REŠITVE KOLOKVIJEV IN IZPITOV IZ ANALIZE 3

IŠRM

Zbral: Martin Raič

2009/10

Rešitve kolokvija iz Analize 3 z dne 22. 4. 2010

IŠRM

1. Iz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\operatorname{arctg}(xy)}{x} = \frac{1}{1+x^2y^2}$$

dobimo:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_b^a \frac{1}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_b^a\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \pi\int_b^a \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \\
&= \pi\ln\frac{a}{b}\,.
\end{aligned}$$

Račun utemeljimo z enakomerno konvergenco integrala:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}x$$

za y med a in b. Le-to pa vidimo po Weierstrassovem kriteriju: če je c manjše izmed števil a in b, velja:

$$\left|\frac{1}{1+x^2y^2}\right| \le \frac{1}{1+c^2x^2}\,,$$

integral slednjega od minus neskončno do neskončno pa obstaja.

2. Velja:

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2} &= 2\int_0^{\infty}\int_{1/x}^{2/x} \frac{\mathrm{d}y}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x = \\
&= \ln\frac{x^2+1}{x^2+2}\bigg|_0^{\infty} = \ln 2\,.
\end{aligned}$$

3. Izračunajmo najprej diferencial loka:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s &= \sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2 + (3\sin^2 t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = 3\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,\mathrm{d}t = \\
&= 3\,|\cos t\sin t|\;\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

oziroma, za $-\pi/2 \le t \le \pi/2$:

$$\mathrm{d}s = 3\cos t\,|\sin t|\;\mathrm{d}t\,.$$

Sledi:

$$\int_{-\pi/2\le t\le\pi/2} \mathrm{d}s = 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\,|\sin t|\;\mathrm{d}t = 6\int_0^{\pi/2} \cos t\sin t\,\mathrm{d}t = 3\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = 3$$

ter še:

$$\int_{-\pi/2\le t\le\pi/2} x\,\mathrm{d}s = 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 t\,|\sin t|\;\mathrm{d}t = 6\int_0^{\pi/2} \cos^4 t\sin t\,\mathrm{d}t = -\,\frac{6}{5}\,\cos^5 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{6}{5}$$

in:

$$\int_{-\pi/2\le t\le\pi/2} y\,\mathrm{d}s = 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t\sin^3 t\,|\sin t|\;\mathrm{d}t = 0$$

(zaradi lihosti). Težišče je torej točka $T\big(\frac{2}{5}, 0\big)$.

4. *Prvi način*. Enačbo zapišemo v diferencialni obliki:

$$\big(3y^2 - 16xy + 20x^2\big)\,\mathrm{d}x + \big(2xy - 4x^2\big)\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Iz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\Big[x^a\big(3y^2 - 16xy + 20x^2\big)\Big] &= 6x^a y - 16x^{a+1}\,,\\ \frac{\partial}{\partial x}\Big[x^a\big(2xy - 4x^2\big)\Big] &= 2(a+1)x^a y - 4(a+2)x^{a+1}\end{aligned}$$

razberemo, da je enačba eksaktna natanko tedaj, ko je $a = 2$. Računajmo:

$$\begin{aligned}&\big(3x^2y^2 - 16x^3y + 20x^4\big)\,\mathrm{d}x + \big(2x^3y - 4x^4\big)\,\mathrm{d}y =\\ &\quad = y^2\,\mathrm{d}(x^3) - 4y\,\mathrm{d}(x^4) + 4\mathrm{d}(x^5) + x^3\,\mathrm{d}(y^2) - 4x^4\,\mathrm{d}y =\\ &\quad = \mathrm{d}\big(x^3y^2 - 4x^4y + 4x^5\big)\,.\end{aligned}$$

To lahko dobimo tudi s pomočjo krivuljnih integralov. Rešitev naše diferencialne enačbe je torej:

$$x^3y^2 - 4x^4y + 4x^5 = C$$

oziroma:

$$x^3(y - 2x)^2 = C$$

oziroma:

$$y = 2x \pm \sqrt{\frac{C}{x^3}}$$

oziroma:

$$y = 2x + D\,(\pm x)^{-3/2}$$

ali tudi $y = 2x + D\,|x|^{-3/2}$, pri čemer se zavedamo, da sta to v resnici dve družini rešitev: ena za pozitivne in ena za negativne x.

Drugi način. Opazimo, da lahko enačbo razcepimo:

$$(y - 2x)(3y - 10x + 2xy') = 0\,.$$

Torej je bodisi $y = 2x$ bodisi $3y - 10x + 2xy' = 0$. Slednja diferencialna enačba je linearna, homogeni del se glasi $2\,\frac{\mathrm{d}y'_H}{y_H} + \frac{3}{x} = 0$ in ima rešitev $\ln \frac{y_H}{C} = -\frac{3}{2} \ln|x|$ oziroma $y_H = C\,|x|^{-3/2}$ (če smo natančni, imamo dve družini rešitev: eno za pozitivne in eno za negativne x). Za rešitev originalne rešitve nastavimo $y = C|x|^{-3/2}$ in če smo natančni, velja:

$$y' = |x|^{3/2}\left(C' - \frac{3}{2x}\right)\,.$$

in ko to vstavimo v enačbo, dobimo $C' = 5|x|^{3/2}$, kar se zintegrira v $C = 2x|x|^{3/2} + D$, od koder dobimo splošno rešitev:

$$y = 2x + D\,|x|^{-3/2}\,,$$

kar je isto kot prej.

Rešitve kolokvija iz Analize 3 z dne 3. 6. 2010

IŠRM

1. Ker enačba ne vsebuje eksplicitno x, lahko uvedemo $y' = z$, $y'' = z\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}y$. Dobimo:

$$\frac{z}{y(1+y^2)} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = 0$$

oziroma:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y(1+y^2)} + \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0$$

oziroma:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{y\,\mathrm{d}y}{1+y^2} + \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0\,,$$

kar se zintegrira v:

$$\ln\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \ln\frac{z}{C_1} = 0\,.$$

oziroma:

$$z = C_1\,\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}\,.$$

Ko vstavimo $z = y'$, po ločitvi spremenljivk dobimo:

$$\frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}} = C_1\,\mathrm{d}x\,,$$

kar se zintegrira v:

$$\sqrt{1+y^2} = C_1\,x + C_2$$

oziroma:

$$y = \pm\sqrt{(C_1\,x + C_2)^2 - 1}\,.$$

2. Splošna rešitev: $y = -\frac{1}{3}\,x + C_1\,x^2 + C_2\,x^{-2}$.
Partikularna rešitev: $y = -\frac{1}{3}\,x + \frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{12}\,x^{-2}$.

3. *Prvi način.* Iz $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ sledi, da gre za harmonično funkcijo, ki je vedno imaginarni del neke analitične funkcije. Če z u označimo pripadajočo realno komponento, iz Cauchy–Riemannovega sistema sledi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -a\,,$$

kar je res za $u(x,y) = -ay + c$, kjer je c realna konstanta. Iskana analitična funkcija je torej:

$$f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y) = a(-y + ix) + c + bi$$

oziroma:

$$f(z) = iaz + c + bi\,.$$

Drugi način. Iz $x = (z + \bar{z})/2$ dobimo:

$$v(z) = a\,\frac{z + \bar{z}}{2} + b = a\,\frac{iz - \overline{iz}}{2i} + b = a\,\mathrm{Im}(iz) + b = \mathrm{Im}(iaz + bi) = \mathrm{Im}(iaz + bi + c)\,,$$

kar je isto kot prej.

4. Iz:

$$e^{-2x}\sin x = e^{-2x}\,\mathrm{Im}\,e^{ix} = \mathrm{Im}\big(e^{-2x}\,e^{ix}\big) = \mathrm{Im}\,e^{(-2+i)x}$$

dobimo:

$$\int_0^\infty e^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\int_0^\infty e^{(-2+i)x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\mathrm{Im}\int_0^R e^{(-2+i)x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Substitucija $z = (-2 + i)x$, $\mathrm{d}x = -(2 + i)\,\mathrm{d}z/5$ nam da:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{5}\,\mathrm{Im}\left[\lim_{R\to\infty}(2+i)\int_0^{(2+i)R} e^z\,\mathrm{d}z\right] = \\ &= -\frac{1}{5}\,\mathrm{Im}\Big[(2+i)\lim_{R\to\infty}\big(e^{(2+i)R} - 1\big)\Big] = \\ &= \frac{1}{5}\,\mathrm{Im}(2+i) = \frac{1}{5}\,.\end{aligned}$$

Seveda pa lahko integral izračunamo tudi s čisto realno integracijo, in sicer z dvakratno integracijo po delih in sklicevanjem nase.

Rešitve izpita iz Analize 3 z dne 7. 6. 2010

IŠRM

1. Označimo $h(t) := \displaystyle\int_0^t u\,e^u \sin(t-u)\,\mathrm{d}u$ in opazimo, da je $h = f * g$, konvolucija funkcij $f(t) = t\,e^t$ in $g(t) = \sin t$. Če z F, G in H označimo Laplaceove transformiranke funkcij f, g in H, velja:

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{(s-1)^2}\,, \quad G(s) = \frac{1}{s^2+1} \\
H(s) &= F(s)\,G(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s^2+1)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{s}{s^2+1}\right).
\end{aligned}
$$

Sledi $h(t) = \frac{1}{2}\big[(t-1)e^t + \cos t\big]$.

2. Območje lahko zapišemo v obliki:

$$
D = \big\{(x,y)\ ;\ 1 \le e^{-x}\,y \le 3\,,\ 1 \le e^x\,y \le 2\big\}\,.
$$

S substitucijo:

$$
\begin{gathered}
u = e^x\,y\,, \quad v = e^{-x}\,y\,, \\
x = \frac{1}{2}\ln\frac{u}{v}\,, \quad y = \sqrt{uv}\,, \\
J = \frac{1}{2\sqrt{uv}}
\end{gathered}
$$

dobimo:

$$
\iint_D \frac{1}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\substack{1\le u\le 2\\ 1\le v\le 3}} \frac{1}{2uv}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{u}\cdot\int_1^3 \frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{\ln 2\cdot\ln 3}{2}\,.
$$

Opomba. Seveda lahko integral izračunamo tudi v kartezijskih koordinatah.

3. Enačba ne vsebuje eksplicitno odvisne spremenljivke y. Po substituciji $z = y'$ dobimo natančno logistično enačbo. Po ločitvi spremenljivk in razcepu dobimo:

$$
\frac{\mathrm{d}z}{z(1-z)} = \mathrm{d}x \quad \text{ali} \quad z = 0 \quad \text{ali} \quad z = 1\,.
$$

Prva možnost se zintegrira v:

$$
\ln\left|\frac{z}{1-z}\right| = x + C\,; \quad C \in \mathbb{R}
$$

oziroma:

$$\frac{z}{1-z} = \pm e^{x+C}\,; \quad C \in \mathbb{R}\,,$$

kar je ekvivalentno:

$$\frac{z}{1-z} = a\, e^{x+C}\,; \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

Ko enačbo rešimo na z in upoštevamo še posebni rešitvi, dobimo, da se splošna rešitev za z glasi:

$$z = \frac{a\, e^x}{1 + a\, e^x}; a \in \mathbb{R} \quad \text{ali} \quad z = 1\,.$$

Po integraciji dobimo:

$$y = \ln\bigl(1 + a\, e^x\bigr) + D \quad \text{ali} \quad y = x + D\,; \quad a, D \in \mathbb{R}\,.$$

4. Iz zveze $w = f(z) = \dfrac{1}{z-i}$ najprej izrazimo $z = \dfrac{1}{w} + i$. Pogoj $|z| < 1$ oziroma $z\bar{z} < 1$ se potem prevede na:

$$\left(\frac{1}{w} + i\right)\left(\frac{1}{\bar{w}} - i\right) < 1$$

oziroma:

$$i\bar{w} - iw > 1\,,$$

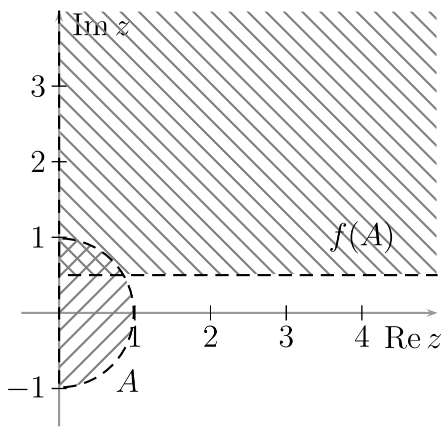
kar je ekvivalentno $\operatorname{Im} w > 1/2$. Pogoj $\operatorname{Re} z > 0$ oziroma $z + \bar{z} > 0$ pa se prevede na:

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} > 0$$

oziroma $w + \bar{w} > 0$ oziroma $\operatorname{Re} w > 0$. Torej je:

$$f(A) = \bigl\{w \in \mathbb{C}\,; \operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Im} w > \tfrac{1}{2}\bigr\}\,.$$

Skica:



Rešitve izpita iz Analize 3 z dne 21. 6. 2010

IŠRM

1. Označimo:

$$J(a) := \int_0^\infty \frac{\ln(a^2+x^2) - \ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Integral najprej izračunamo za $a > 0$. Integrand je parcialno odvedljiv po a in po formalnem odvajanju dobimo:

$$J'(a) = \int_0^\infty \frac{2a}{(a^2+x^2)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Račun je pravilen, ker je odvod integranda zvezna funkcija dveh spremenljivk in ker odvajani integral konvergira enakomerno za $m \le a \le M$ za poljubna $0 < m < M$: uporabimo namreč lahko Weierstrassov kriterij, ker lahko ocenimo:

$$\frac{2a}{(a^2+x^2)(1+x^2)} \le \frac{2M}{m^2(1+x^2)}\,,$$

integral slednjega od nič do neskončno pa obstaja. Izračunajmo:

$$J'(a) = \frac{2a}{a^2-1}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{a^2+x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{2a}{a^2-1}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)\Big|_0^\infty =$$
$$= \frac{\pi}{a+1}\,.$$

Torej je:

$$J(a) = \int \frac{\pi}{a+1}\,\mathrm{d}a = \pi\ln(a+1) + C\,.$$

Iz $J(1) = 0$ izračunamo $C = -\ln 2$, torej za $a > 0$ velja:

$$J(a) = \pi \ln\frac{a+1}{2}\,.$$

Iz zveznosti dobimo, da to velja tudi za $a = 0$. Natančneje, integrand je zvezen v x in a in integral konvergira enakomerno za $0 \le a \le 1$, kar lahko dobimo po Weierstrassovem kriteriju, tako da najprej ocenimo:

$$\int_0^\infty \left|\frac{\ln(a^2+x^2) - \ln(1+x^2)}{1+x^2}\right|\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2) - \ln(a^2+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \le$$
$$\le \int_0^\infty \frac{\ln(1+x^2) - \ln(x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \le$$
$$\le \int_0^1 (\ln 2 - 2\ln x)\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Da obstaja prvi integral, se vidi iz eksplicitnega izračuna nedoločenega integrala. Obstoj drugega integrala pa lahko utemeljimo s substitucijo $t = \ln(1 + x^2)$, ki ga prevede na:

$$\frac{1}{2}\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{t}{\sqrt{e^t - 1}}\,\mathrm{d}t\,,$$

le-tega pa lahko s pomočjo ocene $1 \le \frac{1}{2}e^t$, $e^t - 1 \ge \frac{1}{2}e^t$ navzgor ocenimo s $(\sqrt{2}/2)\int_{\ln 2}^{\infty} t\,e^{-t/2}\,\mathrm{d}t$, ki obstaja.

Vrednost $J(a)$ smo za zdaj izračunali za $a \ge 0$. Toda ker je integrand sod v a, to velja tudi za $J(a)$, to pa pomeni, da mora veljati:

$$J(a) = \pi \ln \frac{|a| + 1}{2}\,.$$

2. Z vpeljavo cilindričnih koordinat:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z\,, \quad J = r$$

dobimo, da je iskani integral enak:

$$\begin{aligned}
J :=& \iiint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\varphi<2\pi\\ 0\le z\le 1}} r^3(\cos\varphi\cos z - \sin\varphi\sin z)^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\
=& \int_0^1\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3(\cos\varphi\cos z - \sin\varphi\sin z)^2\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r = \\
=& \int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r \int_0^1\int_0^{2\pi} (\cos\varphi\cos z - \sin\varphi\sin z)^2\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \\
=& \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^{2\pi} (\cos\varphi\cos z - \sin\varphi\sin z)^2\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,.
\end{aligned}$$

Z upoštevanjem adicijskega izreka za kosinus dobimo:

$$J = \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi + z)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$

in s substitucijo $\alpha = \varphi + z$ v notranjem integralu dobimo:

$$J = \frac{1}{4}\int_0^1\int_z^{2\pi+z} \cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z\,.$$

Toda zaradi periodičnosti je tudi:

$$\begin{aligned}
J =& \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^{2\pi} \cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\big(1 + \cos(2\alpha)\big)\,\mathrm{d}\alpha = \\
=& \left(\frac{\alpha}{8} + \frac{\sin(2\alpha)}{16}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

3. Diferencialna enačba ne vsebuje eksplicitno x, torej lahko vpeljemo substitucijo $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = z$, $y'' = z\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}y$. Tako enačba preide v:

$$\frac{yz\,\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + z^2 = 0\,.$$

Rešitev, ki jo moramo posebej upoštevati, je $z = 0$ oziroma $y = C$. Po deljenju z yz^2 in množenju z $\mathrm{d}y$ dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} + \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0\,,$$

torej $\ln\dfrac{z}{C} + \ln y = 0$, $z = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{C}{y}$, $y\,\mathrm{d}y = C\,\mathrm{d}x$, $\dfrac{y^2}{2} = Cx + D$, $y = \pm\sqrt{2(Cx + D)}$, kar je ekvivalentno $y = \pm\sqrt{C_1x + D_1}$. To zajema tudi prej izločeno rešitev $y = C$.

4. Notranjost kroga s središčem v 1 in polmerom 2, ki ji odvzamemo središče, se s preslikavo $f_1(z) = (z-1)/2$ bijektivno preslika na notranjost enotskega kroga brez središča. Preslikava $f_2(z) = 1/z$ le-to bijektivno preslika na zunanjost enotskega kroga, preslikava $f_3(z) = 2z + i$ pa slednjo spet bijektivno preslika na ciljno množico, t. j. zunanjost kroga s središčem v i in polmerom 2. Iskana konformna preslikava je torej:

$$f(z) := (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) = \frac{4}{z-1} + i$$

Opomba. To pa niso vse možne preslikave s to lastnostjo. Vse možne preslikave so oblike:

$$f(z) = \frac{4a}{z-1} + i\,,$$

kjer je a kompleksno število z $|a| = 1$.

Rešitve izpita iz Analize 3 z dne 13. 9. 2010

IŠRM

1. Označimo:

$$J(a) := \int_0^\infty \ln\Big(1 + \frac{a}{x^2}\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Najprej ugotovimo, da za $a = 0$ integral obstaja in velja $J(0) = 0$. Nadalje je integrand parcialno odvedljiv po a in po formalnem odvajanju dobimo (za $a > 0$):

$$J'(a) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{a + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{a}}\bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}\,.$$

Če so torej izpolnjeni pogoji (glej spodaj), torej velja:

$$J(a) = \int \frac{\pi}{2\sqrt{a}} = \pi\sqrt{a} + C$$

in ker je $J(0) = 0$, mora veljati $J(a) = \pi\sqrt{a}$.

Utemeljitev. Najprej izpeljemo, da je J zvezna funkcija na $[0, \infty)$. Integrand je namreč zvezen za $(x, a) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ in konvergira enakomerno po $a \in [0, M]$ za vsak $M > 0$ pri obeh mejah. Obakrat lahko uporabimo Weierstrassov kriterij. Na spodnji meji ocenimo:

$$\left|\ln\Big(1 + \frac{a}{x^2}\Big)\right| \le \ln\frac{M}{x^2} = \ln M - 2\ln x\,,$$

integral $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ pa obstaja. Na zgornji meji pa iz ocene $\ln(1+t) = \int_0^t \mathrm{d}u/(1+u) \le \int_0^t \mathrm{d}u = t$ za $t \ge 0$ izpeljemo:

$$\left|\ln\Big(1 + \frac{a}{x^2}\Big)\right| \le \frac{M}{x^2}\,,$$

integral $\int_1^\infty (M/x^2)\,\mathrm{d}x$ pa spet obstaja.

Integrand v odvajanem integralu je prav tako zvezna funkcija na $(x, a) \in [0, \infty) \times (0, \infty)$ in integral $J'(a)$ konvergira enakomerno po $a \in [m, \infty)$, kjer je $m > 0$. Spet uporabimo Weierstrassov kriterij in ocenimo:

$$\left|\frac{1}{a + x^2}\right| \le \frac{1}{m + x^2}\,,$$

integral slednjega pa spet obstaja. Torej lahko zamenjavo odvajanja in integriranja uporabimo za *strogo* pozitivne a. Tako dobimo, da za $a, b > 0$ velja $J(a) - J(b) = \pi\big(\sqrt{a} - \sqrt{b}\big)$. Toda ker je J zvezen v 0, formula velja tudi za $b = 0$ in dobimo željeni rezultat.

Opomba. Z integralom $J'(a)$ so pri $(x, a) = (0, 0)$ težave, saj integranda ne moremo zvezno razširiti. Prav tako integral $J'(a)$ ne konvergira enakomerno za $a \in [0, m]$. Zato je potrebno preveriti zveznost začetnega integrala $J(a)$.

2. Označimo:

$$J := \iiint_K \frac{z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

Prvi način: s sferičnimi koordinatami. Po prevedbi na trikratni integral dobimo:

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^2}{4}\,.$$

Drugi način: s cilindričnimi koordinatami. Po prevedbi na trikratni integral dobimo:

$$J = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^1 z^2\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_{-1}^1 z^2\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z$$

Slednji integral lahko izračunamo na več načinov. S substitucijo $z = \sin t$ se prevede na:

$$J = 2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\bigl(1-\sin(4t)\bigr)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}\,,$$

lahko pa po upoštevanju sodosti uvedemo tudi substitucijo $w = z^2$ in dobimo:

$$J = 4\pi\int_0^1 z^2\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^1 w^{1/2}(1-w)^{1/2} = 2\pi\,\mathrm{B}\bigl(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\bigr) = 2\pi\,\frac{\Gamma\bigl(\frac{3}{2}\bigr)^2}{\Gamma(3)} = \frac{\pi^2}{4}\,.$$

Pri prevedbi trojnega na trikratni integral pa je smiseln še en vrstni red integracije, pri katerem dobimo:

$$J = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-z^2}} z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi}{3}\int_0^1(1-r^2)^{3/2}\,\mathrm{d}r$$

in tudi tega lahko izračunamo na enega izmed prej prikazanih načinov.

3. *Prvi način*: z Laplaceovo transformacijo. Če z $X(s)$ in $Y(s)$ označimo Laplaceovi transformiranki izrazov $x(t)$ in $y(t)$, iz sistema in začetnih pogojev dobimo:

$$\begin{aligned} sX &= -X + 3Y + \frac{1}{s+1}\\ sY &= 2X - 6Y\,. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je:

$$\begin{aligned} X &= \frac{s+6}{s(s+1)(s+7)} = \frac{6}{7s} - \frac{5}{6(s+1)} - \frac{1}{42(s+7)}\\ Y &= \frac{2}{s(s+1)(s+7)} = \frac{2}{7s} - \frac{1}{3(s+1)} + \frac{1}{21(s+7)}\,, \end{aligned}$$

od koder dobimo $x = \frac{6}{7} - \frac{5}{6}e^{-t} - \frac{1}{42}e^{-7t}$ in $y = \frac{2}{7} - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{21}e^{-7t}$.

Drugi način: z Jordanovim razcepom in variacijo konstant. Sistem zapišemo v matrični obliki $\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} + \mathbf{b}$, kjer je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -6\end{bmatrix}$ in $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}0\\ e^{-x}\end{bmatrix}$. Najprej rešimo homogeni del, t. j. $\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$, in sicer s pomočjo Jordanovega razcepa $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$, kjer je $\mathbf{J} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -7\end{bmatrix}$ in $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$. Če uvedemo $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \mathbf{P}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}$, velja $\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{bmatrix} = \mathbf{J}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}$, torej $\dot{u} = C_1$ in $\dot{v} = C_2\,e^{-7t}$. Rešitev homogenega dela se tako glasi:

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \mathbf{P}\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\,e^{-7t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3C_1 + C_2\,e^{-7t}\\ C_1 - C_2\,e^{-7t}\end{bmatrix}$$

Variacija konstant nam da naslednji sistem:

$$\begin{aligned}3\dot{C}_1 + \dot{C}_2\,e^{-7t} &= e^{-t}\\ \dot{C}_1 - 2\dot{C}_2\,e^{-7t} &= 0\,,\end{aligned}$$

ki ima za rešitev:

$$\dot{C}_1 = \tfrac{2}{7}\,e^{-t}\,, \quad \dot{C}_2 = \tfrac{1}{7}\,e^{6t}\,.$$

Po integraciji dobimo:

$$C_1 = -\tfrac{2}{7}\,e^{-t} + D_1\,, \quad C_2 = -\tfrac{1}{42}\,e^{6t} + D_2\,,$$

od koder sledi splošna rešitev:

$$x = -\tfrac{5}{6}\,e^{-t} + 3D_1 + D_2\,e^{-7t}\,, \quad y = -\tfrac{1}{3}\,e^{-t} + D_1 - 2D_2\,e^{-7t}\,.$$

Iz začetnega pogoja $x(0) = 0, y(0) = 0$ dobimo sistem:

$$\begin{aligned}3D_1 + D_2 &= \tfrac{5}{6}\\ D_1 - 2D_2 &= \tfrac{1}{3}\,,\end{aligned}$$

katerega rešitev je $D_1 = -\frac{1}{6}, D_2 = -\frac{1}{42}$, od koder dobimo končno rešitev.

4. Če je $z = e^{it}$, velja $\cos z = \big(e^{it} + e^{-it}\big)/2 = \big(z + z^{-1}\big)/2$ in $\mathrm{d}z = ie^{it}\,\mathrm{d}t$ oziroma $\mathrm{d}t = -i\mathrm{d}z/z$. Sledi:

$$J := \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{2 + \cos t}\,\mathrm{d}t = -i\oint_K \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 4z + 1)}\,\mathrm{d}z\,.$$

kjer $\oint_K$ označuje integral po enotski krožnici v pozitivni smeri. Iz $z(z^2 + 4z + 1) = z\big(z + 2 + \sqrt{3}\big)\big(z + 2 - \sqrt{3}\big)$ in dejstva, da ničli 0 in $-2 + \sqrt{3}$ ležita znotraj, ničla $-2 - \sqrt{3}$ pa zunaj enotske krožnice, dobimo:

$$J = 2\pi i(-i)\left[\left.\frac{z^2 + 1}{z^2 + 4z + 1}\right|_{z=0} + \left.\frac{z^2 + 1}{z\big(z + 2 + \sqrt{3}\big)}\right|_{z=-2+\sqrt{3}}\right] = -\frac{2\pi\big(2 - \sqrt{3}\big)}{\sqrt{3}}\,.$$

Rešitve izpita iz Analize 3 z dne 21. 3. 2011

IŠRM

1. Označimo:
$$F(x) = \int_{e^{1/(x+1)}}^{e^{2/(x+1)}} \frac{y^x}{\ln y}\,\mathrm{d}y\,.$$
Funkcija F je definirana in odvedljiva na $(-\infty, -1)$ in na $(-1, \infty)$. Iz:
$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{e^{2x/(x+1)}}{\frac{2}{x+1}}\,\frac{2\,e^{2/(x+1)}}{(x+1)^2} + \frac{e^{x/(x+1)}}{\frac{1}{x+1}}\,\frac{e^{1/(x+1)}}{(x+1)^2} + \int_{e^{1/(x+1)}}^{e^{2/(x+1)}} y^x\,\mathrm{d}y = \\ &= -\frac{e^2}{x+1} + \frac{e}{x+1} + \frac{y^{x+1}}{x+1}\bigg|_{e^{1/(x+1)}}^{e^{2/(x+1)}} = \\ &= 0 \end{aligned}$$
sklepamo, da je F na vsakem izmed obeh prej omenjenih intervalov konstantna. Nadalje s substitucijo $z = 1/y$ dobimo:
$$\begin{aligned} F(x) &= -\int_{e^{-1/(x+1)}}^{e^{-2/(x+1)}} \frac{z^{-x}}{-\ln z}\,\frac{\mathrm{d}z}{z^2} = \int_{e^{-1/(x+1)}}^{e^{-2/(x+1)}} \frac{z^{-x-2}}{\ln z}\,\mathrm{d}z = \int_{e^{1/(-x-2+1)}}^{e^{2/(-x-2+1)}} \frac{z^{-x-2}}{\ln z}\,\mathrm{d}z = \\ &= F(-x-2)\,. \end{aligned}$$
Ker preslikava $x \mapsto -x-2$ ravno zamenja intervala $(-\infty, -1)$ in $(-1, \infty)$, mora biti prej omenjena konstanta enaka za oba intervala, torej je integral res neodvisen od x. Numerični izračuni pokažejo, da je (do zaokrožitvenih napak natančno) enak 3˙05912.

2. $V = \displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{1-x^2}^{2-2x^2} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2\,\mathrm{d}x = 3\int_0^1 (1-2x^2+x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{5}.$

3. a) Velja:
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\Big[e^{ax}\big(2\sin(x+3y)+\cos(x+3y)\big)\Big] &= e^{ax}\big(6\cos(x+3y) - 3\sin(x+3y)\big)\,, \\ \frac{\partial}{\partial x}\Big[3e^{ax}\cos(x+3y)\Big] &= e^{ax}\big(3a\cos(x+3y) - 3\sin(x+3y)\big)\,. \end{aligned}$$
Dana vektorska funkcija je potencialna natanko tedaj, ko se oba zgornja izraza ujemata, to pa je natanko tedaj, ko je $a = 2$.

b) $e^{2x}\sin(x+3y) + C$.

c) Če enačbo pomnožimo z $e^{2x}\cos(x+3y)\,\mathrm{d}x$, dobimo:
$$3e^{2x}\cos(x+3y)\,\mathrm{d}y + e^{2x}\big(2\sin(x+3y)+\cos(x+3y)\big)\,\mathrm{d}x = 0$$

oziroma:

$$\mathrm{d}\Big[e^{2x}\sin(x+3y)\Big] = 0$$

dobimo rešitev:

$$e^{2x}\sin(x+2y) = C$$

oziroma:

$$\sin(x+2y) = C\,e^{-2x}\,.$$

4. Ker je $\operatorname{Re} z = (z+\bar{z})/2$, je $z \in A$ natanko tedaj, ko je $z+\bar{z} > 4$. Naj bo $w = f(z) = 1/(z-i)$. Tedaj je $z = 1/w + i$. Torej je $z \in A$ natanko tedaj, ko je $1/w + 1/\bar{w} > 4$, to pa je spet natanko tedaj, ko je $4w\bar{w} - w - \bar{w} < 0$. Če pišemo $w = x + iy$, dobimo, da slednja enačba velja natanko tedaj, ko je $4x^2 + 4y^2 - 2x < 0$ oziroma $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{16}$. Množica $f(A)$ je torej odprt krog s središčem v $1/4$ in radijem $1/4$.

Rešitve izpita iz Analize 3 z dne 29. 6. 2011

IŠRM

1. Iz formule za odvod določenega integrala s parametrom dobimo:

$$F'(x) = \cos(x\cos x)\,\mathrm{tg}\,x - 3\cos\big(x\cos(3x-\pi)\big)\,\mathrm{tg}(3x-\pi) + \int_{3x-\pi}^{x} \cos(x\cos y)\sin y\,\mathrm{d}y\,.$$

Po manjši poenostavitvi in substituciji $t = \cos y$ dobimo:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \cos(x\cos x)\,\mathrm{tg}\,x - 3\cos\big(x\cos(3x)\big)\,\mathrm{tg}(3x) - \int_{x\cos(3x-\pi)}^{x\cos x} \cos t\,\mathrm{d}t = \\ &= \cos(x\cos x)\,\mathrm{tg}\,x - 3\cos\big(x\cos(3x)\big)\,\mathrm{tg}(3x) - \sin(x\cos x) - \sin\big(x\cos(3x)\big)\,. \end{aligned}$$

Ko vstavimo $x = \dfrac{\pi}{3}$, dobimo $F'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Označimo z X in Y izraza, ki ponazarjata Laplaceovi transformiranki funkcij x in y kot funkciji spremenljivke s. Dobimo sistem:

$$\begin{aligned} sX - 1 &= -X + 2Y \\ sY &= 2X + 2Y + \frac{1}{s-1}\,, \end{aligned}$$

čigar rešitev je:

$$\begin{aligned} X &= \frac{s^2 - 3s + 4}{(s+2)(s-1)(s-3)} = \frac{14}{15(s+2)} - \frac{1}{3(s-1)} + \frac{2}{5(s-3)}\,, \\ Y &= \frac{3s-1}{(s+2)(s-1)(s-3)} = -\frac{7}{15(s+2)} - \frac{1}{3(s-1)} + \frac{4}{5(s-3)}\,. \end{aligned}$$

Rešitev danega sistema diferencialnih enačb je torej:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{14}{15}\,e^{-2t} - \tfrac{1}{3}\,e^{t} + \tfrac{2}{5}\,e^{3t}\,, \\ y &= -\tfrac{7}{15}\,e^{-2t} - \tfrac{1}{3}\,e^{t} + \tfrac{4}{5}\,e^{3t}\,. \end{aligned}$$

3. Označimo dani integral z I.

Prvi način. Velja:

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{y}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \big(\ln x - \ln(x^2)\big)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \big(x - x\ln x\big)\Big|_0^1 = 1\,.$$

Drugi način. Velja:

$$I = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_0^1 \big(y^{-1/2} - 1\big)\,\mathrm{d}y = 1\,.$$

4. *Prvi način.* Najprej iz parcialnih odvodov:

$$f_x = -e^y \sin x\,, \quad f_{xx} = -e^y \cos x\,, \quad f_y = e^y \cos x\,, \quad f_{yy} = e^y \cos x\,,$$

razberemo, da je $f_{xx} + f_{yy} = 0$. Z drugimi besedamo, f je harmonična funkcija, torej je res realni del neke analitične funkcije $F = f + gi$. Iz Cauchy–Riemannovega sistema dobimo $g_y = f_x = -e^y \sin x$, od koder dobimo npr. $g(x, y) = -e^y \sin x$. Sledi:

$$F(x + iy) = e^y(\cos x - i \sin x) = e^{y-ix}$$

oziroma $F(z) = e^{-iz}$.

Drugi način. Če pišemo $z = x + iy$, velja:

$$\begin{aligned}
f(z) &= e^{(z-\bar{z})/(2i)} \cos\frac{z+\bar{z}}{2} = \\
&= \frac{1}{2}\, e^{(\bar{z}-z)i/2}\Big(e^{(z+\bar{z})i/2)} + e^{-(z+\bar{z})i/2}\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\big(e^{i\bar{z}} + e^{-iz}\big) = \\
&= \frac{1}{2}\big(\overline{e^{-iz}} + e^{-iz}\big) = \\
&= \mathrm{Re}\big(e^{-iz}\big)\,.
\end{aligned}$$

2008/09

Rešitve kolokvija iz Analize 3 z dne 7. 4. 2009

IŠRM

1. Z odvajanjem pod integralskim znakom dobimo:

$$f'(x) = \int_0^\infty t\, e^{tx-t^2/2}\, \mathrm{d}t\,.$$

Račun je pravilen, ker zgornji integral konvergira enakomerno za vse $x \le a$, kjer je a fiksno realno število. Velja namreč $\left|t\, e^{tx-t^2/2}\right| \le t\, e^{at-t^2/2}$. Po Weierstrassovem kriteriju je dovolj pokazati, da je $\int_0^\infty t\, e^{at-t^2/2}\, \mathrm{d}t < \infty$. S substitucijo $u = t - a$ se integral prevede na:

$$\int_{-a}^\infty (a+u) e^{a^2/2}\, e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u\,.$$

Le-ta pa obstaja, ker obstajata integrala $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u$ in $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |u|\, e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u$.

Velja torej:

$$f'(x) - x f(x) = \int_0^\infty (t-x)\, e^{tx-t^2/2}\, \mathrm{d}t\,.$$

Z uvedbo nove spremenljivke $s = tx - t^2/2$, $\mathrm{d}s = x - t$, dobimo:

$$f'(x) - x f(x) = -\int_0^{-\infty} e^s\, \mathrm{d}s = 1\,.$$

2. Sistem preslikajmo z Laplaceovo transformacijo. Če označimo $X = \mathcal{L}\, x$ in $Y = \mathcal{L}\, Y$, dobimo:

$$\begin{aligned} sX - 1 &= -2X + Y \\ sY &= 2X - 3Y + \frac{1}{s+2}\,. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je:

$$\begin{aligned} X &= \frac{s^2+5s+7}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{2(s+4)} \\ Y &= \frac{3}{(s+1)(s+4)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+4}\,, \end{aligned}$$

od koder sledi:

$$\begin{aligned} x &= e^{-t} - \tfrac{1}{2}\, e^{-2t} + \tfrac{1}{2}\, e^{-4t} \\ y &= e^{-t} - e^{-4t}\,. \end{aligned}$$

3. Integrale, ki pridejo v poštev pri nalogi, lahko izračunamo s pomočjo naslednjih cilindričnih koordinat:

$$x = x\,, \quad y = r\cos\varphi\,, \quad z = r\sin\varphi\,; \qquad J = r\,.$$

Tako za volumen dobimo:

$$\begin{aligned} V &= \iiint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ y^2+z^2\le x^2\\ z\ge 0}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le\varphi\le\pi\\ 0\le r\le x}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 \int_0^x r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}\,. \end{aligned}$$

Ta rezultat lahko dobimo tudi povsem elementarno, saj je naše telo polovica stožca s polmerom osnovne ploskve 1 in višino 1. Težišče označimo s $T^*(x^*, y^*, z^*)$. Zaradi simetrije je $y^* = 0$, preostali dve koordinati pa dobimo s podobnim računom kot za volumen:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{6}{\pi} \iiint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ y^2+z^2\le x^2\\ z\ge 0}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{6}{\pi} \iiint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le\varphi\le\pi\\ 0\le r\le x}} rx\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{6}{\pi} \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 x \int_0^x r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x = 6 \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\,, \\ z^* &= \frac{6}{\pi} \iiint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ y^2+z^2\le x^2\\ z\ge 0}} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{6}{\pi} \iiint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le\varphi\le\pi\\ 0\le r\le x}} r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{6}{\pi} \int_0^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 \int_0^x r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x = \frac{12}{\pi} \int_0^1 \frac{x^3}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\,. \end{aligned}$$

Težišče je torej točka $T^*\left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{\pi}\right)$.

Opomba. Vse integrale lahko izračunamo tudi neposredno, brez vpeljave novih koordinat.

4. Označimo:

$$f(x,y) = y\,e^x - y + e^{-y}\,, \quad g(x,y) = e^x - 1 - e^{-y}\,.$$

Velja:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x - 1 - e^{-y}\,, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = e^x + 1 - e^{-y}\,.$$

Če z Δ označimo trikotnik, čigar rob je krivulja K, po Greenovi formuli dobimo:

$$\oint_K \big(f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y\big) = \iint_\Delta \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2 \iint_\Delta \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

kar je dvakratna ploščina trikotnika Δ, torej 2.

Rešitve kolokvija iz Analize 3 z dne 11. 6. 2009

IŠRM

1. S substitucijo $z = y'$, $y'' = z\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}y$ po ureditvi dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = -2\,\frac{\mathrm{d}y}{y}\,,$$

kar se zintegrira v $\ln\dfrac{z}{C} = -2\ln y$ oziroma $z = C/y^2$. Iz začetnega pogoja $y = 1$, $z = 2$ dobimo $C = 2$, torej je $z = 2/y^2$. Ko vstavimo $z = y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ in uredimo, dobimo:

$$y^2\,\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x\,,$$

kar se zintegrira v $y^3/3 = 2x + D$. Iz začetnega pogoja $x = 0$, $y = 1$ dobimo $D = 1/3$. Rešitev naše diferencialne enačbe je tako:

$$y = \sqrt[3]{6x+1}\,.$$

2. Razcepimo $A = PJP^{-1}$, kjer je:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\,.$$

S substitucijo $x_1 = y_1 + 2y_2$, $x_2 = y_1 + 5y_2$ se torej homogeni del sistema prevede na:

$$\dot{y}_1 = y_1\,, \qquad \dot{y}_2 = -2y_2\,,$$

kar ima za splošno rešitev:

$$y_1 = C_1\,e^t\,, \qquad y_2 = C_2\,e^{-2t}$$

oziroma:

$$x_1 = C_1\,e^t + 2C_2\,e^{-2t}\,, \qquad x_2 = C_1\,e^t + 5C_2\,e^{-2t}\,.$$

Za rešitev izvirnega sistema naredimo variacijo konstant:

$$\dot{C}_1\,e^t + 2\dot{C}_2\,e^{-2t} = 0\,, \qquad \dot{C}_1\,e^t + 5\dot{C}_2\,e^{-2t} = e^t\,,$$

od koder sledi $\dot{C}_1 = -\frac{2}{3}$ in $\dot{C}_2 = \frac{1}{3}\,e^{3t}$ oziroma $C_1 = -\frac{2}{3}\,t + D_1$ in $C_2 = \frac{1}{9}\,e^{3t} + D_2$. Rešitev našega sistema je torej:

$$x_1 = -\tfrac{2}{3}\,t\,e^t + \tfrac{2}{9}\,e^t + D_1\,e^t + 2D_2\,e^{-2t}\,, \qquad x_2 = -\tfrac{2}{3}\,t\,e^t + \tfrac{5}{9}\,e^t + D_1\,e^t + 5D_2\,e^{-2t}\,.$$

3. Trditev, da je $z \in A$, je ekvivalentna trditvi, da je $z + \bar{z} > -2$. Trditev, da je $w \in f(A)$, je ekvivalentna trditvi, da je $\dfrac{1}{w} + i \in A$, torej:

$$\frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} > -2$$

oziroma:

$$2w\bar{w} + w + \bar{w} > 0\,.$$

Če pišemo $w = x + iy$ in uredimo, dobimo:

$$\left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \tfrac{1}{4}\,.$$

Iskana množica je torej zunanjost kroga s središčem v $-1/2$ in polmerom $1/2$.

4. *Prvi način.* Iz $z = e^{it}$ sledi $\mathrm{d}z = ie^{it}\,\mathrm{d}t = iz\,\mathrm{d}t$, torej $\mathrm{d}t = -i\,\mathrm{d}z/z$. Nadalje je:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}\,.$$

Ko to vstavimo v integral, dobimo, da je le-ta enak:

$$J = -2i \oint_{\substack{|z|=1 \\ \circlearrowleft}} \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + 4z + 1} = -2i \oint_{\substack{|z|=1 \\ \circlearrowleft}} \frac{\mathrm{d}z}{(z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})}\,.$$

Integrand ima en pol $(-2 + \sqrt{3})$ znotraj integracijskega območja, drugi $(-2 - \sqrt{3})$ pa je zunaj. Po Cauchyjevi integralski formuli je potem:

$$J = -2i \cdot 2\pi i \left.\frac{1}{z + 2 + \sqrt{3}}\right|_{z=-2+\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

Drugi način. Uvedemo univerzalno trigonometrijsko substitucijo:

$$x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}\,, \quad \mathrm{d}t = \frac{2\,\mathrm{d}x}{1 + x^2}\,, \quad \cos t = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

in pazimo na meje. Dobimo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2 + \cos t} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2 + \cos t} = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{3 + x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left.\frac{x}{\sqrt{3}}\right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

Rešitve izpita iz Analize 3 z dne 29. 6. 2009

IŠRM

1. Označimo $F(a) = \int_0^{a^2} \frac{a - \sqrt{x}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$. Očitno je integrand zvezen v a in x in parcialno zvezno odvedljiv na a, prav tako je tudi zgornja meja zvezno odvedljiva na a. Sledi:

$$F'(a) = 2a \cdot \frac{a-a}{(1+a)^2} + \int_0^{a^2} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = -\left.\frac{1}{1+x}\right|_0^{a^2} = 1 - \frac{1}{1+a^2}\,.$$

Torej je $F(a) = a - \operatorname{arctg} a + C$ za neki $C \in \mathbb{R}$. Ker je $F(0) = 0$, je tudi $C = 0$, zato je končno $F(a) = a - \operatorname{arctg} a$.

Opomba. Račun je pravilen le za $a \ge 0$: za $a < 0$ namreč velja:

$$F'(a) = 2a \cdot \frac{a+a}{(1+a)^2} + \int_0^{a^2} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$$

in sledi:

$$F(a) = \operatorname{arctg} a + a - \frac{2a}{1+a^2}\,.$$

Splošna formula za naš integral pa je:

$$F(a) = a - \operatorname{arctg} |a| + \frac{|a| - a}{1+a^2}\,.$$

2. Z vpeljavo cilindričnih koordinat:

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z\,, \quad J = r$$

dobimo, da je naš integral enak:

$$I = \iiint_{\substack{0\le z\le 1-r\\ 0\le\varphi<2\pi}} z^2\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r} z^2\,\mathrm{d}z\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{3}\int_0^1 r(1-r)^3\,\mathrm{d}r\,.$$

Izračun poenostavimo s substitucijo $t = 1 - r$. Dobimo:

$$I = \frac{2\pi}{3}\int_0^1 t^3(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3}\left.\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5}\right)\right|_0^1 = \frac{\pi}{30}\,.$$

3. Gre za nehomogeno Eulerjevo enačbo. Iz karakteristične enačbe:

$$\lambda(\lambda-1) + 4\lambda + 2 = 0\,,$$

ki ima enostavni rešitvi $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = -2$, dobimo rešitev homogenega dela enačbe:

$$y_{\mathrm{H}} = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}\,.$$

Rešitev izvirne enačbe dobimo z variacijo konstant, pri čemer enačbo zapišemo v obliki:

$$y'' + \frac{4y'}{x} + \frac{2y}{x^2} = \frac{e^x}{x^2}\,.$$

Dobimo sistem:

$$\begin{aligned} \frac{C_1'}{x} + \frac{C_2'}{x^2} &= 0\,, \\ -\frac{C_1'}{x^2} - \frac{2C_2'}{x^3} &= \frac{e^x}{x^2}\,, \end{aligned}$$

ki ima rešitev:

$$C_1' = e^x\,, \qquad C_2' = -x\,e^x\,.$$

Po integraciji dobimo:

$$C_1 = e^x + D_1\,, \qquad C_2 = (1-x)e^x + D_2\,,$$

kar nam da rešitev:

$$y = \frac{e^x}{x^2} + \frac{D_1}{x} + \frac{D_2}{x^2}\,.$$

4. Najprej enačbo $w = f(z)$ rešimo na z, t. j. poiščemo inverzno funkcijo. Dobimo $z = \dfrac{iw}{w-1}$. Iz neenačbe notranjosti enotskega kroga $z\bar{z} < 1$ in prejšnje zveze dobimo:

$$\frac{w\bar{w}}{(w-1)(\bar{w}-1)} < 1\,,$$

kar je ekvivalentno $\mathrm{Re}(w) < 1/2$. Torej je $f(\Delta) = \{w \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(w) < 1/2\}$.

Rešitve izpita iz Analize 3 z dne 3. 9. 2009

IŠRM

1. Označimo $h(t) := \displaystyle\int_0^t u\,e^u \sin(t-u)\,\mathrm{d}u$ in opazimo, da je $h = f * g$, konvolucija funkcij $f(t) = t\,e^t$ in $g(t) = \sin t$. Če z F, G in H označimo Laplaceove transformiranke funkcij f, g in H, velja:

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{(s-1)^2}\,, \quad G(s) = \frac{1}{s^2+1} \\
H(s) &= F(s)\,G(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s^2+1)} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{s}{s^2+1}\right).
\end{aligned}
$$

Sledi $h(t) = \frac{1}{2}\big[(t-1)e^t + \cos t\big]$.

2. Z vpeljavo modificiranih sferičnih koordinat:

$$
x = r\cos\theta\cos\varphi\,, \quad y = \frac{r\cos\theta\sin\varphi}{\sqrt{2}}\,, \quad z = \frac{r\sin\theta}{\sqrt{3}}\,, \quad J = \frac{r^2\cos\theta}{\sqrt{6}}
$$

(do katerih recimo pridemo, če najprej uvedemo dve preprosti substituciji, nato pa običajne sferične koordinate), dobimo, da je naš integral enak:

$$
I = \int_{\substack{r\ge 0 \\ -\le\varphi<2\pi \\ \pi/2\le\theta\le\pi/2}} r^7\,e^{-r^2}\cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^\infty r^7 e^{-r^2}\,\mathrm{d}r \cdot \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,.
$$

Izračun zadnjih dveh integralov je preprost, v prvega pa uvedemo substitucijo $t = r^2$, $\mathrm{d}t = 2r\,\mathrm{d}r$. Po ureditvi dobimo:

$$
I = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}\int_0^\infty t^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}\cdot 3! = 2\pi\sqrt{6}\,.
$$

3. Enačba ne vsebuje eksplicitno odvisne spremenljivke y. Po substituciji $z = y'$ dobimo natančno logistično enačbo. Po ločitvi spremenljivk in razcepu dobimo:

$$
\frac{\mathrm{d}z}{z(1-z)} = \mathrm{d}x \quad \text{ali} \quad z = 0 \quad \text{ali} \quad z = 1\,.
$$

Prva možnost se zintegrira v:

$$
\ln\left|\frac{z}{1-z}\right| = x + C\,; \quad C \in \mathbb{R}
$$

oziroma:

$$
\frac{z}{1-z} = \pm e^{x+C}\,; \quad C \in \mathbb{R}\,,
$$

kar je ekvivalentno:

$$\frac{z}{1-z} = a\,e^{x+C}\,; \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Ko enačbo rešimo na z in upoštevamo še posebni rešitvi, dobimo, da se splošna rešitev za z glasi:

$$z = \frac{a\,e^x}{1 + a\,e^x}; a \in \mathbb{R} \quad \text{ali} \quad z = 1\,.$$

Po integraciji dobimo:

$$y = \ln\bigl(1 + a\,e^x\bigr) + D \quad \text{ali} \quad y = x + D\,; \quad a, D \in \mathbb{R}\,.$$

4. Naj bo $R > 0$. S K_1 označimo pot v kompleksni ravnini, ki gre naravnost od $-R$ do R, s K_2 pa pot, ki gre od R do $-R$ po zgornjem polkrožnem loku s središčem v izhodišču. Tedaj lahko iskani integral zapišemo v obliki:

$$J = \lim_{R\to\infty} \int_{K_1} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\,\mathrm{d}z\,.$$

Nadalje na K_2 velja:

$$\left|\frac{e^{iz}}{z^2+4}\right| = \frac{e^{-\operatorname{Im} z}}{R^2+4} \le \frac{1}{R^4+4}\,,$$

torej je:

$$\left|\int_{K_2} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\right| \le \frac{\pi R}{R^2+4}\,,$$

od koder sledi:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{K_2} \frac{e^{iz}}{z^2+4}\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

Če torej s K označimo unijo poti K_1 in K_2, dobimo, da je:

$$J = \lim_{R\to\infty} \oint_K \frac{e^{iz}}{z^2+4}\,\mathrm{d}z\,.$$

Toda po Cauchyjevi integralski formuli velja:

$$\oint_K \frac{e^{iz}}{z^2+4}\,\mathrm{d}z = \oint_K \frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-2i)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\, \frac{e^{iz}}{z+2i}\bigg|_{z=2i} = \frac{\pi}{2e^2}$$

(neodvisno od R). Sledi $J = \pi/(2e^2)$.