REŠITVE KOLOKVIJEV IN IZPITOV IZ DIFERENCIALNIH ENAČB

Praktična matematika

Zbral: Martin Raič

2018/19

Rešitve kolokvija iz diferencialnih enačb z dne 18. 4. 2019

1. Če integrirajoči množitelj nastavimo kot $\mu(x,y) = x^p$ za primeren p, dobimo enačbo $M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$, kjer je:

$$M(x,y) = 3x^{p+3} + 2x^p y\,, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x^p\,,$$
$$N(x,y) = -x^{p+1}\,, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -(p+1)x^p\,,$$

torej je integrirajoči množitelj $\mu(x,y) = x^{-3}$. Integriramo:

$$\int \left(3 + \frac{2y}{x^3}\right) \mathrm{d}x = 3x - \frac{y}{x^2} + A(y)\,,$$
$$\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}y = \frac{y}{x^2} + B(x)$$

in vidimo, da se integrala ujemata, če je $A(y) = 0$ in $B(x) = 3x$. Rešitev enačbe je torej $3x - \frac{y}{x^2} = C$ oziroma:

$$y = 3x^3 - Cx^2\,.$$

Opomba. Enačbo bi lahko rešili tudi kot linearno enačbo, saj jo lahko zapišemo v obliki $-xy' + 2y + 3x^3 = 0$.

2. a) Funkcija h_1 je dvakrat zvezno odvedljiva z odvodoma $h_1'(x) = \cos x$ in $h_1''(x) = -\sin x$. Iz računa:

$$\begin{aligned}
\sin^2 x\, h_1''(x) - \sin(2x)\, h_1'(x) + (1 + \cos^2 x)\, h_1(x) &= \\
= -\sin^3 x - 2\sin x \cos^2 x + (1 + \cos^2 x)\sin x &= \\
= (1 - \cos^2 x - \sin^2 x)\sin x &= \\
= 0&
\end{aligned}$$

vidimo, da je h_1 res rešitev.

b) Uvedimo:

$$y = z\sin x\,, \qquad y' = z'\sin x + z\cos x\,, \qquad y'' = z''\sin x + 2z'\cos x - z\sin x\,,$$

vstavimo v enačbo in po ureditvi dobimo:

$$\sin^3 x\, z'' = 0\,.$$

Funkcija $z = x$ je prav gotovo rešitev te enačbe, od koder dobimo drugo rešitev $h_2(x) = x\sin x$. Determinanta Wrońskega je enaka:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & x\sin x \\ \cos x & \sin x + x\cos x \end{vmatrix} = \sin^2 x\,,$$

kar je v vseh točkah, ki niso večkratniki števila π, različno od nič, zato sta rešitvi res neodvisni. V večkratnikih števila π pa niso izpolnjeni pogoji eksistenčnega izreka, zato se lahko zgodi, da je determinanta Wrońskega tam enaka nič.

3. a) Odvajamo:

$$y'(x^2 + C) + 2xy = 0\,,$$

eliminiramo C in dobimo, da krivulje zadoščajo diferencialni enačbi $y' = xy^2$. Ortogonalne trajektorije pa (za $y' \neq 0$) zadoščajo enačbi:

$$-\frac{1}{y'} = xy^2$$

oziroma:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} + y^2\,\mathrm{d}y = 0\,,$$

kar se (za $x \neq 0$) zintegrira v:

$$\ln|x| + \frac{y^3}{3} = C\,.$$

Ko vstavimo $x = -1$ in $y = 2$, dobimo $C = 8/3$. Izrazimo y in dobimo:

$$y = \sqrt[3]{8 - 3\ln|x|}\,.$$

Maksimalni odprt interval, na katerem je definirana desna stran in vsebuje točko -1, je $(-\infty, 0)$. Torej lahko pišemo tudi:

$$y = \sqrt[3]{8 - 3\ln(-x)}\,.$$

Dobljena krivulja je ortogonalna trajektorija na dano družino za x na celotnem intervalu $(-\infty, 0)$. Po drugi strani pa je dobljena funkcija klasična rešitev dane diferencialne enačbe le na intervalu $\bigl(-e^{8/3}, 0\bigr)$. Ker je tam $x \neq 0$ in $y \neq 0$, lahko diferencialno enačbo izrazimo v obliki:

$$y' = -\frac{1}{xy^2}\,.$$

b) Ker je desna stran zvezna v x in parcialno zvezno odvedljiva po y (torej lokalno Lipschitzeva), tam velja lokalna različica eksistenčnega izreka, po kateri je rešitev na intervalu $\bigl(-e^{8/3}, 0\bigr)$ enolično določena. Res pa je, da enoličnost ortogonalne trajektorije velja tudi za $x \in (-\infty, 0)$, a tega ni bilo treba dokazati.

4. Karakteristična enačba $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 2$, od koder dobimo rešitev homogenega dela $y_H = C_1\,x + C_2\,x^2$. Iz slednje in desne strani dobimo naslednji nastavek za partikularno rešitev:

$$y_P = x(A\ln x + B)\ln x$$

(ker ima enačba pomen le za $x > 0$, ni treba pisati absolutnih vrednosti). Odvajamo:

$$y_P' = A(\ln x)^2 + (2A + B)\ln x + B\,, \qquad y_P'' = \frac{2A\ln x + 2A + B}{x}$$

in dobimo:

$$x^2 y_P'' - 2xy_P' + 2y_P = x\big(2A - B - 2A\ln x\big)\,.$$

Po izenačitvi koeficientov pride $A = -\frac{1}{2}$ in $B = -1$. Iskana rešitev je torej:

$$y = -x\ln x\big(\tfrac{1}{2}\ln x + 1\big) + C_1\,x + C_2\,x^2\,.$$

Znano je, da uporabljeni nastavki za homogeni del enačbe dajo linearno neodvisne rešitve. Če so izpolnjeni pogoji lokalnega eksistenčnega izreka, iz enoličnosti sledi, da za izvirno enačbo res dobimo vse možne klasične rešitve. Ti pogoji pa so za dano enačbo izpolnjeni povsod, kjer ima pomen, to je za $x > 0$. Zato so vse klasične rešitve, definirane na odprtih intervalih, zožitve zgoraj navedenih funkcij.

Rešitve kolokvija iz diferencialnih enačb z dne 6. 6. 2019

1. Homogeni del ima rešitev $y_H = C_1\, e^{-x} + C_2\, e^{-2x}$, kjer sta C_1 in C_2 konstanti, rešitev izvirne enačbe pa nastavimo v obliki $y = z_1\, e^{-x} + z_2\, e^{-2x}$, kjer sta z_1 in z_2 funkciji. Le-ti zadoščata sistemu:

$$\begin{aligned} z_1'\, e^{-x} + x^2\, e^{-2x} &= 0\,, \\ -z_1'\, e^{-x} - 2\, e^{-2x} &= \frac{1}{1+e^x}\,. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je:

$$\begin{aligned} z_1' &= \frac{e^x}{1+e^x}\,, & z_1 &= C_1 = \ln\bigl(1+e^x\bigr) + D_1\,, \\ z_2' &= -\frac{e^{2x}}{1+e^x}\,, & z_2 &= -e^x + \ln\bigl(1+e^x\bigr) + D_2\,, \end{aligned}$$

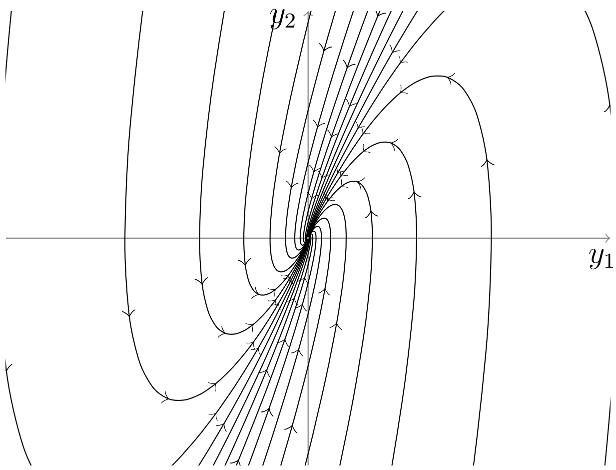
splošna rešitev naše enačbe pa:

$$y = \bigl(e^{-x} + e^{-2x}\bigr) \ln\bigl(1+e^x\bigr) - e^{-x} + D_1\, e^{-x} + D_2\, e^{-2x}$$

ali ekvivalentno:

$$y = \bigl(e^{-x} + e^{-2x}\bigr) \ln\bigl(1+e^x\bigr) + E_1\, e^{-x} + E_2\, e^{-2x}\,.$$

2. Karakteristični polinom: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = (\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i)$. Gre za *spiralni ponor*. Fazni portret:



Opomba. Da gre za spirale, ni dobro vidno, ker je razmerje med realno in imaginarno komponento lastnih vrednosti preveliko.

3. Matrika sistema:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

se da diagonalizirati – velja $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, kjer je:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Sistem:

$$\begin{aligned} w_1 + w_3 &= 0\,, \\ w_2 - w_3 &= e^{-x}\,, \\ w_1 + 2w_3 &= 0 \end{aligned}$$

ima rešitev:

$$w_1 = 0\,, \quad w_2 = e^{-x}\,, \quad w_3 = 0\,,$$

iz katere dobimo diferencialne enačbe:

$$z_1' = 2z_1\,, \quad z_2' = 2z_2 + e^{-x}\,, \quad z_3' = -z_3\,,$$

ki jih lahko rešimo vsako zase:

$$z_1 = C_1\, e^{2x}\,, \quad z_2 = -\tfrac{1}{3}\, e^{-x} + C_2\, e^{2x}\,, \quad z_3 = C_3\, e^{-x}\,.$$

Rešitev prvotnega sistema pa je:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1\, e^{2x} + C_3\, e^{-x}\,, \\ y_2 &= -\tfrac{1}{3}\, e^{-x} + C_2\, e^{2x} - C_3\, e^{-x}\,, \\ y_3 &= C_1\, e^{2x} + 2C_3\, e^{-x}\,. \end{aligned}$$

4. Enačbo pomnožimo z x, da dobimo standardno obliko:

$$x^2(x+2)y'' + x(x^2-2)y' - (2x^2+2x)y = 0\,.$$

Nastavimo:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda}$$

in enačba nam da:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n+\lambda+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)c_n x^{n+\lambda} + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+\lambda+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)c_n x^{n+\lambda} - \\ &\quad - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\lambda+1} = 0\,. \end{aligned}$$

Preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente, in ob dogovoru, da za $k < 0$ velja $c_k = 0$, dobimo:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda-1)(k+\lambda-2)c_{k-1}x^{k+\lambda} + 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)c_k x^{k+\lambda} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda-2)c_{k-2}x^{k+\lambda} - 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+\lambda)c_k x^{k+\lambda} - \\ - 2\sum_{k=0}^{\infty} c_{k-2}x^{k+\lambda} - 2\sum_{k=0}^{\infty} c_{k-1}x^{k+\lambda} = 0\,.$$

Uredimo in dobimo:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[2(k+\lambda)(k+\lambda-2)c_k + (k+\lambda)(k+\lambda-3)c_{k-1} + (k+\lambda-4)c_{k-2}\Big]x^{k+\lambda} = 0\,. \quad (*)$$

Karakteristična enačba $\lambda(\lambda-2) = 0$ ima rešitvi – izhodiščna eksponenta $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 0$, ki se razlikujeta za celo število, zato moramo rešitev za nižji izhodiščni eksponent izvajati iz rešitve za višji izhodiščni eksponent.

Za višji izhodiščni eksponent $\lambda_1 = 2$ dobimo zveze:

$$2k(k+2)c_{1,k} + (k+2)(k-1)c_{1,k-1} + (k-2)c_{1,k-2} = 0 \;\;; \quad k = 1,2,3,\ldots$$

(pri $k = 0$ dobimo identiteto). Za $k = 1$ dobimo $c_{1,1} = 0$ in za $k = 2$ prav tako $c_{1,2} = 0$. Z indukcijo sledi, da za vse $k = 1,2,3,\ldots$ velja $c_{1,k} = 0$. Če torej izberemo $c_{1,0} = 1$, prva bazna rešitev pride $h_1(x) = x^2$.

Rešitev za nižji eksponent $\lambda_2 = 0$ oz. splošno rešitev lahko dobimo na vsaj dva načina.

Prvi način: z nastavkom druge bazne rešitve (za $x > 0$):

$$h_2(x) = A\,h_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2,n}\,x^n\,,$$

kjer vzamemo še $c_{2,2} = 0$. Če definiramo operator D po predpisu:

$$Dy := x^2(x+2)y'' + x(x^2-2)y' - (2x^2+2x)y\,,$$

za funkcijo $g(x) := x^2 \ln x$ dobimo:

$$g'(x) = x + 2x\ln x\,, \qquad g''(x) = 3 + 2\ln x$$

in po krajšem računu:

$$D\big(h_1(x)\ln x\big) = x^4 + 3x^3 + 4x^2\,.$$

Operator D na preostanku funkcije h_2 dobimo po formuli $(*)$. Sledi:

$$\begin{aligned} Dh_2(x) = -Ax^4 + 3Ax^3 - 4Ax^2 + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \Big[2k(k-2)c_{2,k} + k(k-3)c_{2,k-1} + (k-4)\, c_{2,k-2} \Big] x^k \,, \end{aligned}$$

Izenačimo z nič in se spomnimo, da za $k < 0$ velja $c_{2,k} = 0$. Za $k = 0$ dobimo identiteto, za $k = 1$ dobimo $c_{2,1} = -c_{2,0}$, za $k = 2$ pa $A = 0$. Ob upoštevanju slednjega za $k = 3, 4, \ldots$ dobimo:

$$2k(k-2)c_{2,k} + k(k-3)c_{2,k-1} + (k-4)c_{2,k-2} = 0 \,.$$

Ob upoštevanju, da je $c_{2,2} = 0$, naračunamo:

$$c_{2,3} = -\frac{c_0}{6} \,, \quad c_{2,4} = \frac{c_0}{24} \,, \quad c_{2,5} = -\frac{c_0}{120}$$

in postavimo domnevo, da je $c_{2,k} = (-1)^k c_0 / k!$ za vse k razen za $k = 2$. To domnevo z indukcijo zlahka dokažemo. Če izberemo $c_0 = 0$, druga bazna rešitev pride:

$$h_2(x) = e^{-x} - \tfrac{1}{2} x^2 \,,$$

a glede na to, da je prva bazna rešitev $h_1(x) = x^2$, lahko vzamemo tudi kar:

$$h_2(x) = e^{-x} \,.$$

Splošna rešitev dane enačbe je torej:

$$y = \kappa_1\, x^2 + \kappa_2\, e^{-x}$$

in velja na celi realni osi.

Drugi način: z znižanjem reda. Nastavimo $y = h_1(x)\, z$ in izračunamo:

$$\begin{aligned} y &= x^2 z \,, \\ y' &= 2xz + x^2 z' \,, \\ y'' &= 2z + 4xz' + x^2 z'' \,. \end{aligned}$$

Ko vstavimo v enačbo, po ureditvi pride:

$$(x^2 + 4x + 6)z' + x(x+2)z'' \,.$$

Pišimo $w = z'$, ločimo spremenljivki in dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}w}{w} = -\frac{x^2 + 4x + 6}{x(x+2)}\, \mathrm{d}x = \left(-1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x+2} \right) \mathrm{d}x \,,$$

kar se najprej zintegrira v:

$$\ln \frac{w}{b} = -x - 3 \ln x + \ln(x+2)$$

oziroma:

$$w = \frac{b(x+2)e^{-x}}{x^3}\,,$$

to pa lahko z nekaj spretnosti spet zintegriramo v:

$$z = -\frac{b\,e^{-x}}{x^2} + a$$

Od tod dobimo splošno rešitev:

$$y = ax^2 - b\,e^{-x}\,,$$

ki se ujema s tisto iz prvega načina.

Rešitve izpita iz diferencialnih enačb z dne 27. 6. 2019

1. Hitrost kolesarja v, ki se spreminja s časom t, zadošča diferencialni enačbi:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2 \,,$$

kjer je k konstanta. Ločimo spremenljivke in integriramo:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -k\,\mathrm{d}t \,, \qquad \frac{1}{v} = kt + C \,.$$

Ob času 0 je hitrost enaka $v_0 := 7\,\mathrm{m/s}$, ob času $t_1 := 3\,\mathrm{s}$ je enaka $v_1 := 6\,\mathrm{m/s}$. Oboje vstavimo v rešeno enačbo in po krajšem računu dobimo:

$$C = \frac{1}{v_0} \,, \qquad k = \frac{1}{t_1}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right) .$$

Iščemo pa čas t_2, ob katerem je hitrost enaka $v_2 := 1$ m/s. Spet vstavimo v rešeno enačbo in po krajšem računu dobimo:

$$t_2 = t_1 \frac{\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_0}}{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}} = 108\,\mathrm{s} \,.$$

2. Če označimo:

$$M(x,y) = 2xy^{p+1} \,, \qquad N(x,y) = (y^2 - x^2)y^p \,,$$

velja:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2(p+1)xy^p \,, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy^p$$

in izraza se ujemata, če je $p = -2$. Za ta p dobimo:

$$\int M(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{y} + A(y) \,, \qquad \int N(x,y)\,\mathrm{d}y = y + \frac{x^2}{y} + B(x) \,.$$

Izraza se ujemata, če je $A(y) = y$ in $B(x) = 0$. Rešitev dane enačbe je torej:

$$\frac{x^2}{y} + y = C \,.$$

Odvisno spremenljivko lahko izrazimo tudi eksplicitno:

$$y = \frac{C \pm \sqrt{C^2 - 4x^2}}{2} \,.$$

3. Gre za nehomogeno Euler–Cauchyjevo enačbo. Karakteristična enačba $\lambda^2+3\lambda+2 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$, iz katerih dobimo rešitev homogenega dela:

$$y_H = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}\,,$$

kjer sta C_1 in C_2 konstanti. Rešitev izvirne enačbe nastavimo v obliki $y = \frac{z_1}{x} + \frac{z_2}{x^2}$, kjer sta z_1 in z_2 funkciji. Le-ti zadoščata sistemu enačb:

$$\begin{aligned} \frac{z_1'}{x} + \frac{z_2'}{x^2} &= 0\,, \\ -\frac{z_1'}{x^2} - \frac{2z_2'}{x^3} &= \frac{e^x}{x^2}\,, \end{aligned}$$

katerega rešitev je:

$$\begin{aligned} z_1' &= e^x\,, & z_1 &= e^x + C_1 \\ z_2' &= -x\,e^x\,, & z_2 &= -(x-1)e^x + C_2\,, \end{aligned}$$

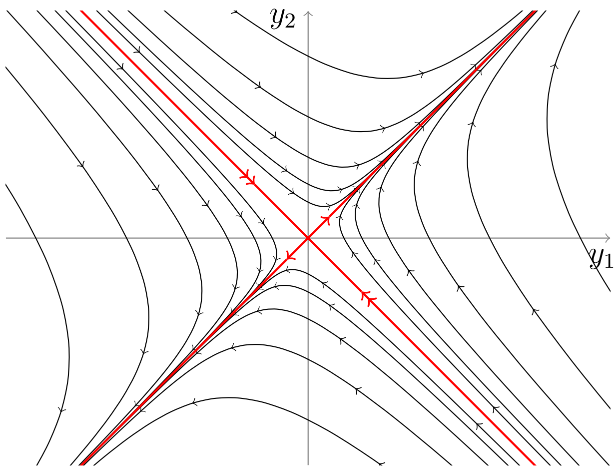
splošna rešitev izvirne enačbe pa je:

$$y = \frac{e^x}{x^2} + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}\,.$$

4. Matrika sistema $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ima lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -3$ ter pripadajoča lastna vektorja $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Splošna rešitev:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1\,e^x + C_2\,e^{-3x}\,, \\ y_2 &= C_1\,e^x - C_2\,e^{-3x}\,. \end{aligned}$$

Gre za sedlo. Fazni portret:



Rešitve izpita iz diferencialnih enačb z dne 9. 9. 2019

1. Gre za Bernoullijevo enačbo. Delimo z y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2x}{y} + e^{x+x^2} = 0$$

in uvedemo $w = \dfrac{1}{y}$, $w' = -\dfrac{y'}{y^2}$. Sledi:

$$-w' + 2xw + e^{x+x^2} = 0\,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$-\frac{\mathrm{d}w_H}{w_H} + 2x\,\mathrm{d}x = 0\,, \qquad -\ln\frac{w_H}{C} + x^2 = 0\,, \qquad w_H = C\,e^{x^2}\,,$$
$$w = e^{x^2} z\,, \qquad w' = 2x\,e^{x^2} z + e^{x^2} z'\,,$$
$$z' = e^x\,, \qquad z = e^x + C\,,$$
$$w = e^{x^2+x} + C\,e^{x^2}\,.$$

Splošna rešitev enačbe je torej:

$$y = \frac{1}{e^{x^2+x} + C\,e^{x^2}}$$

skupaj z rešitvijo $y = 0$, ki je limita zgornjih rešitev, ko gre C proti neskončno. Če vstavimo $x = -1$, $y = 1/3$, dobimo $C = 2/e$ in iskana partikularna rešitev je:

$$y = \frac{1}{e^{x^2+x} + 2\,e^{x^2-1}}\,.$$

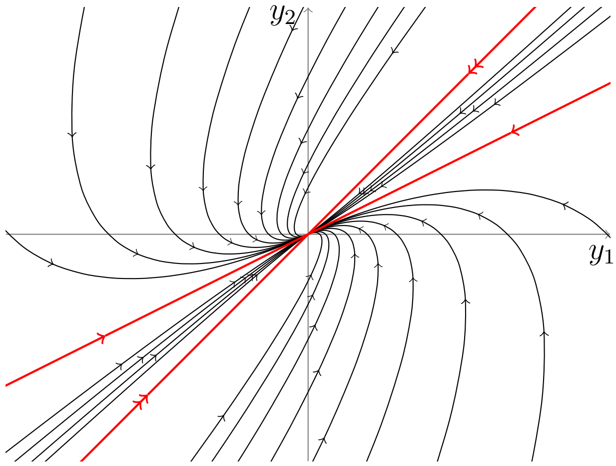
2. Lastna para:

$$\lambda_1 = -2\,, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\;; \qquad \lambda_2 = -3\,, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\,.$$

Splošna rešitev:

$$y_1 = 2C_1\,e^{-2x} + C_2\,e^{-3x}\,,$$
$$y_2 = C_1\,e^{-2x} - C_2\,e^{-3x}\,.$$

Fazni portret:



3. Nalogo rešimo s Frobeniusovo metodo. Ker gre za regularno točko, nastavimo:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

in enačba nam da:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 6\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - 6\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0\,.$$

Preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente, in upoštevamo, da lahko nekatere koeficiente izpustimo, ker so enaki nič:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)c_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^k - 6\sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k - 6\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0\,.$$

Uredimo in dobimo:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[(k+1)(k+2)c_{k+2} - (k+2)(k+3)c_k\Big]x^k = 0\,,$$

od koder sledi, da mora veljati:

$$c_{k+2} = \frac{k+3}{k+1}\,c_k\,; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

torej:

$$\begin{aligned} c_k &= (k+1)c_0 &&; \ k = 2, 4, 6, \ldots \\ c_k &= \frac{k+1}{2}\,c_1 &&; \ k = 3, 5, 7, \ldots \end{aligned}$$

Splošna rešitev dane diferencialne enačbe je torej:

$$y = c_0(1 + 3x^2 + 5x^4 + \cdots) + \tfrac{1}{2}c_1(2x + 4x^3 + 6x^5 + \cdots)\,.$$

S seštetjem vrst:

$$1 + 3x^2 + 5x^4 + \cdots = (x + x^3 + x^5 + \cdots)' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

in

$$2x + 4x^3 + 6x^5 + \cdots = (1 + x^2 + x^4 + \cdots)' = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

dobimo, da se splošna rešitev izraža tudi v obliki:

$$y = \frac{A(1+x^2) + Bx}{(1-x^2)^2}\,.$$

4. Dinamiko ohlajanja opisuje diferencialna enačba:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -aT^4\,,$$

kjer je a konstanta. Ločimo spremenljivki:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T^4} = -a\,\mathrm{d}t\,,$$

integriramo in dobimo:

$$-\frac{1}{3T^3} = -at + C\,.$$

Pri $t = 0$ je $T = T_0 := 3000\,\mathrm{K}$, pri $t = t_1 := 3$ dni pa je $T = T_1 := 300\,\mathrm{K}$. Dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3T_0^3} &= C\,, \\ -\frac{1}{3T_1^3} &= C - at_1\,. \end{aligned}$$

Torej je:

$$C = -\frac{1}{3T_0^3}\,, \qquad a = \frac{1}{3t_1}\left(\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_0^3}\right)\,.$$

Čas t_2, ob katerem bo temperatura enaka T_2, je:

$$t_2 = \frac{1}{a}\left(C + \frac{1}{3T_2^3}\right) = \frac{\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_0^3}}{\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_0^3}}\,t_1\,,$$

iskani čas pa je razlika:

$$t_2 - t_1 = \frac{\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3}}{\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_0^3}}\,t_1 = 3000\,\mathrm{dni}\,.$$

b) Temperatura:

$$T = \big(3(at - C)\big)^{-1/3}$$

ima singularnost pri:

$$t = \frac{C}{a} = -\frac{t_1}{\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^3 - 1} \doteq -0\text{˙}003003\,\mathrm{dni}\,.$$

Torej se je lahko telo takole ohlajalo kvečjemu približno 0˙003003 dneva, kar je približno 4 minute in 19 sekund.

2017/18

Rešitve kolokvija iz diferencialnih enačb z dne 10. 4. 2018

1. Če delimo z x, dobimo $y' = 1 + y/x + e^{-y/x}$, kar pomeni, da je enačba homogena. S substitucijo $z = y/x$ dobimo:

$$xz' = 1 + e^{-z}\,.$$

To je enačba z ločljivima spremenljivkama, saj se da izraziti v obliki:

$$\frac{\mathrm{d}z}{1+e^{-z}} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

oziroma

$$\frac{e^z\,\mathrm{d}z}{e^z+1} = \frac{\mathrm{d}x}{x}\,.$$

Integriramo in dobimo:

$$\ln\frac{1+e^z}{A} = \ln|x|\,,$$

torej $1 + e^z = A|x|$. A enačba ima pomen za $x \neq 0$ in na vsakem intervalu, ki ne vsebuje ničle, smemo družino $A|x|$ zamenjati z družino Ax. Rešimo na z in dobimo $z = \ln(Ax - 1)$. Izrazimo z y in končno dobimo:

$$y = x\ln(Ax-1)\,.$$

Konstanta A lahko preteče vsa realna števila razen ničle: za vsak $A \neq 0$ namreč obstaja neizrojen interval, na katerem je $Ax - 1 > 0$, za $A = 0$ pa to ni res.

2. Gre za Bernoullijevo diferencialno enačbo. Funkcija $y = 0$ reši to enačbo, za preostale rešitve pa delimo s $\sqrt{y}$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x} = 1$$

in uvedemo $z = \sqrt{y}$, $z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$. Dobimo linearno enačbo:

$$2z' + \frac{z}{x} = 1\,.$$

Pri homogenem delu ločimo spremenljivki in integriramo:

$$\frac{2\mathrm{d}z_H}{z_H} + \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0\,, \qquad 2\ln\frac{z_H}{A} + \ln|x| = 0\,, \qquad z_H = \frac{A}{\sqrt{|x|}}\,.$$

Nadaljujemo z variacijo konstante, kjer pa se lahko omejimo na pozitivne x:

$$z = a(x)\,x^{-1/2}\,, \qquad z' = a'(x)\,x^{-1/2} - \tfrac{1}{2}\,a(x)\,x^{-3/2}\,,$$
$$a'(x) = \tfrac{1}{2}\,x^{1/2}\,, \qquad a(x) = \tfrac{1}{3}\,x^{3/2} + C\,,$$
$$z = \frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{x}}\,,$$

Za splošni x od tega poberemo le, da $z = \frac{x}{3}$ reši enačbo, in preverimo, da ta rešitev velja za vse x. Prištejemo rešitev homogenega dela in dobimo rešitve:

$$z = \frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{|x|}}\,.$$

Splošna rešitev prvotne enačbe je torej:

$$y = \left(\frac{x}{3} + \frac{C}{\sqrt{|x|}}\right)^2\,.$$

Rešitve $y = 0$ ni treba dodati, saj jo dobimo kot ogrinjačo rešitev iz osnovne družine: za vsak $x_0 \neq 0$ obstaja tak C, da je $\frac{x_0}{3} + \frac{C}{\sqrt{|x_0|}} = 0$. Pri x_0 se tedaj ustrezna funkcija ujema s funkcijo $y = 0$ tako v vrednosti kot tudi v odvodu.

3. a) $y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$.
b) $y = \frac{1}{9}x + C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$.
c) $y = \frac{1}{9}x - \frac{1}{6}x\cos(3x) + C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$.

4. a) Velja:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{2}{x+ay} = -\frac{2a}{(x+ay)^2} \quad \text{in} \quad -\frac{\partial}{\partial x}\frac{x+y}{xy+ay^2} = \frac{1-a}{(x+ay)^2}\,.$$

Izraza se ujemata za $a = -1$; takrat postane enačba eksaktna.

b) Ko enačbo delimo z $xy - y^2$, dobimo:

$$\frac{2}{x-y}\,\mathrm{d}x - \frac{x+y}{y(x-y)}\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Integriramo:

$$\int \frac{2}{x-y}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-y| + A(y)\,,$$

$$-\int \frac{x+y}{y(x-y)}\,\mathrm{d}y = -\int\left(\frac{1}{y} + \frac{2}{x-y}\right)\mathrm{d}y = -\ln|y| + 2\ln|x-y| + B(x)\,.$$

Izraza se ujemata, če je $A(y) = -\ln|y|$ in $B(x) = 0$. Dana diferencialna enačba ima torej splošno rešitev $2\ln|x-y| - \ln|y| = C$, kar je ekvivalentno $\frac{(x-y)^2}{|y|} = e^C$.

Pri deljenju smo izgubili rešitvi $y = 0$ in $y = x$ (za obe funkciji neposredno preverimo, da sta res rešitvi). Splošno rešitev lahko tako zapišemo v obliki:

$$(x-y)^2 = Dy\,,$$

rešitev $y = 0$ pa moramo navesti posebej.

Pri začetnem pogoju $y(0) = 0$ je D lahko kar koli in tudi $y = 0$ izpolnjuje ta začetni pogoj. Dani začetni pogoj torej izpolnjujejo vse rešitve dane enačbe.

Pri začetnem pogoju $y(0) = -2$ je $D = -2$. Dobimo $(x-y)^2 + 2y = 0$ oziroma $y^2 - 2(x-1)y + x^2 = 0$ oziroma $y_{1,2} = x - 1 \pm \sqrt{1-2x}$. Dani začetni pogoj pa izpolnjuje le rešitev z negativnim korenom, torej je edina rešitev $y = x - 1 - \sqrt{1-2x}$.

Pri začetnem pogoju $y(1) = 1$ pa pride $D = 0$ in edina rešitev je $y = x$.

Rešitve kolokvija iz diferencialnih enačb z dne 8. 6. 2018

1. Če vstavimo $y = e^{ax}$, dobimo:

$$a^2(1+x)e^{ax} - a\,e^{ax} - (2+4x)e^{ax} = 0\,.$$

Če želimo, da to velja za vse x, mora biti $a^2 - a - 2 = 0$ in $a^2 - 4 = 0$, kar je res samo za $a = 2$. S substitucijo:

$$y = e^{2x}\,z\,, \quad y' = (2z + z')e^{2x}\,, \quad y'' = (4z + 4z' + z)e^{2x}$$

po ureditvi dobimo:

$$(3+4x)z' + (1+x)z'' = 0$$

oziroma:

$$(3+4x)u + (1+x)u' = 0\,,$$

kjer je $u = z'$. Ločimo spremenljivke in integriramo:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{3+4x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{1+x} - 4\right)\mathrm{d}x\,, \quad \ln\frac{u}{A} = \ln(1+x) - 4x\,, \quad u = A(1+x)\,e^{-4x}\,.$$

Še enkrat integriramo:

$$z = A\int(1+x)\,e^{-4x} = \frac{A}{16}(4x+5)\,e^{-4x} + B$$

Iskana splošna rešitev je torej:

$$y = \frac{A}{16}(4x+5)\,e^{-2x} + B\,e^{2x}$$

ali tudi:

$$y = a(4x+5)\,e^{-2x} + b\,e^{2x}\,.$$

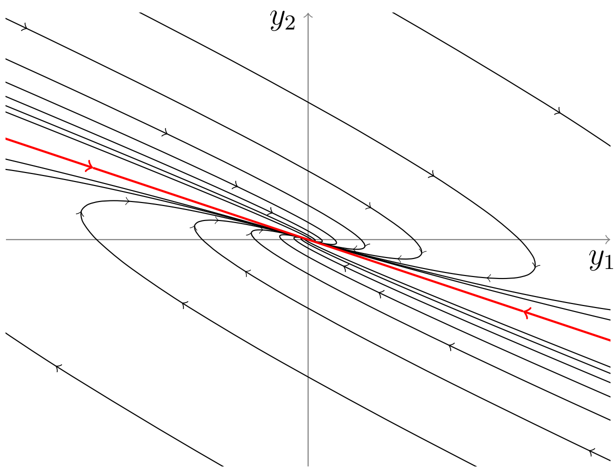
2. Za lastno vrednost $\lambda_{1,2} = -2$ dobimo korenski vektor, natančneje:

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{A}+2\mathbf{I}} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev:

$$\begin{aligned} y_1 &= \big(3C_1 + C_2(1+3x)\big)e^{-3x}\,,\\ y_2 &= (-C_1 - C_2 x)e^{-3x}\,. \end{aligned}$$

Fazni portret:



3. Izračunamo:

$$y = x^{-1/2} z\,, \quad y' = -\tfrac{1}{2}\, x^{-3/2} z + x^{-1/2} z'\,, \quad y'' = \tfrac{3}{4}\, x^{-5/2} z - x^{-3/2}\, z' + x^{-1/2} z''\,,$$

vstavimo v enačbo in dobimo:

$$x^{3/2} z'' + x^{1/2} z' + \bigl(x^2 - \tfrac{9}{4}\bigr) x^{-1/2} z = 0$$

oziroma:

$$x^2 z'' + x\, z' + \bigl(x^2 - \tfrac{9}{4}\bigr) z = 0\,,$$

kar ima rešitev:

$$z = C_1\, J_{3/2}(x) + C_2\, J_{-3/2}(x)\,,$$

kar pomeni:

$$y = \frac{C_1\, J_{3/2}(x) + C_2\, J_{-3/2}(x)}{\sqrt{x}}\,.$$

4. Enačbo pomnožimo z x, da dobimo standardno obliko:

$$x^2 y'' + x(1 - 2x) y' + x(x - 1) y = 0\,.$$

Izračunajmo torej diferencialni operator:

$$Dy := x^2 y'' + x(1 - 2x) y' + x(x - 1) y$$

za funkcijo v generični obliki:

$$y = \sum_n c_n\, x^n\,.$$

Velja:

$$Dy = \sum_n n(n-1) c_n\, x^n + \sum_n n c_n\, x^n - 2 \sum_n n c_n\, x^{n+1} + \sum_n c_n\, x^{n+2} - \sum_n c_n\, x^{n+1}\,.$$

Preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente, in uredimo:

$$\begin{aligned} Dy &= \sum_k k(k-1)c_k\,x^k + \sum_k kc_k\,x^k - 2\sum_k (k-1)c_{k-1}\,x^k + \\ &\qquad + \sum_k c_{k-2}\,x^k - \sum_n c_{k-1}\,x^k = \\ &= \sum_k \Big[k^2 c_k - (2k-1)c_{k-1} + c_{k-2}\Big]x^k\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Karakteristični polinom je torej $f_0(\lambda) = \lambda^2$ in ima dvojno ničlo – izhodiščni eksponent $\lambda_{1,2} = 0$. To pomeni, da moramo splošno rešitev izvajati iz osnovne bazne rešitve za ta eksponent. Slednjo nastavimo v obliki:

$$h_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j}\,x^j\,.$$

Če torej v formulo $(*)$ vstavimo $k = j$ in $c_k = c_{1,j}$, dobimo:

$$Dh_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\Big[j^2 c_{1,j} - (2j-1)c_{1,j-1} + c_{1,j-2}\Big]x^j\,,$$

pri čemer za $j < 0$ postavimo $c_{1,j} = 0$. Ob upoštevanju slednjega izenačimo z nič. Za $j = 0$ dobimo identiteto, za $j = 1$ dobimo $c_{1,j} = c_{0,j}$, za $j = 2, 3, 4, \ldots$ pa dobimo:

$$j^2 c_{1,j} - (2j-1)c_{1,j-1} + c_{j-2} = 0\,.$$

Izberimo $c_{1,0} = 1$ in naračunajmo prvih nekaj koeficientov:

$$c_{1,1} = 1\,, \qquad c_{1,2} = \frac{1}{2}\,, \qquad c_{1,3} = \frac{1}{6}\,, \qquad c_{1,4} = \frac{1}{24}\,.$$

Postavimo domnevo, da za vse j velja $c_{1,j} = 1/j!$, kar zlahka dokažemo z indukcijo. Dobimo prvo bazno rešitev:

$$h_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = e^x\,.$$

Splošno rešitev lahko dobimo na vsaj dva načina.
Prvi način: z nastavkom druge bazne rešitve (za $x > 0$):

$$h_2(x) = A\,h_1(x)\ln x + \sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j}\,x^j\,,$$

kjer vzamemo še $c_{2,2} = 0$. Odvajamo:

$$\big(h_1(x)\ln x\big)' = \frac{h_1(x)}{x} + h_1'(x)\ln x\,, \qquad \big(h_1(x)\ln x\big)'' = \frac{2x\,h_1'(x) - h_1(x)}{x^2} + y_1''\ln x$$

in ob upoštevanju, da je $Dh_1 = 0$, po krajšem računu dobimo $D\big(h_1(x)\ln x\big) = 0$. To pa pomeni, da za koeficiente $c_{2,j}$ veljajo čisto iste rekurzivne zveze kot za $c_{1,j}$. A ker smo vzeli $c_{2,2} = 0$, morajo biti vsi koeficienti $c_{2,j}$ enaki nič. Če torej izberemo $A = 1$, dobimo drugo bazno rešitev $h_2(x) = \ln x\, e^x$. Splošna rešitev za $x > 0$ je torej:

$$y = a\,h_1(x) + b\,h_2(x) = (a + b\ln x)\,e^x\,.$$

Za $y < 0$ lahko vzamemo:

$$y = a\,h_1(x) + b\,h_2(x) = \big(a + b\ln(-x)\big)\,e^x\,.$$

Oba primera lahko združimo v enotno splošno rešitev:

$$y = a\,h_1(x) + b\,h_2(x) = \big(a + b\ln|x|\big)\,e^x\,.$$

Drugi način: z znižanjem reda. Nastavimo $y = h_1(x)\,z$ in računamo:

$$y = e^x\,z\,, \qquad y' = e^x(z + z')\,, \qquad y'' = e^x(z + 2z' + z'')$$

in ko vstavimo v enačbo $(*)$, po ureditvi dobimo:

$$xz'' + z' = 0$$

oziroma:

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{1}{x}\,,$$

kar se najprej zintegrira v:

$$\ln\frac{z'}{b} = -\ln x$$

oziroma:

$$z' = \frac{b}{x}\,,$$

to pa se spet zintegrira v:

$$z = b\ln|x| + a$$

(v resnici na tem koraku splošna rešitev razpade na dvoje – glej končni komentar pri prvem načinu). Od tod dobimo splošno rešitev:

$$y = (a + b\ln|x|)\,e^x\,,$$

ki se ujema s tisto iz prvega načina.

Rešitve izpita iz diferencialnih enačb z dne 9. 7. 2018

1. *Prvi način.* Gre za Bernoullijevo enačbo. Delimo z $2\sqrt{y}$, uvedemo $z = \sqrt{y}$ in dobimo linearno enačbo:

$$(1 + x^2)z' - x\, z_H = x\,.$$

Rešimo homogeni del:

$$(1 + x^2)\,\frac{\mathrm{d}z_H}{\mathrm{d}x} = xz_H\,, \qquad \frac{\mathrm{d}z_H}{z_H} = \frac{x\,\mathrm{d}x}{1 + x^2}\,, \qquad \ln\frac{z_H}{k} = \tfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)\,, \qquad z_H = k\sqrt{1 + x^2}$$

in po variaciji konstante dobimo:

$$k'(x)(1 + x^2)^{3/2} = x\,, \qquad k(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} + C\,, \qquad z = -1 + C\sqrt{1 + x^2}\,.$$

Splošna rešitev enačbe je torej:

$$y = \left(C\sqrt{1 + x^2} - 1\right)^2$$

z dostavkom, da mora biti tudi $C\sqrt{1 + x^2} - 1 \ge 0$ (ker je z pozitivni koren). Zdaj vstavimo začetni pogoj ter dobimo $C = 3$ in iskano rešitev:

$$y = \left(3\sqrt{1 + x^2} - 1\right)^2.$$

Drugi način. Opazimo, da se dasta spremenljivki ločiti:

$$(1 + x^2)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\left(y + \sqrt{y}\right), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{y + \sqrt{y}} = \frac{2x\,\mathrm{d}x}{1 + x^2}\,.$$

To lahko integriramo. Za integracijo leve strani je ugodno vpeljati novo spremenljivko $z = \sqrt{y}$ – isto kot pri prvem načinu. Dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}z}{z + 1} = \frac{x\,\mathrm{d}x}{1 + x^2}\,, \qquad \ln\frac{z + 1}{C} = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)\,, \qquad z = C\sqrt{1 + x^2} - 1\,,$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

2. Po uvedbi $y' = z$, $y'' = z\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$ dobimo:

$$y\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = 2y - z$$

skupaj z dodatno skupino rešitev $z = 0$, torej $y = B$. Glavni del pa je linearna diferencialna enačba. Najprej rešimo homogeni del:

$$y\,\frac{\mathrm{d}z_H}{\mathrm{d}y} = -z\,, \qquad \frac{\mathrm{d}z_H}{z_H} = -\frac{\mathrm{d}y}{y}\,, \qquad \ln\frac{z_H}{A} = -\ln y\,, \qquad z_H = \frac{A}{y}\,,$$

nato pa poiščemo še splošno rešitev:

$$z = \frac{a(y)}{y}\,, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{a'(y)\,y - a(y)}{y^2}\,, \quad a'(y) = 2y\,, \quad a(y) = y^2 + B\,, \quad z = \frac{y^2 + B}{y}\,.$$

Zdaj rešimo še:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 + B}{y}\,, \quad \frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2 + B} = \mathrm{d}x\,, \quad \frac{1}{2}\ln\frac{y^2 + B}{C} = x\,, \quad y = \pm\sqrt{C\,e^{2x} - B}\,.$$

To je splošna rešitev enačbe, zdaj pa vstavimo še začetna pogoja. Ker je $y(0) < 0$, mora biti:

$$y = -\sqrt{C\,e^{2x} - B}\,, \quad y' = -\frac{C\,e^{2x}}{\sqrt{C\,e^{2x} - B}}\,.$$

Dobimo sistem $-1 = -\sqrt{C - B}$, $3 = -\dfrac{C}{\sqrt{C - B}}$, ki ima rešitev $C = -3, D = -4$. Iskana rešitev je torej:

$$y = \sqrt{4 - 3\,e^{2x}}\,.$$

3. *Prvi način.* Poiščemo lastna para:

$$\lambda_1 = 2 + i\,, \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - i \end{bmatrix}\,; \qquad \lambda_2 = 2 - i\,, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 + i \end{bmatrix}\,.$$

Za lastno vrednost λ_1 dobimo kompleksno bazno rešitev:

$$\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} e^{(2+i)x} \\ (2 - i)e^{(2+i)x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2x}\cos x \\ e^{2x}\big(2\cos x + \sin x\big) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} e^{2x}\sin x \\ e^{2x}\big(2\sin x - \cos x\big) \end{bmatrix}\,.$$

Splošna rešitev v realnem je torej:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{2x}\big(C_1\cos x + C_2\sin x\big)\,, \\ y_2 &= e^{2x}\big(2C_1\cos x + C_1\sin x + 2C_2\sin x - C_2\cos x\big)\,. \end{aligned}$$

Drugi način. Odvajamo prvo enačbo in upoštevamo drugo enačbo. Dobimo:

$$y_1'' = 4y_1' - y_2' = 4y_1' - 5y_1$$

oziroma:

$$y_1'' - 4y_1' + 5y_1 = 0\,.$$

Splošna rešitev te diferencialne enačbe drugega reda je:

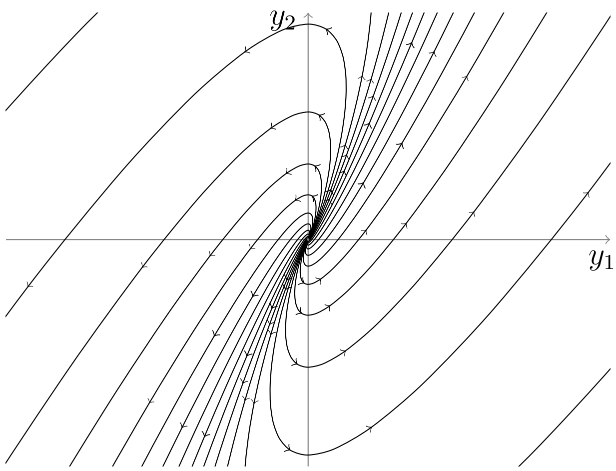
$$y_1 = C_1\,e^{2x}\cos x + C_2\,e^{2x}\sin x\,.$$

Izrazimo še y_2 in dobimo:

$$y_2 = 4y_1 - y_1' = e^{2x}\big(2C_1\cos x + C_1\sin x + 2C_2\sin x - C_2\cos x\big)\,,$$

kar je isto kot pri prvem načinu.

Gre za *spiralni izvir.* Fazni portret:



4. Izračunajmo diferencialni operator:

$$Dy := x^2(x-1)y'' - x(3x-2)y' + (4x-2)y$$

za funkcijo v generični obliki:

$$y = \sum_n c_n\, x^n\,.$$

Velja:

$$\begin{aligned} Dy = \sum_n n(n-1)c_n\, x^{n+1} - \sum_n n(n-1)c_n\, x^n - 3\sum_n nc_n\, x^{n+1} + \\ + 2\sum_n nc_n\, x^n + 4\sum_n c_n\, x^{n+1} - 2\sum_n c_n\, x^n\,. \end{aligned}$$

Preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente, in uredimo:

$$\begin{aligned} Dy &= \sum_k (k-1)(k-2)c_{k-1}\, x^k - \sum_k k(k-1)c_k\, x^k - 3\sum_k (k-1)c_{k-1}\, x^k + \\ &\quad + 2\sum_k kc_k\, x^k + 4\sum_k c_{k-1}\, x^k - 2\sum_k c_k\, x^k = \\ &= \sum_k \Big[-(k-2)(k-1)c_k + (k-3)^2 c_{k-1}\Big] x^k\,. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Karakteristični polinom je torej $f_0(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-1)$ ter ima ničli – izhodiščna eksponenta $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 1$. Ker je razlika celo število, moramo rešitev za nižji izhodiščni eksponent izvajati iz rešitve za višji izhodiščni eksponent.

Za višji eksponent $\lambda_1 = 2$ nastavimo:

$$h_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j}\, x^{j+2} = \sum_n c_{1,n-2}\, x^n \qquad (c_{1,j} = 0 \text{ za } j \notin \mathbb{N}_0)\,,$$

vstavimo v $(*)$ in dobimo:

$$
\begin{aligned}
Dh_1(x) &= \sum_k \Big[-(k-2)(k-1)c_{1,k-2} + (k-3)^2 c_{1,k-3}\Big] x^k = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \Big[-j(j+1)c_{1,j} - (j-1)^2 c_{1,j-1}\Big] x^{j+2} .
\end{aligned}
$$

Izenačimo z nič in pogledamo koeficiente. Za $j = 0$ dobimo identiteto, za $j = 1$ dobimo $c_{1,1} = 0$. Z indukcijo sledi, da za vse $j = 1, 2, 3, \ldots$ velja $c_{1,j} = 0$. Če torej izberemo $c_{1,0} = 1$, prva bazna rešitev pride $h_1(x) = x^2$.

Rešitev za nižji eksponent $\lambda_2 = 0$ oz. splošno rešitev lahko dobimo na vsaj dva načina.

Prvi način: z nastavkom druge bazne rešitve (za $x > 0$):

$$
h_2(x) = Ax^2 \ln x + \sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j}\, x^{j+1} ,
$$

kjer vzamemo še $c_{2,1} = 0$. Odvajamo:

$$
(x^2 \ln x)' = x + 2x \ln x , \qquad (x^2 \ln x)'' = 3 + 2 \ln x
$$

in po krajšem računu dobimo:

$$
D\big(x^2 \ln x\big) = -x^2 .
$$

Nadalje po formuli $(*)$ dobimo:

$$
\begin{aligned}
D\left(\sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j}\, x^{j+1}\right) &= D\left(\sum_n c_{2,n-1}\, x^n\right) = \\
&= \sum_k \Big[-(k-2)(k-1)c_{2,k-1} + (k-3)^2 c_{2,k-2}\Big] x^k = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \Big[-j(j-1)c_{2,j} + (j-2)^2 c_{2,j-1}\Big] x^{j+1} .
\end{aligned}
$$

Spomnimo se še, da je $c_{2,1} = 0$ in $c_{2,j} = 0$ za $j \notin \mathbb{N}_0$, ustrezno seštejemo, izenačimo z nič in pogledamo koeficiente. Dobimo:

$$
\begin{aligned}
j = 0 : &\qquad \text{identiteta} \\
j = 1 : &\qquad A = c_{2,0} \\
j = 2 : &\qquad -2c_{2,2} = 0 \\
j = 3, 4, 5, \ldots : &\qquad c_{2,j} = \frac{(j-2)^2}{j(j-1)}\, c_{2,j-1} .
\end{aligned}
$$

Z indukcijo sledi, da mora biti $c_{2,j} = 0$ za vse $j = 2, 3, 4, \ldots$ Če izberemo $c_{2,0} = 1$, tako da pride $A = 1$, dobimo:

$$
h_2(x) = x^2 \ln x + x .
$$

Za negativne x lahko $\ln x$ nadomestimo z $\ln(-x)$. Enotna splošna rešitev je torej:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln|x| + C_2 x \,.$$

Drugi način: z znižanjem reda. Nastavimo $y = h_1(x)\, z$ in izračunamo:

$$\begin{aligned} y &= x^2 z \,, \\ y' &= 2xz + x^2 z' \,, \\ y'' &= 2z + 4xz' + x^2 z'' \,. \end{aligned}$$

Ko vstavimo v enačbo, po ureditvi pride:

$$(x-2)z'' + (3x-2)z' = 0 \,.$$

Pišimo $w = z'$, ločimo spremenljivki in dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}w}{w} = -\frac{x-2}{x(x-1)}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x \,,$$

kar se najprej zintegrira v:

$$\ln\frac{w}{b} = \ln(x-1) - 2\ln x$$

oziroma:

$$w = b\,\frac{x-1}{x^2} \,,$$

to pa se zintegrira v:

$$z = b\left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right) + a \,,$$

od koder dobimo splošno rešitev:

$$y = ax^2 + b\big(x^2 \ln|x| - +x\big) \,,$$

ki se ujema s tisto iz prvega načina.

Rešitve izpita iz diferencialnih enačb z dne 23. 8. 2018

1. Z uvedbo $z = y'$ enačbi znižamo red – dobimo:

$$1 + 2xzz' = z^2\,, \qquad \frac{2z\,\mathrm{d}z}{z^2-1} = \frac{\mathrm{d}x}{x}\,, \qquad \ln\frac{z^2-1}{C} = \ln|x|\,, \qquad z = \pm\sqrt{1+Cx}\,.$$

Sem lahko že kar vstavimo začetni pogoj $z(1) = -3$. Dobimo, da mora imeti koren negativen predznak in da mora biti $C = 8$. Integriramo:

$$y = -\int \sqrt{1+8x}\,\mathrm{d}x = -\frac{3(1+8x)^{3/2}}{4} + D\,.$$

Vstavimo še začetni pogoj $y(1) = 0$ in dobimo še $D = -81/4$. Iskana rešitev je torej:

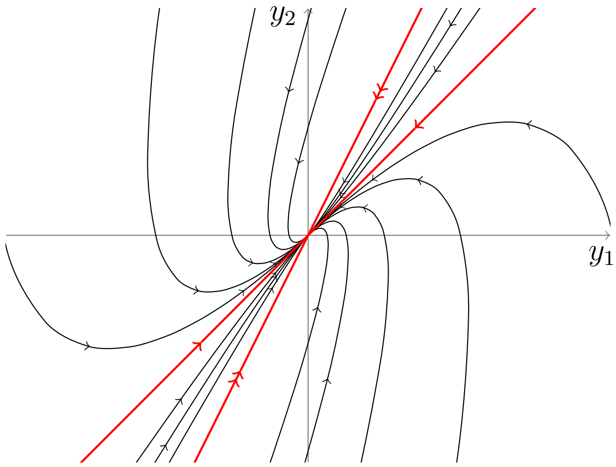
$$y = \frac{81 - 3(1+8x)^{3/2}}{4}\,.$$

2. $y = -\frac{1}{8}x^2 + C_1 + C_2\,e^{2x} + C_3\,e^{-2x}$.

3. Karakteristični polinom: $\lambda^2 + 8\lambda + 15 = (\lambda+3)(\lambda+5)$. Lastna para:

$$\lambda_1 = -3\colon \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\,,$$
$$\lambda_2 = -5\colon \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\,.$$

Gre za *ponor*. Fazni portret:



Iskana rešitev:

$$y_1 = 3\,e^{-3x} - 2\,e^{-5x}\,,$$
$$y_2 = 3\,e^{-3x} - 4\,e^{-5x}\,.$$

4. V skladu z namigom nastavimo:

$$y = e^{x^2} z\,, \qquad y' = 2x\, e^{x^2} z + e^{x^2} z'\,, \qquad y'' = 2\, e^{x^2} z + 4x^2\, e^{x^2} z + 4x\, e^{x^2} z' + e^{x^2} z''\,.$$

Vstavimo v enačbo in po ureditvi dobimo:

$$(4x^2 - 1)z' + xz'' = 0\,.$$

Uvedemo $w = z'$, ločimo spremenljivki in dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}w}{w} = \left(\frac{1}{x} - 4x\right)\,, \qquad \ln\frac{w}{C} = \ln x - 2x^2\,, \qquad w = C\, x\, e^{-2x^2}\,.$$

Integriramo in dobimo:

$$z = -\tfrac{1}{4}\, C\, e^{-2x^2} + D\,.$$

Splošna rešitev prvotne enačbe je torej:

$$y = -\tfrac{1}{4}\, C\, e^{-x^2} + D\, e^{x^2}$$

ali ekvivalentno:

$$y = C_1\, e^{x^2} + C_2\, e^{-x^2}\,.$$

Rešitve izpita iz diferencialnih enačb z dne 6. 9. 2018

1. *Prvi način*: enačbo rešimo kot Bernoullijevo enačbo. Najprej preverimo, da je $y = 0$ rešitev enačbe. Za preostale rešitve uvedemo $z = 1/y$ in dobimo linearno enačbo:

$$z - 1 - x \ln x \, z' = 0 \,.$$

Rešimo pripadajočo homogeno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}z_H}{z_H} = \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} \,, \qquad \ln \frac{z_H}{C} = \ln |\ln x| \,, \qquad z_H = C \ln x \,,$$

nakar konstanto C nadomestimo s funkcijo w, vstavimo v linearno enačbo in po ureditvi dobimo:

$$x(\ln x)^2 w' + 1 = 0 \,, \qquad w = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln x} + D \,,$$

torej $z = 1 + D \ln x$ in končno $y = \dfrac{1}{1 + D \ln x}$.

Drugi način: preprosto ločimo spremenljivke. Najprej preverimo, da sta $y = 0$ in $y = 1$ rešitvi enačbe, nakar slednjo preoblikujemo v:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2 - y} = \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} \,, \qquad \ln \frac{y-1}{Cy} = \ln |\ln x| \,, \qquad \frac{y-1}{y} = C \ln x \,, \qquad y = \frac{1}{C \ln x + 1} \,,$$

kar je ekvivalentno rešitvi iz prejšnjega načina. Opazimo še, da je posebna rešitev $y = 1$ zajeta v slednji družini (za $C = 0$), medtem ko rešitev $y = 0$ nastopi kot limita, ko gre C v neskončnost.

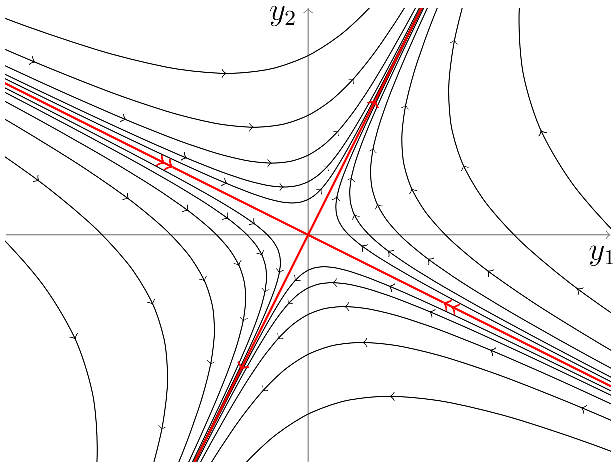
2. Splošna rešitev: $y = \frac{1}{4}x^4 + C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln |x|$.
Iskana partikularna rešitev: $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{2}x^2 \ln x$.

3. Karakteristični polinom: $\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$. Lastna para:

$$\lambda_1 = -3\colon \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} ,$$

$$\lambda_2 = 2\colon \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Gre za *sedlo*. Fazni portret:



Iskana rešitev:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -\tfrac{2}{5}\, e^{-3x} + \tfrac{2}{5}\, e^{2x}\,, \\
y_2 &= \tfrac{1}{5}\, e^{-3x} + \tfrac{4}{5}\, e^{2x}\,.
\end{aligned}
$$

4. Najprej za funkcijo $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ izračunamo $f'(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$ in $f''(x) = \dfrac{2+6x^2}{(1-x^2)^3}$. Nato v skladu z namigom nastavimo:

$$
y = \frac{z}{1-x^2}\,, \qquad y' = \frac{2xz}{(1-x^2)^2} + \frac{z'}{1-x^2}\,, \qquad y'' = \frac{(2+6x^2)z}{(1-x^2)^3} + \frac{4xz'}{(1-x^2)^2} + \frac{z''}{1-x^2}\,.
$$

Vstavimo v enačbo in po ureditvi dobimo:

$$
xz'' + 3z' = 0\,.
$$

Uvedemo $w = z'$, ločimo spremenljivki in dobimo:

$$
\frac{\mathrm{d}w}{w} = -\frac{3}{x}\,, \qquad \ln\frac{w}{C} = -3\ln|x|\,, \qquad w = \frac{C}{x^3}\,.
$$

Integriramo in dobimo:

$$
z = -\frac{C}{2x^2} + D\,.
$$

Splošna rešitev prvotne enačbe je torej:

$$
y = -\frac{C}{2x^2(1-x^2)} + \frac{D}{1-x^2}
$$

ali ekvivalentno:

$$
y = \frac{C_1}{x^2(1-x^2)} + \frac{C_2}{1-x^2}\,.
$$

2016/17

Rešitve kolokvija iz diferencialnih enačb z dne 12. 4. 2017

1. Naj bo $T_0 = 20^\circ$ C temperatura okolice. Dovajanje toplote in ohlajanje opišemo z enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = a - b(T - T_0)\,.$$

Ločimo spremenljivke in rešimo:

$$\frac{\mathrm{d}T}{a - b(T - T_0)} = \mathrm{d}t\,, \qquad -\frac{1}{b}\ln\frac{a - b(T - T_0)}{A} = t\,, \qquad T = T_0 + \frac{1}{b}\bigl(a - A\,e^{-bt}\bigr)\,.$$

Ker se na začetku, ob času $t = 0$, temperatura ujema s temperaturo okolice T_0, mora biti $A = a$. Dobimo:

$$T = T_0 + \frac{a}{b}\bigl(1 - e^{-bt}\bigr)\,.$$

Vemo, kako hitro se voda segreva na začetku. Odvajamo:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = a\,e^{-bt}\,.$$

in ko vstavimo $t = 0$, dobimo, da mora biti $a = 10^\circ\mathrm{C/min}$. Ravnovesna temperatura vode znaša $T_\infty = T_0 + \frac{a}{b} = 90^\circ\,\mathrm{C}$, od koder dobimo izražavo $b = \frac{a}{T_\infty - T_0}$. Voda doseže temperaturo $T_1 = 70^\circ$ C po času:

$$t_1 = -\frac{1}{b}\ln\frac{a - b(T_1 - T_0)}{a} = \frac{T_\infty - T_0}{a}\ln\frac{T_\infty - T_0}{T_\infty - T_1} \doteq 8{\cdot}77\,\mathrm{min} \doteq 8\,\mathrm{min}\;46\,\mathrm{s}\,.$$

2. Iz izražave:

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

je razvidno, da gre za homogeno enačbo. S substitucijo $y = xz$, $y' = z + xz'$ dobimo:

$$xz' = 1 + z^2\,, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{1 + z^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x}\,, \qquad \operatorname{arctg} z = \ln|x| + C\,, \qquad z = \operatorname{tg}\bigl(\ln|x| + C\bigr)\,.$$

Iskana rešitev je torej $y = x\operatorname{tg}\bigl(\ln|x| + C\bigr)$.

3. Odvajamo:

$$2x + 2(y - a)y' = 0\,,$$

izrazimo $a = y + \frac{x}{y'}$ in dobimo, da je dana družina določena z diferencialno enačbo:

$$x^2 = y^2 + \frac{2xy}{y'}\,.$$

Družina ortogonalnih trajektorij je torej določena z diferencialno enačbo:

$$x^2 = y^2 - 2xyy'\,.$$

Če enačbo delimo z y, dobimo Bernoullijevo enačbo v kanonični obliki. Po uvedbi nove spremenljivke $z = y^2$ dobimo linearno enačbo:

$$x^2 = z - xz' .$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}z_H}{z_H} - \frac{1}{x} = 0 , \qquad \ln\frac{z_H}{A} - \ln x = 0 , \qquad z_H = Ax , \\ z = a(x)\,x , \qquad z' = a'(x)\,x + a(x) , \\ a'(x) = -1 , \qquad a(x) = -x + C , \\ z = -x^2 + Cx .\end{gathered}$$

Iskana družina krivulj je torej določena z enačbo:

$$y^2 = Cx - x^2$$

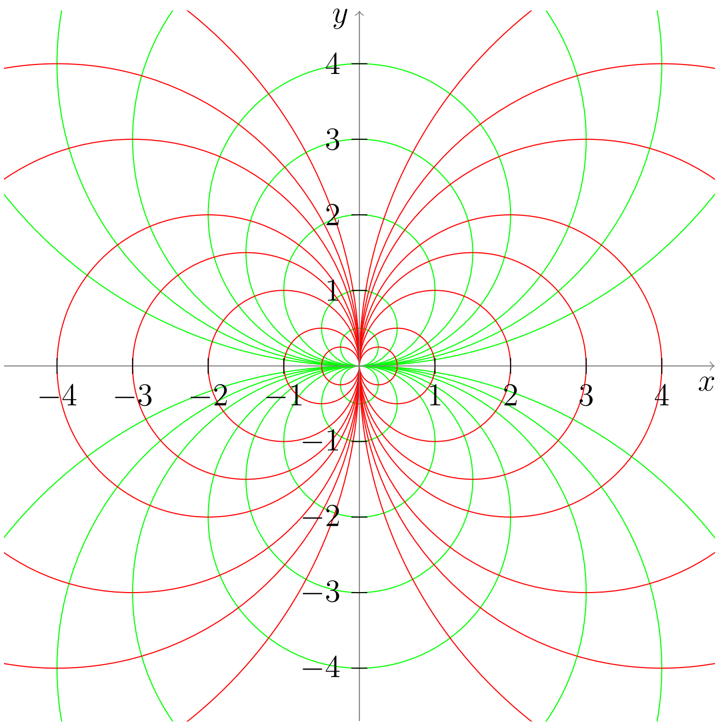
oziroma:

$$\left(x - \tfrac{1}{2}C\right)^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}C^2 .$$

oziroma:

$$(x - b)^2 + y^2 = b^2 .$$

Gre torej spet za družino krožnic. Slika:



4. Za $y = ax^p$ dobimo:
$$5apx^{p-1} + a^2x^{2p} + 6x^{-2} = 0\,.$$
Za vse x lahko to velja le, če je $p = -1$ in $a^2 - 5a + 6 = 0$, torej $a = 2$ ali $a = 3$. Torej lahko nadaljujemo na dva načina.

Prvi način: $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{z}$. Po ureditvi dobimo:
$$-5z' + \frac{4z}{x} + 1 = 0\,.$$
Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:
$$\begin{gathered}\frac{5\mathrm{d}z_H}{z_H} = \frac{4\,\mathrm{d}x}{x}\,, \quad 5\ln\frac{z_H}{A} = 4\ln x\,, \quad z_H = Ax^{4/5}\,,\\ z = a(x)\,x^{4/5}\,, \qquad z' = a'(x)\,x^{4/5} + \tfrac{4}{5}\,a(x)\,x^{-1/5}\,,\\ -5a'(x)\,x^{4/5} + 1 = 0\,, \quad a'(x) = \tfrac{1}{5}\,x^{-4/5}\,, \quad a(x) = x^{1/5} + C\,, \quad z = x + Cx^{4/5}\,.\end{gathered}$$
Splošna rešitev je torej:
$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{x + Cx^{4/5}}$$
skupaj z izhodiščno rešitvijo $y = \dfrac{2}{x}$.

Drugi način: $y = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{z}$. Po ureditvi dobimo:
$$-5z' + \frac{6z}{x} + 1 = 0\,.$$
Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:
$$\begin{gathered}5\frac{\mathrm{d}z_H}{z_H} = \frac{6\,\mathrm{d}x}{x}\,, \quad 5\ln\frac{z_H}{A} = 6\ln x\,, \quad z_H = Ax^{6/5}\,,\\ z = a(x)\,x^{6/5}\,, \qquad z' = a'(x)\,x^{6/5} + \tfrac{6}{5}\,a(x)\,x^{1/5}\,,\\ -5a'(x)\,x^{6/5} + 1 = 0\,, \quad a'(x) = \frac{1}{5}\,x^{-6/5}\,, \quad a(x) = -x^{-1/5} + D\,, \quad z = -x + Dx^{6/5}\,.\end{gathered}$$
Splošna rešitev je torej:
$$y = \frac{3}{x} + \frac{1}{Dx^{6/5} - x}$$
skupaj z izhodiščno rešitvijo $y = \dfrac{3}{x}$.

Opomba. Splošni rešitvi, dobljeni na posamezen način, se ujemata, če je $CD = -1$.

5. $y = \frac{1}{37}\,x\,e^{-3x} + \frac{24}{1369}\,e^{-3x} - \frac{24}{1369}\cos\bigl(\frac{1}{2}x\bigr) + \frac{70}{1369}\sin\bigl(\frac{1}{2}x\bigr)$.

Rešitve kolokvija iz diferencialnih enačb z dne 14. 6. 2017

1. Gre za nehomogeno Euler–Cauchyjevo enačbo s karakteristično enačbo $\mu^2 - \mu - 2 = 0$, ki ima rešitvi $\mu_1 = 2$ in $\mu_2 = -1$. Od tod dobimo splošno rešitev pripadajoče homogene enačbe:

$$y_H = C_1\, x^2 + \frac{C_2}{x}\,.$$

Variacija konstant nam da sistem enačb:

$$\begin{aligned} C_1'\, x^2 + \frac{C_2'}{x} &= 0\,, \\ 2C_1'\, x - \frac{C_2'}{x^2} &= \frac{1}{x^4}\,. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je:

$$\begin{aligned} C_1' &= \frac{1}{3x^5}\,, & C_1 &= -\frac{1}{12x^4} + D_1 \\ C_2' &= -\frac{1}{3x^2}\,, & C_2 &= \frac{1}{3x} + D_2\,, \end{aligned}$$

splošna rešitev naše enačbe pa je:

$$y = \frac{1}{4x^2} + D_1\, x^2 + \frac{D_2}{x}\,.$$

Velja še:

$$\begin{aligned} y(1) &= \tfrac{1}{4} + D_1 + D_2\,, \\ y' &= -\frac{1}{2x^3} + 2D_1\, x - \frac{D_2}{x^2}\,, \\ y'(1) &= -\tfrac{1}{2} + 2D_1 - D_2 \end{aligned}$$

in iz začetnih pogojev dobimo:

$$D_1 = \tfrac{1}{12}\,, \qquad D_2 = -\tfrac{1}{3}\,,$$

od tod pa iskano rešitev:

$$y = \frac{x^2}{12} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{4x^2}\,.$$

Kot rešitev diferencialne enačbe to obstaja na intervalu $(0, \infty)$.

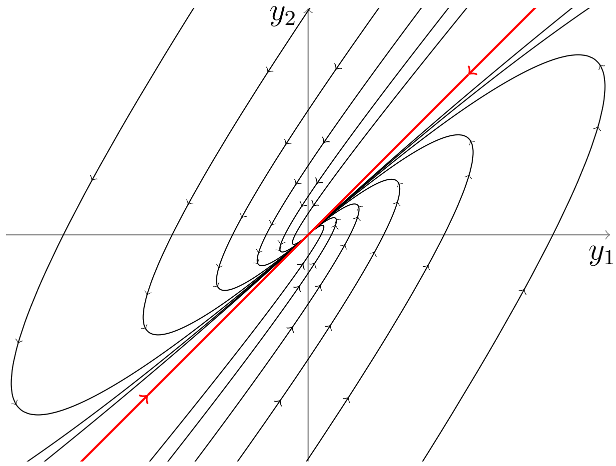
2. a) Karakteristični polinom: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$. Za lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 1$ dobimo verigo:

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev:

$$\begin{aligned} y_1 &= \big(2C_1 + C_2(1 + 2x)\big)e^{-x}\,, \\ y_2 &= (2C_1 + 2C_2 x)e^{-x}\,. \end{aligned}$$

b) Skica:



c) Trajektorija, ki gre skozi točko $T(0,1)$, pomeni, da za določen x velja $y_1 = 0$ in $y_2 = 1$. Ta x lahko poljubno izberemo. če izberemo $x = 0$, dobimo $2C_1 + C_2 = 0$ in $2C_1 = 1$, torej $C_1 = 1/2$ in $C_2 = -1$. Iskana trajektorija se torej v parametrični obliki glasi:

$$\begin{aligned} y_1 &= -2x\, e^{-x}\,, \\ y_2 &= (1-2x)e^{-x}\,. \end{aligned}$$

3. Enačba v okolici izhodišča ni regularna, torej ni očitno, da bo vrednost $y(0)$ sploh definirana. Ima pa vsaj pravilno singularno točko, kar se vidi, če enačbo pomnožimo z x:

$$x^2y'' + xy = 0\,.$$

Iz te oblike razberemo karakteristično enačbo $\mu^2 - \mu = 0$, ki ima rešitvi $\mu_1 = 1$ in $\mu_2 = 0$. Ti se razlikujeta za celo število, zato najprej poiščemo bazno rešitev za izhodiščni eksponent $\mu_1 = 1$. Nastavimo torej:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

in enačba nam da:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0\,.$$

Preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)c_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k = 0\,,$$

od koder dobimo, da je c_0 lahko poljuben, ostali pa so določeni z rekurzivno zvezo:

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{k(k+1)}\,; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Sledi:

$$c_k = (-1)^k \frac{c_0}{(k!)^2(k+1)} \,.$$

Izberemo $c_0 = 1$ in dobimo bazno rešitev:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k!)^2(k+1)} = x - \frac{x^2}{(1!)^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{(2!)^2 \cdot 3} - \frac{x^4}{(3!)^2 \cdot 4} + \cdots$$

Za drugo bazno rešitev nastavimo:

$$y_2 = A y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \,, \quad c_1 = 0 \,.$$

Odvajamo:

$$(y_1 \ln x)' = \frac{y_1}{x} + y_1' \ln x \,, \qquad (y_1 \ln x)'' = \frac{2xy_1' - y_1}{x^2} + y_1'' \ln x$$

in ob upoštevanju, da y_1 reši izvirno diferencialno enačbo, nam le-ta da:

$$2A\, y_1' - A\, \frac{y_1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

oziroma:

$$A \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(n!)^2}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \,.$$

Preindeksiramo, da dobimo enotne eksponente, in upoštevamo, da lahko vselej seštevamo od $k = 0$ naprej:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[A(-1)^k \frac{2k+1}{(k!)^2} + k(k+1) c_{k+1} + c_k \right] x^k = 0 \,.$$

Zdaj pa koeficiente pred x^k izenačimo z nič. Pri $k = 0$ dobimo $A = -c_0$. Pri $k = 1$ ob upoštevanju, da je $c_1 = 0$, dobimo $-3A + 2c_2 = 0$, torej $c_2 = 3c_0$. Za $k = 2, 3, 4, \ldots$ pa dobimo rekurzivno zvezo:

$$c_{k+1} = -\frac{c_k}{k(k+1)} - A(-1)^k \frac{2k+1}{(k!)^2 k(k+1)} = c_0 (-1)^k \frac{2k+1}{(k!)^2 k(k+1)} - \frac{c_k}{k(k+1)} \,.$$

Če izberemo $c_0 = 1$, lahko bazno rešitev zapišemo v obliki:

$$y_2 = -y_1 \ln x + 1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k \,,$$

kjer se koeficienti $c_2, c_3, \ldots$ izražajo z ustrezno rekurzivno zvezo.

Velja $y_1(0) = 0$ in $\lim_{x\to 0} y_1(x)\ln x = 0$. Torej je y_2 v 0 definirana in velja $y_2(0) = 1$. Za splošno rešitev $y = C_1y_1 + C_2y_2$ bo torej $y(0) = 1$ natanko tedaj, ko bo $C_2 = 0$. Iskane rešitve so torej:

$$y = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k!)^2(k+1)} = C_1 \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{144} + \cdots \right) \; ; \quad C_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Opomba. Pri tej nalogi pridemo skozi tudi že kar z nastavkom za regularno točko, torej $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Vendar pa iz tega nastavka ne izhaja, da so to dejansko vse zahtevane rešitve enačbe.

4. S substitucijo:

$$y = z^2\,, \qquad y' = 2zz'\,, \qquad y'' = 2z'^2 + 2zz''$$

se enačba prevede na:

$$4x^2z^3z'' + 4xz^3z' + (4x^2 - 1)z^4 = 0\,.$$

Po deljenju s $4z^3$ dobimo:

$$x^2z'' + xz' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right)z = 0\,,$$

kar je Besselova enačba. Njena splošna rešitev je (vsaj za $x > 0$):

$$z = C_1\, J_{1/2}(x) + C_2\, J_{-1/2}(x) = \frac{D_1 \sin x + D_2 \cos x}{\sqrt{x}}\,,$$

kjer je $D_1 = \sqrt{2/\pi}\, C_1$ in $D_2 = \sqrt{2/\pi}\, C_2$. Za $x < 0$ lahko izkoristimo, da zrcaljenje prek osi y ohranja Besselovo enačbo, in rešitev se izraža v obliki:

$$z = C_1\, J_{1/2}(-x) + C_2\, J_{-1/2}(-x) = \frac{D_1 \sin x + D_2 \cos x}{\sqrt{x}}\,,$$

ali tudi:

$$y = \frac{D_1 \sin x + D_2 \cos x}{\sqrt{-x}}$$

(zdaj je $D_1 = -\sqrt{2/\pi}\, C_1$ in $D_2 = \sqrt{2/\pi}\, C_2$).

Za splošno rešitev prvotne enačbe pa ločimo primer, ko je $y > 0$, in primer, ko je $y < 0$ (pri $y = 0$ enačba ni regularna). Za $y > 0$ je predlagana substitucija $y = z^2$ na mestu: iz splošne rešitve za y dobimo ustrezno delno splošno rešitev za z. Za $y < 0$ pa opazimo, da y reši enačbo natanko tedaj, ko jo reši $-y$. Splošna rešitev prvotne enačbe je torej:

$$\begin{aligned} y &= \pm\bigl(C_1\, J_{1/2}(x) + C_2\, J_{-1/2}(x)\bigr)^2 && ; \quad x > 0 \\ y &= \pm\bigl(C_1\, J_{1/2}(-x) + C_2\, J_{-1/2}(-x)\bigr)^2 && ; \quad x < 0 \end{aligned}$$

oziroma:

$$y = \pm\frac{(D_1 \sin x + D_2 \cos x)^2}{x}\,.$$

Rešitve izpita iz diferencialnih enačb z dne 10. 7. 2017

1. Najprej rešimo homogeni del:

$$\frac{\mathrm{d}y_H}{y_H} = x\,\mathrm{d}x\,, \qquad \ln\frac{y_H}{A} = \frac{x^2}{2}\,, \qquad y_H = A\,e^{x^2/2}\,.$$

Konstanto A nadomestimo s funkcijo a in odvajamo:

$$y = a(x)\,e^{x^2/2}\,, \qquad y' = a'(x)\,e^{x^2/2} + a(x)\,x\,e^{x^2/2}\,.$$

Vstavimo v prvotno enačbo, uredimo in dobimo $a'(x) = x\,e^{-3x^2/2}$, torej $a(x) = -\frac{1}{3}\,e^{-3x^2/2} + C$. Splošna rešitev dane enačbe je torej:

$$y = -\tfrac{1}{3}\,e^{-x^2} + C\,e^{x^2/2}\,.$$

Vstavimo $x = y = 0$ in dobimo $C = \frac{1}{3}$. Iskana partikularna rešitev je torej:

$$y = \frac{e^{x^2/2} - e^{-x^2}}{3}\,.$$

2. a) Hitrost padanja se bo ustalila, ko bo sila teže mg (nasprotno) enaka sili upora kv, torej takrat, ko bo:

$$v = \frac{mg}{k} = 2\,\mathrm{cm/s}\,.$$

b) Označimo s t čas, z y pa globino. Nadalje s piko označimo odvod po času, torej $\dot{u} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. Tedaj je $v = \dot{y}$ hitrost, $a = \ddot{y}$ pa pospešek. Po drugem Newtonovem zakonu je:

$$mg - kv = ma\,,$$

kar nam da diferencialno enačbo drugega reda:

$$mg - k\dot{y} = m\ddot{y}\,.$$

Enačbi lahko znižamo red, če gledamo $v = \dot{y}$. Dobimo enačbo prvega reda:

$$mg - kv = m\dot{v}\,,$$

ki ji lahko ločimo spremenljivke:

$$\mathrm{d}t = \frac{m\,\mathrm{d}v}{mg - kv}\,.$$

Po integraciji dobimo:

$$t = -\frac{m}{k}\ln\frac{mg - kv}{b}\,.$$

Ker mora pri $t = 0$ veljati $v = 0$, mora biti $b = mg$. Torej je:

$$t = -\frac{m}{k} \ln\left(1 - \frac{k}{mg}\, v\right)$$

oziroma:

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right).$$

Z integracijo dobimo še:

$$y = \frac{mg}{k}\, t + \frac{m^2 g}{k^2}\, e^{-kt/m} + y_0 \,.$$

Če želimo ugotoviti, kako globoko bo po določenem času padla kroglica, je za globino ob času $t = 0$ smiselno postaviti nič. Dobimo $y_0 = -\frac{m^2 g}{k^2}$, torej je:

$$y = \frac{mg}{k}\, t - \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-kt/m}\right).$$

Za $t = 0\text{˙}1$ s dobimo $y \doteq 1\text{˙}96$ mm.

3. $y = C_1\, e^{4x} + \left(-\frac{1}{14}x^2 - \frac{1}{49}x + C_2\right)e^{-3x}$.

4. Karakteristični polinom: $\lambda^2 + 7\lambda + 10 = (\lambda + 2)(\lambda + 5)$. Lastna para:

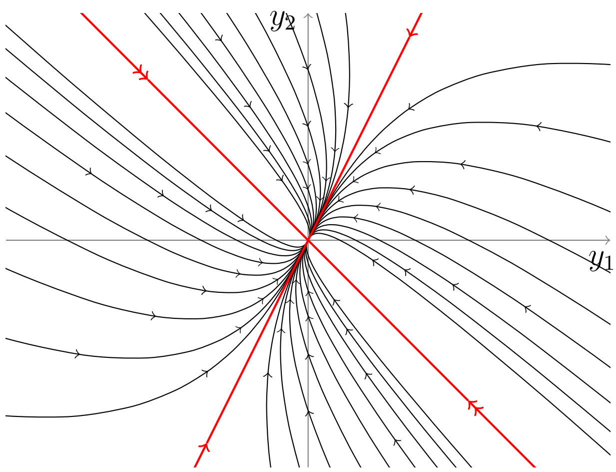
$$\lambda_1 = -2\colon \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -5\colon \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Splošna rešitev:

$$y_1 = C_1\, e^{-2x} + C_2\, e^{-5x}\,,$$
$$y_2 = 2C_1\, e^{-2x} - C_2\, e^{-5x}\,.$$

Fazni portret:



5. Glede na to, da je koeficient pred y'' v izhodišču različen od nič, lahko uporabimo Frobeniusovo metodo v osnovni obliki okoli izhodišča. Nastavimo:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

in enačba nam da:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0\,.$$

Preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente, in upoštevamo, da lahko nekatere koeficiente izpustimo, ker so enaki nič:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)c_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0\,.$$

Uredimo in dobimo:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[(k+1)(k+2)c_{k+2} - (k+1)c_k\Big]x^k = 0\,,$$

od koder sledi, da mora veljati:

$$c_{k+2} = \frac{c_k}{k+2}\,; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

torej:

$$c_{2j} = \frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2j)} = \frac{c_0}{2^j\, j!}\,, \qquad c_{2j+1} = \frac{c_1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2j+1)}\,; \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Zdaj pa vstavimo začetne pogoje. Veljati mora:

$$y(0) = c_0 = 1\,, \qquad y'(0) = c_1 = 0\,.$$

Sledi:

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{2^j\, j!} = e^{x^2/2}\,.$$

2015/16

Rešitve kolokvija iz diferencialnih enačb z dne 5. 4. 2016

Praktična matematika

1. Naj bo $T(t)$ temperatura kolača po t pretečenih minutah. Iz fizikalnih eksperimentov vemo, da se temperatura T spreminja v skladu z diferencialno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_\mathrm{s})\,,$$

kjer je $T_\mathrm{p} = 20°\mathrm{C}$ temperatura prostora. Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T - T_\mathrm{p}} = k\,\mathrm{d}t\,,$$

kar se zintegrira v:

$$\ln\frac{T - T_\mathrm{p}}{A} = kt$$

oziroma $T = T_\mathrm{p} + A\,e^{kt}$. Iz $T(t_1) = T_1 = 50°\mathrm{C}$ in $T(t_2) = T_2 = 30°\mathrm{C}$, kjer je $t_1 = 30\,\mathrm{min}$ in $t_2 = 60\,\mathrm{min}$, tako po nekaj računanja dobimo:

$$T(t) = T_\mathrm{p} + (T_1 - T_\mathrm{p})^{(t_2-t)/(t_2-t_1)}(T_2 - T_\mathrm{p})^{(t-t_1)/(t_2-t_1)}\,.$$

Iskana začetna temperatura pa je:

$$T(0) = T_\mathrm{p} + \frac{(T_1 - T_\mathrm{p})^{t_2/(t_2-t_1)}}{(T_2 - T_\mathrm{p})^{t_1/(t_2-t_1)}} = 110°\mathrm{C}\,.$$

2. Gre za Bernoullijevo enačbo, ki ima trivialno partikularno rešitev $y = 0$. Za ostale jo s substitucijo $z = y^{1/3}$ prevedemo na linearno enačbo:

$$z = x(z' - 1)\,.$$

Rešimo homogeni del:

$$\frac{\mathrm{d}z_H}{z_H} = \frac{\mathrm{d}x}{x}\,, \qquad \ln\frac{z_H}{A} = \ln x\,, \qquad z_H = Ax$$

in naredimo variacijo konstante:

$$z = a(x)\,x\,, \qquad z' = a'(x)\,x + a(x)\,,$$
$$a'(x) = \frac{1}{x}\,, \qquad a(x) = \ln|x| + C\,, \qquad z = x\big(\ln|x| + C\big)\,.$$

Splošna rešitev prvotne enačbe je torej:

$$y = x^3\big(\ln|x| + C\big)^3 \quad \text{in še} \quad y = 0\,.$$

3. Za $y = ax^p$ dobimo:

$$5apx^{p-1} + a^2x^{2p} + 4x^{-2} = 0\,.$$

Za vse x lahko to velja le, če je $p = -1$ in $a^2 - 5a + 4 = 0$, torej $a = 1$ ali $a = 4$. Torej lahko nadaljujemo na dva načina.

Prvi način: $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}$. Po ureditvi dobimo:

$$-5z' + \frac{2z}{x} + 1 = 0\,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\begin{gathered}
\frac{5\mathrm{d}z_H}{z_H} = \frac{2\,\mathrm{d}x}{x}\,, \quad 5\ln\frac{z_H}{A} = 2\ln x\,, \quad z_H = Ax^{2/5}\,, \\
z = a(x)\,x^{2/5}\,, \qquad z' = a'(x)\,x^{2/5} + \tfrac{2}{5}\,a(x)\,x^{-3/5}\,, \\
-5a'(x)\,x^{2/5} + 1 = 0\,, \quad a'(x) = \tfrac{1}{5}\,x^{-2/5}\,, \quad a(x) = \tfrac{1}{3}\,x^{3/5} + C\,, \quad z = \tfrac{1}{3}\,x + Cx^{2/5}\,.
\end{gathered}$$

Splošna rešitev je torej:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x + 3Cx^{2/5}}$$

oziroma:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x + C_1x^{2/5}}$$

skupaj z izhodiščno rešitvijo $y = \dfrac{1}{x}$.

Drugi način: $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{z}$. Po ureditvi dobimo:

$$-5z' + \frac{8z}{x} + 1 = 0\,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\begin{gathered}
5\frac{\mathrm{d}z_H}{z_H} = \frac{8\,\mathrm{d}x}{x}\,, \quad 5\ln\frac{z_H}{A} = 8\ln x\,, \quad z_H = Ax^{8/5}\,, \\
z = a(x)\,x^{8/5}\,, \qquad z' = a'(x)\,x^{8/5} + \tfrac{8}{5}\,a(x)\,x^{3/5}\,, \\
-5a'(x)\,x^{8/5} + 1 = 0\,, \quad a'(x) = \frac{1}{5}\,x^{-8/5}\,, \quad a(x) = -\tfrac{1}{3}\,x^{-3/5} + D\,, \quad z = -\tfrac{1}{3}x + Dx^{8/5}\,.
\end{gathered}$$

Splošna rešitev je torej:

$$y = \frac{4}{x} + \frac{3}{3Dx^{8/5} - x}$$

oziroma:

$$y = \frac{4}{x} + \frac{3}{D_1x^{8/5} - x}$$

skupaj z izhodiščno rešitvijo $y = \dfrac{4}{x}$.

Opomba. Splošni rešitvi, dobljeni na posamezen način, se ujemata, če je $C_1D_1 = -1$.

4. Iz:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x^p\left(y\operatorname{ctg}\frac{y}{x}-2x^3\right)\right]=x^p\operatorname{ctg}\frac{y}{x}-\frac{x^{p-1}y}{\sin^2\frac{y}{x}}\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-x^{p+1}\operatorname{ctg}\frac{y}{x}\right]=-(p+1)x^p\operatorname{ctg}\frac{y}{x}-\frac{x^{p-1}y}{\sin^2\frac{y}{x}}$$

dobimo, da je enačba eksaktna, če jo pomnožimo z x^{-2}. Integriramo:

$$\int\left(\frac{y}{x^2}\operatorname{ctg}\frac{y}{x}-2x\right)\mathrm{d}x=-\ln\left|\sin\frac{y}{x}\right|-x^2+a(y)\,,$$
$$-\int\frac{1}{x}\operatorname{ctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y=-\ln\left|\sin\frac{y}{x}\right|+b(x)$$

in vidimo, da se integrala ujemata, če je $a(y)=0$ in $b(x)=-x^2$. Splošna rešitev enačbe je torej:

$$\ln\left|\sin\frac{y}{x}\right|+x^2=C$$

ali ekvivalentno:

$$\sin\frac{y}{x}=A\,e^{-x^2}\,;\quad A\neq 0\,.$$

5. $y=\frac{1}{4}e^{-x}-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)e^{-3x}$.

Rešitve kolokvija iz diferencialnih enačb z dne 13. 6. 2016

Praktična matematika

1. Gre za Euler–Cauchyjevo enačbo s karakteristično enačbo $\mu^2 - 1 = 0$, ki ima rešitvi $\mu_1 = 1$ in $\mu_2 = -1$. Od tod dobimo splošno rešitev pripadajoče homogene enačbe:

$$y_H = C_1\, x + \frac{C_2}{x}\,.$$

Variacija konstant nam da sistem enačb:

$$\begin{aligned} C_1'\, x + \frac{C_2'}{x} &= 0 \\ C_1' - \frac{C_2'}{x^2} &= \frac{1}{x+1}\,. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je:

$$\begin{aligned} C_1' &= \frac{1}{2(x+1)}\,, & C_1 &= \tfrac{1}{2}\ln|x+1| + D_1 \\ C_2' &= -\frac{x^2}{2(x+1)}\,, & C_2 &= -\frac{(x-1)^2}{4} - \tfrac{1}{2}\ln|x+1| + D_2\,, \end{aligned}$$

splošna rešitev naše enačbe pa je:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{2}\ln|x+1| + D_1\, x - \frac{(x-1)^2}{4x} - \frac{1}{2x}\ln|x+1| + \frac{D_2}{x} = \\ &= \frac{x^2-1}{2x}\ln|x+1| + \frac{1}{2} + E_1\, x + \frac{E_2}{x}\,. \end{aligned}$$

Velja še:

$$\begin{aligned} y(1) &= E_1 + E_2 + \tfrac{1}{2}\,, \\ y' &= \frac{x^2+1}{2x^2}\ln|x+1| + \frac{x^2-1}{2x(x+1)} + E_1 - \frac{E_2}{x^2}\,, \\ y'(1) &= \ln 2 + E_1 - E_2 \end{aligned}$$

in iz začetnih pogojev dobimo:

$$E_1 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}\,, \qquad E_2 = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4}\,,$$

od tod pa iskano rešitev:

$$y = \frac{x^2-1}{2x}\ln|x+1| - \frac{(2\ln 2 + 1)x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2\ln 2 - 1}{4x}\,.$$

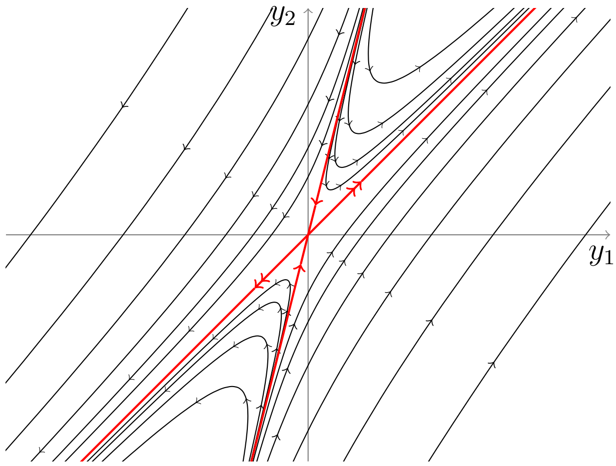
2. a) Karakteristični polinom: $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$. Lastna para:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 2: \quad & \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \lambda_2 = -1: \quad & \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Splošna rešitev:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-x}, \\ y_2 &= C_1\, e^{2x} + 4C_2\, e^{-x}. \end{aligned}$$

b) Gre za sedlo. Skica obnašanja rešitev:



3. a) Karakteristična enačba za začetni eksponent je $\mu^2 - 2\mu + 1 = 0$ in ima dvojno rešitev $\mu_{1,2} = 1$. Najprej poiščemo rešitev, ki zadošča osnovnemu nastavku:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}.$$

Enačba nam da:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) c_n x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_n x^{n+2} - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+3} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0.$$

Delimo s potenco z najnižjim eksponentom, t. j. z x, in malo uredimo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) c_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0.$$

Preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 c_k x^k - \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) c_{k-1} x^k + \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^k = 0\,,$$

uredimo in dobimo:

$$(c_1 - c_0)x + \sum_{k=2}^{\infty} \Big(k^2 c_k - (2k-1)c_{k-1} + c_{k-2} \Big) x^k = 0\,,$$

kar pomeni, da mora biti $c_1 = c_0$, poleg tega pa mora za vse $k = 2, 3, 4, \ldots$ veljati $k^2 c_k - (2k-1)c_{k-1} + c_{k-2} = 0$. Izračunamo prvih nekaj koeficientov ter uganemo in preverimo, da mora za $k = 0, 1, 2, \ldots$ veljati:

$$c_k = \frac{c_0}{k!}\,.$$

Izberimo $c_0 = 1$ in dobimo prvo bazno rešitev:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k!} = x\, e^x\,.$$

b) Splošno rešitev lahko dobimo na vsaj dva načina.
Prvi način: z nastavkom druge bazne rešitve (za $x > 0$):

$$y_2 = A y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}\,,$$

kjer vzamemo še $c_0 = 0$ (saj spreminjanje tega koeficienta ustreza prvi bazni rešitvi), torej:

$$y_2 = A y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1}\,.$$

Odvajamo:

$$(y_1 \ln x)' = \frac{y_1}{x} + y_1' \ln x\,, \qquad (y_1 \ln x)'' = \frac{2x y_1' - y_1}{x^2} + y_1'' \ln x\,.$$

Ob upoštevanju, da y_1 reši izvirno diferencialno enačbo, nam enačba $(*)$ zdaj da:

$$2Axy_1' - 2Axy_1 - 2y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) c_n x^{n+2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+3}\,.$$

Zdaj pa upoštevamo, da je $y_1 = x\, e^x$. Dobimo, da se členi z y_1 odštejejo. Delimo z x in preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente. Dobimo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} (2k-1) c_{k-1} x^k + \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-2} x^k = 0\,.$$

Še uredimo:

$$c_1 x + (4c_2 - 3c_1)x^2 + \sum_{k=3}^{\infty}\Big(k^2 c_k - (2k-1)c_{k-1} + c_{k-2}\Big)x^k = 0\,.$$

Torej mora veljati:

$$c_1 = 0\,, \quad c_2 = \tfrac{3}{4}c_1\,, \quad c_k = \frac{(2k-1)c_{k-1} - c_{k-2}}{4k^2}\;;\; k = 3, 4, 5, \ldots$$

To pa pomeni, da je $c_k = 0$ za vse k. Izberimo $A = 1$ in dobimo $y_2 = x \ln x \, e^x$. Splošna rešitev za $x > 0$ je torej:

$$y = a y_1 + b y_2 = (a + b \ln x)\, x\, e^x\,.$$

Za $y < 0$ lahko vzamemo:

$$y = a y_1 + b y_2 = \big(a + b \ln(-x)\big)\, x\, e^x\,.$$

Ker je v izhodišču singularnost, tehnično gledano teh dveh rešitev ne moremo združiti v enotno rešitev $y = (a + b \ln |x|)\, e^x$, čeprav tako često pišemo zaradi enostavnosti.

Drugi način: z znižanjem reda. Nastavimo $y = y_1 z$ in računamo:

$$\begin{aligned} y &= x\, e^x\, z\,, \\ y' &= (x+1)\, e^x\, z + x\, e^x\, z'\,, \\ y'' &= (x+2)\, e^x\, z + 2(x+1)\, e^x\, z' + x\, e^x\, z'' \end{aligned}$$

in ko vstavimo v enačbo, po ureditvi dobimo:

$$x z'' + z' = 0$$

oziroma:

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{1}{x}\,,$$

kar se najprej zintegrira v:

$$\ln \frac{z'}{b} = -\ln x$$

oziroma:

$$z' = \frac{b}{x}\,,$$

to pa se spet zintegrira v:

$$z = b \ln |x| + a$$

(v resnici na tem koraku splošna rešitev razpade na dvoje – glej končni komentar pri prvem načinu). Od tod dobimo splošno rešitev:

$$y = (a + b \ln |x|)\, x\, e^x\,,$$

ki se ujema s tisto iz prvega načina.

4. Upoštevajoč zvezo:

$$\big(x^{-1}J_1(x)\big)' = -x^{-1}J_2(x)$$

integriramo per partes:

$$\int x\,J_2(x)\,\mathrm{d}x = \int x^2\,x^{-1}J_2(x) = -x\,J_1(x) + 2\int J_1(x)\,\mathrm{d}x = -x\,J_1(x) - 2\,J_0(x) + C\,.$$

5. a) Dana enačba se prevede na kanonično obliko Sturm–Liouvilleove enačbe:

$$\big(p(x)\,y'\big)' + q(x)\,y + \lambda\,r(x)\,y = 0\,,$$

če jo pomnožimo z $r(x)$. Dobimo:

$$p(x) = r(x)\,, \qquad p'(x) = 2r(x)\,, \qquad q(x) = 0\,.$$

To pomeni, da mora veljati $r'(x) = 2r(x)$, kar je izpolnjeno npr. za $r(x) = e^{2x}$. Iskana kanonična oblika je torej:

$$\big(e^{2x}y'\big)' + \lambda\,e^{2x}\,y = 0\,.$$

b) Gre za enačbo s konstantnimi koeficienti s karakteristično enačbo $\mu^2 + 2\mu + \lambda = 0$.
Za $\lambda < 1$ dobimo splošno rešitev:

$$y = C_1\,e^{(-1+\sqrt{1-\lambda})x} + C_2\,e^{(-1-\sqrt{1-\lambda})x}\,.$$

Ko to vstavimo v robna pogoja, dobimo sistem:

$$\begin{aligned} C_1\sqrt{1-\lambda}\big) - C_2\sqrt{1-\lambda} &= 0\,,\\ C_1\big(-1 + e^{\sqrt{1-\lambda}}\big) + C_2\big(-1 - e^{-\sqrt{1-\lambda}}\big) &= 0\,, \end{aligned}$$

od koder po krajšem računu dobimo $C_1 = C_2 = 0$, zato v tem primeru ni lastnih parov.
Za $\lambda = 1$ dobimo splošno rešitev:

$$y = \big(C_1 + C_2 x\big)e^{-x}\,.$$

Ko to vstavimo v robna pogoja, prav tako dobimo $C_1 = C_2 = 0$, torej 0 ni lastna vrednost.
Za $\lambda > 1$ pa dobimo splošno rešitev:

$$y = C_1\,e^{-x}\cos\big(\sqrt{\lambda-1}\,x\big) + C_2\,e^{-x}\sin\big(\sqrt{\lambda-1}\,x\big)\,.$$

Odvajamo:

$$\begin{aligned} y = -C_1\,e^{-x}\cos\big(\sqrt{\lambda-1}\,x\big) - C_1\sqrt{\lambda-1}\,e^{-x}\sin\big(\sqrt{\lambda-1}\,x\big) &-\\ - C_2\,e^{-x}\sin\big(\sqrt{\lambda-1}\,x\big) + C_2\sqrt{\lambda-1}\,e^{-x}\cos\big(\sqrt{\lambda-1}\,x\big)&\,, \end{aligned}$$

vstavimo v robna pogoja, pa dobimo $C_2 = 0$ in $C_1 \cos\big(\sqrt{\lambda - 1}\big) = 0$. Lastno vrednost dobimo le, če je $\sqrt{\lambda - 1}$ oblike $(2k+1)\pi/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Lastni pari so torej:

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= 1 + \left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^2 , \\
y_k &= e^{-x} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\, x\right) ; \\
k &= 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

c) Lastne funkcije so ortogonalne v skalarnem produktu:

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, e^{2x}\, \mathrm{d}x \,.$$

Rešitve izpita iz diferencialnih enačb z dne 24. 6. 2016

Praktična matematika

1. Iz izražave:

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

je razvidno, da gre za homogeno enačbo. S substitucijo $y = xz$, $y' = z + xz'$ dobimo:

$$xz' = 1 + z^2 \,, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{1 + z^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \,, \qquad \operatorname{arctg} z = \ln|x| + C \,, \qquad z = \operatorname{tg}\bigl(\ln|x| + C\bigr) \,.$$

Iskana rešitev je torej $y = x \operatorname{tg}\bigl(\ln|x| + C\bigr)$.

2. a) Hitrost padanja se bo ustalila, ko bo sila teže mg (nasprotno) enaka sili upora kv, torej takrat, ko bo:

$$v = \frac{mg}{k} = 2\,\mathrm{cm/s} \,.$$

b) Označimo s t čas, z y pa globino. Nadalje s piko označimo odvod po času, torej $\dot{u} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. Tedaj je $v = \dot{y}$ hitrost, $a = \ddot{y}$ pa pospešek. Po drugem Newtonovem zakonu je:

$$mg - kv = ma \,,$$

kar nam da diferencialno enačbo drugega reda:

$$mg - k\dot{y} = m\ddot{y} \,.$$

Enačbi lahko znižamo red, če gledamo $v = \dot{y}$. Dobimo enačbo prvega reda:

$$mg - kv = m\dot{v} \,,$$

ki ji lahko ločimo spremenljivke:

$$\mathrm{d}t = \frac{m\,\mathrm{d}v}{mg - kv} \,.$$

Po integraciji dobimo:

$$t = -\frac{m}{k} \ln \frac{mg - kv}{b} \,.$$

Ker mora pri $t = 0$ veljati $v = 0$, mora biti $b = mg$. Torej je:

$$t = -\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{k}{mg}\, v \right)$$

oziroma:

$$v = \frac{mg}{k}\bigl(1 - e^{-kt/m}\bigr) \,.$$

Z integracijo dobimo še:

$$y = \frac{mg}{k}\,t + \frac{m^2 g}{k^2}\,e^{-kt/m} + y_0\,.$$

Če želimo ugotoviti, kako globoko bo po določenem času padla kroglica, je za globino ob času $t = 0$ smiselno postaviti nič. Dobimo $y_0 = -\frac{m^2 g}{k^2}$, torej je:

$$y = \frac{mg}{k}\,t - \frac{m^2 g}{k^2}\big(1 - e^{-kt/m}\big)\,.$$

Za $t = 0{\cdot}1\,\mathrm{s}$ dobimo $y \doteq 1{\cdot}96\,\mathrm{mm}$.

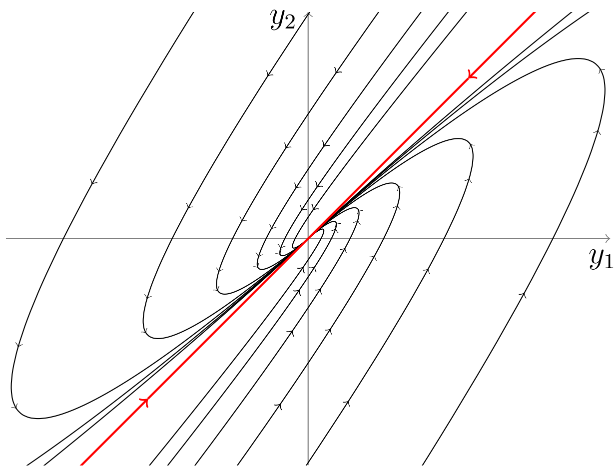
3. a) Karakteristični polinom: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$. Za lastno vrednost $\lambda_{1,2} = 1$ dobimo verigo:

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\,.$$

Splošna rešitev:

$$\begin{aligned} y_1 &= \big(2C_1 + C_2(1 + 2x)\big)e^{-x}\,, \\ y_2 &= (2C_1 + 2C_2 x)e^{-x}\,. \end{aligned}$$

b) Skica:



c) Trajektorija, ki gre skozi točko $T(0, 1)$, pomeni, da za določen x velja $y_1 = 0$ in $y_2 = 1$. Ta x lahko poljubno izbremo. če izberemo $x = 0$, dobimo $2C_1 + C_2 = 0$ in $2C_1 = 1$, torej $C_1 = 1/2$ in $C_2 = -1$. Iskana trajektorija se torej v parametrični obliki glasi:

$$\begin{aligned} y_1 &= -2x\,e^{-x}\,, \\ y_2 &= (1 - 2x)e^{-x}\,. \end{aligned}$$

4. Če vstavimo $y = e^{ax}$, dobimo:

$$a^2(1+x)e^{ax} - a\,a^{ax} - (2+4x)e^{ax} = 0\,.$$

Če želimo, da to velja za vse x, mora biti $a^2 - a - 2 = 0$ in $a^2 - 4 = 0$, kar je res samo za $a = 2$. S substitucijo:

$$y = e^{2x}\,z\,,\quad y' = (2z + z')e^{2x}\,,\quad y'' = (4z + 4z' + z)e^{2x}$$

po ureditvi dobimo:

$$(3+4x)z' + (1+x)z'' = 0$$

oziroma:

$$(3+4x)u + (1+x)u' = 0\,,$$

kjer je $u = z'$. Ločimo spremenljivke in integriramo:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{3+4x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{1+x} - 4\right)\mathrm{d}x\,,\quad \ln\frac{u}{A} = \ln(1+x) - 4x\,,\quad u = A(1+x)\,e^{-4x}\,.$$

Še enkrat integriramo:

$$z = A\int(1+x)\,e^{-4x} = \frac{A}{16}(4x+5)\,e^{-4x} + B$$

Iskana splošna rešitev je torej:

$$y = \frac{A}{16}(4x+5)\,e^{-2x} + B\,e^{2x}$$

ali tudi:

$$y = a(4x+5)\,e^{-2x} + b\,e^{2x}\,.$$

5. S substitucijo:

$$y = z^2\,,\qquad y' = 2zz'\,,\qquad y'' = 2z'^2 + 2zz''$$

se enačba prevede na:

$$4x^2z^3z'' + 4xz^3z' + (4x^2-1)z^4 = 0\,.$$

Po deljenju s $4z^3$ dobimo:

$$x^2z'' + xz' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right)z = 0\,,$$

kar je Besselova enačba. Njena splošna rešitev je:

$$z = C_1J_{1/2}(x) + C_2J_{-1/2}(x) = \frac{D_1\sin x + D_2\cos x}{\sqrt{x}}\,,$$

kjer je $D_1 = \sqrt{2/\pi}\,C_1$ in $D_2 = \sqrt{2/\pi}\,C_2$. Splošna rešitev prvotne enačbe pa je:

$$y = \frac{(D_1\sin x + D_2\cos x)^2}{x}\,.$$

2014/15

Rešitve kolokvija iz diferencialnih enačb z dne 8. 4. 2015

Praktična matematika

1. Označimo s $T_0 = 20°\mathrm{C}$ začetno, s $T_\mathrm{z} = -10°\mathrm{C}$ zunanjo, s $T_\mathrm{m} = 0°\mathrm{C}$ pa mejno temperaturo. Nadalje naj bo $t_1 = 1\ \mathrm{h}$ čas, ob katerem temperatura pade na $T_1 = 15°\mathrm{C}$. Iz zakona o prevajanju toplote sledi, da spreminjanje temperature s časom zadošča diferencialni enačbi:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_\mathrm{z})\,.$$

Po ločitvi spremenljivk:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T - T_\mathrm{z}} = -k\,\mathrm{d}t$$

in integraciji dobimo:

$$\ln\frac{T - T_\mathrm{z}}{a} = -kt\,.$$

Pri $t = 0$ je $T = T_0$, torej je $a = T_0 - T_\mathrm{z}$. Pri $t = t_1$ pa je $T = T_1$, torej je $k = -\frac{1}{t_1}\ln\frac{T_1-T_\mathrm{z}}{T_0-T_\mathrm{z}} = \frac{1}{t_1}\ln\frac{T_0-T_\mathrm{z}}{T_1-T_\mathrm{z}}$. Čas, ob katerem temperatura pade na T_m, pa je:

$$t_\mathrm{m} = -\frac{1}{k}\ln\frac{T_\mathrm{m} - T_\mathrm{z}}{a} = \frac{\ln\frac{T_\mathrm{m}-T_\mathrm{z}}{T_0-T_\mathrm{z}}}{\ln\frac{T_1-T_\mathrm{z}}{T_0-T_\mathrm{z}}}\,t_1 = \frac{\ln\frac{T_0-T_\mathrm{z}}{T_\mathrm{m}-T_\mathrm{z}}}{\ln\frac{T_0-T_\mathrm{z}}{T_1-T_\mathrm{z}}}\,t_1 \doteq 6{\cdot}0257\ \mathrm{h} \doteq 6\ \mathrm{h}\ \ 2\ \mathrm{min}\,.$$

2. $\dfrac{\mathrm{d}y_H}{y_H} = \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x, \quad \ln\dfrac{y_H}{a} = \ln\sin x, \quad y_H = a\sin x.$
$a'(x)\sin^2 x = \sin^2 x, \quad a(x) = x + C.$
Splošna rešitev: $y = (x + C)\sin x$.
Iskana rešitev: $y = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\sin x$.

3. Iz:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x^p\left(3\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}\right)\right] = \frac{2x^{p+1} + 3x^p y}{(x+y)^2}\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^p\,\frac{x}{x+y}\right] = \frac{p\,x^{p+1} + (p+1)x^p y}{(x+y)^2}$$

dobimo, da je enačba eksaktna, če jo pomnožimo z x^2. Integriramo:

$$\int\left(3x^2\ln(x+y) + \frac{x^3}{x+y}\,\mathrm{d}x\right) = x^3\ln(x+y) + a(y)\,,$$
$$\int\frac{x^3}{x+y}\,\mathrm{d}y = x^3\ln(x+y) + b(x)$$

in vidimo, da se integrala ujemata, če je $a(y) = b(x) = 0$ (pri logaritmu ni absolutne vrednosti, ker je logaritem brez absolutne vrednosti že v sami enačbi in mora biti zato $x + y > 0$). Rešitev enačbe je torej:

$$x^3 \ln(x + y) = C$$

oziroma:

$$y = e^{C/x^3} - x\,.$$

4. Gre za Riccatijevo enačbo. Za $y = ax^p$ dobimo:

$$apx^{p-1} = a^2 x^{2p+2} + 2x^{-4}\,.$$

To lahko velja za vse x, če je $p = -3$ in $a^2 + 3a + 2 = 0$, torej $a = -1$ ali $a = -2$. Torej lahko nadaljujemo na dva načina.

Prvi način: $y = -\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{z}$. Po ureditvi dobimo:

$$-\frac{z'}{z^2} = -\frac{2}{xz} + \frac{x^2}{z^2}$$

oziroma:

$$z' - \frac{2z}{x} + x^2 = 0\,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}z_H}{z_H} = \frac{2\,\mathrm{d}x}{x}\,, \quad \ln\frac{z_H}{k} = 2\ln x\,, \quad z_H = kx^2\,,$$
$$k'(x)\,x^2 + x^2 = 0\,, \quad k(x) = -x + C\,, \quad z = -x^3 + Cx^2\,.$$

Splošna rešitev je torej:

$$y = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{Cx^2 - x^3}$$

skupaj z izhodiščno rešitvijo $y = -\dfrac{1}{x^3}$.

Drugi način: $y = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{z}$. Po ureditvi dobimo:

$$-\frac{z'}{z^2} = -\frac{4}{xz} + \frac{x^2}{z^2}$$

oziroma:

$$z' - \frac{4z}{x} + x^2 = 0\,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}z_H}{z_H} = \frac{4\,\mathrm{d}x}{x}\,, \quad \ln\frac{z_H}{k} = 4\ln x\,, \quad z_H = kx^4\,,$$
$$k'(x)\,x^4 + x^2 = 0\,, \quad k(x) = \frac{1}{x} + D\,, \quad z = x^3 + Dx^4\,.$$

Splošna rešitev je torej:

$$y = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^3 + Dx^4}$$

skupaj z izhodiščno rešitvijo $y = -\dfrac{2}{x^3}$.

Opomba. Splošni rešitvi, dobljeni na posamezen način, sta na prvi pogled videti različni, vendar v resnici določata isto družino funkcij. Posamezni rešitvi se ujemata, če je $CD = -1$; poleg tega pa se rešitev za $C = 0$ iz prvega načina ujema z izhodiščno rešitvijo iz drugega načina, rešitev za $D = 0$ iz drugega načina pa se ujema z izhodiščno rešitvijo iz prvega načina.

5. a) Hitrost padanja se bo ustalila, ko bo sila teže mg (nasprotno) enaka sili upora kv, torej takrat, ko bo:

$$v = \frac{mg}{k} = 2\,\mathrm{cm/s}\,.$$

b) Označimo s t čas, z y pa globino. Nadalje s piko označimo odvod po času, torej $\dot{u} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. Tedaj je $v = \dot{y}$ hitrost, $a = \ddot{y}$ pa pospešek. Po drugem Newtonovem zakonu je:

$$mg - kv = ma\,,$$

kar nam da diferencialno enačbo drugega reda:

$$mg - k\dot{y} = m\ddot{y}\,.$$

Enačbi lahko znižamo red, če gledamo $v = \dot{y}$. Dobimo enačbo prvega reda:

$$mg - kv = m\dot{v}\,,$$

ki ji lahko ločimo spremenljivke:

$$\mathrm{d}t = \frac{m\,\mathrm{d}v}{mg - kv}\,.$$

Po integraciji dobimo:

$$t = -\frac{m}{k}\ln\frac{mg - kv}{b}\,.$$

Ker mora pri $t = 0$ veljati $v = 0$, mora biti $b = mg$. Torej je:

$$t = -\frac{m}{k}\ln\left(1 - \frac{k}{mg}\,v\right)$$

oziroma:

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right).$$

Z integracijo dobimo še:

$$y = \frac{mg}{k}\,t + \frac{m^2 g}{k^2}\,e^{-kt/m} + y_0\,.$$

Če želimo ugotoviti, kako globoko bo po določenem času padla kroglica, je za globino ob času $t = 0$ smiselno postaviti nič. Dobimo $y_0 = -\frac{m^2 g}{k^2}$, torej je:

$$y = \frac{mg}{k}\,t - \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-kt/m}\right).$$

Za $t = 0{\cdot}1$ s dobimo $y \doteq 1{\cdot}96$ mm.

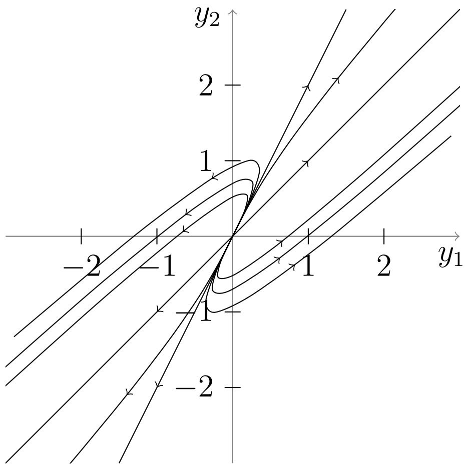
Rešitve kolokvija iz diferencialnih enačb z dne 12. 6. 2015

Praktična matematika

1. $y = -\dfrac{x^2}{8} + C_1\,x^3 + C_2\cos(2\ln|x|) + C_3\sin(2\ln|x|)$.

2. Matrika sistema $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ ima lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 3$ ter pripadajoča lastna vektorja $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Gre za izvir. Skica obnašanja rešitev:



b) *Prvi način.* Rešitev homogenega dela sistema je:

$$
\begin{aligned}
y_{1H} &= C_1\,e^x + C_2\,e^{3x}\,, \\
y_{2H} &= 2C_1\,e^x + C_2\,e^{3x}\,.
\end{aligned}
$$

Iz variacije konstant dobimo sistem:

$$
\begin{aligned}
C_1'\,e^x + C_2'\,e^{3x} &= 1\,, \\
2C_1'\,e^x + C_2'\,e^{3x} &= 0\,,
\end{aligned}
$$

katerega rešitev je $C_1' = -e^{-x}$, $C_2' = 2\,e^{-3x}$ oziroma $C_1 = e^{-x} + D_1$, $C_2 = -\frac{2}{3}\,e^{-3x} + D_2$. Splošna rešitev sistema je torej:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \tfrac{1}{3} + D_1\,e^x + D_2\,e^{3x}\,, \\
y_2 &= \tfrac{4}{3} + 2D_1\,e^x + D_2\,e^{3x}\,.
\end{aligned}
$$

Iz začetnega pogoja dobimo $D_1 = -1$, $D_2 = \frac{2}{3}$. Iskana rešitev je torej:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \tfrac{1}{3} - e^x + \tfrac{2}{3}\, e^{3x}\,,\\
y_2 &= \tfrac{4}{3} - 2\, e^x + \tfrac{2}{3}\, e^{3x}\,.
\end{aligned}
$$

Drugi način. Matriko sistema diagonaliziramo, torej zapišemo $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$, kjer je:

$$
\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Prvotni sistem $\boldsymbol{y}' = \mathbf{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$ z začetnim pogojem $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ s substitucijo $\boldsymbol{y} = \mathbf{P}\boldsymbol{z}$ preide v diagonalni sistem $\boldsymbol{z}' = \mathbf{D}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{w}$ z začetnim pogojem $\boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{z}_0$, kjer je $\mathbf{P}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}$ in $\mathbf{P}\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{y}_0$. Po komponentah je to:

$$
\begin{aligned}
z_1' &= z - 1\,, &\qquad z_1(0) &= 0\,,\\
z_2' &= 3z + 2\,, &\qquad z_2(0) &= 0\,,
\end{aligned}
$$

kar ima za rešitev:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 1 - e^x\,,\\
z_2 &= \tfrac{2}{3}\big(e^{3x} - 1\big)\,.
\end{aligned}
$$

Rešitev prvotnega sistema pa je:

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - e^x \\ \frac{2}{3}\big(e^{3x} - 1\big) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - e^x + \frac{2}{3}\, e^{3x} \\ \frac{4}{3} - 2\, e^x + \frac{2}{3}\, e^{3x} \end{bmatrix},
$$

kar je isto kot prej.

3. Če delimo z x^2, dobimo:

$$
4y'' - \frac{6y'}{x} + \frac{(x+6)y}{x^2} = 0\,, \tag{$*$}
$$

od koder je razvidno, da gre za pravilno singularno točko. Karakteristična enačba za začetni eksponent je $4\mu^2 - 10\mu + 6 = 0$ in ima rešitvi $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \frac{3}{2}$. To pomeni, da za vsako od rešitev karakteristične enačbe dobimo linearno neodvisno rešitev dane diferencialne enačbe.

Naj bo najprej $\mu = 1$. Nastavimo torej:

$$
y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}
$$

in enačba $(*)$ nam da:

$$
4\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)c_n x^{n-1} - 6\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1} = 0\,.
$$

Delimo s potenco z najnižjim eksponentom, t. j. množimo z x:

$$4\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)c_n x^n - 6\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} + 6\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

in preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente:

$$4\sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)c_k x^k - 6\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k + 6\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0\,.$$

Uredimo in dobimo:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(2k(2k-1)c_k + c_{k-1}\Big)x^k = 0\,,$$

kar pomeni, da mora za vse $k = 1, 2, 3, \ldots$ veljati $2k(2k-1)c_k + c_{k-1} = 0$. Od tod sledi:

$$c_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, c_0\,.$$

Izberimo $c_0 = 1$ in dobimo prvo bazno rešitev:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{k+1} = \begin{cases} x\cos\sqrt{x} & ;\ x \ge 0 \\ x\operatorname{ch}\sqrt{-x} & ;\ x \le 0 \end{cases}\,.$$

To je klasična (torej dvakrat zvezno odvedljiva) rešitev dane diferencialne enačbe, definirana na celi realni osi.

Naj bo zdaj še $\mu = \frac{3}{2}$. Za $x > 0$ torej nastavimo:

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} c_n x^{n+3/2}$$

in enačba $(*)$ nam da:

$$4\sum_{n=0}^{\infty}\big(n+\tfrac{1}{2}\big)\big(n+\tfrac{3}{2}\big)c_n x^{n-1/2} - 6\sum_{n=0}^{\infty}\big(n+\tfrac{3}{2}\big)c_n x^{n-1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1/2} + 6\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1/2} = 0\,.$$

Delimo s potenco z najnižjim eksponentom, t. j. množimo z $x^{1/2}$:

$$4\sum_{n=0}^{\infty}\big(n+\tfrac{1}{2}\big)\big(n+\tfrac{3}{2}\big)c_n x^n - 6\sum_{n=0}^{\infty}\big(n+\tfrac{3}{2}\big)c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} + 6\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

in preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente:

$$4\sum_{k=0}^{\infty}\big(k+\tfrac{1}{2}\big)\big(k+\tfrac{3}{2}\big)c_k x^k - 6\sum_{k=0}^{\infty}\big(k+\tfrac{3}{2}\big)c_k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k + 6\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0\,.$$

Uredimo in dobimo:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(2k(2k+1)c_k + c_{k-1}\Big)x^k = 0\,,$$

kar pomeni, da mora za vse $k = 1, 2, 3, \ldots$ veljati $2k(2k+1)c_k + c_{k-1} = 0$. Od tod sledi:

$$c_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,c_0\,.$$

Izberimo $c_0 = 1$ in dobimo drugo bazno rešitev za primer, ko je $x > 0$:

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{k+3/2} = x\sin\sqrt{x}\,.$$

Za $x < 0$ dobimo rešitev:

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,x^{k+1}\sqrt{-x} = x\,\mathrm{sh}\,\sqrt{-x}\,.$$

Ti dve funkciji se ne dasta sestaviti v funkcijo, ki bi bila dvakrat zvezno odvedljiva na celi realni osi, zato splošno rešitev $y = ay_1 + by_2$ gledamo na vsaki polosi posebej. Za $x > 0$ dobimo:

$$y = ax\cos\sqrt{x} + bx\sin\sqrt{x}\,,$$

za $x < 0$ pa dobimo:

$$y = ax\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-x} + bx\,\mathrm{sh}\,\sqrt{-x}\,.$$

Možno pa je tudi s pomočjo potenčne vrste izračunati le eno rešitev, nato pa znižati red diferencialne enačbe: splošno rešitev nastavimo v obliki $y = y_1 z$. Za $x > 0$ računamo:

$$\begin{aligned}
y &= zx\cos\sqrt{x}\,,\\
y' &= z'x\cos\sqrt{x} + z\cos\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}\,z\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,,\\
y'' &= z''x\cos\sqrt{x} + 2z'\cos\sqrt{x} - z'\sqrt{x}\sin\sqrt{x} - \tfrac{3}{4}\,zx^{-1/2}\sin\sqrt{x} - \tfrac{1}{4}\,z\cos\sqrt{x}
\end{aligned}$$

in ko vstavimo v enačbo $(*)$, po ureditvi dobimo:

$$4z''x\cos\sqrt{x} + 2z'\cos\sqrt{x} - 4z'\sqrt{x}\,\sin\sqrt{x} = 0$$

oziroma:

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{1}{2x} + \frac{\mathrm{tg}\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,,$$

kar se najprej zintegrira v:

$$\ln\frac{z'}{c} = -\tfrac{1}{2}\ln x - 2\ln\cos\sqrt{x}$$

oziroma:

$$z' = \frac{c}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}\,,$$

to pa se spet zintegrira v:

$$z = 2c\,\mathrm{tg}\,\sqrt{x} + a\,.$$

Če pišemo $b = 2c$, od tod dobimo splošno rešitev:

$$y = bx\sin\sqrt{x} + ax\cos\sqrt{x}\,.$$

Za $x < 0$ pa računamo:

$$\begin{aligned}
y &= zx\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-x}\,,\\
y' &= z'x\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-x} + z\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-x} + \tfrac{1}{2}\,z\sqrt{-x}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{-x}\,,\\
y'' &= z''x\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-x} + 2z'\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-x} + z'\sqrt{-x}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{-x} - \tfrac{3}{4}\,z(-x)^{-1/2}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{-x} - \tfrac{1}{4}\,z\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-x}
\end{aligned}$$

in ko vstavimo v enačbo $(*)$, po ureditvi dobimo:

$$4z''x\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-x} + 2z'\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-x} + 4z'\sqrt{-x}\ \mathrm{sh}\,\sqrt{-x} = 0$$

oziroma:

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{1}{2x} + \frac{\mathrm{th}\,\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}\,,$$

kar se najprej zintegrira v:

$$\ln\frac{z'}{c} = -\tfrac{1}{2}\ln(-x) - 2\ln\mathrm{ch}\,\sqrt{-x}$$

oziroma:

$$z' = \frac{c}{\sqrt{-x}\,\mathrm{ch}^2\sqrt{-x}}\,,$$

to pa se spet zintegrira v:

$$z = -2c\,\mathrm{th}\,\sqrt{-x} + a\,.$$

Če pišemo $b = -2c$, od tod dobimo splošno rešitev:

$$y = bx\,\mathrm{sh}\,\sqrt{-x} + ax\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-x}\,.$$

Vidimo, da tako za $x > 0$ kot tudi za $x < 0$ pride isto kot prej.

Podobno je možno tudi rešitev za $\mu = 1$ dobiti iz rešitve za $\mu = \frac{3}{2}$.

4. Enačba se prevede na:

$$x^2z'' + xz' + (x^2 - 9)z = 0\,,$$

ki ima splošno rešitev $z = C_1\,J_3(x) + C_2\,Y_3(x)$. Splošna rešitev prvotne enačbe je torej $y = x^{-3}\big(C_1\,J_3(x) + C_2\,Y_3(x)\big)$.

5. a) Dana enačba se prevede na kanonično obliko Sturm–Liouvilleove enačbe:

$$\big(p(x)\,y'\big)' + q(x)\,y + \lambda\,r(x)\,y = 0\,,$$

če jo pomnožimo z $r(x)$. Dobimo:

$$p(x) = r(x)\,, \qquad p'(x) = -2r(x)\,, \qquad q(x) = 0\,.$$

To je izpolnjeno npr. za $p(x) = r(x) = e^{-2x}$. Iskana kanonična oblika je torej:

$$\left(e^{-2x}\, y'\right)' + \lambda\, e^{-2x}\, y = 0\,.$$

b) Enačba ima konstantne koeficiente in karakteristično enačbo $r^2 - 2r + \lambda = 0$, ki ima rešitvi $r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-\lambda}$.
Za $\lambda < 1$ dobimo splošno rešitev:

$$y = C_1\, e^{(1+\sqrt{1-\lambda})x} + C_2\, e^{(1-\sqrt{1-\lambda})x}\,.$$

Ko to vstavimo v robna pogoja, dobimo sistem:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0\,,\\ C_1\, e^{1+\sqrt{1-\lambda}} + C_2\, e^{1-\sqrt{1-\lambda}} &= 0\,, \end{aligned}$$

ki ima edino rešitev $C_1 = C_2 = 0$, saj je $e^{1+\sqrt{1-\lambda}} - e^{1-\sqrt{1-\lambda}} \neq 0$. Torej v tem primeru ni lastnih parov.
Za $\lambda = 1$ dobimo splošno rešitev:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x\,.$$

Ko to vstavimo v robna pogoja, prav tako dobimo $C_1 = C_2 = 0$, torej 1 ni lastna vrednost.
Za $\lambda > 1$ pa dobimo splošno rešitev:

$$y = e^x\Big(C_1 \cos\big(\sqrt{\lambda-1}x\big) + C_2 \sin\big(\sqrt{\lambda-1}x\big)\Big)$$

in ko to vstavimo v robna pogoja, dobimo $C_1 = 0$ in $C_2 \sin\sqrt{\lambda-1} = 0$. Lastne pare torej dobimo za $\sqrt{\lambda-1} = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Natančneje, lastni pari so:

$$\lambda_k = (k\pi)^2 + 1\,, \qquad y_k = e^x \sin(k\pi x)\,.$$

c) Lastne funkcije so ortogonalne v skalarnem produktu:

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(x)\, v(x)\, e^{-2x}\, \mathrm{d}x\,.$$

d) Iz:

$$\begin{aligned} \langle f, y_k\rangle &= \int_0^1 \sin(k\pi x)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} & ;\ k \text{ lih} \\ 0 & ;\ k \text{ sod} \end{cases}\,,\\ \langle f, y_k\rangle &= \int_0^1 \sin^2(k\pi x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

dobimo razvoj:

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)\pi}\, e^x \sin\big((2j+1)\pi x\big)\,.$$

Če delimo z e^x, dobimo razvoj konstante 1 v klasično sinusno Fourierovo vrsto.

Rešitve izpita iz diferencialnih enačb z dne 23. 6. 2015

Praktična matematika

1. Če z r označimo polmer kapljice, le-ta zadošča diferencialni enačbi:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{a}{r^2}\,,$$

kjer je a sorazmernostna konstanta. Po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$r^2\,\mathrm{d}r = a\,\mathrm{d}t\,, \qquad \frac{r^3}{3} = at + b\,, \qquad r = \sqrt[3]{3(at+b)}\,.$$

Pri $t = 1$ je $r = 5$, pri $t = 2$ pa je $r = 10$. Dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 125 &= 3a + 3b\,, \\ 1000 &= 6a + 3b\,, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $a = 875/3$, $b = -250$. Torej je:

$$r = \sqrt[3]{875t - 750}\,.$$

Pri $t = 3$ dobimo $r = \sqrt[3]{1875} \doteq 12{\cdot}33$, torej bo imela kapljica po treh sekundah polmer približno $12{\cdot}33$ mm.

2. *Prvi način.* Gre za Bernoullijevo enačbo. S substitucijo $z = y^{-2}$ po ureditvi dobimo linearno enačbo:

$$x^3 z' + 2\,x^2 z = 2\,,$$

ki jo rešimo po ustaljenem postopku:

$$\frac{\mathrm{d}z_H}{z_H} + \frac{2\,\mathrm{d}x}{x} = 0\,, \quad \ln\frac{z_H}{a} + 2\ln x = 0\,, \quad z_H = \frac{a}{x^2}\,,$$
$$z = \frac{a(x)}{x^2}\,, \quad x\,a'(x) = 2\,, \quad a(x) = 2\ln|x| + C\,, \quad z = \frac{2\ln|x| + C}{x^2}\,.$$

A pozor: pri substituciji $z = y^{-2}$ smo izgubili splošno rešitev $y = 0$. Splošna rešitev dane enačbe je torej:

$$y = \pm\frac{x}{\sqrt{2\ln|x| + C}} \quad \text{in še} \quad y = 0\,.$$

Če vstavimo $x = 1$ in $y = 4$, dobimo $C = 1/16$ in pri korenu pozitivni predznak. Iskana partikularna rešitev je torej:

$$y = \frac{x}{\sqrt{2\ln x + \frac{1}{16}}} = \frac{4x}{\sqrt{32\ln x + 1}}\,,$$

definirana pa je za $x > e^{-1/32}$.

Drugi način. Gre za homogeno enačbo. S substitucijo $y = xz$ po ureditvi dobimo:

$$xz' = -z^3\,.$$

Ločimo spremenljivke, integriramo in dobimo:

$$-\frac{\mathrm{d}z}{z^3} = \frac{\mathrm{d}x}{x}\,, \quad \frac{1}{2z^2} = \ln|x| + D\,, \quad z = \pm\frac{1}{\sqrt{2(\ln|x| + D)}}\,.$$

A pozor: pri ločitvi spremenljivk smo delili z z in izgubili rešitev $z = 0$. Splošna rešitev dane enačbe je torej:

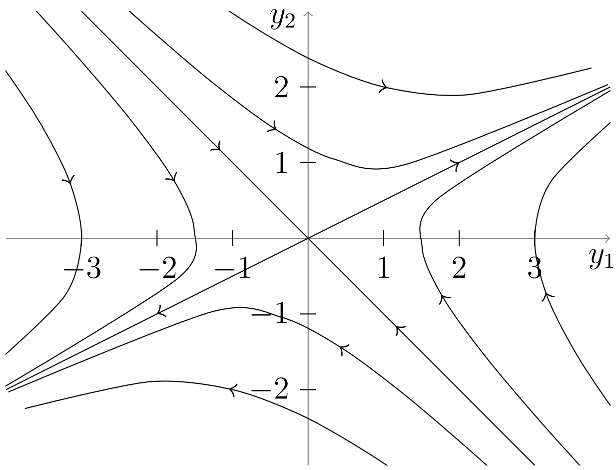
$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2(\ln|x| + D)}} \quad \text{in še} \quad y = 0\,,$$

kar je isto kot pri prvem načinu: posamezni rešitvi se ujemata, če je $C = 2D$.

3. $y = \left(\frac{1}{10}\,x + \frac{1}{50}\right)e^{-x} - \frac{1}{50}\cos(3x) - \frac{4}{150}\sin(3x)$.

4. Matrika sistema $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ima lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -2$ ter pripadajoča lastna vektorja $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

a) Gre za sedlo. Skica obnašanja rešitev:



b) *Prvi način.* Rešitev homogenega dela sistema je:

$$\begin{aligned} y_{1H} &= 2C_1\,e^{x} + C_2\,e^{-2x}\,, \\ y_{2H} &= C_1\,e^{x} - C_2\,e^{-2x}\,. \end{aligned}$$

Iz variacije konstant dobimo sistem:

$$\begin{aligned} 2C_1' \, e^x + C_2' \, e^{-2x} &= 1 \, , \\ C_1' \, e^x - C_2' \, e^{-2x} &= 0 \, , \end{aligned}$$

katerega rešitev je $C_1' = \frac{1}{3} \, e^{-x}$, $C_2' = \frac{1}{3} \, e^{2x}$ oziroma $C_1 = -\frac{1}{3} \, e^{-x} + D_1$, $C_2 = \frac{1}{6} \, e^{2x} + D_2$. Splošna rešitev sistema je torej:

$$\begin{aligned} y_1 &= -\tfrac{1}{2} + 2D_1 \, e^x + D_2 \, e^{-2x} \, , \\ y_2 &= -\tfrac{1}{2} + D_1 \, e^x - D_2 \, e^{-2x} \, . \end{aligned}$$

Drugi način. Matriko sistema diagonaliziramo, torej zapišemo $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, kjer je:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Prvotni sistem $\boldsymbol{y}' = \mathbf{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}$ s substitucijo $\boldsymbol{y} = \mathbf{P}\boldsymbol{z}$ preide v diagonalni sistem $\boldsymbol{z}' = \mathbf{D}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{w}$, kjer je $\mathbf{P}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}$. Po komponentah je to:

$$z_1' = z + \tfrac{1}{3} \, , \qquad z_2' = -2z + \tfrac{1}{3} \, ,$$

kar ima za rešitev:

$$z_1 = -\tfrac{1}{3} + C_1 \, e^x \, , \qquad z_2 = \tfrac{1}{6} + C_2 \, e^{-2x} \, .$$

Rešitev prvotnega sistema pa je:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} + C_1 \, e^x \\ \frac{1}{6} + C_2 \, e^{-2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + 2C_1 \, e^x + C_2 \, e^{-2x} \\ -\frac{1}{2} + C_1 \, e^x - C_2 \, e^{-2x} \end{bmatrix} ,$$

kar je isto kot prej.

5. Če delimo z x, dobimo:

$$y'' + \frac{2y'}{x} - y = 0 \, ,$$

od koder je razvidno, da gre za pravilno singularno točko. Karakteristična enačba za začetni eksponent je $\mu^2 + \mu = 0$ in ima rešitvi $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = -1$. To pomeni, da sicer za vsako od rešitev karakteristične enačbe dobimo linearno neodvisno rešitev dane diferencialne enačbe, vendar pa moramo rešitev za nižji eksponent izvajati iz rešitve za višji eksponent.

Najprej torej poiščemo rešitev za višji eksponent $\mu_1 = 0$. Nastavimo:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

in enačba nam da:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0 \, .$$

Delimo s potenco z najnižjim eksponentom, t. j. množimo z x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0$$

in preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^k = 0\,.$$

Uredimo in dobimo:

$$2c_1 x + \sum_{k=2}^{\infty}\Big(k(k+1)c_k - c_{k-2}\Big)x^k = 0\,,$$

kar pomeni, da mora biti $c_1 = 0$, poleg tega pa mora za vse $k = 2, 3, 4, \ldots$ veljati $k(k+1)c_k - c_{k-2} = 0$. Od tod sledi:

$$c_k = \begin{cases} 0 & ;\ k \text{ lih} \\ \dfrac{c_0}{(k+1)!} & ;\ k \text{ sod.} \end{cases}$$

Izberimo $c_0 = 1$ in dobimo prvo bazno rešitev:

$$y_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j+1)!} = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} & ;\ x \neq 0 \\ 1 & ;\ x = 0\,. \end{cases}$$

Rešitev za nižji eksponent $\mu_2 = -1$ oz. splošno rešitev lahko dobimo na vsaj dva načina.

Prvi način: z znižanjem reda. Splošno rešitev nastavimo v obliki $y = y_1 z$. Za $x \neq 0$ računamo:

$$\begin{aligned} y &= z\,\frac{\operatorname{sh} x}{x}\,, \\ y' &= z'\,\frac{\operatorname{sh} x}{x} + z\,\frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{x^2}\,, \\ y'' &= z''\,\frac{\operatorname{sh} x}{x} + 2z'\,\frac{x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}{x^2} + z\,\frac{(2+x^2)\operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x}{x^3} \end{aligned}$$

in ko vstavimo v enačbo, po ureditvi dobimo:

$$z'' \operatorname{sh} x + 2z' \operatorname{ch} x = 0$$

oziroma:

$$\frac{z''}{z'} = -2 \operatorname{cth} x\,,$$

kar se najprej zintegrira v:

$$\ln \frac{z'}{b} = -2 \ln |\operatorname{sh} x|$$

oziroma:

$$z' = \frac{b}{\operatorname{sh}^2 x}\,,$$

to pa se spet zintegrira v:

$$z = b \operatorname{cth} x + a$$

Od tod dobimo splošno rešitev:

$$y = \frac{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x}{x}\,,$$

ki ima v izhodišču pol, brž ko je $b \neq 0$. Tehnično gledano imamo torej dve splošni rešitvi – eno za $x > 0$ in eno za $x < 0$.

Drugi način: z nastavkom druge bazne rešitve:

$$y_2 = A y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1}\,,$$

kjer vzamemo še $c_1 = 0$. Enačba nam zdaj da:

$$2Ay_1' - A\,\frac{y_1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)c_n x^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0\,.$$

Delimo s potenco z najnižjim eksponentom, t. j. množimo z x^2:

$$2Ax^2y_1' - Axy_1 + \sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)c_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0$$

in preindeksiramo, tako da dobimo enotne eksponente:

$$2Ax^2y_1' - Axy_1 + \sum_{k=0}^{\infty}(k-1)(k-2)c_k x^k + 2\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)c_k x^k - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^k = 0\,.$$

Uredimo in dobimo:

$$2Ax^2y_1' - Axy_1 + \sum_{k=2}^{\infty}\Big(k(k-1)c_k - c_{k-2}\Big)x^k = 0\,. \qquad (*)$$

Zdaj upoštevamo še razvoj funkcije y_1 v potenčno vrsto. Izkaže se, da je dovolj gledati začetek vrste:

$$y_1 = 1 + \frac{x^2}{6} + \cdots$$

Sledi:

$$2x^2y_1' - xy_1 = -x + \frac{x^3}{2} + \cdots$$

Če torej v $(*)$ pogledamo koeficient pri x, dobimo, da mora biti $A = 0$: tako razvoja funkcije y_1 ne potrebujemo več. Ob upoštevanju tega s primerjavo ostalih koeficientov dobimo:

$$k(k-1)c_k - c_{k-2} = 0\,; \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

in če upoštevamo še privzetek $c_1 = 0$, od tod sledi:

$$c_k = \begin{cases} 0 & ;\ k \text{ lih} \\ \dfrac{c_0}{k!} & ;\ k \text{ sod.} \end{cases}$$

Izberimo $c_0 = 1$ in dobimo drugo bazno rešitev:

$$y_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j-1}}{(2j)!} = \frac{\operatorname{ch} x}{x} \,.$$

Sledi splošna rešitev:

$$y = \frac{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x}{x} \,,$$

kar je isto kot prej.

Rešitve izpita iz diferencialnih enačb z dne 27. 8. 2015

Praktična matematika

1. Iz:

$$y = \frac{a}{x}\,, \qquad y' = -\frac{a}{x^2}$$

najprej dobimo $a = xy$ in nato diferencialno enačbo:

$$y' = -\frac{y}{x}\,.$$

Ortogonalne trajektorije zadoščajo diferencialni enačbi:

$$y' = \frac{x}{y} \quad \text{oziroma} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}\,.$$

Po ločitvi spremenljivk dobimo $y\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x$, kar se zintegrira v $\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^2}{2} + C$ oziroma:

$$y^2 - x^2 = b\,.$$

Ortogonalne trajektorije so torej hiperbole.

2. Enačbo zapišemo v diferencialni obliki:

$$(1 + x + y^2)\,\mathrm{d}x + (x + y^2 + 2y)\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Pomnožimo z $f(x + y)$ in računajmo:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[(1 + x + y^2) f(x, y)\Big] = 2y\, f(x + y) + (1 + x + y^2) f'(x + y)\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[(x + y^2 + 2y) f(x, y)\Big] = f(x + y) + (x + y^2 + 2y) f'(x + y)\,.$$

Enačba bo eksaktna natanko tedaj, ko bosta zgornja izraza enaka. Po ureditvi dobimo:

$$(2y - 1)\big(f(x + y) - f'(x + y)\big) = 0\,.$$

Enačba bo torej eksaktna, brž ko bo veljalo $f'(z) = f(z)$ oziroma $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = w$, če označimo $w = f(z)$. Po ločitvi spremenljivk dobimo $\frac{\mathrm{d}w}{w} = \mathrm{d}z$, kar se zintegrira v $\ln\frac{w}{a} = z$ oziroma $w = a\,e^z$. Torej lahko postavimo $f(z) = e^z$. Integriramo:

$$\int (1 + x + y^2) e^{x+y}\,\mathrm{d}x = (x + y^2) e^{x+y} + A(y)\,,$$
$$\int (x + y^2 + 2y) e^{x+y}\,\mathrm{d}y = (x + y^2) e^{x+y} + B(x)\,.$$

Če postavimo kar $A(y) = 0$ in $B(x) = 0$, se izraza ujemata. Rešitev dane enačbe je torej:

$$(x + y^2) e^{x+y} = C\,.$$

3. Gre za Riccatijevo enačbo. Za $y = ax$ dobimo:

$$a = 1 + a - 4a^2 \,,$$

kar je res za $a = 1/2$ in $a = -1/2$. Torej lahko nadaljujemo na dva načina.
Prvi način: $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{z}$. Po ureditvi dobimo:

$$x^2 z' - 3xz - 4 = 0 \,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}z_H}{z_H} = \frac{3\,\mathrm{d}x}{x} \,, \quad \ln\frac{z_H}{k} = 3\ln x \,, \quad z_H = kx^3 \,,$$
$$k'(x)\,x^5 - 4 = 0 \,, \quad k(x) = -\frac{1}{x^4} + C \,, \quad z = -\frac{1}{x} + C\,x^3 \,.$$

Splošna rešitev je torej:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{x}{C\,x^4 - 1}$$

skupaj z izhodiščno rešitvijo $y = \dfrac{x}{2}$.
Drugi način: $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{z}$. Po ureditvi dobimo:

$$x^2 z' + 5xz - 4 = 0 \,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}z_H}{z_H} + \frac{5\,\mathrm{d}x}{x} = 0 \,, \quad \ln\frac{z_H}{k} + 5\ln x = 0 \,, \quad z_H = \frac{k}{x^5} \,,$$
$$\frac{k'(x)}{x^3} - 4 = 0 \,, \quad k(x) = x^4 + D \,, \quad z = \frac{1}{x} + \frac{D}{x^5} \,.$$

Splošna rešitev je torej:

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{x}{D + x^4}$$

skupaj z izhodiščno rešitvijo $y = -\dfrac{x}{2}$.
Opomba. Splošni rešitvi, dobljeni na posamezen način, sta na prvi pogled videti različni, vendar v resnici določata isto družino funkcij. Posamezni rešitvi se ujemata, če je $CD = -1$; poleg tega pa se rešitev za $C = 0$ iz prvega načina ujema z izhodiščno rešitvijo iz drugega načina, rešitev za $D = 0$ iz drugega načina pa se ujema z izhodiščno rešitvijo iz prvega načina.

4. S substitucijo $z = y'$ enačbi znižamo red. Dobimo:

$$x^2(x+1)z' + x^2 z = 1 \,.$$

Nadaljujemo po ustaljenem postopku za linearno enačbo:

$$\frac{\mathrm{d}z_H}{z_H} + \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = 0\,, \quad \ln\frac{z_H}{k} + \ln(x+1) = 0\,, \quad z_H = \frac{k}{x+1}\,,$$
$$x^2\,k'(x) = 1\,, \quad k(x) = -\frac{1}{x} + C\,, \quad z = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{C}{x+1}\,.$$

Če pišemo $D = C + 1$, lahko to zapišemo tudi v obliki:

$$z = -\frac{1}{x} + \frac{D}{x+1}\,.$$

Po integraciji dobimo splošno rešitev prvotne enačbe:

$$y = D\ln(x+1) - \ln x + E\,.$$

Ko vstavimo začetne pogoje, dobimo $D\ln 2 + E = 0$, $-1 + \frac{D}{2} = 3$, kar ima za rešitev $D = 8$, $E = -8\ln 2$. Iskana partikularna rešitev je torej:

$$y = 8\ln\frac{x+1}{2} - \ln x\,.$$

5. Matrika sistema $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ima dvojno lastno vrednost $\lambda_{1,2} = -1$, ki ji pripadata lastni vektor $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ in korenski vektor $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ (pri slednjem je lahko več možnosti). Rešitev homogenega dela sistema je torej:

$$\begin{aligned} y_{1H} &= (C_1 + C_2 x)\,e^{-x}\,, \\ y_{2H} &= (2C_1 - C_2 + 2C_2 x)\,e^{-x}\,. \end{aligned}$$

Iz variacije konstant dobimo sistem:

$$\begin{aligned} (C_1' + C_2' x)\,e^{-x} &= 0\,, \\ (2C_1' - C_2' + 2C_2' x)\,e^{-x} &= e^{-x}\,, \end{aligned}$$

katerega rešitev je $C_1' = x$, $C_2' = -1$ oziroma $C_1 = \frac{1}{2}x^2 + D_1$, $C_2 = -x + D_2$. Splošna rešitev sistema je torej:

$$\begin{aligned} y_1 &= \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + D_1 + D_2 x\right) e^{-x}\,, \\ y_2 &= \left(-x^2 + x + 2D_1 - D_2 + 2D_2 x\right) e^{-x}\,. \end{aligned}$$