad Zf = [e^4, \infty)$.
Funkcija je brez ničel.
$f'(x) = e - e^{4-x}$.
Funkcija narašča na $[3, \infty)$, pada pa na $(-\infty, 3]$. Pri $x = 3$ je globalni minimum.
$f''(x) = e^{4-x}$, funkcija je povsod konveksna.
Graf:



3. Če označimo $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, velja:

$$A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & x \\ 2t & z \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}.$$

Po seštetju dobimo sistem:

$$\begin{aligned} 2y + x &= 0 \\ x + z &= 0 \\ 2t + y &= 0 \\ z + t &= 0\,, \end{aligned}$$

ki ima edino rešitev $x = y = z = t = 0$, torej je edina rešitev naše matrične enačbe $A = 0$.

4. S substitucijo $t = 1 + e^{2x}$, $\mathrm{d}t = 2\,e^{2x}\,\mathrm{d}x$ dobimo:

$$V = \pi \int_1^2 \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{1+e^2}^{1+e^4} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{t}\Big|_{1+e^2}^{1+e^4} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1+e^2} - \frac{1}{1+e^4}\right).$$

5. $x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}y}{y^3}$, $\quad \dfrac{x^2}{2} + C = \dfrac{1}{2y^2}$, $\quad y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2C}}$.

Če želimo, da gre rešitev skozi $T(1, -1/2)$, mora biti predznak negativen in $C = 3/2$. Iskana rešitev je torej:

$$y = -\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,.$$

Rešitve izpita iz matematike z dne 24. 6. 2009

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Računajmo:

$$a_1 = -\frac{11}{9} \doteq -1{\cdot}22\,, \quad a_2 = -\frac{7}{3} \doteq -2{\cdot}33\,, \quad a_3 = -19\,, \quad a_4 = \frac{13}{3} \doteq 4{\cdot}33\,,$$

torej je $a_1 > a_2 > a_3 < a_4$ in zaporedje ni niti naraščajoče niti padajoče. Je pa padajoče od 4. člena naprej, saj za $n \geq 4$ velja:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-40n - 20}{\big((n+1)^2 - 10\big)\big(n^2 - 10\big)}$$

(ker je $n \geq 4$, je imenovalec pozitiven). Nadalje velja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{10}{n^2}}{1 - \frac{10}{n^2}} = 1\,,$$

torej je zaporedje konvergentno. Iz monotonosti od 4. člena naprej in konvergence sledi, da so vsi členi v tem območju med 1 in 13/3. Od tod in iz naračunanih vrednosti prvih štirih členov dobimo, da je zaporedje omejeno z $\min_n a_n = a_3 = -19$ in $\max_n a_n = a_4 = 13/3$.

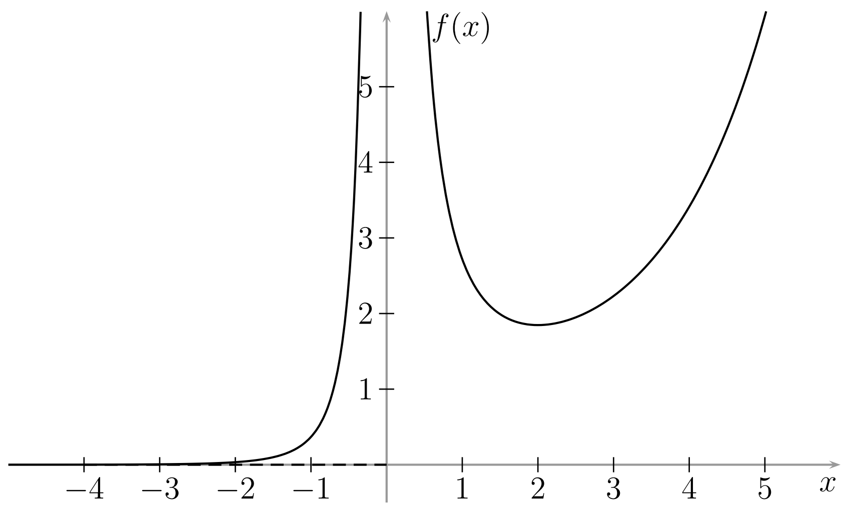
2. $Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad Zf = (0, \infty)$.

Funkcija je brez ničel, pol: $x = 0$ (druge stopnje), asimptota: $y = 0$.

$f'(x) = \dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$.

Funkcija narašča na $(-\infty, 0)$ in na $[2, \infty)$, pada pa na $(0, 2]$. Pri $x = 2$ je lokalni minimum.

Graf:



3. Ravnina: $2x + y + 4z = 13$, nožišče višine: $N_A\big(-\frac{29}{21}, \frac{59}{21}, \frac{68}{21}\big)$.

4. Po izenačenju $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$, množenju z x, odštetju in izpostavljenju dobimo $\ln x\big(1 - \ln x\big) = 0$, kar velja za $\ln x = 0$ in $\ln x = 1$ oziroma $x = 1$ in $x = e$. Na intervalu $(1, e)$ je $(\ln x)^2 < \ln x$. Z integracijo in substitucijo $t = \ln x$ dobimo:

$$S = \int_1^e \frac{\ln x - (\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (t - t^2)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\bigg|_0^1 = \frac{1}{6}\,.$$

5. Iz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{y^2 - 2y + 10}{x^2}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y - 2}{x}$$

dobimo stacionarni točki $T_1(3, 1)$ in $T_2(-3, 1)$. Nadalje velja:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(y^2 - 2y + 10)}{x^3}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2y - 2}{x^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{x}\,.$$

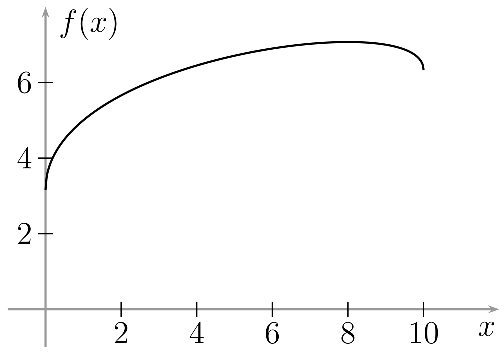
Ker v točki T_1 velja $H = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 4/9$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2/3$, je tam minimum. V točki T_2 pa velja $H = 4/9$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2/3$, zato je tam maksimum.

Rešitve izpita iz matematike z dne 9. 9. 2009

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Za $x = 0$ neenačba nima pomena, sicer pa množimo z x in ločimo tri možnosti.
Za $x < 0$ dobimo $1 - x \leq 2x$, torej $x \geq 1/3$, kar je v celoti izven izbranega območja.
Za $0 < x \leq 1$ dobimo $1-x \geq 2x$, torej $x \leq 1/3$, kar nam da delno rešitev $x \in (0, 1/3]$.
Za $x \geq 1$ dobimo $x - 1 \geq 2x$, torej $x \leq -1$, kar je v celoti izven izbranega območja.
Rešitev naše neenačbe je torej $x \in (0, 1/3]$.

2. $Df = [0, 10]$. $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{10-x}}$.
Funkcija narašča na $[0, 8]$ in pada na $[8, 10]$.
$f''(x) = -\dfrac{1}{2x^{3/2}} - \dfrac{1}{4(10-x)^{3/2}} < 0$.
Funkcija je na celotnem definicijskem območju konkavna.
Graf:



Iz funkcijskih vrednosti na robu definicijskega območja ($f(0) = \sqrt{10}$, $f(10) = 2\sqrt{10}$) ter intervalov naraščanja in padanja je razvidno, da funkcija nima nobene ničle.

3. Presečišče: $P(5, 8, 1)$, $\quad$ kot: $\dfrac{\pi}{2} - \arccos \dfrac{1}{3\sqrt{7}} = \arcsin \dfrac{1}{3\sqrt{7}} \doteq 7\dot{}24°$.

4. $V = \pi \displaystyle\int_0^1 x\, e^{2x}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(x\, e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{2x}\, \mathrm{d}x \right) = \frac{\pi e^2}{2} - \frac{\pi}{4} e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2+1)}{4}$.

5. $\dfrac{\mathrm{d}y}{y-2} = x\, \mathrm{d}x$, $\quad \ln \dfrac{y-2}{C} = \dfrac{x^2}{2}$, $\quad$ splošna rešitev: $y = 2 + C\, e^{x^2/2}$.
Rešitev, ki gre skozi izhodišče: $y = 2\big(1 - e^{x^2/2}\big)$.

2007/08

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 15. 11. 2007

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. $x \in (-\infty, 1)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^{n+2} + 2^{2n} - 1}{4^{n+3} + 3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{17 \cdot 4^n - 1}{64 \cdot 4^n + 3^n} = \dfrac{17}{64}$.

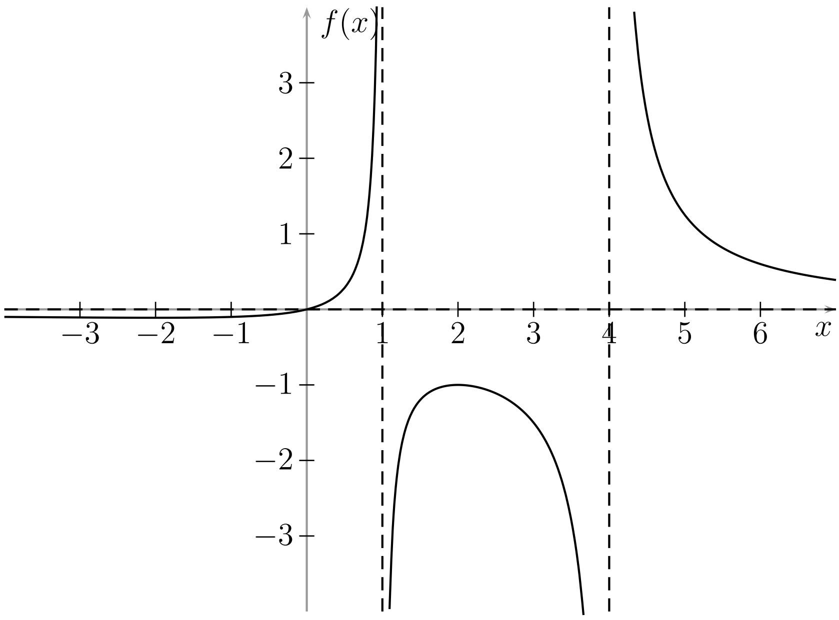
3. $y' = -\dfrac{e^{x+1}}{2(e^x + 3e^2)^{3/2}}$, $\quad y(2) = 1/2, \quad y'(2) = -1/16$.

Tangenta: $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{16}(x-2) = \dfrac{5}{8} - \dfrac{x}{16}$.

4. Ničla: $x = 0$, $\quad$ pola: $x = 1$, $x = 4$, $\quad$ asimptota: $y = 0$.

$f'(x) = \dfrac{4 - x^2}{(x^2 - 5x + 4)^2}$.

Funkcija narašča na $[-2, 1)$ in na $(1, 2]$, pada pa na $(-\infty, -2]$, $(2, 4)$ in $(4, \infty)$. Pri $x = -2$ je lokalni minimum, pri $x = 2$ pa lokalni maksimum. Graf:



5. $T_4(x) = 2 - \frac{5}{12}x^4$.

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 18. 12. 2007

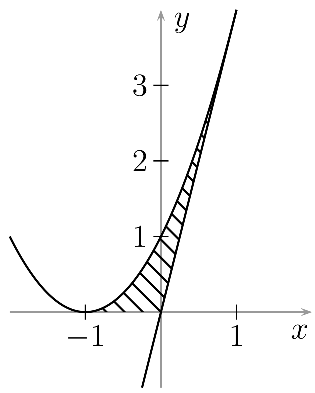
BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Z uvedbo nove spremenljivke $t = 1 + \cos^3 x$, $\mathrm{d}t = -3\cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x$, dobimo:

$$\int \frac{\sin x \cos^2 x}{1 + \cos^3 x} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{1}{3} \ln |t| + C = -\frac{1}{3} \ln(1 + \cos^3 x) + C$$

(ker je vedno $1 + \cos^3 x \geq 0$).

2. Slika:



Ploščino najlažje izračunamo kot razliko med ploščino lika pod krivuljo $y = x^2 - 2x + 1$, $-1 \leq x \leq 1$, ter trikotnika z oglišči $(0, 0)$, $(1, 0)$ in $(1, 4)$. Slednji ima osnovnico 1 in višino 4, torej ploščino 2. Ploščina našega lika je torej enaka:

$$S = \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x + 1) \, \mathrm{d}x - 2 \, .$$

S substitucijo $t = x + 1$ dobimo:

$$S = \int_{0}^{2} t^2 \, \mathrm{d}t - 2 = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^2 - 2 = \frac{2}{3} \, .$$

Rezultat se da dobiti tudi brez omenjene substitucije, a z malo več računanja.

3. Velja $S = S_{\mathrm{pk}} + S_{\mathrm{pl}}$, kjer je:

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{pk}} &= \pi(1^2 + 2^2) = 5\pi\,,\\
S_{\mathrm{pk}} &= 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= 2\pi \int_1^2 x\sqrt{\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \pi \int_1^2 (1 + x^2)\,\mathrm{d}x = \\
&= \pi\left(x + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \\
&= \frac{10\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

Torej je $S = \dfrac{25\pi}{3}$.

4. Velja:

$$\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right] = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 32\,.$$

Torej je volumen piramide enak $32/6 = 16/3$.

5. a) Iz normalne oblike enačbe premice, ki se glasi $2x - y - 1 = 0$, dobimo:

$$d = \left|\frac{2\cdot 2 - 1 - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\,.$$

To lahko izračunamo tudi kot razdaljo med točko T in presečiščem naše premice s pravokotnico skozi T, ki jo izračunamo v naslednji točki (glej tudi točko c)).

b) $y = 2 - \frac{1}{2}\,x$.

c) Najprej izračunamo presečišče naše premice s pravokotnico skozi T, ki smo jo izračunali v prejšnji točki. To je točka $P\left(\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)$. Iz zveze $\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{PT'}$ dobimo $T'\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 24. 1. 2008

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. $z \in \mathbb{R}$, $y = 1 + z$, $x = 5 + z$.
Prav tako lahko vse izrazimo z x ali y.

2. a) $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

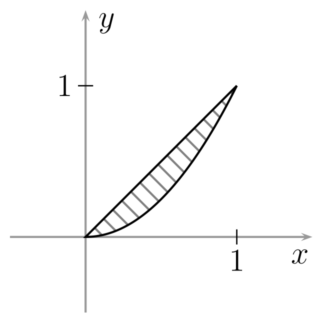
b) $X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$.

3. $\dot{x}(t) = 2/t$, $\dot{y}(t) = 3t^2$.
Normala: $y = -\frac{2}{3}x - 2$.

4. $l = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{(6t + 6t^2)^2 + (6t - 6t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 6\sqrt{2}\int_0^1 t\sqrt{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$.

S substitucijo $s = 1 + t^2$ dobimo $l = 3\sqrt{2}\displaystyle\int_1^2 \sqrt{s}\,\mathrm{d}s = 2\sqrt{2}s^{3/2}\Big|_0^1 = 8 - 2\sqrt{2} \doteq 5{\cdot}17$.

5. Skica definicijskega območja:



Oglišči: $f(0,0) = 0, \quad f(1,1) = -1$.

Rob $y = x$, $0 < x < 1$: $f(x,x) = -x^2$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,x) = -2x$, točka $(0,0)$ ne pripada notranjosti tega roba (in smo jo že obravnavali pri ogliščih).

Rob $y = x^2$, $0 < x < 1$: $f(x,x^2) = x^2 - 2x^4$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,x^2) = 2x - 8x^3 =$
$= x(1 - 2x)(1 + 2x)$, v notranjosti roba je le točka $(1/2, 1/4)$ in $f(1/2, 1/4) = 1/8$.

Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -4y$, točka $(0,0)$ ni v notranjosti.

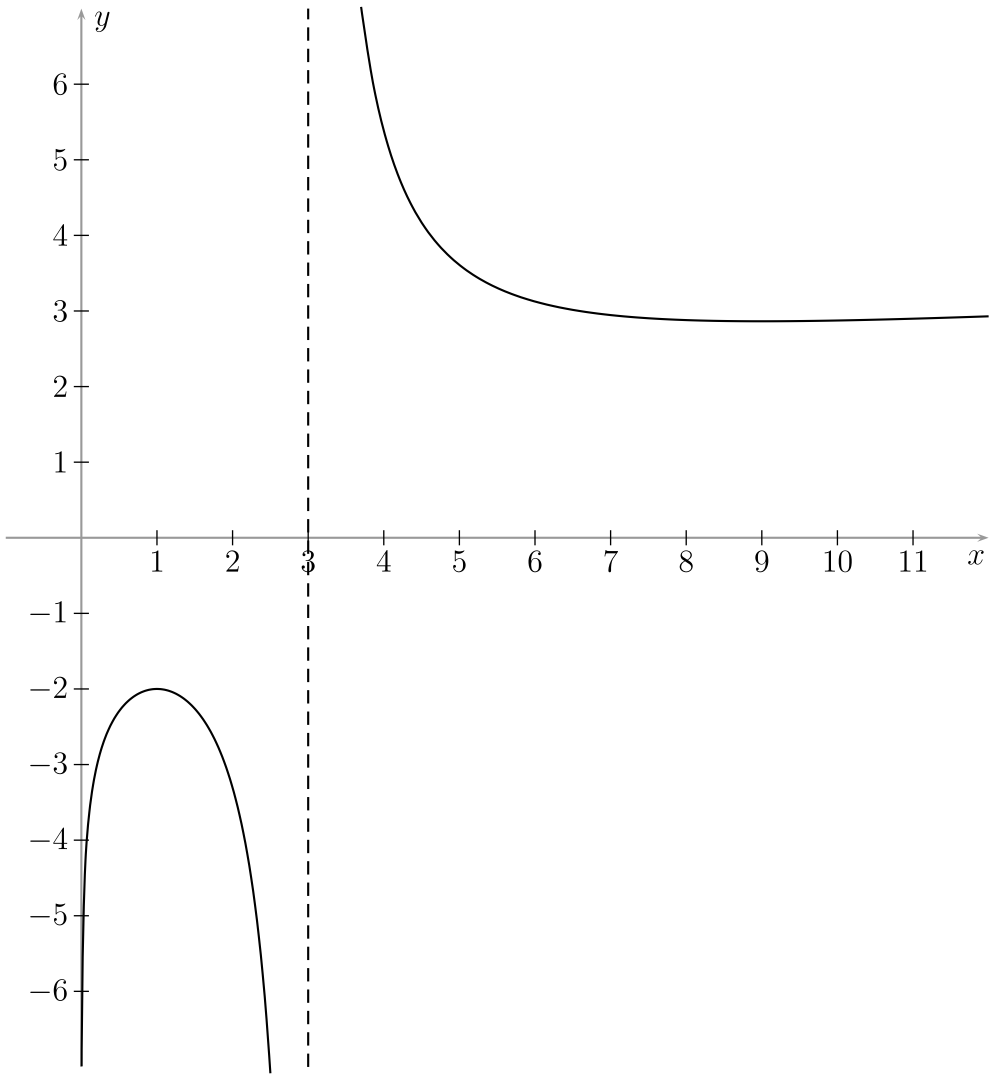
Torej je $\min\limits_D f = f(1,1) = -1$ in $\max\limits_D f = f(1/2, 1/4) = 1/8$.

Rešitve izpita iz matematike z dne 31. 1. 2008

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. $x \in [-2, 0) \cup (0, 2]$.

2. $Df = (0, 3) \cup (3, \infty)$, $\quad Zf = (-\infty, -2] \cup \left[\frac{2}{3} + \ln 9, \infty\right)$.
Ničel ni. Pri $x = 3$ je navaden, pri $x = 0$ pa logaritemski pol. Asimptot ni.
$f'(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 9}{x(x-3)^2}$.
Funkcija narašča na $(0, 1]$ in $[9, \infty)$, pada pa na $[1, 3)$ in $(3, 9]$. Pri $x = 1$ je lokalni maksimum, pri $x = 9$ pa lokalni minimum. Graf:



3. Sistem ima neskončno mnogo rešitev, ki jih lahko zapišemo v obliki:
$z \in \mathbb{R}$, $y = \dfrac{5-3z}{4}$, $x = \dfrac{15-5z}{4}$.
Prav tako lahko ostali dve spremenljivki izrazimo z x ali y.

4. $V = \int_0^1 \int_{-e^x}^{e^x} (e-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(ey - \dfrac{y^2}{2}\right)\Big|_{-e^x}^{e^x} \mathrm{d}x = 2e \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = 2e \cdot e^x\Big|_0^1 =$
$= 2(e^2 - e)$.

5. $\dfrac{\mathrm{d}y}{y+1} = \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}, \quad \ln\dfrac{y+1}{C} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.
Splošna rešitev: $y = C\sqrt{x^2+1} - 1$.
Iz začetnega pogoja dobimo $C = 1$, torej je iskana funkcija $y = \sqrt{x^2+1} - 1$.

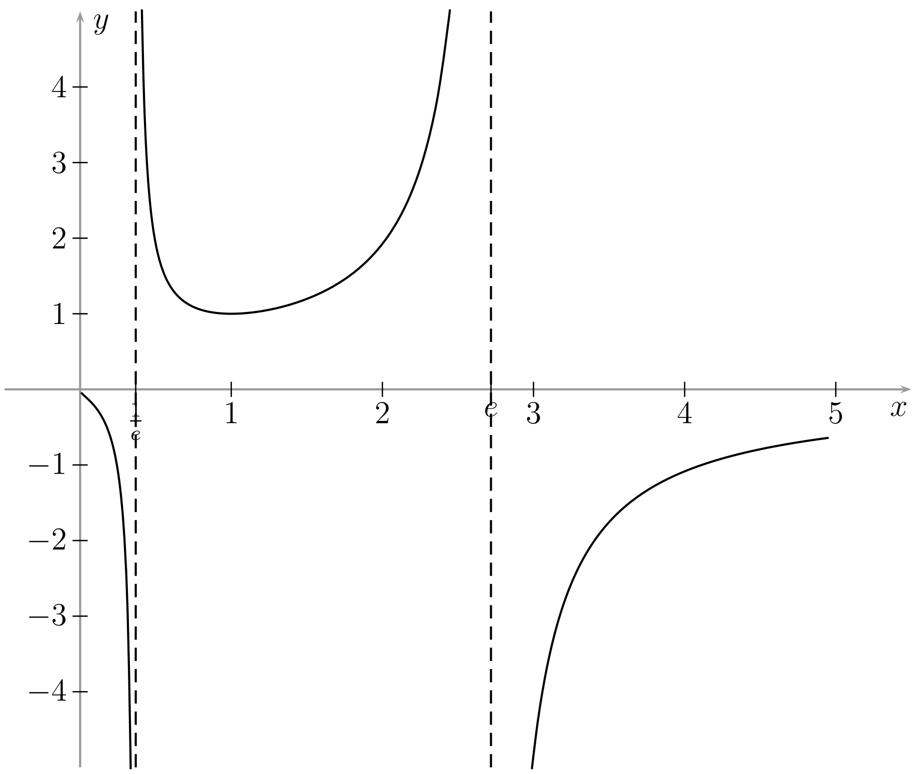
Rešitve izpita iz matematike z dne 20. 3. 2008

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Po L'Hôpitalovem pravilu dobimo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x\sin x - \cos x}{1 - x\sin x - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x + x\cos x}{-x\cos x} = -\lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{2}{\cos x}\,\frac{\sin x}{x}\right) = -3\,.$$

2. $Df = (0,\infty) \setminus \left\{\frac{1}{e}, e\right\} = \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, e\right) \cup \left(e, \infty\right)$, $\quad Zf = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$.
Ničel ni, pola: $x = \frac{1}{e}$, $x = e$, asimptota: $y = 0$.
$f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x\bigl(1 - (\ln x)^2\bigr)}$.
Funkcija narašča na $(1, e)$ in (e, ∞), pada pa na $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ in $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$. Pri $x = 1$ je lokalni minimum. Graf:



3. a) $x = 1 + t$, $y = -2t$, $z = -3 + 2t$, b) $T'\left(\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

4. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (-2x^2 - 2y^2 + 12 + 2x)e^{-2x}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y\, e^{-2x}.$

Stacionarni točki: $T_1(-2,0)$, $T_2(3,0)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (4x^2 + 4y^2 - 8x - 22)e^{-2x}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -4y\, e^{-2x}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\, e^{-2x}.$

V točki T_1 je $H = \begin{vmatrix} 10\, e^4 & 0 \\ 0 & 2\, e^4 \end{vmatrix} = 20\, e^8$, torej je tam lokalni minimum.

V točki T_2 pa je $H = \begin{vmatrix} -10\, e^{-6} & 0 \\ 0 & 2\, e^{-6} \end{vmatrix} = -20\, e^{-12}$, torej je tam sedlo (ni ekstrema).

5. $e^y\, \mathrm{d}y = e^x\, \mathrm{d}x, \quad e^y = e^x + C.$

Splošna rešitev: $y = \ln\bigl(e^x + C\bigr)$.

Iz začetnega pogoja dobimo $C = e - 1$, torej je iskana funkcija $y = \ln\bigl(e^x + e - 1\bigr)$.

Rešitve izpita iz matematike z dne 8. 5. 2008

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Neenačba je enakovredna neenačbi $|x-1| < 2|x+1|$ skupaj s pogojem $x \neq -1$.

- Za $x < -1$ dobimo $1-x < -2x-2$ oziroma $x < -3$, kar da delno rešitev $(-\infty, -3)$.
- Za $-1 < x \leq 1$ dobimo $1-x < 2x+2$ oziroma $x > -1/3$, kar da delno rešitev $(-1/3, 1]$.
- Za $x \geq 1$ dobimo $x-1 < 2x+2$ oziroma $x > -1$, kar da delno rešitev $[1, \infty)$.

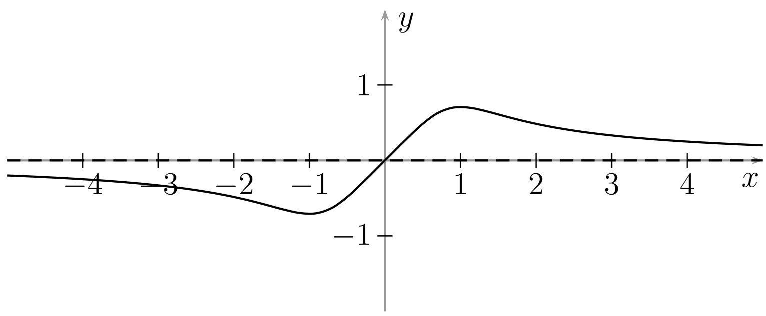
Rešitev neenačbe je tako $x \in (-\infty, -3) \cup (-1/3, \infty)$.

2. $Df = \mathbb{R}$, $\quad Zf = [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Ničla: $x = 0$, $\quad$ polov ni, $\quad$ asimptota: $y = 0$.

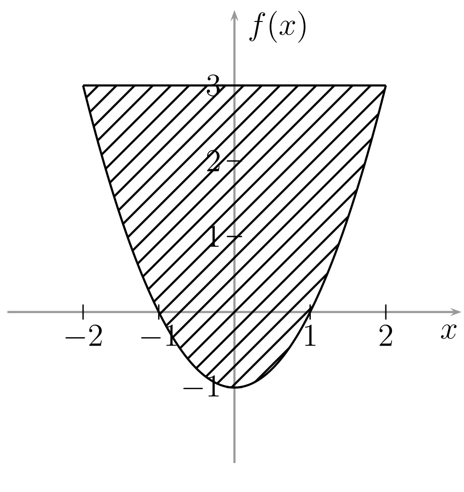
$f'(x) = \dfrac{1-x^4}{(1+x^4)^{3/2}}$.

Funkcija narašča na $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, pada pa na $(-\infty, 1/\sqrt{2}]$ in $[1/\sqrt{2}, \infty)$. Pri $x = -1$ je globalni minimum, pri $x = 1$ pa globalni maksimum. Graf:



3. 19/3.

4. Skica območja:



Oglišči: $f(-2,3)=-6, \quad f(2,3)=6$.
Rob $-2\le x\le 2$, $y=3$: $f(x,3)=3x$, ni stacionarnih točk.
Rob $-2\le x\le 2$, $y=x^2-1$: $f(x,x^2-1)=x^3-x$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,x^2-1)=3x^2-1$, $f(-\sqrt{3}/3,-2/3)=2/3$, $f(\sqrt{3}/3,-2/3)=-2/3$.
Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x$, $\quad f(0,0)=0$.
Sklep: $\min\limits_D f=f(-2,3)=-6$, $\max\limits_D f=f(2,3)=6$.

5. $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\sin x\cos x\,\mathrm{d}x$, $\quad \ln\dfrac{y}{C}=\dfrac{\sin^2 x}{2}$.
Splošna rešitev: $y=C\,e^{(\sin^2 x)/2}$.
Iz začetnega pogoja dobimo $C=-1$, torej je iskana funkcija $y=-e^{(\sin^2 x)/2}$.

Rešitve izpita iz matematike z dne 11. 6. 2008

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Neenačbo množimo z $2(x+1)$ in razrešimo absolutno vrednost. Glede na posamezne primere dobimo naslednje:

- Za $x < -1$ dobimo $2(1-x) > x+1$ oziroma $x < 1/3$, kar da delno rešitev $(-\infty, -1)$.
- Za $-1 < x \leq 1$ dobimo $2(1-x) < x+1$ oziroma $x > 1/3$, kar da delno rešitev $(1/3, 1]$.
- Za $x \geq 1$ dobimo $2(x-1) < x+1$ oziroma $x < 3$, kar da delno rešitev $[1, 3)$.

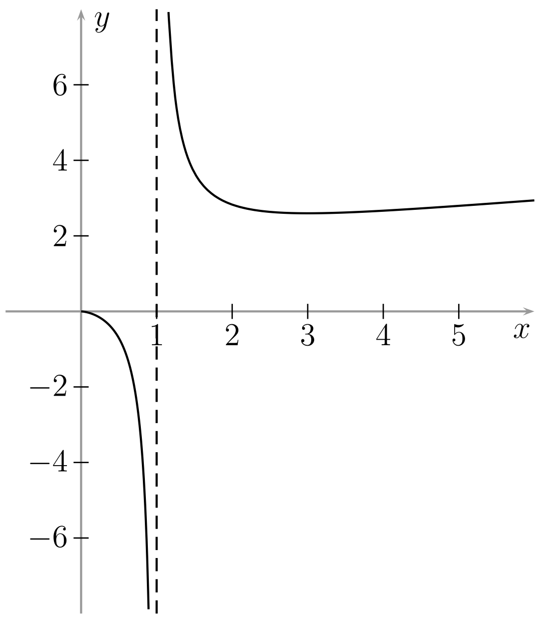
Rešitev neenačbe je tako $x \in (-\infty, -1) \cup (1/3, 3)$.

2. $Df = [0, \infty) \setminus \{1\} = [0, 1) \cup (1, \infty)$, $\quad Zf = (-\infty, 0] \cup [3\sqrt{3}/2, \infty)$.

Ničla: $x = 0$, pol: $x = 1$, asimptot ni.

$f'(x) = \dfrac{(x-3)\sqrt{x}}{2(x-1)^2}$.

Funkcija narašča na $[3, \infty)$, pada pa na $[0, 1)$ in $(1, 3]$. Pri $x = 3$ je lokalni minimum.
Graf:



3. Za $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ velja:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A + A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} z & t \\ x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & z+t \\ x+y & y+t \end{bmatrix},$$

od koder dobimo $x = -z = -y = t$, $x = -y = t$. Dani zvezi torej zadoščajo vse matrike oblike:

$$A = \begin{bmatrix} t & -t \\ -t & t \end{bmatrix}; \ t \in \mathbb{R}.$$

4. Drugi pogoj je lahko izpolnjen, le če je $\sin\varphi \geq 0$, za $\varphi \in [0, 2\pi]$ pa je to tedaj, ko je $\varphi \in [0, \pi]$. Zato velja:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi} \int_{2+\cos^2\varphi}^{2+2\cos^2\varphi} \frac{\sin\varphi}{r}\, r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \sin\varphi \cdot r \Big|_{r=2+\cos^2\varphi}^{r=2+2\cos^2\varphi} \mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \sin\varphi\big((2+2\cos^2\varphi) - (2+\cos^2\varphi)\big)\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} \sin\varphi\cos^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi\,. \end{aligned}$$

S substitucijo $t = \cos\varphi$, $\mathrm{d}t = -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ dobimo:

$$V = -\int_1^{-1} t^2\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\,.$$

5. Po ločitvi spremenljivk dobimo $\dfrac{y\,\mathrm{d}y}{1+y^2} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.
Z uvedbo nove spremenljivke $t = 1+y^2$, $\mathrm{d}t = 2y\,\mathrm{d}y$ izračunamo
$\displaystyle\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + K = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y^2}{C}$, od koder dobimo $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y^2}{C} = \ln x$.
Splošna rešitev: $y = \pm\sqrt{Cx^2-1}$.
Iz začetnega pogoja dobimo $C = 2$, torej je iskana funkcija $y = -\sqrt{2x^2-1}$.

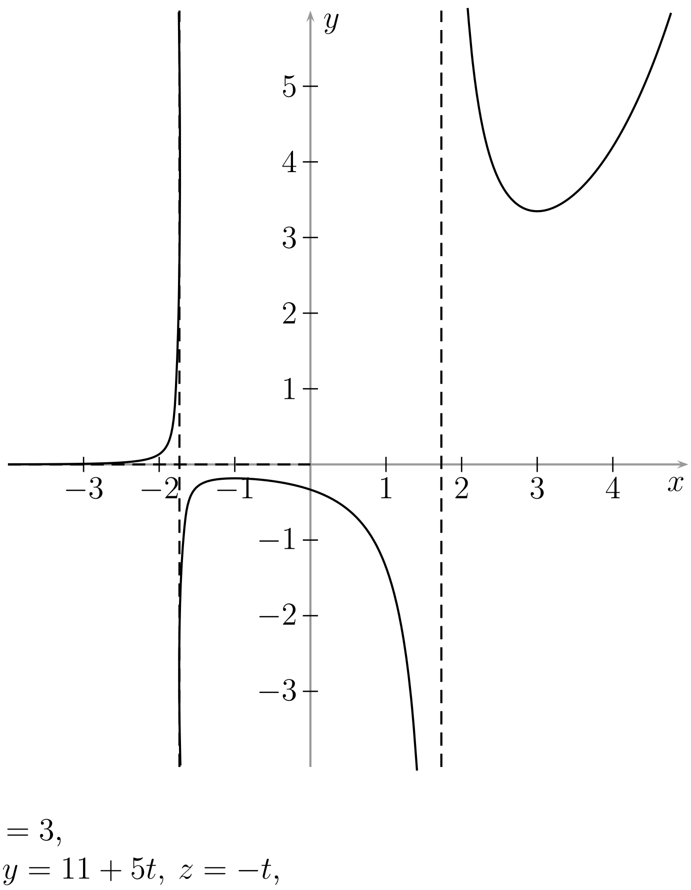
Rešitve izpita iz matematike z dne 3. 9. 2008

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Z uporabo L'Hôpitalovega pravila dobimo:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\frac{1}{\sqrt{2x-1}}}{1}=\frac{1}{3}\,.$$

2. $Df=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}=\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},\infty\right)$,
$Zf=(-\infty,-1/(2e)]\cup(0,\infty)$. Ničel ni, pola: $x=-\sqrt{3}, x=\sqrt{3}$,
asimptota: $y=0$.
$f'(x)=\dfrac{(x^2-2x-3)\,e^x}{(x^2-3)^2}$.
Funkcija narašča na $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3},-1\right]$ in $[3,\infty)$, pada pa na $\left[-1,\sqrt{3}\right)$ in $\left(\sqrt{3},\infty\right)$. Pri $x=-1$ je lokalni maksimum, pri $x=3$ pa lokalni minimum. Graf:



3. a) $-2x+5y-z=3$,
b) $x=-4-2t,\ y=11+5t,\ z=-t$,
c) $N(0,1,2)$.

4. Desna stran je definirana za $-1 \leq x \leq 1$, zato je:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = -\pi \int_{-3}^{-1} \frac{t^2+4t+3}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\pi \left(t + 4\ln|t| - \frac{3}{t}\right)\Big|_{-3}^{-1} =$$
$$= 4\pi(\ln 3 - 1) \doteq 1.24\,.$$

5. Iz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2y^2}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{xy^3} + \frac{1}{y^2}$$

dobimo edino stacionarno točko $T(4, 1/2)$. Nadalje velja:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3y^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{2}{x^2y^3}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{6}{xy^4} - \frac{2}{y^3}\,.$$

Ker v točki T velja $H = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = -1/2$, tam ni ekstrema. Torej je funkcija brez ekstremov.

2006/07

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 1. 12. 2006

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{6}\left[\binom{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^6\right] = \frac{3}{128} \doteq 0{\cdot}02344.$

2. $D(5,2,1)$, ploščina: $\sqrt{195} \doteq 13{\cdot}96$.

3. Premica: $x = 3+3t,\ y = 10+7t,\ z = 6+t.$
Presečišče: $P(0,3,5)$.

4. $y = -\frac{x}{2} + 2.$

5. $\left[\frac{3}{2}, 2\right) \cup \left(2, 3\right]$.

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 19. 1. 2007

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-3}{n^2+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-3n^{-2}}{1+2n^{-2}} = 2.$
Členi se od limite razlikujejo za manj kot ε, če je $n > \sqrt{698}$, torej če je $n \geq 27$.

2. $Df = [1, \infty)$, $Zf = Df^{-1} = [2, \infty)$, $f^{-1}(x) = 1 + \left(e^x - e^2\right)^2$.

3. $-\dfrac{1}{12\sqrt{7}} = -\dfrac{\sqrt{7}}{84} \doteq -0\text{˙}0315.$

4. $y_0 = \dfrac{1}{8}$, $y'(2) = \dfrac{7}{16}$. Tangenta: $y = \dfrac{7x}{16} - \dfrac{3}{4}$, normala: $y = -\dfrac{16x}{7} + \dfrac{263}{56}$.

5. $a = 1/4$, $b = -1$, $c = 0$.

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 6. 4. 2007

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Označimo $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos x - \cos(2x)}{2\ln(1+x) - \ln(1+2x)}$.

1. način: z razvojem v Taylorjevo vrsto dobimo:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dots\right) - \left(1 - 2x^2 + \dots\right)}{(2x - x^2 + \dots) - (2x - 2x^2 + \dots)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}\,x^2 + \dots}{x^2 + \dots} = \frac{3}{2}\,.$$

2. način: z dvakratno uporabo L'Hôpitalovega pravila dobimo:

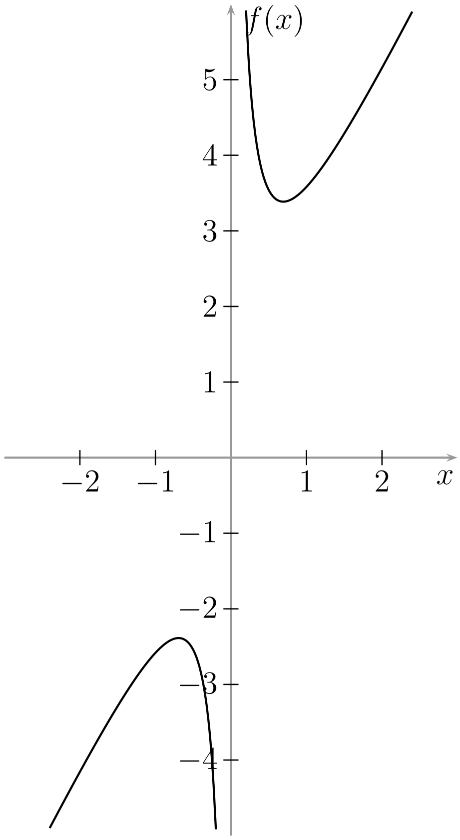
$$L = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + 2\sin(2x)}{\dfrac{2}{1+x} - \dfrac{2}{1+2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 4\cos(4x)}{-\dfrac{2}{(1+x)^2} + \dfrac{4}{(1+2x)^2}} = \frac{3}{2}\,.$$

2. $Df = \left\{x\,;\, 1 - e^{-x} \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Funkcija ima pol pri $x = 0$.

$f'(x) = \dfrac{(2 - e^{-x})(1 - 2\,e^{-x})}{1 - e^{-x})^2}$

Funkcija narašča na $(-\infty, -\ln 2]$ in na $[\ln 2, \infty)$, pada pa na $[-\ln 2, 0)$ in na $(0, \ln 2]$. Pri $x = -\ln 2$ je lokalni maksimum, pri $x = \ln 2$ pa lokalni minimum. Graf:



Funkcija nima ničel.

3. $f(x) = x(2+x)^{-3} = x\left[2^{-3} + \binom{-3}{1}2^{-4}x + \binom{-3}{2}2^{-5}x^2 + \binom{-3}{3}2^{-6}x^3 + \ldots\right] =$

$$= \frac{1}{8}\,x - \frac{3}{16}\,x^2 + \frac{3}{16}\,x^3 - \frac{5}{32}\,x^3 + \ldots$$

4. $4\sin\dfrac{x}{2} - 2(x+1)\cos\dfrac{x}{2} + C\,.$

5. $S = \displaystyle\int_{-2/\sqrt{5}}^{2/\sqrt{5}} \left(\frac{4}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 8\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - 2\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} \doteq 1{\cdot}49\,.$

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 31. 5. 2007

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 - y - 1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{1}{x^2 - y - 1}$.
Tangentna ravnina: $z = 3 + 2(x-1) - (y+1)$ oz. $z = 2x - y$.
Normala: $x = 1 + 2t$, $y = -1 - t$, $z = 3 - t$.

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y} - 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -e^{x-y} + 2y$, stacionarna točka: $T\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x-y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x-y} + 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -e^{x-y}$.
$H = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$, torej je v $T\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$ lokalni minimum.

3. $V = \displaystyle\int_0^1 \int_0^x \big[(x+y)^2 - x^2\big]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^x (2xy + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

4. $\dfrac{\mathrm{d}y_H}{y_H} = -\dfrac{2}{x}\,\mathrm{d}x$, $\ln\dfrac{y_H}{C} = -2\ln x$, $y_H = \dfrac{C}{x^2}$.
$\dfrac{C'}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $C = -\sqrt{1-x^2} + D$, $y = \dfrac{D - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$.

5. Najprej moramo poiskati splošno rešitev diferencialne enačbe, ki jo nastavimo kot $y = y_H + y_P$, kjer je y_H splošna rešitev homogenega dela enačbe, y_P pa je neka (partikularna) rešitev izvirne enačbe brez začetnih pogojev. Iz karakterističnega polinoma $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda+1)(\lambda+3)$ dobimo:

$$y_H = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{-3x}$$

Desna stran enačbe izpolnjuje pogoje za nastavek z nedoločenimi koeficienti. V našem primeru je treba nastaviti:

$$y_P = Ax + B\,,$$

kjer koeficienta A in B postavimo tako, da y_P reši enačbo. Iz:

$$y_P'' + 4y_P' + 3y_P = 3Ax + 3B + 4A$$

dobimo $A = \frac{1}{3}$ in $B = -\frac{4}{9}$, torej je splošna rešitev naše enačbe:

$$y = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{-3x} + \tfrac{1}{3}\,x - \tfrac{4}{9}\,.$$

Če zdaj vstavimo začetne pogoje, dobimo, da mora biti $C_1 = 1$ in $C_2 = 0$. Zahtevana partikularna rešitev je torej:

$$y = e^{-x} - \tfrac{5}{9}\,e^{-3x} + \tfrac{1}{3}\,x - \tfrac{4}{9}\,.$$

Rešitve izpita iz matematike z dne 13. 6. 2007

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. $X = BA^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 17 & 23 \end{bmatrix} \cdot \dfrac{1}{7 \cdot 3 - 8 \cdot 2} \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{n+4} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{n+4}}{\left(1 - \frac{3}{2n}\right)^{n+4}} = \dfrac{e^{-3/2}}{e^{5/2}} = e^{-4}.$

3. $Df = (-1, 1)$, $Zf = \mathbb{R}$. Ničla: $x = 0$, pola: $x = 1$, $x = -1$.

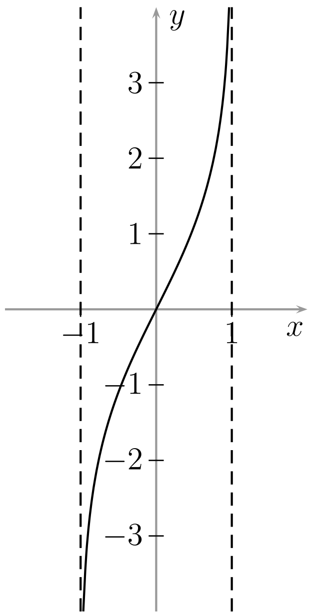
$f'(x) = \dfrac{2}{1 - x^2}.$

Funkcija je na celem definicijskem območju naraščajoča (in zato brez ekstremov).

$f''(x) = \dfrac{4x}{(1 - x^2)^2}.$

Funkcija je konveksna na $[0, 1)$ in konkavna na $(-1, 0]$.

Graf:



$l = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \sqrt{9t^2 + 4}\,t\,\mathrm{d}t.$

S substitucijo $u = 9t^2 + 4$, $\mathrm{d}u = 18t\,\mathrm{d}t$ dobimo:

$l = \dfrac{1}{18} \displaystyle\int_4^{40} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \dfrac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \doteq 9{\cdot}07.$

4. *Prvi način*:

$$\frac{\mathrm{d}y_H}{y_H} + x\,\mathrm{d}x = 0, \quad \ln\frac{y_H}{C} + \frac{x^2}{2} = 0, \quad y_H = C\,e^{-x^2/2}.$$

$$C'(x)\,e^{-x^2/2} = 3x, \quad C(x) = 3\,e^{x^2/2} + D, \quad y = 3 + D\,e^{-x^2/2}.$$

$$D = -3, \quad y = 3\big(1 - e^{-x^2/2}\big).$$

Drugi način:

$$y' + x(y-3) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}y}{y-3} + x\,\mathrm{d}x = 0, \quad \ln\frac{y-3}{C} + \frac{x^2}{2} = 0, \quad y = C\,e^{-x^2/2} + 3.$$

Nadaljujemo tako kot pri prvem načinu.

Rešitve izpita iz matematike z dne 27. 6. 2007

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Iskana točka je presečišče ravnine in normale na ravnino, ki gre skozi točko T. Normala ima parametrično enačbo $x = 2 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = 3 - 2t$. Ko le-to vstavimo v enačbo ravnine, dobimo $t = 2/3$. Iskana točka je torej $P\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

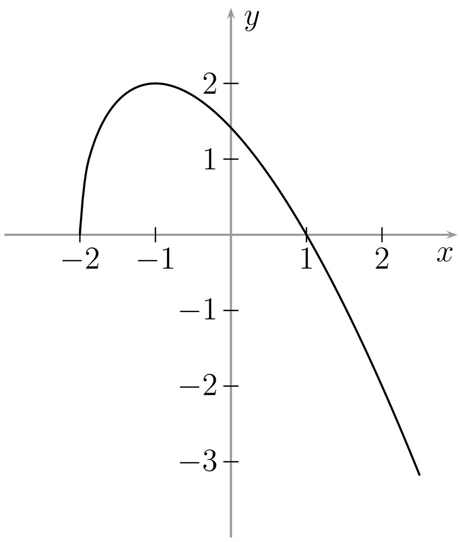
2. $Df = [-2, \infty)$, $\quad Zf = (-\infty, 2]$. $\quad$ Ničli: $x = -2$ in $x = 1$.

$f'(x) = -\dfrac{3(1+x)}{2\sqrt{2+x}}$.

Funkcija narašča na $[-2, -1]$ in pada na $[-1, \infty)$; pri $x = -1$ je globalni maksimum.

$f''(x) = -\dfrac{3(x+3)}{4(2+x)^{3/2}}$.

Funkcija je na vsem definicijskem območju konkavna. Graf:



3. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{4y - y^2}{x^2} + \dfrac{2}{x}$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2y-4}{x}$.

Stacionarna točka: $T\left(2, -\frac{1}{2}\right)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2(y^2 - 4y)}{x^3} - \dfrac{2}{x^2}$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{4 - 2y}{x^2}$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2}{x}$.

V točki T je $H = \begin{vmatrix} -72 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$, torej je tam lokalni maksimum.

4. *Prvi način*:
$\dfrac{\mathrm{d}y_H}{y_H} + x\,\mathrm{d}x = 0, \quad \ln\dfrac{y_H}{C} + \dfrac{x^2}{2} = 0, \quad y_H = C\,e^{-x^2/2}.$
$C'(x)\,e^{-x^2/2} = 3x, \quad C(x) = 3\,e^{x^2/2} + D, \quad y = 3 + D\,e^{-x^2/2}.$
$D = -3, \quad y = 3\big(1 - e^{-x^2/2}\big).$

Drugi način: $y' + x(y-3) = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{y-3} + x\,\mathrm{d}x = 0, \quad \ln\dfrac{y-3}{C} + \dfrac{x^2}{2} = 0, \quad y = C\,e^{-x^2/2} + 3.$
Nadaljujemo tako kot pri prvem načinu.

Rešitve izpita iz matematike z dne 22. 8. 2007

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. $X = A^{-1}B\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -13/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/2 & -13/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Po L'Hôpitalovem pravilu dobimo:

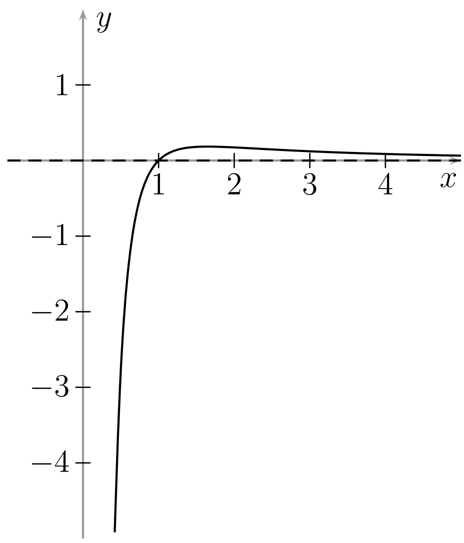
$$\lim_{x\to 1} \frac{x \ln x}{x^2 + x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1}{2x + 1} = \frac{1}{3}\,.$$

3. $Df = (0, \infty)$, $\quad Zf = \left(-\infty, \dfrac{1}{2e}\right]$. Ničla: $x = 1$, pol: $x = 0$, asimptota: $y = 0$.

$f'(x) = -\dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$.

Funkcija narašča na $\left(0, -\sqrt{e}\right]$ in pada na $\left[\sqrt{e}, \infty\right)$; pri $x = \sqrt{e}$ je globalni maksimum.

Graf:



4. $V = \left(\sqrt{2}\right)^2 \pi + 2\pi \displaystyle\int_0^2 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, \mathrm{d}x = 2\pi + \pi \int_0^2 \sqrt{4x+1}\, \mathrm{d}x =$

$= 2\pi + \dfrac{\pi}{4} \displaystyle\int_1^9 \sqrt{u}\, \mathrm{d}u = 2\pi + \frac{\pi}{6}\, u\sqrt{u}\Big|_1^9 = \frac{19\pi}{3}$.

5. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$, $\quad 2\sqrt{y} = \operatorname{tg} x + C$.

Splošna rešitev: $y = \left(\dfrac{\operatorname{tg} x + C}{2}\right)^2$.

Iz začetnega pogoja dobimo $C = 3$, torej je iskana funkcija $y = \left(\dfrac{\operatorname{tg} x + 3}{2}\right)^2$.

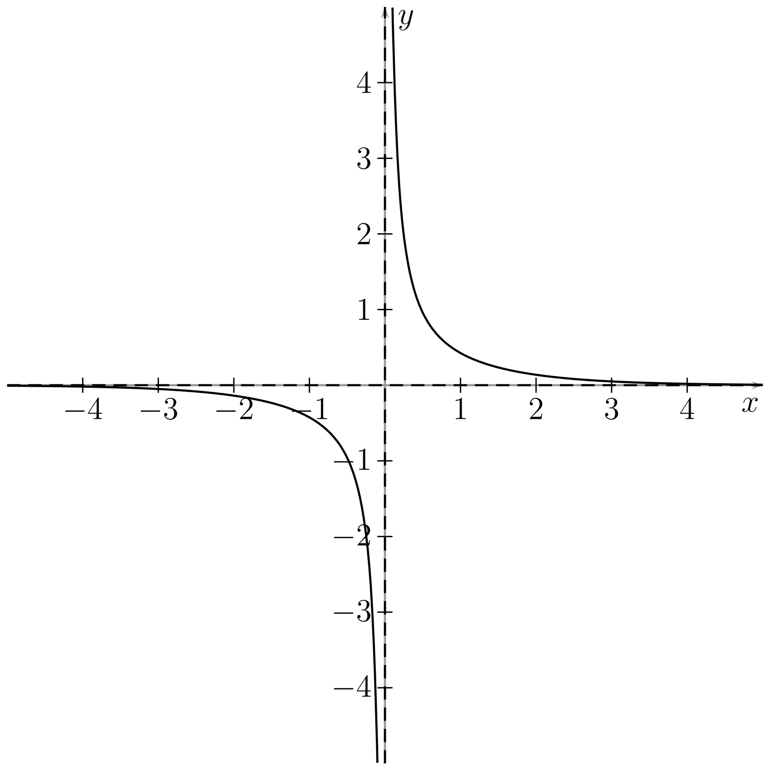
Rešitve izpita iz matematike z dne 5. 9. 2007

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Najprej nastavimo enačbo za pravokotno projekcijo točke T na ravnino. To je točka $P(2+t, 3-2t, 2-t)$, kjer je t določen tako, da P res leži na ravnini. Slednje velja pri $t = 1$.
Iskana točka je točka $T'(2+2t, 3-4t, 2-2t)$ oziroma $T'(4, -1, 0)$.

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n+1}+16^n}{4^{2n+1}+15^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{16^n \cdot 2 + 16^n}{16^n \cdot 4 + 15^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4+\left(\frac{15}{16}\right)^n} = \frac{3}{4}.$

3. $Df = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $\quad Zf = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. $\quad$ Ničel ni. $\quad$ Pol: $x = 0$.
Asimptota: $y = 0$. $\quad f'(x) = -\dfrac{e^{3x}+e^x}{\left(e^{2x}-1\right)^2}.$
Funkcija pada na obeh intervalih, kjer je definirana, in nima ekstremov. Graf:



4. $\displaystyle l = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{t+1}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\sqrt{t-1}}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t.$
S substitucijo $u = \sqrt{t-1}$, $t = u^2+1$, $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$ dobimo:
$\displaystyle l = 3\int_0^1 (u^2+1)\,\mathrm{d}u = (u^3+3u)\Big|_0^1 = 4.$

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3y}{x^2}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{3}{x} - 4y.$ Stacionarna točka: $T\big(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\big)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{6y}{x^3}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -\dfrac{3}{x^2}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4.$

V točki T je $H = \begin{vmatrix} 4/9 & -4/3 \\ -4/3 & -4 \end{vmatrix} = -\dfrac{32}{9}$, torej je tam sedlo. Zato je funkcija brez ekstremov.

2005/06

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 27. 1. 2006

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. Ni rešitve.

2. $[-4, 0] \cup [2, 6]$.

3. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$.

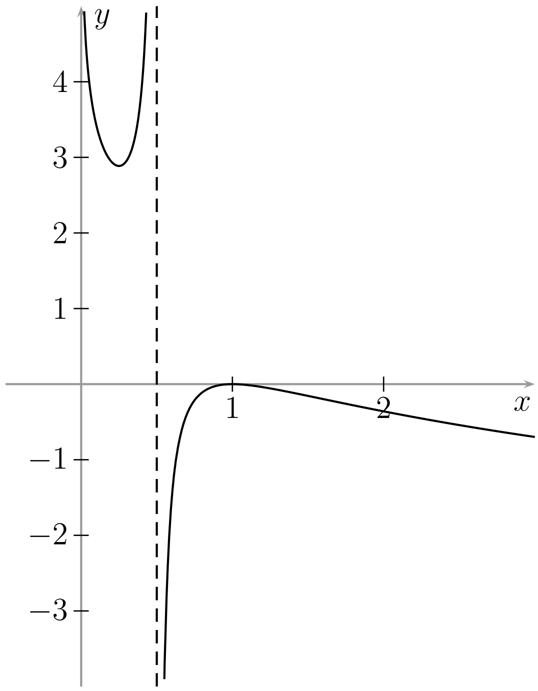
4. $\dfrac{16}{231}$.

5. $Df = [-1, \infty)$, $Zf = [1, \infty)$, $f^{-1}(y) = (\ln y)^2 - 1$.

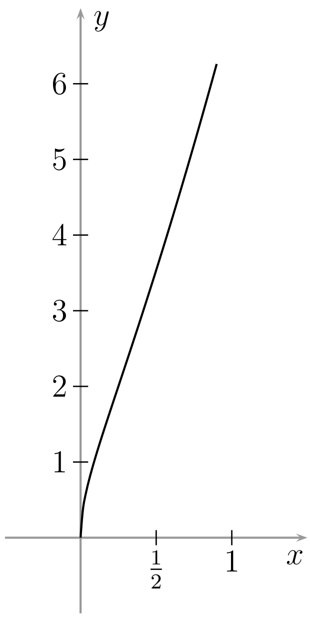
Rešitve kolokvija iz matematike z dne 26. 4. 2006

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. $Df = (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty) = (0, \infty) \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $Zf = (-\infty, 0] \cup [\frac{3}{2} + \ln 4, \infty)$, edina ničla je pri $x = 1$ (dvojna), pravi pol je pri $x = \frac{1}{2}$ (pri $x = 0$ pa logaritmični pol), funkcija narašča na $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ in na $(\frac{1}{2}, 1]$, pada pa na $(0, \frac{1}{4}]$ in $[1, \infty)$. Graf:



2. Na intervalu $[0, \frac{1}{4}]$ je funkcija konkavna, na $[\frac{1}{4}, \infty)$ pa konveksna. Graf:



3. $-2x^3 - \frac{1}{6}x^7 + O(x^9)$.

4. $S = \displaystyle\int_0^{1/2} x\,e^{2x}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{1} (1-x)e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{(e-1)^2}{4}$.

5. $V = \pi \displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x =$

$= \pi \left(x - 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{2}\right)\Big|_0^2 = \pi\left(2 - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 5. 6. 2006

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. a) $a = -2$

b) $\pm S = \int_0^1 x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (t^3 - t^2)(3t^2 - 4t + 1)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{60}$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2e^x(y-1), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2e^x - 2e^{-2y}.$

Stacionarna točka: $T(-2,1)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^x(y-1), \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2e^x, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4e^{-2y}.$

$H = \begin{vmatrix} 0 & 2e^{-2} \\ 2e^{-2} & 4e^{-2} \end{vmatrix} = -4e^{-4} < 0.$ Ekstrema ni.

3. Oglišča: $f(0,0) = 1, \quad f(0,1) = 2, \quad f(1,0) = 1.$

Robovi: $f(x,0) = 4x^2 - 4x + 1, \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,0) = 8x + 4, \quad f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 0;$

$f(0,y) = y^2 + 1, \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(0,y) = 2y, \quad f(0,0) = 1;$

$f(x,1-x) = 5x^2 - 6x + 2, \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,1-x) = 10x - 6, \quad f\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}.$

Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 8x - 4, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 0.$

Globalni minimum je v $T\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, globalni maksimum pa v $T(0,1)$.

4. $\dfrac{\mathrm{d}y}{y^3} = e^{2x}\,\mathrm{d}x, \quad -\dfrac{1}{2y^2} + C = \dfrac{e^{2x}}{2}, \quad y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2C - e^{2x}}}.$

Partikularna rešitev: $y = \dfrac{3}{10 - 9e^{2x}}.$

5. $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0, \quad \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 4, \quad y = C_1\,e^{3x} + C_2\,e^{4x}$, kjer je:

$C_1'\,e^{3x} + C_2'\,e^{4x} = 0, \quad 3C_1'\,e^{3x} + 4C_2'\,e^{4x} = e^{3x}.$

$C_1' = -1 \Rightarrow C_1 = -x + D_1, \quad C_2' = e^{-x} \Rightarrow C_2 = -e^{-x} + D_2.$

$y = (-x + D_1)e^{3x} + (-e^{-x} + D_2)e^{4x}$ ali ekvivalentno:

$y = -xe^{3x} + E_1 e^{3x} + E_2 e^{4x}.$

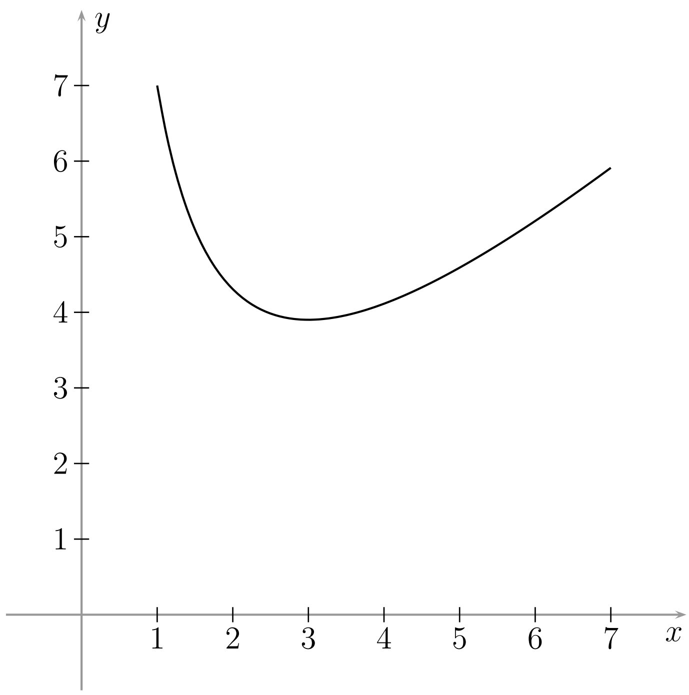
Rešitve izpita iz matematike z dne 12. 6. 2006

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. To se lahko zgodi le v dveh primerih: da takoj prvič padejo tri pike ali pa da prvič pade ena, drugič pa dve piki. Verjetnost je torej 7/36.

2. a) $z = 10$, b) $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

3. $Df = (0, \infty)$, $Zf = [5 - \ln 3, \infty)$. Funkcija pada na $(0, 3]$ in narašča na $[3, \infty)$. Pri $x = 3$ je globalni minimum, funkcija je povsod konveksna (in zato brez prevojev). Graf:



4. $l = \displaystyle\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{4 + 9x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{18}\int_4^{40} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{t\sqrt{t}}{27}\right|_4^{40} =$
$= \dfrac{2}{27}\,(10\sqrt{10} - 1)$.

5. Substitucija $z = y'$ nam da $z' + z = e^x$.
$z_H = C\,e^{-x}$, $z = \dfrac{e^x}{2} + D\,e^{-x}$, $y = \dfrac{e^x}{2} - D\,e^{-x} + E$.
Podobno bi dobili tudi pri variaciji konstant za linearno diferencialno enačbo drugega reda ali z nastavkom.

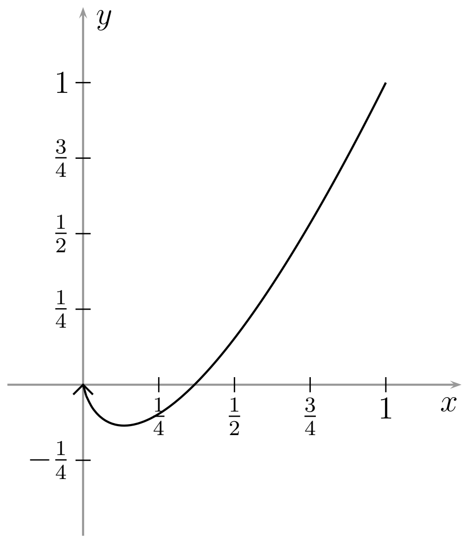
Rešitve izpita iz matematike z dne 28. 6. 2006

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. a) $z = 10$, b) $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

2. $\dfrac{10}{3}$.

3. $Df = (0, \infty)$, $Zf = [-3e^{-2}, \infty)$. Ničla: $x = 1/e$. Funkcija pada na $(0, e^{-2}]$ in narašča na $[e^{-2}, \infty)$; pri $x = e^{-2}$ je globalni minimum. Funkcija je povsod konveksna. Graf:



4. Velja $V = \pi \displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{2-x}\,\mathrm{d}x$. S substitucijo $t = \sqrt{2-x}$ dobimo:

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2-t^2)^2 t^2\,\mathrm{d}t = 2\pi\left(\frac{4t^3}{3} - \frac{4t^5}{5} + \frac{t^7}{7}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{128\pi\sqrt{2}}{105} \doteq 5{\cdot}42.$$

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\,(-x^2 - y^2 + 4x - 3)e^{-x/2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y\,e^{-x/2}$.

Stacionarni točki: $T_1(1,0)$, $T_2(3,0)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{4}\,(x^2 + y^2 - 8x + 11)e^{-x/2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -y\,e^{-x/2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\,e^{-x/2}$.

$H(1,0) = \begin{vmatrix} e^{-1/2} & 0 \\ 0 & 2\,e^{-1/2} \end{vmatrix} = 2\,e^{-1} > 0$. V $T(1,0)$ je minimum.

$H(3,0) = \begin{vmatrix} -e^{-3/2} & 0 \\ 0 & 2\,e^{-3/2} \end{vmatrix} = -e^{-3} < 0$. V $T(1,0)$ ni ekstrema.

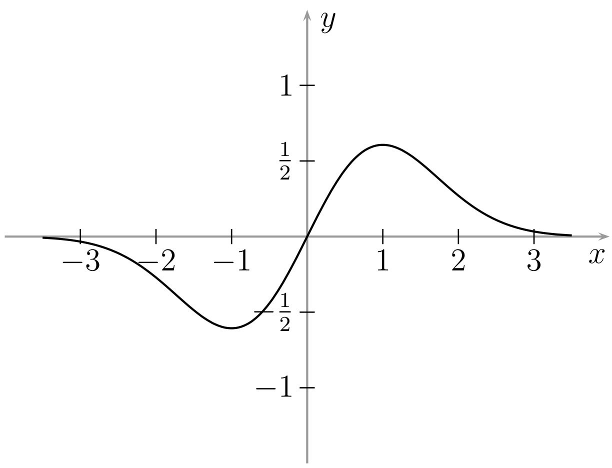
Rešitve izpita iz matematike z dne 23. 8. 2006

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. To se lahko zgodi le v dveh primerih: da takoj prvič padejo tri pike ali pa da prvič pade ena, drugič pa dve piki. Verjetnost je torej 7/36.

2. 1/4.

3. $f'(x) = (1-x^2)e^{-x^2/2}$, $f''(x) = (x^3-3x)e^{-x^2/2}$.
$Df = \mathbb{R}$, $Zf = [-e^{-1/2}, e^{-1/2}]$. Ničla: $x = 0$. Funkcija nima polov. Asimptota: $y = 0$.
Funkcija narašča na $[-1,1]$, pada pa na $(-\infty,-1]$ in na $[1,\infty)$. Pri $x = -1$ je globalni minimum, pri $x = 1$ pa globalni maksimum. Pri $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ in $x = \sqrt{3}$ so prevoji.
Graf:



4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\cos^2 x + \sin x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 x + \sin x)\cos x\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle = \int_0^1 (1-t^2+t)\mathrm{d}t = \frac{7}{6}$

5. $\dfrac{\mathrm{d}y_H}{y_H} = \dfrac{4x\,\mathrm{d}x}{x^2-1}$, $\quad \ln\dfrac{y_H}{C} = 2\ln(x^2-1)$, $\quad y_H = C(x^2-1)^2$.
$C'(x)\,(x^2-1)^3 = 2x(x^2-1)$, $\quad C(x) = -\dfrac{1}{x^2-1} + D$, $\quad y = 1 - x^2 + D(x^2-1)^2$.
$D = \dfrac{5}{9}$, $\quad y = 1 - x^2 + \dfrac{5}{9}\,(x^2-1)^2$.

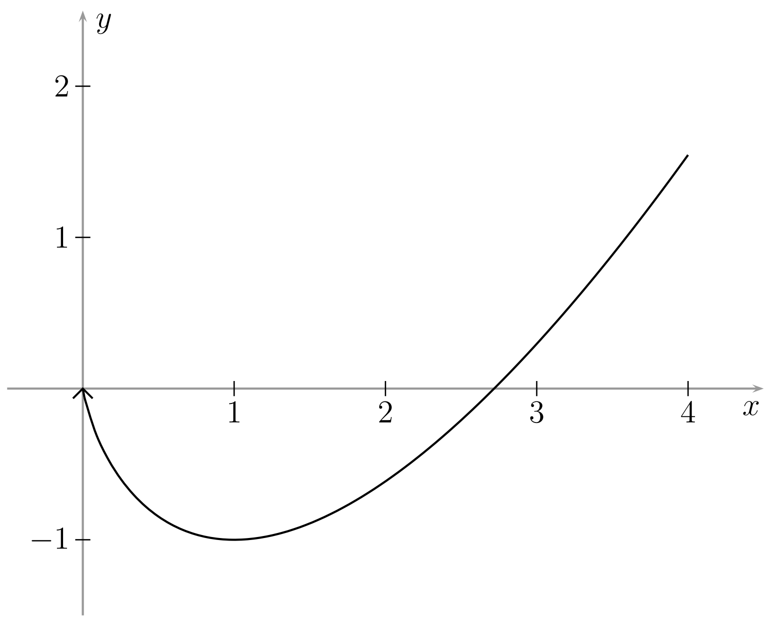
Rešitve izpita iz matematike z dne 6. 9. 2006

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. a) $z = 10$, b) $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

2. $5/2$.

3. $Df = (0, \infty)$, $Zf = [-1, \infty)$. Ničla: $x = e$. Funkcija pada na $(0, 1]$ in narašča na $[1, \infty)$; pri $x = 1$ je globalni minimum. Funkcija je povsod konveksna. Graf:



4. $l = \displaystyle\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{4 + 9x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{18}\int_4^{40} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{t\sqrt{t}}{27}\Big|_4^{40} =$
$= \dfrac{2}{27}\,(10\sqrt{10} - 1)$.

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y} + 2, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2} + 4.$

Stacionarna točka: $T\big(1, -\frac{1}{2}\big)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{1}{y^2}, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2x}{y^3}.$

$H = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -16 \end{vmatrix} = -16$. Ekstremov ni.

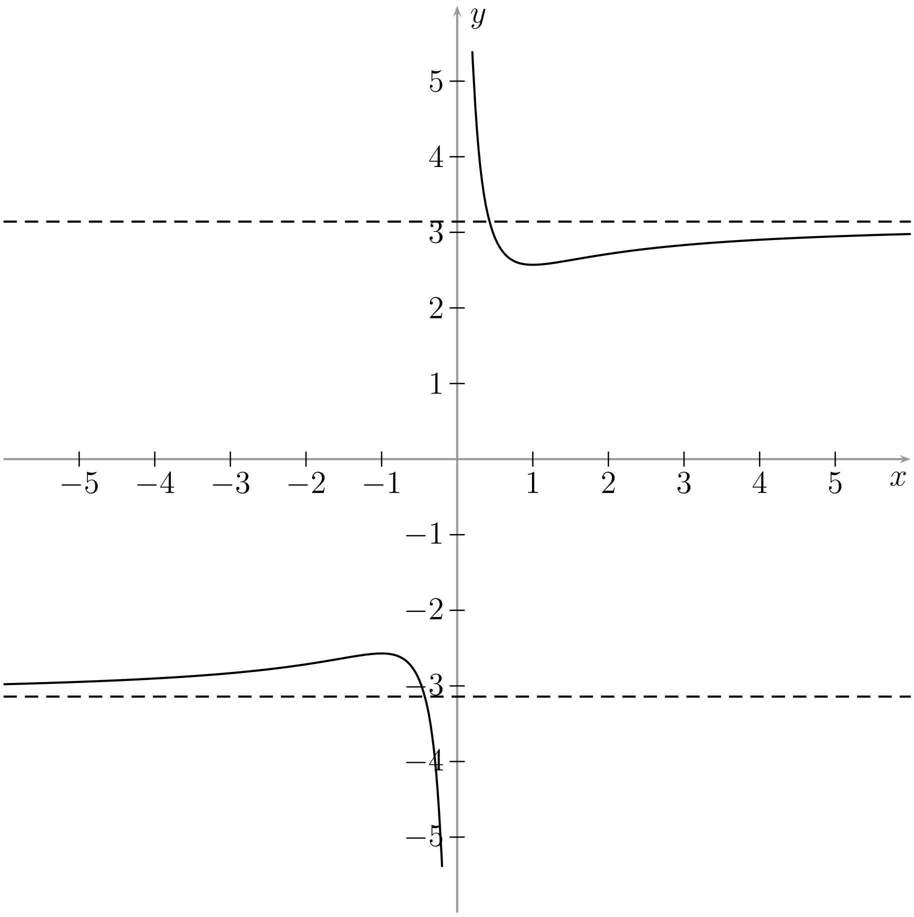
Rešitve izpita iz matematike z dne 6. 2. 2007

BTF, lesarstvo – univerzitetni študij

1. $A(2,0,0)$, ploščina: $\sqrt{6}$.

2. $x \in (-\infty, 0) \cup \left[1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 3\right]$.

3. $Df = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $\quad Zf = \left(-\infty, -1 - \dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[1 + \dfrac{\pi}{2}, \infty\right)$.
Funkcija je brez ničel in ima pol pri $x = 0$. Asimptoti: $y = \pi$, $y = -\pi$. Funkcija narašča na $(-\infty, -1]$ in $[1, \infty)$, pada pa na $[-1, 0)$ in $(0, 1]$. Pri $x = -1$ je lokalni maksimum, pri $x = 1$ pa lokalni minimum. Graf:



4. $V = \pi \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi t^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{3}$.

5. Substitucija $z = y'$ nam da $z' + z = x$.
$z_H = C\,e^{-x}$, $z = x - 1 + D\,e^{-x}$, $y = \dfrac{x^2}{2} - x - D\,e^{-x} + E$.
Ekvivalentno: $y = \dfrac{x^2}{2} - x + E + D\,e^{-x}$. Podobno bi dobili tudi pri variaciji konstant za linearno diferencialno enačbo drugega reda ali z nastavkom.