REŠITVE NOVEJŠIH KOLOKVIJEV IN IZPITOV IZ MATEMATIKE

Farmacija – univerzitetni študij

Zbral: Martin Raič

2008/09

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 28. 11. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina A

1. Označimo:

$$L(n) := 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2\,, \quad D(n) := \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}\,.$$

Velja $L(1) = 1^2+3^2 = 10 = D(1)$. Privzemimo sedaj, da je $L(n) = D(n)$ (indukcijska predpostavka), in dokažimo, da je tudi $L(n+1) = D(n+1)$. Velja:

$$L(n+1) = L(n) + (2n+3)^2\,.$$

Po indukcijski predpostavki je:

$$L(n+1) = D(n) + (2n+3)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + (2n+3)^2 = \\ = \frac{(2n+3)(2n^2+9n+10)}{3}\,.$$

Ker velja tudi:

$$D(n+1) = \frac{(n+2)(2n+3)(2n+5)}{3} = \frac{(2n+3)(2n^2+9n+10)}{3}\,,$$

je zahtevana enakost $L(n+1) = D(n+1)$ dokazana, s tem pa tudi naša trditev.

2. Velja:

$$a_n = \ln\frac{3n-2}{2n+1}$$

in:

$$a_{n+1} - a_n = \ln\frac{(3n+1)(2n+1)}{(2n+3)(3n-2)} = \ln\frac{6n^2+5n+1}{6n^2+5n-6} > 0\,,$$

zato je zaporedje naraščajoče. Nadalje je:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{3-\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \ln\frac{3}{2}\,.$$

Končno je neenačba:

$$\left|a_n - \ln\frac{3}{2}\right| < \varepsilon$$

ekvivalentna sistemu neenačb:

$$\ln\frac{3}{2} - \varepsilon < a_n < \ln\frac{3}{2} + \varepsilon\,.$$

Ko vstavimo ustrezna a_n in ε, dobimo:

$$0 < \ln \frac{3n-2}{2n+1} < \ln \frac{9}{4}$$

in po antilogaritmiranju:

$$1 < \frac{3n-2}{2n+1} < \frac{9}{4}\,.$$

Za $n \in \mathbb{N}$ je $2n+1 > 0$, zato se pri množenju predznak ohrani. Iz prve neenakosti dobimo $n > 3$, iz druge pa $n > -17/6$. Členi se torej od limite razlikujejo za manj kot ε od vključno 4. naprej.

3. Uporabimo kvocientni kriterij. Označimo $a_n := x^n/n^n$ in najprej izračunamo:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^n|x|}{(n+1)^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \frac{|x|}{n+1}\,.$$

Ker je $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = 1/e$, je $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 0$. Vrsta torej konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

4. Če v enačbo vstavimo $x = 2$, dobimo $2y+6 = 0$, torej $y = -3$. Po odvajanju dobimo:

$$(3x^2 - 4x)y^3 + 3(x^3 - 2x^2)y^2y' + 2y' = 0\,,$$

torej:

$$y' = \frac{(4x - 3x^2)y^3}{3(x^3 - 2x^2) + 2}\,.$$

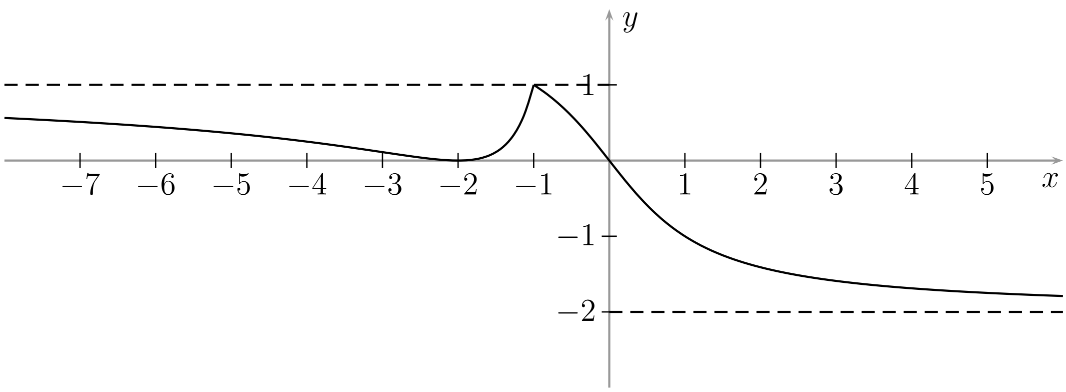
Vstavimo $x = 2$, $y = -3$ in dobimo $y' = 54$.

Enačba tangente: $y = 54x - 111$.

5. Zaradi elementarnosti je funkcija f zvezna povsod razen morda v -1. Iz:

$$f(-1) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} f(x) = 1\,, \qquad \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x) = -\frac{\pi}{4}\,c$$

dobimo $c = -4/\pi$. Končno iz grafa funkcije:



odčitamo $Zf = (-2, 1]$.

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 28. 11. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina B

1. Označimo:

$$L(n) := 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1)\,, \quad D(n) := \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}\,.$$

Velja $L(1) = D(1) = 3$. Privzemimo sedaj, da je $L(n) = D(n)$ (indukcijska predpostavka), in dokažimo, da je tudi $L(n+1) = D(n+1)$. Velja:

$$L(n+1) = L(n) + (2n+1)(2n+3)\,.$$

Po indukcijski predpostavki je:

$$L(n+1) = D(n) + (2n+1)(2n+3) = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3} + (2n+1)(2n+3) = \\ = \frac{4n^3+18n^2+23n+9}{3}\,.$$

Ker velja tudi:

$$D(n+1) = \frac{(n+1)(4n^2+14n+9)}{3} = \frac{4n^3+18n^2+23n+9}{3}\,,$$

je zahtevana enakost $L(n+1) = D(n+1)$ dokazana, s tem pa tudi naša trditev.

2. Velja:

$$a_n = \ln\frac{n+3}{2n-1}$$

in:

$$a_{n+1} - a_n = \ln\frac{(n+4)(2n-1)}{(n+3)(2n-1)} = \ln\frac{2n^2+7n-4}{2n^2+7n+3} < 0\,,$$

zato je zaporedje padajoče. Nadalje je:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{1+\frac{3}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2\,.$$

Končno je neenačba:

$$|a_n + \ln 2| < \varepsilon$$

ekvivalentna sistemu neenačb:

$$-\ln 2 - \varepsilon < a_n < -\ln 2 + \varepsilon\,.$$

Ko vstavimo ustrezna a_n in ε, dobimo:

$$-2\ln 2 < \ln\frac{n+3}{2n-1} < 0$$

in po antilogaritmiranju:

$$\frac{1}{4} < \frac{n+3}{2n-1} < 1\,.$$

Za $n \in \mathbb{N}$ je $2n-1 > 0$, zato se pri množenju predznak ohrani. Iz prve neenakosti dobimo $n > -13/2$, iz druge pa $n > 4$. Členi se torej od limite razlikujejo za manj kot ε od vključno 5. naprej.

3. Uporabimo kvocientni kriterij. Označimo $a_n := n!\,3^n\,x^n/(2n)!$ in najprej izračunamo:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3|x|(n+1)!(2n)!}{n!(2n+2)!} = \frac{3(n+1)|x|}{(2n+1)(2n+2)}\,.$$

Torej je $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = 0$ in vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

4. Če v enačbo vstavimo $x = -2$, dobimo $2y-6 = 0$, torej $y = 3$. Po odvajanju dobimo:

$$(3x^2+4x)y^3 + 3(x^3+2x^2)y^2y' + 2y' = 0\,,$$

torej:

$$y' = -\frac{(3x^2+4x)y^3}{3(x^3+2x^2)+2}\,.$$

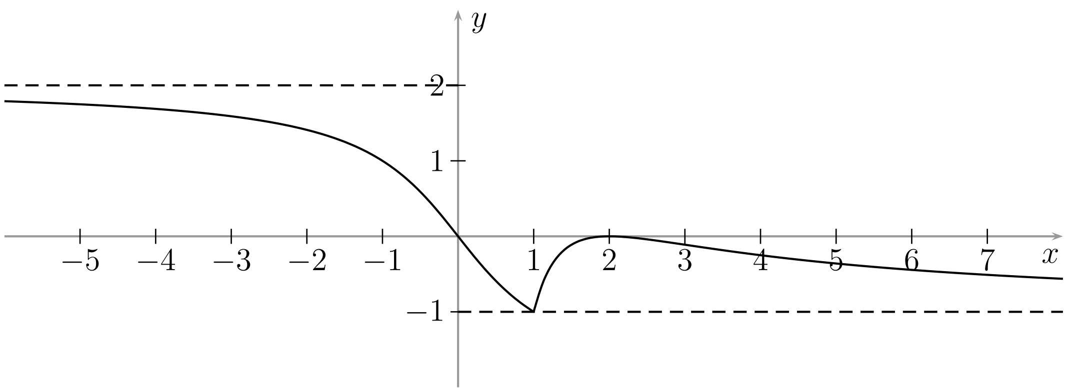
Vstavimo $x = -2$, $y = 3$ in dobimo $y' = -54$.

Enačba tangente: $y = -54x + 105$.

5. Zaradi elementarnosti je funkcija f zvezna povsod razen morda v 1. Iz:

$$f(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \frac{\pi}{4}\,c\,, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>1}} f(x) = -1$$

dobimo $c = -4/\pi$. Končno iz grafa funkcije:



odčitamo $Zf = [-1, 2)$.

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 9. 12. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina C

1. Označimo:

$$L(n) := -1^2 + 2^2 - 3^2 + \cdots + (-1)^n n^2\,, \quad D(n) := \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}\,.$$

Velja $L(1) = D(1) = -1$. Privzemimo sedaj, da je $L(n) = D(n)$ (indukcijska predpostavka), in dokažimo, da je tudi $L(n+1) = D(n+1)$. Velja:

$$L(n+1) = L(n) + (-1)^{n+1}(n+1)^2\,.$$

Po indukcijski predpostavki je:

$$L(n+1) = D(n) + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = \\ = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(n+2)}{2} = D(n+1)$$

in naša trditev je dokazana.

2. Velja:

$$a_n = \ln \frac{2^{n+1}-1}{2^n}$$

in:

$$a_{n+1} - a_n = \ln \frac{2^{n+2}-1}{2\big(2^{n+1}-1\big)} = \ln \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}-2} > 0\,,$$

zato je zaporedje naraščajoče. Nadalje je:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\big(2 - 2^{-n}\big) = \ln 2\,.$$

Končno je neenačba:

$$|a_n - \ln 2| < \varepsilon$$

ekvivalentna sistemu neenačb:

$$\ln 2 - \varepsilon < a_n < \ln 2 + \varepsilon\,.$$

Ko vstavimo ustrezna a_n in ε, dobimo:

$$\ln 2 - \ln\frac{11}{10} < \ln\frac{2^{n+1}-1}{2^n} < \ln 2 + \ln\frac{11}{10}$$

in po antilogaritmiranju:

$$\frac{20}{11} < \frac{2^{n+1}-1}{2^n} < \frac{11}{5}\,.$$

Iz prve neenakosti dobimo $2^{n+1} > 11$, kar v naravnih številih velja za $n \geq 3$. Iz druge neenakosti pa dobimo $2^n > -5$, kar velja za vse n. Členi se torej od limite razlikujejo za manj kot ε od vključno 3. naprej.

3. Uporabimo kvocientni kriterij. Označimo $a_n := n!\, x^n / 2^{n^2}$ in najprej izračunamo:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n^2}(n+1)!\,|x|}{2^{n^2+2n+1}n!} = \frac{(n+1)|x|}{2^{2n+1}}\,.$$

Torej je $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 0$ in vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

4. Če v enačbo vstavimo $x = 3$, dobimo $y + 1 = 0$, torej $y = -1$. Po odvajanju dobimo:

$$(3x^2 - 4x - 3)y^4 + 4(x^3 - 2x^2 - 3x)y^3y' + y' = 0\,,$$

torej:

$$y' = -\frac{(3x^2 - 4x - 3)y^4}{4(x^3 - 2x^2 - 3x) + 1}\,.$$

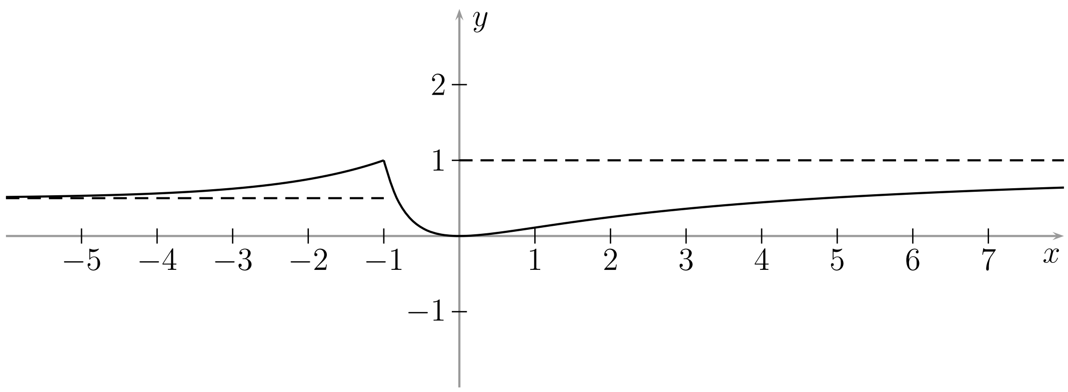
Vstavimo $x = 3$, $y = -1$ in dobimo $y' = -12$.

Enačba tangente: $y = -12x + 35$.

5. Zaradi elementarnosti je funkcija f zvezna povsod razen morda v -1. Iz:

$$f(-1) = \lim_{\substack{x\to-1\\ x<1}} f(x) = \frac{1}{2} + c\,, \qquad \lim_{\substack{x\to0\\ x>1}} f(x) = 1$$

dobimo $c = -1/2$. Končno iz grafa funkcije:



odčitamo $Zf = [0, 1]$.

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 23. 1. 2009

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina A

1. Ker za $-1 < x \leq 1$ velja:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots ,$$

velja tudi:

$$\ln x = \ln(1 + x - 1) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots ,$$

če je $-1 < x - 1 \leq 1$ oz. $0 < x \leq 2$. Iskani polinom je tako enak:

$$T_3(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \,. \qquad (*)$$

Po izračunu dobimo $T_3(0{\cdot}9) = 0{\cdot}105\overline{3}$. Iz formule za oceno ostanka sledi:

$$|R_3(0{\cdot}9)| \leq \frac{0{\cdot}1^4}{4!} \max_{0.9 \leq \xi \leq 1} \left| f^{(4)}(\xi) \right| ,$$

kjer je $f(\xi) = \ln \xi$. Ker je funkcija $|f^{(4)}(\xi)| = 6/\xi^4$ za pozitivne ξ padajoča, velja $\max_{0.9 \leq \xi \leq 1} |f^{(4)}(\xi)| = 6/0{\cdot}9^4$ in zato tudi:

$$|R_3(0{\cdot}9)| \leq \frac{0{\cdot}0001}{4 \cdot 0{\cdot}9^4} = \frac{0{\cdot}0001}{4 \cdot 0{\cdot}6561} \leq \frac{0{\cdot}0001}{4 \cdot 0{\cdot}5} = 0{\cdot}00005 \,.$$

Iz $\ln 0{\cdot}9 = T_3(0{\cdot}9) + R_3(0{\cdot}9)$ ter izračunane vrednosti in ocene sledi:

$$-0{\cdot}10538\overline{3} \leq \ln(0{\cdot}9) \leq -0{\cdot}10528\overline{3} \,.$$

Torej na tri decimalke natančno velja $\ln 0{\cdot}9 \doteq -0{\cdot}105$.

Opomba. Polinom $(*)$ lahko izračunamo tudi kot:

$$T_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\,\frac{(x-1)^2}{2} + f'''(1)\,\frac{(x-1)^3}{6} \,.$$

2. Označimo z $x(t)$ količino izotopa ${}^{14}\mathrm{C}$ v vejici t let po tem, ko so vejico postavili v grob. Diferencialna enačba, ki določa radioaktivni razpad, je podana z $\mathrm{d}x = kx\,\mathrm{d}t$, kjer konstante k še ne poznamo. Ni težko preveriti, da ima enačba splošno rešitev

$x(t) = C\,e^{kt}$. Očitno velja $x(0) = C$, t. j. $x(t) = x(0)\,e^{kt}$. Po $T = 5600$ letih je v vejici le še polovica začetne količine izotopa ^{14}C. Torej velja:

$$\frac{x(0)}{2} = x(T) = x(0)\,e^{kT}\,,$$

iz česar po preureditvi sledi:

$$k = \frac{\ln(1/2)}{T}\,.$$

Zato je:

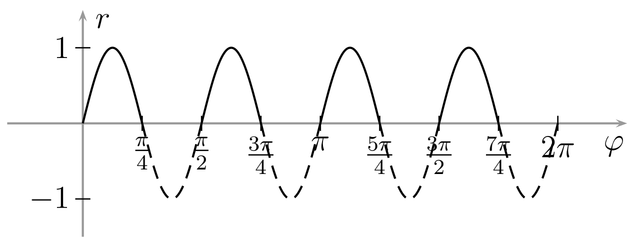
$$x(t) = x(0)\,e^{\frac{t\ln(1/2)}{T}} = x(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}\,.$$

Naj bo s starost groba. Ker je v najdeni vejici le še 55% začetne količine izotopa ^{14}C, mora veljati $0\text{˙}55x(0) = x(s) = x(0)(1/2)^{s/T}$. Če iz enačbe izrazimo s, dobimo:

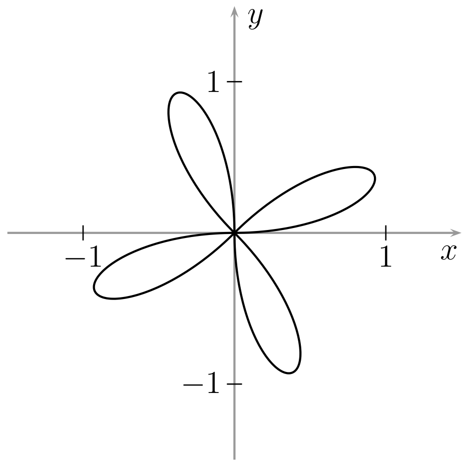
$$s = T\log_{1/2} 0\text{˙}55 = 5600\log_{1/2} 0\text{˙}55 = 5600\cdot\frac{\ln 0\text{˙}55}{\ln 0\text{˙}5} \doteq 4830\,\text{let}\,.$$

3. Volumen stožca je enak $V = \pi r^2 h/3$, kjer je r radij osnovne ploskve, h pa višina stožca. Ker je stranica stožca enaka 1, po Pitagorevem izreku velja $r^2 = 1 - h^2$ oziroma $V(h) = \pi h(1-h^2)/3 = \pi(h-h^3)/3$. Seveda je višina iskanega stožca nenegativna. Prav tako ni večja od stranice $s = 1$. Torej moramo poiskati največjo vrednost funkcije $V(h)$ na intervalu $[0,1]$. Ni se težko prepričati, da velja $V(0) = V(1) = 0$, kar se da sklepati iz same oblike pripadajočih "stožcev". Torej doseže $V(h)$ največjo vrednost v stacionarni točki. Iz enačbe $V'(h) = \pi(1-3h^2)/3 = 0$ dobimo $h = \pm\sqrt{3}/3$. Ker je višina vedno nenegativna, je višina iskanega stožca enaka $h = \sqrt{3}/3$. Iz enačbe $r^2 = 1 - h^2$ izračunamo še $r = \sqrt{6}/3$.

4. Najprej poskusimo narisati sliko krivulje $r = \sin(4\varphi)$. Pomagamo si lahko s pomožnim grafom v polarnem koordinatnem sistemu:



Če se omejimo na interval $[0, 2\pi]$, je r nenegativen le na uniji intervalov $[0,\pi/4] \cup [\pi/2, 3\pi/4] \cup [\pi, 5\pi/4] \cup [3\pi/2, 7\pi/4]$. Torej bo krivulja definirana le pri kotih iz te unije. S pomočjo pomožnega grafa lahko narišemo:



Ker so vsi štirje "listi" enaki, bo ploščina lika, ki ga omejuje krivulja, enaka:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin^2(4\varphi)\, \mathrm{d}\varphi = 2 \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos(8\varphi)}{2}\, \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}\,.$$

5. a) Iz sistema enačb:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^{-x}(1 - x + y^2) = 0\,, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2e^{-x} y = 0 \end{aligned}$$

dobimo edino rešitev $x = 1$ in $y = 0$. Torej je $(1,0)$ edina stacionarna točka in zato tudi edini kandidat za lokalni ekstrem. Nadalje iz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -e^{-x}(2 - x + y^2)\,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2e^{-x}\,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} &= 2e^{-x} y \end{aligned}$$

sledi:

$$H(1,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(1,0)\right)^2 = 2e^{-2} > 0\,.$$

Ker je $(\partial^2 f/\partial x^2)(1,0) = -e^{-1} < 0$, ima funkcija f v točki $(1,0)$ lokalni maksimum.

b) *Prvi način.* Ker je izraz $e^{-x}y^2$ vedno nenegativen, velja $f(x,y) = e^{-x}x - e^{-x}y^2 \leq e^{-x}x$. Če poiščemo največjo vrednost funkcije $g(x) = xe^{-x}$ na celi realni osi, ugotovimo, da je ta vrednost dosežena natanko pri $x = 1$. Izraz $-e^{-x}y^2$ pa je največji natanko tedaj, ko je $y = 0$. Torej zavzame funkcija $f(x,y)$ največjo vrednost (gledano na celi ravnini $\mathbb{R}^2$) natanko v točki $(1,0)$. Ker točka $(1,0)$ leži na našem trikotniku, bo seveda v njej dosežena največja vrednost, četudi se omejimo le na dani trikotnik.

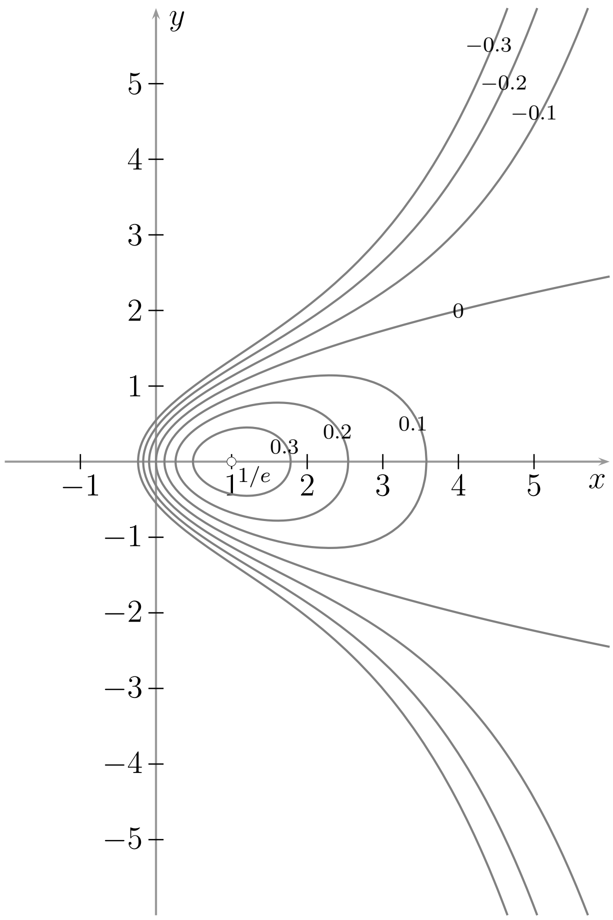
Drugi način. Funkcija f lahko na danem trikotniku zavzame največjo vrednost le v stacionarnih točkah ali pa na robu trikotnika. V točki a) smo izračunali, da ima f edino stacionarno točko (1,0) in le-ta leži v trikotniku. H kandidatom za največjo vrednost takoj dodamo oglišča trikotnika. Rob je določen s tremi premicami: $x = 0$, $y = -1$ in $y = 5 - x$. Velja:

$$
\begin{aligned}
f(0, y) &= -y^2\,, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(0, y) &= -2y = 0 && \text{za } y = 0\,,\\
f(x, -1) &= e^{-x}(x - 1)\,, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, -1) &= e^{-x}(2 - x) = 0 && \text{za } x = 2\,,\\
f(x, 5 - x) &= -e^{-x}(x^2 - 11x + 25)\,,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, -1) &= e^{-x}(x^2 - 13x + 36) = 0 \quad \text{za } x = 4 \text{ in } x = 9.
\end{aligned}
$$

Tako se kandidatom $(0, -1)$, $(6, -1)$, $(0, 5)$ in $(1, 0)$ za globalni maksimum pridružita še $(2, -1)$ in $(4, 1)$ (točka $(9, -4)$ ni v definicijskem območju). Ni težko preveriti, da je največja vrednost $f(1, 0) = 1/e$.

Opomba. Kandidate za ekstreme na robovih lahko poiščemo tudi s pomočjo vezanih ekstremov. Tako npr. za rob $x + y = 5$ nastavimo sistem $\partial F/\partial x = 0$, $\partial F/\partial y = 0$ in $x + y = 5$, kjer je $F(x, y) = f(x, y) - \lambda(x + y - 5)$. Dobimo točki $(4, 1)$ in $(9, -4)$.

c) Najprej opazimo, da za $z > 1/e = f(1, 0)$ ni nivojnic (v točki (1,0) je globalni maksimum). Nivojnice se razlikujejo glede na to, ali je $z = 0$, $z < 0$ oz. $0 < z \leq 1/e$ (pri $z = 1/e$ se nivojnica stisne v točko).


y
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−1
1
2
3
4
5
x
1/e
0.3
0.2
0.1
0
−0.3
−0.2
−0.1

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 23. 1. 2009

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina B

1. Spomnimo se formule:

$$(a+x)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1}x + \binom{m}{2} a^{m-2}x^2 + \cdots\,,$$

ki velja za $a > 0$ in $|x| < a$. Pri $m = 1/2$ in $a = 1$ tako dobimo:

$$\sqrt{x} = (1 + x - 1)^{1/2} = 1 + \binom{1/2}{1}(x-1) + \binom{1/2}{2}(x-1)^2 + \cdots\,,$$

brž ko je $|x - 1| < 1$. Iskani polinom je tako enak:

$$T_2(x) = 1 + \binom{1/2}{1}(x-1) + \binom{1/2}{2}(x-1)^2 = 1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)^2}{8}\,. \qquad (*)$$

Po izračunu dobimo $T_2(1\text{'}1) = 1\text{'}04875$. Iz formule za ostanek sledi:

$$|R_2(1\text{'}1)| \le \frac{0\text{'}1^3}{3!} \max_{1 \le \xi \le 1.1} \left| f^{(3)}(\xi) \right|,$$

kjer je $f(\xi) = \sqrt{\xi}$. Ker je funkcija $f^{(3)}(\xi) = 3/(8\xi^{5/2})$ za pozitivne ξ padajoča, velja $\max_{1 \le \xi \le 1.1} |f^{(3)}(\xi)| = 3/8$ in zato tudi:

$$|R_2(1\text{'}1)| \le \frac{0\text{'}001}{16} = 0\text{'}0000625\,.$$

Iz $\sqrt{1\text{'}1} = T_3(1\text{'}1) + R_3(1\text{'}1)$ ter izračunane vrednosti in ocene sledi:

$$1\text{'}0486875 \le \sqrt{1\text{'}1} \le 1\text{'}0488125\,.$$

Torej na tri decimalke za piko natančno velja $\sqrt{1\text{'}1} \doteq 1\text{'}049$.

Opomba. Polinom $(*)$ lahko izračunamo tudi kot:

$$T_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\,\frac{(x-1)^2}{2}\,.$$

2. Označimo z $x(t)$ količino izotopa ${}^{14}\mathrm{C}$ v vejici t let po tem, ko so vejico postavili v grob. Diferencialna enačba, ki določa radioaktivni razpad, je podana z $\mathrm{d}x = kx\,\mathrm{d}t$, kjer konstante k še ne poznamo. Ni težko preveriti, da ima enačba splošno rešitev

$x(t) = C\,e^{kt}$. Očitno velja $x(0) = C$, t. j. $x(t) = x(0)\,e^{kt}$. Po $T = 5600$ letih je v vejici le še polovica začetne količine izotopa ^{14}C. Torej velja:

$$\frac{x(0)}{2} = x(T) = x(0)\,e^{kT}\,,$$

iz česar po preureditvi sledi:

$$k = \frac{\ln(1/2)}{T}\,.$$

Zato je:

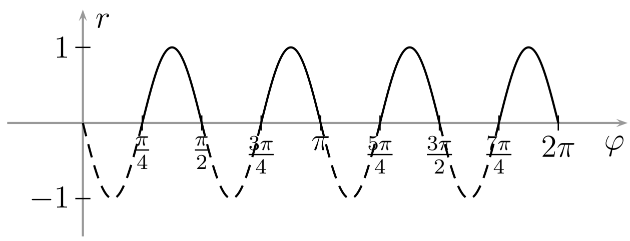
$$x(t) = x(0)\,e^{\frac{t\ln(1/2}{T}} = x(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}\,.$$

Naj bo s starost groba. Ker je v najdeni vejici le še 59% začetne količine izotopa ^{14}C, mora veljati $0\dot{}59x(0) = x(s) = x(0)(1/2)^{\frac{s}{T}}$. Če iz enačbe izrazimo s, dobimo:

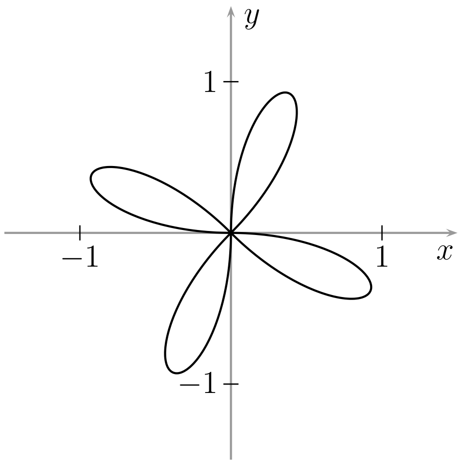
$$s = T\log_{1/2} 0\dot{}59 = 5600\log_{1/2} 0\dot{}59 = 5600\cdot\frac{\ln 0\dot{}59}{\ln 0\dot{}5} \doteq 4263\,\text{let}\,.$$

3. Ploščina pravokotnika je enaka $p = ab$. Ker je radij polkroga enak 1, po Pitagorevem izreku velja $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 = 1$ oziroma $a^2 = 4 - 4b^2$ oziroma $p(b) = b\sqrt{4-4b^2}$. Seveda bo ploščina največja natanko tedaj, ko bo kvadrat ploščine največji. Torej lahko obravnavamo kar funkcijo $P(b) = p(b)^2 = b^2(4-4b^2) = 4b^2 - 4b^4$. Seveda mora biti dolžina stranice b nenegativna. Prav tako ne more biti večja od samega radija polkroga, ki je enak 1. Zato moramo poiskati največjo vrednost funkcije $P(b)$ na intervalu $[0,1]$. Ni se težko prepričati, da velja $P(0) = 0 = P(1)$, kar se da sklepati iz same oblike pripadajočih "pravokotnikov". Zato doseže $P(b)$ največjo vrednost v stacionarni točki. Iz enačbe $P'(b) = 8b - 16b^3 = 0$ dobimo $b_1 = \sqrt{2}/2$, $b_2 = -\sqrt{2}/2$ in $b_3 = 0$. Druga vrednost je negativna, tretja vrednost pa je ničelna. Torej je stranica b iskanega pravokotnika enaka $b = \sqrt{2}/2$. Iz enačbe $a^2 = 4 - 4b^2$ izračunamo še $a = \sqrt{2}$.

4. Najprej poskusimo narisati sliko krivulje $r = -\sin(4\varphi)$. Pomagamo si lahko s pomožnim grafov v polarnem koordinatnem sistemu:



Če se omejimo na interval $[0, 2\pi]$, je r nenegativen le na uniji intervalov $[\pi/4, \pi/2] \cup [3\pi/4, \pi] \cup [5\pi/4, 3\pi/2] \cup [7\pi/4, 2\pi]$. Torej bo krivulja definirana le pri kotih iz te unije. S pomočjo pomožnega grafa lahko narišemo:



Ker so vsi štirje "listi" enaki, bo ploščina lika, ki ga omejuje krivulja, enaka:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} (-\sin(4\varphi))^2 \, \mathrm{d}\varphi = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 - \cos(8\varphi)}{2} \, \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4} \, .$$

5. a) Nalogo poskusimo najprej rešiti na običajni način. Iz sistema enačb:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x}(1 - x + y^4) = 0 \, ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3e^{-x}y^3 = 0$$

dobimo edino rešitev $x = 1$ in $y = 0$. Torej je $(1, 0)$ edina stacionarna točka in zato tudi edini kandidat za lokalni ekstrem. Nadalje iz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x}(2 - x + y^4) \, ,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 e^{-x} \, ,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = -4y^3 e^{-x}$$

sledi:

$$H(1, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(1, 0) \right)^2 = 0 \, .$$

Kot vidimo, z običajnim postopkom ne pridemo do konca. Pomagamo si lahko na vsaj dva načina.

Prvi način. Ker je izraz $y^4 e^{-x}$ vedno nenegativen, velja $f(x, y) = y^4 e^{-x} - xe^{-x} \geq -xe^{-x}$. Če poiščemo najmanjšo vrednost funkcije $g(x) = -xe^{-x}$ na celi realni osi, ugotovimo, da je ta vrednost dosežena natanko pri $x = 1$. Izraz $y^4 e^{-x}$ pa je najmanjši natanko tedaj, ko je $y = 0$. Torej zavzame funkcija $f(x, y)$ najmanjšo vrednost (gledano na celi ravnini $\mathbb{R}^2$) natanko v točki $(1,0)$. To pomeni, da je v točki $(1,0)$ globalni (in seveda tudi lokalni) minimum.

Drugi način. Uvedemo novo neodvisno spremenljivko $t = y^2$ in iščemo lokalne ekstreme funkcije $g(x,t) = f(x,y) = (t^2 - x)e^{-x}$. Iz ugotovitev za funkcijo f sledi, da je dovolj gledati Hessejevo determinanto pri $x = 1$ in $t = 0$. Velja:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^{-x}(2 - x + t^2)\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2e^{-x}\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} &= -2e^{-x}y\,,\end{aligned}$$

torej je:

$$H(1,0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,0)\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(1,0) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial t}(1,0)\right)^2 = 2e^{-2} > 0\,.$$

Ker je $(\partial^2 g/\partial t^2)(1,0) = e^{-1} > 0$, ima funkcija f v točki $(1,0)$ lokalni minimum.

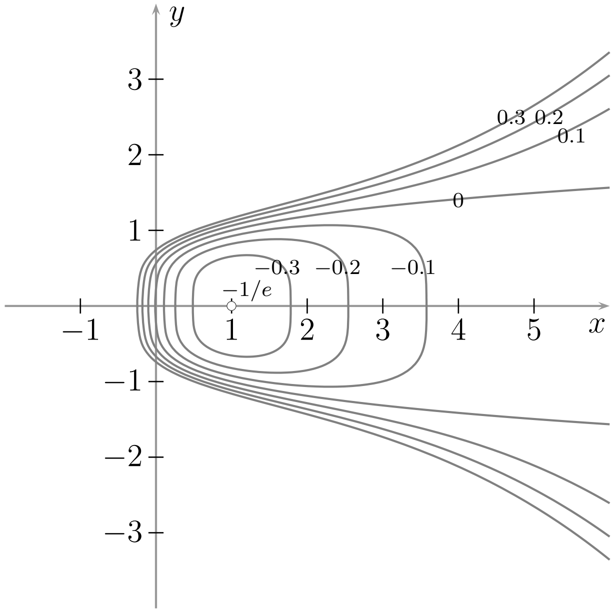
b) *Prvi način.* Če smo pri točki a) opazili, da je v $(1,0)$ globalni minimum, smo že končali, saj dobljena točka leži v našem kvadratu.

Drugi način. Funkcija f lahko na danem kvadratu zavzame najmanjšo vrednost le v stacionarnih točkah ali pa na robu kvadrata. V točki a) smo izračunali, da ima f edino stacionarno točko (1,0). H kandidatom za najmanjšo vrednost takoj dodamo oglišča kvadata. Rob je določen s štirimi premicami: $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$ in $y = 1$. Velja:

$$\begin{aligned}
f(0,y) &= y^4\,, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(0,y) &= 4y^3 = 0 & &\text{za } y = 0\,,\\
f(2,y) &= (y^4-2)e^{-2}\,, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(2,y) &= 4e^{-2}y^3 = 0 & &\text{za } y = 0\,,\\
f(x,-1) &= (1-x)e^{-x}\,, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,-1) &= (x-2)e^{-x} = 0 & &\text{za } x = 2\,,\\
f(x,1) &= (1-x)e^{-x}\,, & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1) &= (x-2)e^{-x} = 0 & &\text{za } x = 2\,,
\end{aligned}$$

Tako se kandidatom $(0,-1)$, $(0,1)$, $(2,-1)$, $(2,1)$ in $(1,0)$ za globalni minimum pridružijo še $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ in $(2,-1)$. Ni težko preveriti, da je najmanjša vrednost $f(1,0) = -1/e$.

c) Najprej opazimo, da za $z < -1/e = f(1,0)$ ni nivojnic (v točki (1,0) je globalni minimum). Nivojnice se razlikujejo glede na to, ali je $z = 0$, $z > 0$ oz. $-1/e < z < 0$ (pri $z = -1/e$ se nivojnica stisne v točko).

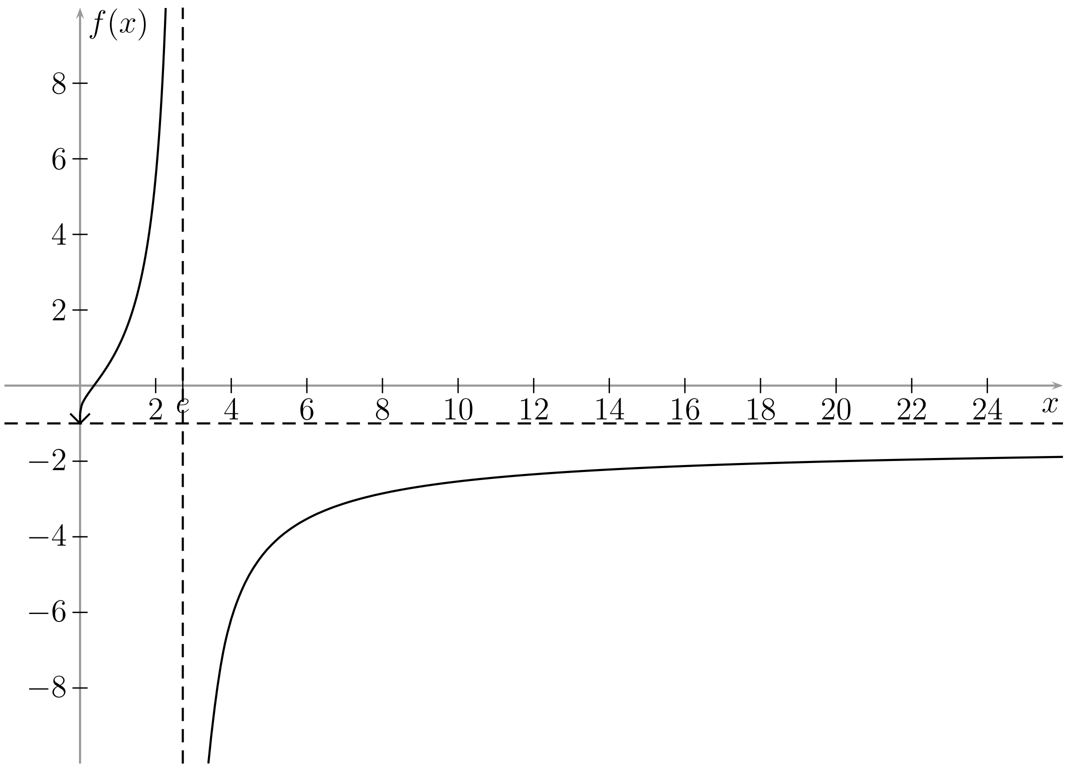


y
x
3
2
1
−1
−2
−3
1
2
3
4
5
0.3
0.2
0.1
0
−0.3
−0.2
−0.1
−1/e

Rešitve izpita iz matematike z dne 18. 2. 2009

Farmacija – univerzitetni študij

1. $Df = (0, e) \cup (e, \infty)$, $Zf = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Ničla: $x = 1/e$, pol: $x = e$, $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = -1$, asimptota: $y = -1$.
$f'(x) = \dfrac{2}{x(1 - \ln x)^2}$.
Funkcija narašča na vseh intervalih, kjer je definirana. Graf:



2. Označimo s T temperaturo čaja, s $T_0 = 20°\mathrm{C}$ temperaturo okolice, s T_1 začetno temperaturo čaja, s T_2 pa temperaturo čaja po času $t_1 = 1$ h. Tedaj temperatura zadošča diferencialni enačbi $\mathrm{d}T = c(T - T_0)\,\mathrm{d}t$, ki ima rešitev $T = T_0 + k\,e^{ct}$. Iz podatkov izračunamo $k = T_1 - T_0$ in $c = \frac{1}{t_1} \ln \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0}$. Sledi:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0) \left(\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0} \right)^{t/t_1} .$$

Če vstavimo $t = 3$ h, dobimo $T = 45{\dot{}}6°\mathrm{C}$.

3. Iz Lagrangeove funkcije za pripadajoči vezani ekstrem:

$$F(x, y, t) = \sin x \sin y - t(x + y - \pi)$$

dobimo enačbe $F_x = \cos x \sin y - t = 0$, $F_y = \cos y \sin x - t = 0$, $F_t = x + y - \pi = 0$. Po nekaj računanja dobimo $\sin(2x - \pi) = 0$. Rešitve so torej $x = (1 + k)\pi/2$ in $y = (1 - k)\pi/2$. Oboje je strogo pozitivno le za $k = 0$, torej ekstrem nastopi pri $x = y = \pi/2$.

Opomba. Nalogo lahko rešimo tudi z iskanjem ekstrema izraza $f(x, \pi - x) = \sin^2 x$.

4. $l = \displaystyle\int_0^\infty \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = \int_0^\infty \sqrt{e^{-6\varphi} + 9e^{-6\varphi}}\, d\varphi = \sqrt{1+9}\int_0^\infty e^{-3\varphi}\, d\varphi =$

$= -\dfrac{\sqrt{10}}{3} e^{-3\varphi}\Big|_0^\infty = \dfrac{\sqrt{10}}{3}.$

5. Iz kvocientnega kriterija dobimo, da vrsta za $x < 0$ konvergira, za $x > 0$ pa divergira. Za $x = 0$ vrsta konvergira po Leibnizevem kriteriju.

Rešitve izpita iz matematike z dne 11. 3. 2009

Farmacija – univerzitetni študij

1. Označimo $D(n) = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$. Očitno je $D(1) = 133$ deljivo s 133. Pri indukcijskem koraku z n na $n+1$ lahko indukcijsko predpostavko formuliramo tako, da je $D(n) = 133k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$, ker je ekvivalentno $11^{n+1} = 133k - 12^{2n-1}$. Velja:

$$\begin{aligned} D(n+1) &= 11^{n+2} + 12^{2n+1} = \\ &= 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} = \\ &= 11(133k - 12^{2n-1}) + 144 \cdot 12^{2n-1} = \\ &= 11 \cdot 133k + 133 \cdot 12^{2n-1}\,, \end{aligned}$$

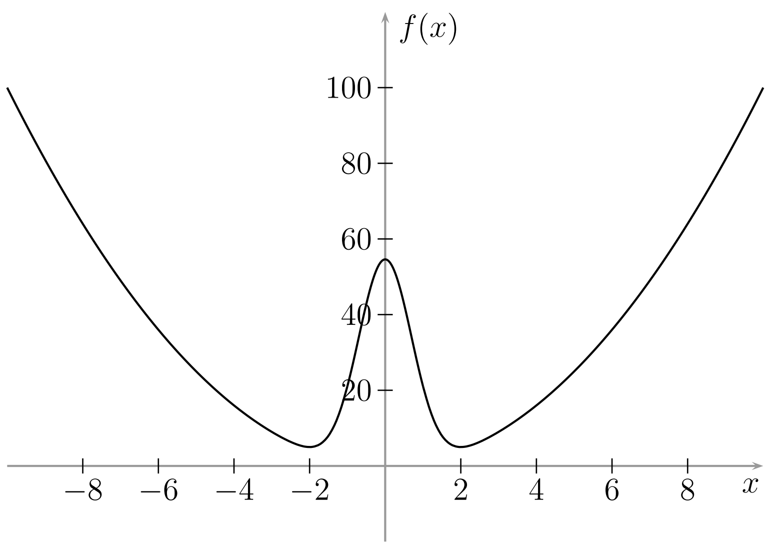
kar je gotovo deljivo s 133. S tem je dokaz zaključen.

2. $\dfrac{y\,\mathrm{d}y}{1+y^2} = \dfrac{4\,\mathrm{d}x}{x^2-4} = \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x, \qquad \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y^2}{C} = \ln\dfrac{x-2}{x+2}.$

Splošna rešitev: $y = \pm\sqrt{C\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^2 - 1}$.

Partikularna rešitev: $y = -\sqrt{2\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^2 - 1}$.

3. Iz $f'(x) = 2x\big(1 - e^{4-x^2}\big)$ dobimo, da funkcija narašča na intervalih $[-2, 0]$ in $[2, \infty)$, pada pa na intervalih $(-\infty, -2]$ in $[0, 2]$. Pri $x = -2$ in $x = 2$ je lokalni minimum, pri $x = 0$ pa lokalni maksimum. Graf:



4. Opazimo, da je $a_n = 1 + q_n + q_n^2 + \cdots + q_n^{n-1}$, kjer je $q_n = -\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$. Torej je:

$$a_n = \frac{1-q_n^n}{1-q_n} = \frac{n+1}{2n+1}\left[1 - \frac{(-1)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right].$$

Stekališči sta dve, in sicer $\dfrac{e \pm 1}{2e}$.

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\,e^{x^2} - 2(x-y), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(x-y).$

Stacionarna točka: $T(0,0)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2+4x^2)e^{x^2} - 2, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2.$

V edini stacionarni točki je $\partial^2 f/\partial x^2 = 0$ in $H = -4$, torej tam ni ekstrema.

Rešitve izpita iz matematike z dne 20. 5. 2009

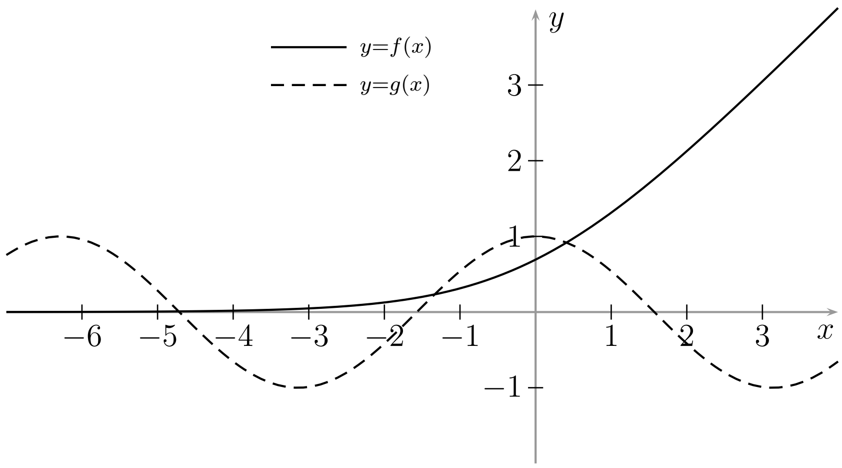
Farmacija – univerzitetni študij

1. Iz:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x}\,, & f(25) &= 5\,, \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,, & f'(25) &= \frac{1}{10}\,, \\
f''(x) &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}}\,, & f''(25) &= -\frac{1}{500}
\end{aligned}
$$

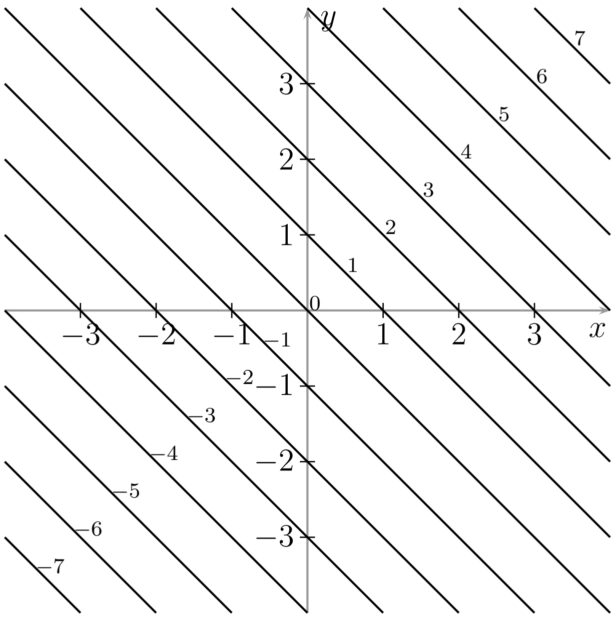
dobimo $T_2(x) = 5 + \dfrac{x-25}{10} - \dfrac{(x-25)^2}{1000}$.
Od tod pride približek $\sqrt{24} \approx T_2(24) = 4\text{˙}899$.
Vse decimalke so točne, natančnejši približek: 4˙8989794855663561964.

2. Grafa:



Ker je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, obstaja tak m, da za vsak $x < m$ velja $-1 < f(x) < 1$. Če je torej k celo število in $x = 2k\pi < m$, je $g(x) = 1$ in zato $g(x) - f(x) > 0$. Za $x = (2k+1)\pi < m$ pa je $g(x) = -1$ in zato $g(x) - f(x) < 0$. Zaradi zveznosti ima potem enačba $f(x) = g(x)$ vsaj eno rešitev na intervalu $\big(2k\pi, (2k+1)\pi\big)$. Ker je takih intervalov na negativni polosi neskončno mnogo, ima enačba neskončno mnogo negativnih rešitev.

3. Nivojnice:



Poiščimo še točko na ravnini, ki je najbližje točki A. Njeni koordinati x in y sta tam, ker funkcija:

$$f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (x+y-2)^2$$

doseže minimum (vzeli smo kvadrat razdalje, da je manj računanja). Iz parcialnih odvodov:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 2y - 8\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 4y - 8$$

dobimo $x = y = 4/3$. Iskana točka je torej $T(4/3, 4/3, 8/3)$.

Najbližjo točko pa lahko poiščemo tudi bolj geometrijsko, kot presečišče ravnine π in premice, ki gre skozi točko A in je pravokotna na ravnino. Ker ima ravnina normalni vektor $\vec{n} = (1, 1, -1)$, ima premica parametrično enačbo $x = y = 2 + t, z = 2 - t$. Ko to vstavimo v enačbo ravnine $z = x + y$, dobimo $t = -2/3$ in od tod $x = y = 4/3, z = 8/3$.

4. Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(1-y)} = \mathrm{d}x\,,$$

kar se zintegrira v:

$$\ln|y| - \ln|y-1| = x + C\,.$$

Iz začetnega pogoja dobimo $C = \ln 2$. Integrirali smo lahko tam, kjer se predznak količin y in $y - 1$ ne spremeni, torej dobimo:

$$\ln\frac{y}{y-1} = x + \ln 2\,, \quad y > 1$$

in od tod:

$$y = \frac{2\,e^x}{2\,e^x - 1}\,.$$

Dobljena funkcija ima pol pri $x = -\ln 2$, kar pomeni, da je rešitev diferencialne enačbe za dani začetni pogoj definirana le za $x > -\ln 2$. Tam sta števec in imenovalec pozitivna, števec pa je večji od imenovalca, torej je res $y > 1$. Velja pa $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$.

5. Velja:

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{1/2} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{1/2} \left(-1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \\
&= -x + \ln|x+1| - \ln|x-1|\Big|_0^{1/2} = \\
&= \ln 3 - \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Rešitve izpita iz matematike z dne 27. 8. 2009

Farmacija – univerzitetni študij

1. Najprej uporabimo kvocientni kriterij. Računajmo:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{4n-3}(x-1)^2 = (x-1)^2 .$$

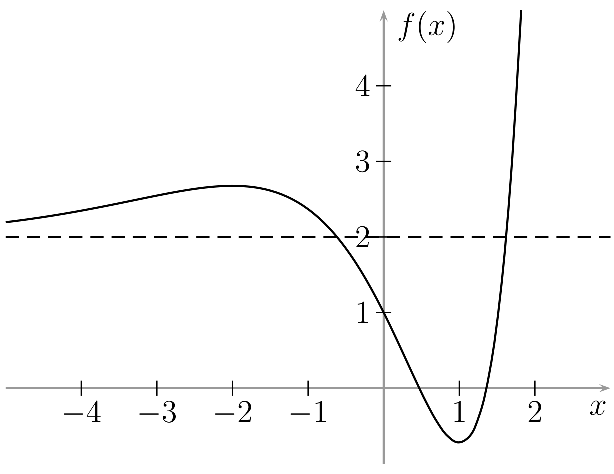
Torej vrsta za $(x-1)^2 < 1$ konvergira, za $(x-1)^2 > 1$ pa divergira. Vrsta torej zagotovo konvergira za $-1 < x-1 < 1$ oziroma za $x \in (0,2)$. Podobno dobimo, da vrsta zagotovo divergira za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. Preostane nam le še primer, ko je $(x-1)^2 = 1$ oziroma $x \in \{0, 2\}$. Za ta primer pa ima vrsta obliko:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}$$

in uporabimo primerjalni kriterij: ker za $n \ge 2$ velja $1/(4n-3) > 1/(4n)$ in ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergira, tudi naša vrsta divergira. Sklep: vrsta konvergira natanko za $x \in (0,2)$.

2. Funkcija je definirana za vse $x \in \mathbb{R}$. Najprej poiščimo stacionarne točke in raziščimo obnašanje v neskončnosti. Iz $f'(x) = (x^2+x-2)e^x = (x+2)(x-1)e^x$ dobimo stacionarni točki $x = -2$ in $x = 1$. Obnašanje v okoliških točkah in v neskončnosti je razvidno iz naslednje tabele, na podlagi katere tudi narišemo graf:

x	$f(x)$	Opomba
$-\infty$	2	
-2	$5e^{-2}+2$	>0, stac. točka
0	1	>0
1	$2-e$	<0, stac. točka
2	e^2+2	>0
∞	∞	



Pri lociranju ničel izkoristimo, da ima zvezna funkcija med točkama, kjer se predznak zamenja, vsaj eno ničlo, in še to, da odvedljiva funkcija med zaporednima stacionarnima točkama le narašča ali pa le pada. Tako dobimo, da ima funkcija dve ničli, in sicer $0 < x_1 < 1$ in $1 < x_2 < 2$.

3. Velja:

$$V = \pi \int_0^1 \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

S substitucijo $t = x^2 + 1$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ dobimo:

$$V = \frac{\pi}{2}\int_1^2 \frac{t-1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_1^2 (t^{-1} - t^{-2})\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\left(\ln t + \frac{1}{t}\right)\Big|_1^2 = \pi\left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}\right).$$

4. Velja:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{(x+y)^2} + e^{x-y}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 - \frac{1}{(x+y)^2} - e^{x-y}\,.$$

Iz $\partial f/\partial x = 0$ dobimo $1/(x+y)^2 = e^{x-y}$. Ko to vstavimo v $\partial f/\partial y = 0$, dobimo $2 - 2\,e^{x-y} = 0$, torej $e^{x-y} = 1$, torej $x - y = 0$, torej $x = y$. Ko to vstavimo v $\partial f/\partial x = 0$, dobimo $(2x)^2 = 1$, od koder dobimo $x = \pm\frac{1}{2}$, torej sta stacionarni točki $T_1\big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big)$ in $T_2\big(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\big)$. Za klasifikacijo izračunajmo še druge parcialne odvode:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{(x+y)^3} + e^{x-y}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{2}{(x+y)^3} - e^{x-y}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{(x+y)^3} + e^{x-y}\,.$$

V $T_1\big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big)$ dobimo $H = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$, torej je tam lokalni minimum.

V $T_1\big(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\big)$ pa dobimo $H = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -8$, torej tam ni ekstrema.

5. Če z v označimo hitrost, s t pa čas, iz zveze med pojemkom in hitrostjo dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2\,, \quad \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -k\,\mathrm{d}t\,, \quad -\frac{1}{v} = c - kt\,.$$

Ko vstavimo $t = 0, v = 20$ in še $t = 5, v = 15$, po nekaj računanja dobimo $c = -1/20$ in $k = 1/300$, torej $v = \dfrac{1}{\frac{1}{20} + \frac{t}{300}}$. Pri $t = 10$ s je torej $v = 12$ km/h.

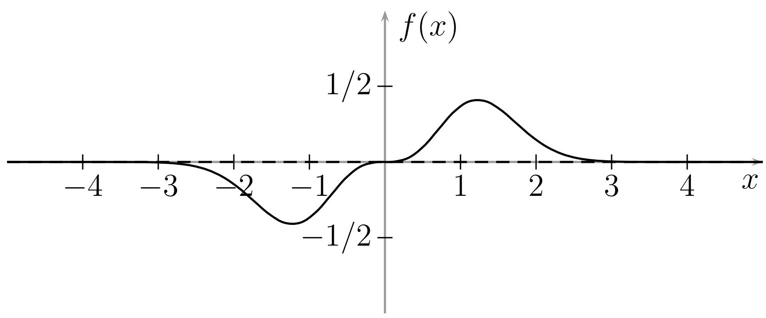
Rešitve izpita iz matematike z dne 17. 9. 2009

Farmacija – univerzitetni študij

1. Po kvocientnem kriteriju ugotovimo, da vrsta konvergira, brž ko je $|\cos x| < 1$, torej takrat, ko **ni** $x = k\pi$ za noben $k \in \mathbb{Z}$. Po Leibnizevem kriteriju vrsta konvergira, če je $\cos x = -1$, kar velja za $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Za $\cos x = 1$, t. j. $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vrsta divergira, saj je tedaj enaka harmonični vrsti.

Sklep: vrsta konvergira natanko tedaj, ko x pripada kateremu od intervalov $\big(2k\pi, (2k+1)\pi\big]$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Iz $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ sledi, da ima funkcija asimptoto $y = 0$.
$f'(x) = (3x^2 - 2x^4)e^{-x^2}$.
Funkcija narašča na $[-\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}]$, pada pa na $(-\infty, -\sqrt{3/2}]$ in na $[\sqrt{3/2}, \infty)$.
Pri $x = -\sqrt{3/2}$ je lokalni minimum, pri $x = \sqrt{3/2}$ pa lokalni maksimum. Graf:



3. $\dfrac{\mathrm{d}y_H}{y_H} = \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x, \quad \ln \dfrac{y_H}{C} = -\ln\cos x, \quad y_H = \dfrac{C}{\cos x}.$

Partikularno rešitev $y = \sin x$ lahko uganemo ali pa uporabimo variacijo konstant, iz katere dobimo $C'(x) = \cos(2x)$, torej $C(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + D = \sin x \cos x + D$.

Splošna rešitev: $y = \sin x + \dfrac{D}{\cos x}$.

Rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju: $D = 1, \quad y = \sin x + \dfrac{1}{\cos x}$.

4. Če našo limito označimo z L, najprej velja:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left[-x\sqrt{n} - n\ln\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Prvi način. Uporabimo Taylorjev razvoj:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left[-x\sqrt{n} + n\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n} + \frac{x^2}{3n^{3/2}} + \cdots\right)\right] = \frac{x^2}{2}.$$

Drugi način. Zapišemo:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{x}{\sqrt{n}} - \ln(1 - \frac{x}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{n}}$$

ter po uporabi L'Hôpitalovega pravila in ureditvi dobimo:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{x^2}{2}\,.$$

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -4x + 4y^3.$

Stacionarne točke: $T_1(0,0)$, $T_2(-1,-1)$ in $T_3(1,1)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -4, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2, \quad H = 144x^2y^2 - 16.$

V T_1 je $H = -16$, zato tam ni ekstrema.

V T_2 in T_3 pa je $H = 128$ in $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12$, torej gre za lokalni minimum.

2007/08

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 16. 1. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina A

1. Označimo:

$$L(n) := 1 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3 + \cdots + n \cdot 4^n \,, \quad D(n) := \frac{(3n-1)4^{n+1}}{9} \,.$$

Ker je $L(1) = 4$ in $D(1) = 16/9$, je očitno $L(1) > D(1)$. Privzemimo sedaj, da je $L(n) > D(n)$ (indukcijska predpostavka), in dokažimo, da je tudi $L(n+1) > D(n+1)$. Velja:

$$L(n+1) = L(n) + (n+1) \cdot 4^{n+1} \,.$$

Po indukcijski predpostavki je:

$$L(n+1) > D(n) + (n+1) \cdot 4^{n+1} = \frac{(12n+8)4^{n+1}}{9} = \frac{(3n+2)4^{n+2}}{9} \,.$$

Ker velja tudi:

$$D(n+1) = \frac{(3n+2)4^{n+2}}{9} \,,$$

je zahtevana neenakost $L(n+1) > D(n+1)$ dokazana, s tem pa tudi naša trditev.

2. Če je $x \le -5$, se naša neenačba prevede na:

$$\begin{aligned} -x^2 - 5x &< 6 \\ (x+2)(x+3) &> 0 \\ x < -3 \text{ ali } x &> -2 \end{aligned}$$

kar nam da delno rešitev $x \in (-\infty, -5]$.

Če pa je $x \ge -5$, se naša neenačba prevede na:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x &< 6 \\ (x+6)(x-1) &< 0 \\ -6 < x &< 1 \end{aligned}$$

kar nam da delno rešitev $x \in [-5, 1)$.

Končna rešitev je torej $x \in (-\infty, 1)$.

3. a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(n - \sqrt{n^2 - 3n + 2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - (n^2 - 3n + 2)}{n + \sqrt{n^2 - 3n + 2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{2}{n}}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}} = \frac{3}{2}.$

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n - 1}{2^n + 5}\right)^{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}}{\left(1 + \frac{5}{2^n}\right)^{2^n}} = \frac{e^{-1}}{e^5} = \frac{1}{e^6}$ ali tudi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-1}{2^n+5}\right)^{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{6}{2^n+5}\right)^{-\frac{2^n+5}{6}}\right]^{-\frac{6\cdot 2^n}{2^n+5}} = \frac{1}{e^6}.$$

4. Označimo $a_n := \dfrac{3^n}{x^n(n^3+n)}$. Najprej uporabimo kvocientni kriterij. Izračunajmo:

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3(n^3+n)}{x\big((n+1)^3+n+1\big)}\right| = \frac{3}{|x|}\,.$$

Od tod sklepamo, da vrsta konvergira za $3/|x| < 1$ oz. za $|x| > 3$, divergira pa za $3/|x| < 1$ oz. za $|x| > 3$. Za $x = \pm 3$ pa je:

$$a_n = \pm\frac{1}{n^3+n}\,, \quad |a_n| < \frac{1}{n^3}\,, \tag{1}$$

torej vrsta konvergira po primerjalnem kriteriju (za $x = -3$ lahko uporabimo tudi Leibnizev kriterij).

Torej vrsta konvergira za $x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$.

5. Zaradi elementarnosti je funkcija f zvezna povsod razen morda v 0. Izračunajmo:

$$f(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 4\,,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{x^2}\,.$$

S substitucijo $t = a^2x^2$ dobimo, da je slednja limita enaka $\lim_{t\to 0} a^2\dfrac{\ln(1+t)}{t} = a^2$, torej je naša funkcija zvezna natanko tedaj, ko je $a^2 = 4$ oziroma $a \in \{-2, 2\}$.

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 16. 1. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina B

1. Označimo:

$$L(n) := 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n\,, \quad D(n) := \frac{(2n-1)3^{n+1}}{4}\,.$$

Ker je $L(1) = 3$ in $D(1) = 9/4$, je očitno $L(1) > D(1)$. Privzemimo sedaj, da je $L(n) > D(n)$ (indukcijska predpostavka), in dokažimo, da je tudi $L(n+1) > D(n+1)$. Velja:

$$L(n+1) = L(n) + (n+1) \cdot 3^{n+1}\,.$$

Po indukcijski predpostavki je:

$$L(n+1) > D(n) + (n+1) \cdot 3^{n+1} = \frac{(6n+3)3^{n+1}}{4} = \frac{(2n+1)3^{n+2}}{4}\,.$$

Ker velja tudi:

$$D(n+1) = \frac{(2n+1)3^{n+2}}{4}\,,$$

je zahtevana neenakost $L(n+1) > D(n+1)$ dokazana, s tem pa tudi naša trditev.

2. Če je $x \le 5$, se naša neenačba prevede na:

$$\begin{aligned} -x^2 + 5x &< 6 \\ (x-2)(x-3) &> 0 \\ x < 2 \text{ ali } x &> 3 \end{aligned}$$

kar nam da delno rešitev $x \in (-\infty, 2) \cup (3, 5]$.

Če pa je $x \ge 5$, se naša neenačba prevede na:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x &< 6 \\ (x-6)(x+1) &< 0 \\ -1 < x &< 6 \end{aligned}$$

kar nam da delno rešitev $x \in [5, 6)$.

Končna rešitev je torej $x \in (-\infty, 2) \cup (3, 6)$.

3. a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n+3} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+3-n^2)}{\sqrt{n^2+4n+3}-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 - \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} = 2.$

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^n - 2}{3^n + 4}\right)^{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{2^n}\right)^{3^n}}{\left(1 + \frac{4}{2^n}\right)^{3^n}} = \frac{e^{-2}}{e^4} = \frac{1}{e^6}$ ali tudi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n-2}{3^n+4}\right)^{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{6}{3^n+4}\right)^{-\frac{3^n+4}{6}}\right]^{-\frac{6\cdot 3^n}{3^n+4}} = \frac{1}{e^6}.$$

4. Označimo $a_n := \dfrac{(-2x)^n}{\sqrt{n}-1}$. Najprej uporabimo kvocientni kriterij. Izračunajmo:

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-2x\left(\sqrt{n}-1\right)}{\sqrt{n+1}-1}\right| = 2|x|\,.$$

Od tod sklepamo, da vrsta konvergira za $2|x| < 1$ oz. za $|x| < 1/2$, divergira pa za $2|x| < 1$ oz. za $|x| > 1/2$. Za $x = 1/2$ dobimo:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-1}\,. \tag{2}$$

Ni težko preveriti, da absolutne vrednosti členov vrste tvorijo padajoče zaporedje z limito nič, torej vrsta konvergira po Leibnizevem kriteriju. Za $x = -1/2$ pa dobimo:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}}\,, \tag{3}$$

torej vrsta po primerjalnem kriteriju divergira.
Torej vrsta konvergira za $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

5. Zaradi elementarnosti je funkcija f zvezna povsod razen morda v 0. Izračunajmo:

$$f(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 9\,,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{x^2}\,.$$

S substitucijo $t = a^2x^2$ dobimo, da je slednja limita enaka $\lim\limits_{t\to 0} a^2\dfrac{\ln(1+t)}{t} = a^2$, torej je naša funkcija zvezna natanko tedaj, ko je $a^2 = 9$ oziroma $a \in \{-3, 3\}$.

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 5. 4. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina A

1. Označimo $y_1 = ax\,e^{2x}$ in $y_2 = 6ax\,e^{2x}$. Krivulji se sekata pri $x = 0$. Iz:

$$y_1' = a(1+2x)e^{2x}\,, \qquad y_2 = 6a(1+2x)e^{2x}$$

izračunamo $k_1 = y_1'(0) = a$ in $k_2 = y_2'(0) = 6a$. Krivulji se sekata pod kotom 45°, če je:

$$\left|\frac{k_2 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| = \operatorname{tg} 45^\circ$$

oziroma $\dfrac{5|a|}{1+6a^2} = 1$, kar je res pri $a = \pm\frac{1}{2}$ in $a = \pm\frac{1}{3}$.

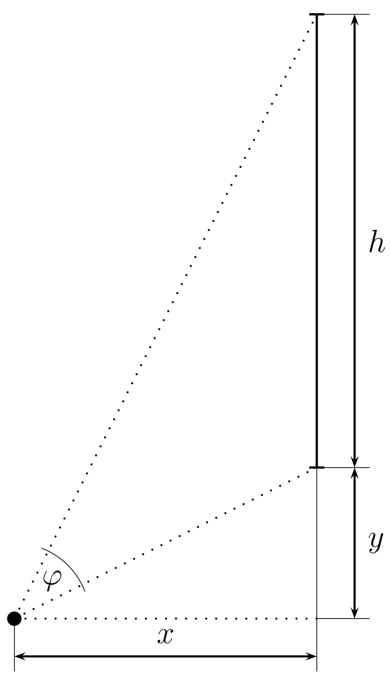
2. Označimo s $h = 16$ m višino plakata, z $y = 2$ m višino spodnjega roba plakata glede na naše oči, z x pa našo oddaljenost od zidu (glej sliko). Kot φ, ki mora biti maksimalen, je ugodno izraziti s funkcijo arkus kotangens:

$$\varphi = \operatorname{arcctg}\frac{x}{y+h} - \operatorname{arcctg}\frac{x}{y}\,.$$

Če odvajamo po x, po nekaj računanja dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{yh(y+h) - hx^2}{(y^2+x^2)\big((y+h)^2+x^2\big)}\,.$$

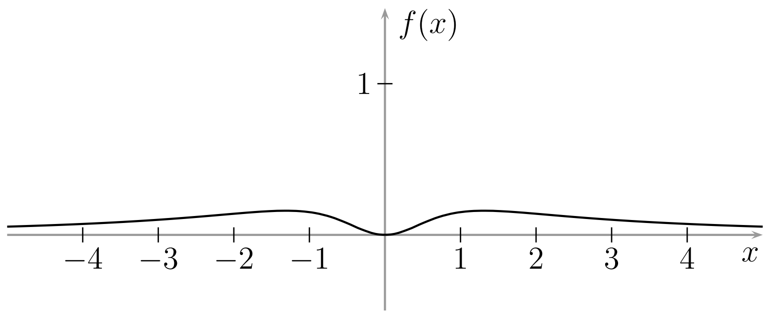
od koder sledi, da je kot maksimalen pri $x = \sqrt{y(y+h)} = 6$ m.



3. $Df = \mathbb{R}$, $\quad Zf = [0, 1/e]$, $\quad$ ničla: $x = 0$.

Iz $f'(x) = \dfrac{2x\big(1 - \ln(1+x^2)\big)}{(1+x^2)^2}$ dobimo stacionarne točke $x = -\sqrt{e-1}$, $x = 0$ in $x = \sqrt{e-1}$.

Funkcija narašča na $\big(-\infty, -\sqrt{e-1}\big]$ in na $\big[0, \sqrt{e-1}\big)$, pada pa na $\big[-\sqrt{e-1}, 0\big]$ in na $\big[\sqrt{e-1}, \infty\big)$. Pri $x = 0$ je globalni minimum, pri $x = \pm\sqrt{e-1}$ pa je globalni maksimum. Graf:



4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(6+x^2)\sin x - 6x}{x^5} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(6+x^2)\left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + \dots\right) - 6x}{x^5} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\dfrac{6}{120} - \dfrac{1}{6}\right)x^5 + \dots}{x^5} = -\dfrac{7}{60}.$

5. a) S substitucijo $t = \dfrac{x-1}{x+1}$, $\mathrm{d}t = \dfrac{2\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2}$, dobimo:

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{t^{3/2}}{3} + C = \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3/2} + C\,.$$

b) Z razčlenitvijo ulomka dobimo:

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \left(1 + \frac{x}{x^2+3} - \frac{2}{x^2+3}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= x + \frac{1}{2}\ln(x^2+3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C\,.$$

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 5. 4. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

Skupina B

1. Označimo $y_1 = ax\,e^{-x}$ in $y_2 = 6ax\,e^{-x}$. Krivulji se sekata pri $x = 0$. Iz:

$$y_1' = a(1-x)e^{-x}\,, \qquad y_2 = 6a(1-x)e^{-x}$$

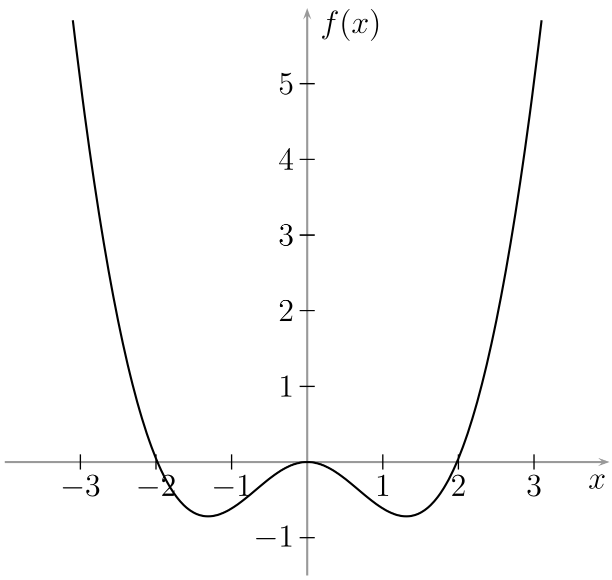
izračunamo $k_1 = y_1'(0) = a$ in $k_2 = y_2'(0) = 6a$. Krivulji se sekata pod kotom 45°, če je:

$$\left|\frac{k_2 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right| = \operatorname{tg} 45^\circ$$

oziroma $\dfrac{5|a|}{1+6a^2} = 1$, kar je res pri $a = \pm\frac{1}{2}$ in $a = \pm\frac{1}{3}$.

2. Če s $h = 12$ m označimo višino plakata, z $y = 4$ m višino spodnjega roba plakata glede na naše oči, z x pa našo oddaljenost od zidu, tako kot pri skupini A dobimo, da je kot maksimalen, če je $x = \sqrt{y(y+h)} = 4$ m.

3. $Df = \mathbb{R}$, $\quad Zf = [2-e, \infty)$.
Iz $f'(x) = 2x\big(\ln(1+x^2) - 1\big)$ dobimo stacionarne točke $x = -\sqrt{e-1}$, $x = 0$ in $x = \sqrt{e-1}$.
Funkcija narašča na $\big[-\sqrt{e-1}, 0\big]$ in na $\big[\sqrt{e-1}, \infty\big)$, pada pa na $\big(-\infty, -\sqrt{e-1}\big]$ in na $\big[0, \sqrt{e-1}\big)$. Pri $x = 0$ je lokalni maksimum, pri $x = \pm\sqrt{e-1}$ pa globalni minimum. Graf:



4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+2x^2)\cos(2x)-1}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(1+2x^2\right)\left(1-2x^2+\dfrac{x^4}{6}-\dots\right)-1}{x^4} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\dfrac{1}{6}-4\right)x^4+\dots}{x^4} = -\dfrac{23}{6}.$

5. a) S substitucijo $t = \dfrac{x+1}{x-1}$, $\mathrm{d}t = -\dfrac{2\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$, dobimo:

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{t^{3/2}}{3} + C = -\frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3/2} + C\,.$$

b) Z razčlenitvijo ulomka dobimo:

$$\int \frac{x^2-x-1}{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \left(1 - \frac{x}{x^2+2} - \frac{3}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= x + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{3}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C\,.$$

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 24. 5. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

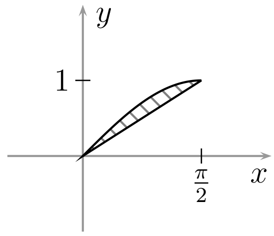
Skupina A

1. $\dot{x} = 4\,e^t, \quad \dot{y} = 2 - 2\,e^{2t},$

$$l = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{4 + 8\,e^{2t} + 4\,e^{4t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(2 + 2\,e^{2t}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \left(2t + e^{2t}\right)\Big|_0^1 = e^2 + 1.$$

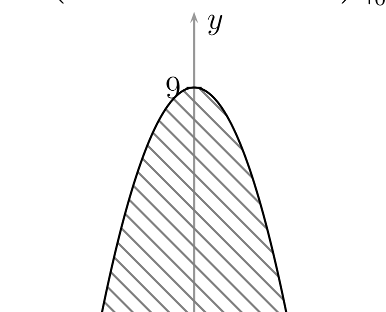
2. Skica območja, ki se zavrti okoli osi x:



$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 x - \frac{4}{\pi^2}\,x^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi\big(1-\cos(2x)\big)}{2} - \frac{4x^2}{\pi}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{4x^3}{3\pi}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

3.



Oglišči: $f(-3,0) = f(3,0) = 0$.
Rob $y = 0,\ -3 < x < 3$: $f(x,0) = 0$.
Rob $y = 9 - x^2,\ -3 < x < 3$:
$f(x, 9-x^2) = 2(9-x^2)^2$.
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, 9-x^2) = 4x(x^2-9)$, v notranjosti roba je točka $(0,9)$ in $f(0,9) = 162$.
Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2xy, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - x^2 + 9,$
od koder dobimo točke $(0,-9/2)$, $(-3,0)$ in $(3,0)$, ki niso v notranjosti.
Torej je $\min\limits_D f = f(x,0) = 0$ (za $-3 \le x \le 3$) in $\max\limits_D f = f(0,9) = 162$.

4. Označimo s T temperaturo vode ob danem času t, s $T_1 = 10°\mathrm{C}$ začetno temperaturo vode v posodi, s $T_2 = 30°\mathrm{C}$ temperaturo v sobi, s $T_3 = 20°\mathrm{C}$ pa temperaturo vode ob času $t_3 = 1\,\mathrm{h}$. Ker je toplotni tok sorazmeren z razliko temperatur, velja:

$$\mathrm{d}T = -k(T - T_2)\,\mathrm{d}t\,.$$

Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T - T_2} = -k\,\mathrm{d}t\,,$$

kar se zintegrira v:

$$\ln\frac{T - T_2}{C} = -kt$$

oziroma:

$$T = T_2 - C\,e^{-kt}\,.$$

Ker je temperatura ob času $t = 0$ enaka T_1, je $C = T_2 - T_1$. Odvisnost temperature od časa je tako določena s formulo:

$$T = T_2 - (T_2 - T_1)\,e^{-kt}\,.$$

Ker pri $t = T_3$ velja $T = T_3$, velja:

$$e^{-kt_3} = \frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_1}\,,$$

torej je:

$$T = T_2 - (T_2 - T_1)\left(e^{-kt_3}\right)^{t/t_3} = T_2 - (T_2 - T_1)\left(\frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_1}\right)^{t/t_3}\,.$$

Ko vstavimo konkretne številke iz naloge, dobimo, da temperatura čez dve uri znaša $25°\mathrm{C}$.

5. Iz karakteristične enačbe $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ z rešitvama $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -3$ dobimo:

$$y_H = C_1\,e^x + C_2\,e^{-3x}\,.$$

Desna stran enačbe izpolnjuje pogoje za nastavek z nedoločenimi koeficienti, a se prekriva z y_H, zato je treba nastaviti:

$$y_P = Ax\,e^x\,.$$

Ker je $y_P'' + 2y_P' - 3y_P = 4A\,e^x$, je $A = 1/4$. Splošna rešitev naše enačbe je tako:

$$y = \left(\frac{x}{4} + C_1\right)e^x + C_2\,e^{-3x}\,.$$

Rešitve kolokvija iz matematike z dne 24. 5. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

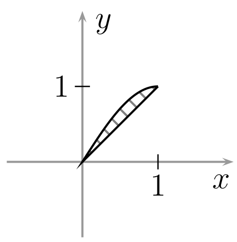
Skupina B

1. $\dot{x} = -2\,e^{t/2}, \quad \dot{y} = 1 - e^{-t},$

$$l = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1 + 2\,e^{-t} + e^{-2t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(1 + e^{-t}\big)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \big(t - e^{-t}\big)\Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{e}.$$

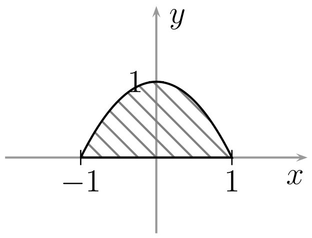
2. Skica območja, ki se zavrti okoli osi x:



$$V = \pi \int_0^1 \left(\sin^2 \frac{\pi x}{2} - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 \left(\frac{1 - \cos(\pi x)}{2} x^2\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\sin(\pi x)}{2} - \frac{\pi x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

3.



Oglišči: $f(-1,0) = f(1,0) = 0$.
Rob $y = 0$, $-1 < x < 1$: $f(x,0) = 0$.
Rob $y = 1 - x^2$, $-1 < x < 1$:
$f(x, 1 - x^2) = 2(x^2 - x^4)$.
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, 1 - x^2) = 4x - 8x^3$, v notranjosti roba so točke $\big(-\sqrt{2}/2, 1/2\big)$, $(0,1)$ in $\big(\sqrt{2}/2, 1/2\big)$. Velja:

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f(0,1) = 0\,.$$

Notranjost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2y + 1,$ od koder dobimo točko $(0, 1/2)$. Velja $f(0, 1/2) = 1/4$.
Torej je $\min\limits_D f = f(x,0) = 0$ (za $-1 \le x \le 1$) in $\max\limits_D f = f\big(-\sqrt{2}/2, 1/2\big) = f\big(\sqrt{2}/2, 1/2\big) = 1/2$.

4. Označimo s T temperaturo vode ob danem času t, s $T_1 = 0°\mathrm{C}$ začetno temperaturo vode v posodi, s $T_2 = 25°\mathrm{C}$ temperaturo v sobi, s $T_3 = 15°\mathrm{C}$ pa temperaturo vode ob času $t_3 = 1\,\mathrm{h}$. Ker je toplotni tok sorazmeren z razliko temperatur, velja:

$$\mathrm{d}T = -k(T - T_2)\,\mathrm{d}t\,.$$

Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T - T_2} = -k\,\mathrm{d}t\,,$$

kar se zintegrira v:

$$\ln\frac{T - T_2}{C} = -kt$$

oziroma:

$$T = T_2 - C\,e^{-kt}\,.$$

Ker je temperatura ob času $t = 0$ enaka T_1, je $C = T_2 - T_1$. Odvisnost temperature od časa je tako določena s formulo:

$$T = T_2 - (T_2 - T_1)\,e^{-kt}\,.$$

Ker pri $t = T_3$ velja $T = T_3$, velja:

$$e^{-kt_3} = \frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_1}\,,$$

torej je:

$$T = T_2 - (T_2 - T_1)\left(e^{-kt_3}\right)^{t/t_3} = T_2 - (T_2 - T_1)\left(\frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_1}\right)^{t/t_3}\,.$$

Ko vstavimo konkretne številke iz naloge, dobimo, da temperatura čez dve uri znaša 21°C.

5. Iz karakteristične enačbe $\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ z rešitvama $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ dobimo:

$$y_H = e^{x/2}\left(C_1 \cos\frac{x\sqrt{7}}{2} + C_2 \cos\frac{x\sqrt{7}}{2}\right)\,.$$

Desna stran enačbe izpolnjuje pogoje za nastavek z nedoločenimi koeficienti, zato nastavimo:

$$y_P = A\,e^{-x}\,.$$

Ker je $y_P'' - y_P' + 2y_P = 4A\,e^{-x}$, je $A = 1/4$. Splošna rešitev naše enačbe je tako:

$$y = \frac{e^{-x}}{4} + e^{x/2}\left(C_1 \cos\frac{x\sqrt{7}}{2} + C_2 \cos\frac{x\sqrt{7}}{2}\right)\,.$$

Rešitve izpita iz matematike z dne 9. 6. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

1. a) Velja:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+n^2}-\sqrt{n^3+n}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^3+n^2}-\sqrt{n^3+n}\right)\left(\sqrt{n^3+n^2}+\sqrt{n^3+n}\right)}{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n^3+n^2}+\sqrt{n^3+n}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n^3+n^2}+\sqrt{n^3+n}\right)}=$$

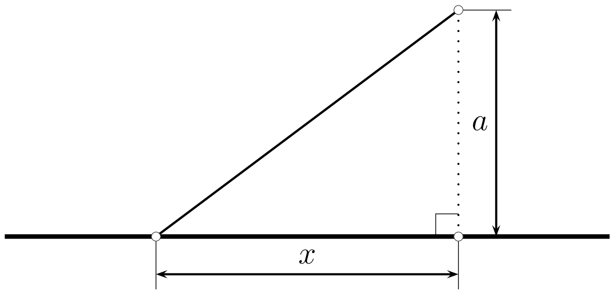
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\,.$$

b) Z uporabo L'Hôpitalovega pravila dobimo:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x)-x}=-\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{\frac{1}{1+x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{1+x}{\cos x}\,\frac{\sin x}{x}=1\,.$$

2. Označimo z a oddaljenost naselja od avtoceste, z x pa pomaknjenost priključka proti zahodu, gledano od točke na avtocesti, ki je najbližje naselju:



Nadalje naj bo v_1 največja dovoljena hitrost na lokalni cesti, v_2 pa na avtocesti. Tedaj je poraba časa, ki ga porabimo za vožnjo v kraj na avtocesti, ki je od točke, ki je najbližje naselju, pomaknjen za dovolj veliko razdaljo b proti zahodu, enaka:

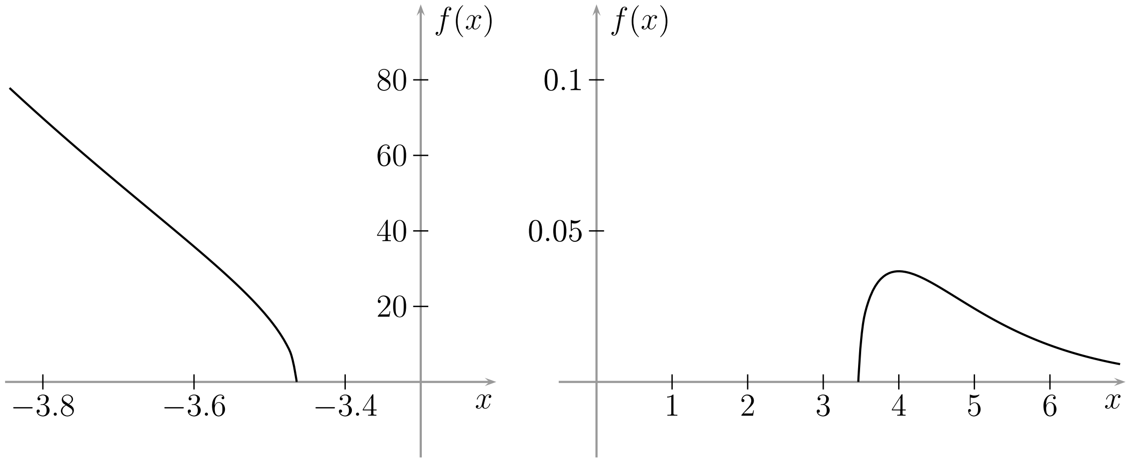
$$\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{b-x}{v_2}\,,$$

kar bo minimalno, če bo:

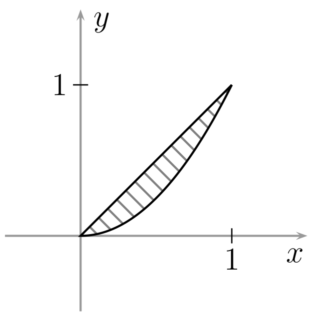
$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{v_2} = 0$$

oziroma $x = \dfrac{v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}\, a = 4\,\mathrm{km}$.

3. $Df = \left(-\infty, -\sqrt{12}\right] \cup \left[\sqrt{12}, \infty\right)$, $\quad Zf = [0,\infty)$. Ničli: $x = \pm\sqrt{12}$,
Obnašanje na robu definicijskega območja:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\quad f\left(-\sqrt{12}\right) = f\left(\sqrt{12}\right) = 0$, $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
$f'(x) = -\dfrac{(x+3)(x-4)e^{-x}}{\sqrt{x^2-12}}$.
Funkcija narašča na $\left[\sqrt{12}, 4\right]$, pada pa na $\left(-\infty, -\sqrt{12}\right]$ in $[4,\infty)$. Pri $x = 4$ je lokalni maksimum. Graf (v dveh delih):



4. Skica definicijskega območja, ki ga označimo z D:



Oglišči: $f(0,0) = f(1,1) = 0$.
Rob $y = x$, $0 < x < 1$: $f(x,x) = 0$.
Rob $y = x^2$, $0 < x < 1$: $f(x,x^2) = (x^2 - x^3)(x - x^2) = x^3(x-1)^2$,
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,x^2) = x^2(x-1)(5x-3)$, v notranjosti roba je le točka $(3/5, 9/25)$ in
$f(3/5, 9/25) = 3^3 \cdot 2^2/5^5 = 108/3125$.

Notrandnost: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (2x - 3x^2)(x - y) + x^2 - x^3, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^3 - x^2,$ od koder dobimo točki $(0,0)$ in $(1,1)$, ki nista v notranjosti.
Torej je $\min\limits_D f = f(0,0) = f(1,1) = 0$ in $\max\limits_D f = f(3/5, 9/25) = 108/3125 =$
$= 0\text{˙}03456.$

5. $\dfrac{\mathrm{d}y_H}{y_H} + x\,\mathrm{d}x = 0, \quad \ln\dfrac{y_H}{C} + \dfrac{x^2}{2} = 0, \quad y_H = C\,e^{-x^2/2}.$
$C'(x)\,e^{-x^2/2} = (x+1)e^x, \quad C'(x) = (x+1)e^{x+x^2/2}, \quad C(x) = e^{x+x^2/2} + D,$
Splošna rešitev: $y = e^x + D\,e^{-x^2/2}.$
Partikularna rešitev: $D = -1, \quad y = e^x - e^{-x^2/2}.$

Rešitve izpita iz matematike z dne 23. 6. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

1. Označimo $L(n) := 4^n + 9^{n+1}$. Velja $L(1) = 85$, kar je deljivo s 5.
Privzemimo sedaj, da je $L(n)$ deljivo s 5. Velja:

$$L(n+1) = 4^{n+1} + 9^{n+2} = 4 \cdot 4^n + 9 \cdot 9^{n+1} = 4\,L(n) + 5 \cdot 9^{n+1}\,,$$

kar je po indukcijski predpostavki prav tako deljivo s 5. Trditev je tako dokazana.

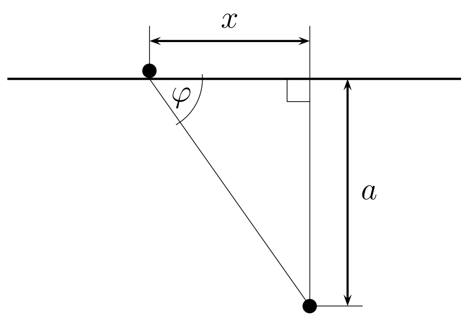
2. Naj bo F električna sila, ki deluje na kroglico. Velja $F = c/r^2$, kjer je r oddaljenost kroglice od naboja. Nadalje je $r = a/\sin\varphi$. Vodoravna komponenta električne sile pa je enaka:

$$F_{\mathrm{v}} = F\cos\varphi = c\sin^2\varphi\cos\varphi\,.$$

Iz:

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{v}}}{\mathrm{d}\varphi} = c(2\sin\varphi\cos^2\varphi - \sin^3\varphi) = c\sin\varphi\cos^2\varphi(2 - \mathrm{tg}^2\,\varphi)$$

izračunamo, da je sila največja takrat, ko je $\varphi = \mathrm{arctg}\sqrt{2}$.

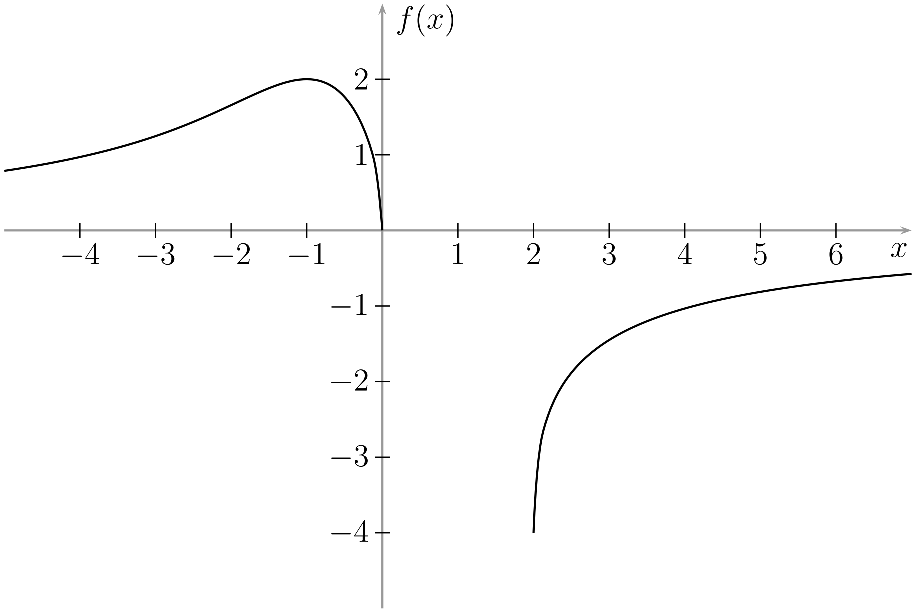


Če z x označimo razdaljo kroglice od točke na podlagi, ki je najbližje naboju (glej sliko, ki prikazuje pravo stanje), torej velja $x = a\,\mathrm{ctg}\,\varphi = a/\sqrt{2}$.

3. $Df = \big(-\infty, 0\big] \cup \big[2, \infty\big)$, $\quad Zf = [-4, 0) \cup (0, 2]$, $\quad$ ničla: $x = 0$.
Obnašanje na robu definicijskega območja:
Pri $x = 0$ in $x = 2$ je funkcija zvezna s tiste strani, kjer je definirana. Velja $f(0) = 0$ in $f(2) = -4$. Nadalje je:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\big(\sqrt{x^4 - 8x} - x^2\big)\big(\sqrt{x^4 - 8x} + x^2\big)}{\sqrt{x^4 - 8x} + x^2} = \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-8x}{\sqrt{x^4 - 8x} + x^2} = \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-8}{x\Big(\sqrt{1 - \frac{8}{x^3}} + 1\Big)} = \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Iz $f'(x) = \dfrac{2x^3 - 4}{\sqrt{x^4 - 8x}} - 2x$ dobimo stacionarno točko $x = -1$.
Funkcija narašča na $(-\infty, -1]$ in $[2, \infty)$, pada pa na $[-1, 0]$. Pri $x = -1$ je lokalni maksimum. Graf:



4. Velja:

$$V = \pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \, \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x \, \mathrm{d}x \,.$$

S substitucijo $t = \operatorname{tg}^2 x$ dobimo:

$$V = 2\pi \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = 2\pi \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) \mathrm{d}t = 2\pi (t - \operatorname{arctg} t) \Big|_0^1 = 2\pi - \frac{\pi^2}{4} \doteq 1{\cdot}35 \,.$$

5. *Prvi način*: iz karakteristične enačbe $\lambda^2 + \lambda = 0$ z rešitvama $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = -1$ dobimo:

$$y_H = C_1 + C_2 \, e^{-x} \,.$$

Desna stran enačbe izpolnjuje pogoje za nastavek z nedoločenimi koeficienti. V nastavku:

$$y_P = A + Bx + C \, e^x$$

se prvi del prekriva z rešitvijo homogenega dela enačbe, zato moramo nastaviti:

$$y_P = Ax + Bx^2 + C \, e^x \,.$$

Ker je $y_P'' + y_P' = A + 2B + 2Bx + 2C\,e^x$, je $A = -1$, $B = 1/2$ in $C = 1/2$. Splošna rešitev naše enačbe je tako:

$$y = \frac{x^2}{2} - x + \frac{e^x}{2} + C_1 + C_2\,e^{-x}\,.$$

Drugi način: s substitucijo $z = y'$ se enačba prevede na $z' + z = x + e^x$. Računamo:
$\dfrac{\mathrm{d}z_H}{z_H} + \mathrm{d}x = 0, \quad \ln\dfrac{z_H}{C} + 1 = 0, \quad y_H = C\,e^{-x}.$
$C'(x)\,e^{-x} = x + e^x, \quad C'(x) = xe^x + e^{2x}, \quad C(x) = (x-1)e^x + \dfrac{e^{2x}}{2} + D,$
$z = x - 1 + \dfrac{e^x}{2} + D\,e^{-x}, \quad y = \dfrac{x^2}{2} - x + \dfrac{e^x}{2} - D\,e^{-x} + E.$

Rešitve izpita iz matematike z dne 1. 9. 2008

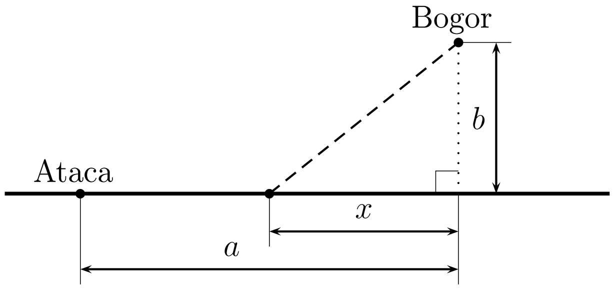
Farmacija – univerzitetni študij

1. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4^n+1}-\sqrt{2^{2n}+2^{n-1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(4^n+1\right)-\left(2^{2n}+2^{n-1}\right)}{\sqrt{4^n+1}+\sqrt{2^{2n}+2^{n-1}}}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{-n}-\frac{1}{2}}{\sqrt{1+4^{-n}}+\sqrt{1+2^{-n-1}}}=-\dfrac{1}{4}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-2e^x+1}{\sin^2(3x)}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin(3x)}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{3\cos(3x)}\right)^2=\dfrac{1}{9}.$

2. Označimo z u porabo goriva na asfaltirani cesti, z v pa porabo goriva na brezpotju. S črkami a, b in x pa označimo razdalje, kot kaže slika:



Če z y označimo porabo goriva na poti od Atace do Bogorja, velja:

$$y=u(a-x)+v\sqrt{b^2+x^2}\,.$$

Enačba $y'=-u+\dfrac{vx}{\sqrt{b^2+x^2}}=0$ ima pri $0<u<v$ *edino* rešitev $x=\dfrac{bu}{\sqrt{v^2-u^2}}$. Ko vstavimo ustrezne vrednosti, dobimo $x=2{\cdot}25\,\mathrm{km}$. Z drugimi besedami, z asfalta moramo zaviti $7{\cdot}75\,\mathrm{km}$ vzhodno od Atace.

3. $V=\pi\displaystyle\int_0^1 x^2(\ln x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\,x^3(\ln x)^2\Big|_0^1-\frac{2\pi}{3}\int_0^1 x^2\ln x\,\mathrm{d}x=$

$=-\dfrac{2\pi}{9}\,x^3\ln x\Big|_0^1+\dfrac{2\pi}{9}\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{27}.$

4. Iz:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(2x+x^2-3y^2)e^x\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-6y\,e^x$$

dobimo stacionarni točki $A(0,0)$ in $B(-2,0)$. Nadalje velja:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=(2+4x+x^2-3y^2)e^x\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=-6y\,e^x\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6\,e^x\,.$$

Ker v točki A velja $H=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2=-12$, tam ni ekstrema. V točki B pa je $H=12e^{-4}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2e^{-2}$, zato je tam maksimum.

5. Iz karakteristične enačbe $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ z rešitvama $\lambda_1 = -3$ in $\lambda_2 = 1$ dobimo:

$$y_H = C_1\, e^{-3x} + C_2\, e^x\,.$$

Desna stran enačbe izpolnjuje pogoje za nastavek z nedoločenimi koeficienti, toda člen z e^x se prekriva z y_H, zato je treba nastaviti:

$$y_P = Ax + B + Cx\, e^x\,.$$

Ker je $y_P'' + 2y_P' - 3y_P = -3Ax + 2A - 3B + 4C\, e^x$, je $A = -1$, $B = -1$ in $C = -1/4$. Splošna rešitev naše enačbe je tako:

$$y = -x - 1 - \frac{x}{4}\, e^x + C_1\, e^{-3x} + C_2\, e^x\,.$$

Rešitve izpita iz matematike z dne 15. 9. 2008

Farmacija – univerzitetni študij

1. Če je $x \leq -1$, se naša neenačba prevede na

$$\begin{aligned} x^2 + x &> 0 \\ x(x+1) &> 0 \\ x < -1 \text{ ali } x &> 0\,, \end{aligned}$$

kar nam skupaj s pogojem da delno rešitev $x \in (-\infty, -1)$.
Če je $-1 \leq x \leq 1$, se neenačba prevede na

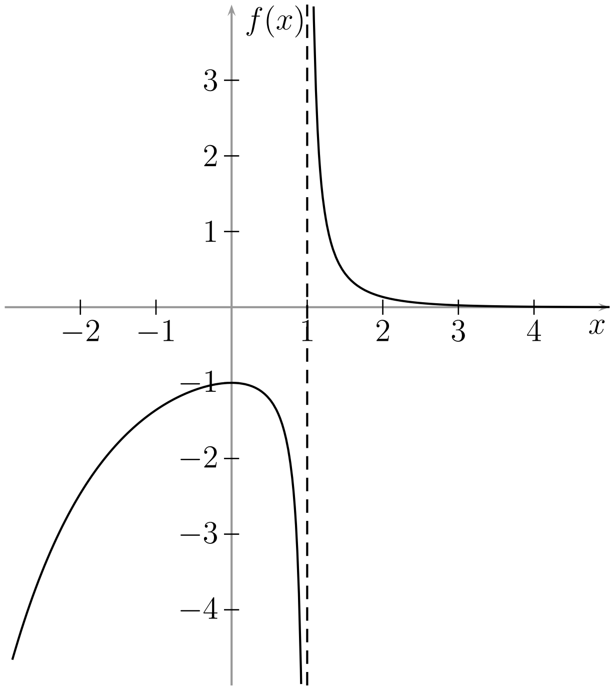
$$\begin{aligned} -x^2 - x &> 0 \\ x(x+1) &< 0 \\ -1 < x &< 0\,, \end{aligned}$$

kar nam skupaj s pogojem da delno rešitev $x \in (-1, 0)$.
Če pa je $x \geq 1$, se neenačba prevede na $x^2 - x - 2 > 0$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &> 0 \\ (x-1)(x+2) &> 0 \\ x < -1 \text{ ali } x &> 2\,, \end{aligned}$$

kar nam skupaj s pogojem da delno rešitev $x \in (2, \infty)$.
Končna rešitev je torej $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, \infty)$.

2. $Df = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\quad Zf = (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$, $\quad$ ničel ni.
Iz $f'(x) = -\dfrac{x\,e^{-x}}{(x-1)^2}$ dobimo stacionarno točko $x = 0$.
Funkcija narašča na $(-\infty, 0]$, pada pa na $[0, 1)$ in na $(1, \infty)$. Pri $x = 0$ je lokalni maksimum. Graf:



3. Krivulja ima ničle $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ker je periodična s periodo 2π, je vseeno, kateri dve ničli vzamemo. Zato je:

$$V = \pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (1 + \sin x)^2 \,\mathrm{d}x = J_1 + J_2 + J_3\,,$$

ker je:

$$J_1 = \pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{d}x = 2\pi^2, \quad J_2 = 2\pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sin x \,\mathrm{d}x = -2\pi \cos x \Big|_{-\pi/2}^{3\pi/2} = 0,$$

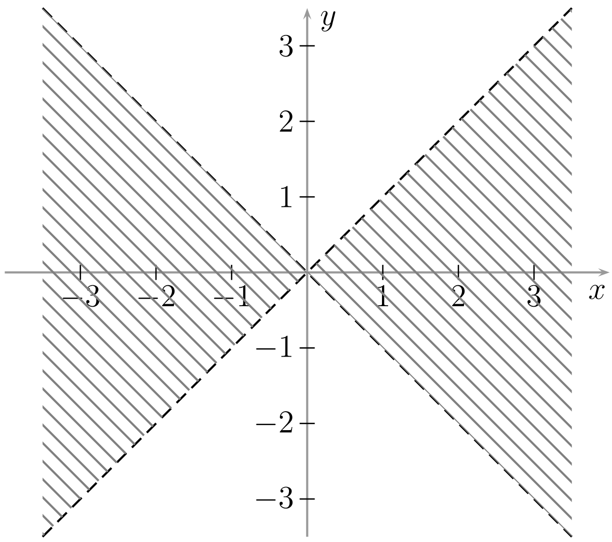
$$J_3 = \pi \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sin^2 x \,\mathrm{d}x\,.$$

Z uporabo formule za dvojne kote dobimo:

$$J_3 = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \big(1 - \cos(2x)\big) \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\, x - \frac{\pi}{4} \sin(2x) \Big|_{-\pi/2}^{3\pi/2} = \pi^2\,.$$

Sledi $V = 3\pi^2$.

4. a) Definicijsko območje je določeno z neenačbo $x^2 - y^2 > 0$, kar je ekvivalentno $-x < y < x$ ali $x < y < -x$. Skica:



b) Iz:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 - y^2} + 2\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2 - y^2}$$

dobimo stacionarno točko $T(-1, 0)$. Nadalje velja:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2}\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}\,.$$

Ker v točki T velja $H = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 4$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$, je tam maksimum.

5. Označimo s q delež prvotne snovi, ki se je *ohranila* do časa t, s $t_0 = 100$ pa čas, v katerem se je ohranilo še $q_0 = 0{\cdot}25$ prvotne snovi. Ker je intenzivnost razpadanja sorazmerna z deležem še ohranjene snovi, velja:

$$\mathrm{d}q = -kq\,\mathrm{d}t\,.$$

Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}q}{q} = -k\,\mathrm{d}t\,,$$

kar se zintegrira v:

$$\ln\frac{q}{C} = -kt$$

oziroma:

$$q = C\,e^{-kt}\,.$$

Ker je delež ohranjene snovi času $t = 0$ enak 1, je $C = 1$. Nadalje je delež ohranjene snovi ob času t_0 enak q_0, zato je $k = -\ln(q_0)/t_0$. Torej velja:

$$q = e^{(t \ln q_0)/t_0} = q_0^{t/t_0}\,.$$

Razpolovni čas $t_{1/2}$ dobimo pri $q = 1/2$. Po krajšem računu dobimo:

$$t_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\ln q_0}\, t_0$$

Izraz je pri $t > 0$ pozitiven, ker je $\ln q_0$ negativen. Ko vstavimo številke, dobimo:

$$t_{1/2} = -100\,\frac{\ln 2}{\ln(1/4)} = 100\,\frac{\ln 2}{\ln 4} = 50\,.$$

Razpolovni čas naše snovi je torej 50 let.