O POGOJNIH PORAZDELITVAH IN REGULARNIH POGOJNIH VERJETNOSTIH

1 Uvod

Pri pogojni verjetnosti nam Radon–Nikodymov izrek vedno zagotavlja obstoj pogojnih matematičnih upanj, torej tudi pogojnih verjetnosti posameznih dogodkov glede na dano slučajno spremenljivko ali σ-algebro. Včasih pa pride prav, če so pogojne verjetnosti dogodkov "usklajene" tako, da se povsod sestavijo v verjetnostno mero.

Definicija. Naj bo $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor ter naj bosta $(S, \mathscr{S})$ in $(T, \mathscr{T})$ merljiva prostora, $X\colon (\Omega, \mathscr{F}) \to (S, \mathscr{S})$ in $Y\colon (\Omega, \mathscr{F}) \to (T, \mathscr{T})$ pa naj bosta slučajni spremenljivki. *Pogojna porazdelitev* slučajne spremenljivke X glede na Y je preslikava $Q_{X|Y}\colon T \times \mathscr{S} \to [0,1]$, ki izpolnjuje naslednji dve zahtevi:

(1) Za vsak $y \in S$ je preslikava $A \mapsto Q(y, A)$ verjetnostna mera.

(2) Za vsak $A \in \mathscr{S}$ preslikava $y \mapsto Q_{X|Y}(y, A)$ prestavlja pogojno verjetnost dogodka $\{X \in A\}$ glede na Y, t. j. velja $Q_{X|Y}(Y, A) = \mathbb{P}(X \in A \mid Y)$. Z drugimi besedami, preslikava $y \mapsto Q_{X|Y}(y, A)$ je merljiva glede na $\mathscr{T}$ in za vsak $B \in \mathscr{T}$ velja:

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{E}\big[Q_{X|Y}(Y, A)\, \mathbf{1}(Y \in B)\big]\,. \tag{1.1}$$

Definicija. Pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke X glede na σ-algebro $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}$ je njena pogojna porazdelitev glede na identiteto $(\Omega, \mathscr{F}) \to (\Omega, \mathscr{H})$. To bomo označili s $Q_{X|\mathscr{H}}$. Zahteva (2) se torej prevede na $\big(\omega \mapsto Q_{X|\mathscr{G}}(\omega, A)\big) = \mathbb{P}(X \in A \mid \mathscr{H})$.

Definicija. Naj bo $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor in $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$. *Regularna pogojna verjetnost* na $\mathscr{G}$ je pogojna porazdelitev identitete $(\Omega, \mathscr{F}) \to (\Omega, \mathscr{H})$. Regularno pogojno verjetnost glede na slučajno spremenljivko Y bomo označili s $Q_{\mathscr{G}|Y}$, regularno pogojno verjetnost glede na σ-algebro $\mathscr{H}$ pa s $Q_{\mathscr{G}|\mathscr{H}}$.

Opomba. Naj bo $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor, $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ še ena σ-algebra, X in Y pa slučajni spremenljivki na tem prostoru. Slučajna spremenljivka X naj bo merljiva glede na $\mathscr{G}$. Brž ko je $Q_{\mathscr{G}|Y}$ regularna pogojna verjetnost na $\mathscr{G}$ glede na Y, je s predpisom:

$$Q_{X|Y}(y, A) := Q_{\mathscr{G}|Y}\big(y, \{X \in A\}\big) \tag{1.2}$$

določena pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke X glede na Y.

Brž ko torej obstaja regularna pogojna verjetnost, obstaja tudi pogojna porazdelitev. Zanimivo pa je obratno vprašanje:

Če ima slučajna spremenljivka X pogojno porazdelitev glede na Y, ali obstaja regularna pogojna verjetnost na $\sigma(X)$ glede na Y?

V nadaljevanju bomo tudi na to vprašanje podali delen odgovor. Še prej pa se posvetimo obstoju pogojnih porazdelitev. V grobem je možno reči, da le-te obstajajo na dovolj lepih in ne prevelikih prostorih.

2 Obstoj pogojnih porazdelitev

DEFINICIJA. Merljiv prostor je *Borelov*, če je izomorfen kakšni Borelovi podmnožici realne osi s σ-algebro, ki jo na njej inducira Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$.

Opomba. Včasih se v literaturi namesto izraza Borelov uporablja izraz *Luzinov* prostor, čeprav ima lahko slednji pojem tudi malo drugačen pomen.

Izrek 2.1. *Vsaka slučajna spremenljivka, ki slika v Borelov prostor, ima pogojno porazdelitev glede na poljubno drugo slučajno spremenljivko.*

DOKAZ. Glej npr. [3], izrek II.7.5, stran 229. ■

Opomba. Izkaže se, da lastnost merljivega prostora, da ima vsaka slučajna spremenljivka, ki slika vanj, pogojno porazdelitev glede na poljubno drugo slučajno spremenlivko, ni prav daleč od pogoja, da je prostor Borelov: glej [2].

Čeprav se Borelovi prostori zdijo "majhni", v resnici tvorijo presenetljivo širok nabor:

Izrek 2.2. *Vsak poln separabilen metrični prostor, ki ga gledamo kot merljiv prostor z Borelovo σ-algebro, je Borelov.*

Opomba. Topološkim prostorom, ki so homeomorfni kakemu polnemu separabilnemu metričnemu prostoru, pravimo tudi *poljski* prostori.

Zgornji rezultat je posledica naslednjega zanimivega izreka.

Izrek 2.3. *Naj bo $E \subseteq M$ in naj bosta obe množici opremljeni vsaka s svojo metriko, ki sta lahko na E različni, poroditi pa morata isto topologijo. Če je množica E v svoji metriki poln prostor, jo lahko dobimo kot presek števnega števila odprtih množic v M.*

Opomba. Števnim presekom odprtih množic pravimo tudi G_δ množice.

DOKAZ IZREKA 2.3. Naj bo d metrika na E, ρ pa metrika na M. Najprej se spomnimo, da je vsaka zaprta množica v metričnem prostoru G_δ, saj jo lahko zapišemo kot presek unij odprtih krogel v ρ okoli točk v njej. Torej je $\overline{E}$ G_δ množica. Potrebno je le še dokazati, da je E G_δ množica v $\overline{E}$. Za ta namen definiramo U_n kot množico točk v $\overline{E}$, ki imajo okolico, katere presek z E ima diameter glede na d enak največ $1/n$. Množice U_n so odprte v $\overline{E}$ in vsebujejo E: ker namreč metrika d inducira relativno topologijo, za vsak $x \in E$ obstaja okolica iz $\overline{E}$, katere presek z E je ravno odprta krogla okoli x s polmerom $1/n$.

Pokažimo, da tudi E vsebuje presek $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Naj bo $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Tedaj za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja okolica V_n v $\overline{E}$, za katero ima $V_n \cap E$ diameter največ $1/n$. To lastnost pa imajo tudi okolice $W_n := \overline{E} \cap K(x, 1/n) \cap \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, kjer je K odprta krogla glede na ρ. Ker je $x \in \overline{E}$, za vsak n obstaja točka $x_n \in W_n \cap E$. Naj bo zdaj $m \geq n$. Tedaj je $x_m, x_n \in W_n$, od koder sledi $d(x_m, x_n) \leq 1/n$. Torej je zaporedje x_n v tej metriki Cauchyjevo, se pravi konvergentno z limito $x^* \in E$. Toda ker za vse n velja $\rho(x, x_n) < 1/n$, je v resnici $x^* = x$, torej $x \in E$.

Videli smo, da je $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. To pa je G_δ množica v $\overline{E}$ in ker je $\overline{E}$ G_δ množica v M, je končno E G_δ množica v M. ■

Dokaz izreka 2.2. Znano je, da se da vsak separabilen metrični prostor (kot topološki prostor) vložiti v Hilbertovo kocko $H := [0,1]^{\mathbb{N}}$ (glej npr. [1], izrek 10.C.1, stran 264, kjer je dokazan še splošnejši *Urisonov metrizacijski izrek*). Po izreku 2.3 je slika take vložitve G_δ, torej Borelova podmnožica Hilbertove kocke. Slednja pa je kot merljiv prostor izomorfna realni osi (ustrezni izomorfizem dobimo s preureditvijo decimalk, ki je merljiva v obe smeri). ■

3 Obstoj regularnih pogojnih verjetnosti

Porazdelitev slučajne spremenljivke, ki je verjetnostna mera na prostoru, kamor slučajna spremenljivka slika, je *potisk* (angl. *push-forward*) izvirne verjetnostne mere. Če lahko konstruiramo pogojno porazdelitev, pa do regularne pogojne verjetnosti vodi obratna pot, *povlek* (angl. *pull-back*). Zato si najprej oglejmo najosnovnejše o obeh pojmih pri teoriji mere.

Definicija. Naj bo $f\colon S \to T$ preslikava.

(1) *Potisk* σ-algebre $\mathscr{S}$ na S prek preslikave f je največja σ-algebra na T, glede na katero je preslikava f še merljiva. To je družina vseh množic $B \subseteq T$, za katere je $f^{-1}(B) \in \mathscr{S}$. Potisk bomo označevali z $f_*\mathscr{S}$.

(2) *Povlek* σ-algebre $\mathscr{T}$ na T prek preslikave f je namanjša σ-algebra na S, glede na katero je preslikava f še merljiva. To je družina vseh množic $f^{-1}(B)$, kjer je $B \in \mathscr{T}$. Povlek bomo označevali z $f^*\mathscr{T}$.

Opomba. Ni težko preveriti, da sta to res σ-algebri in da se v definiciji vse ujema.

Potiske in povleke σ-algeber se da lepo karakterizirati z nasičenostjo.

Definicija. Naj bo $f\colon S \to T$ poljubna preslikava. Množica $A \subseteq S$ je *nasičena* glede na f, če obstaja taka množica $B \subseteq T$, da je $A = f^{-1}(B)$. Ekvivalentno, to je natanko tedaj, ko je $A = f^{-1}(f(A))$.

Dokaz naslednjih dveh trditev prepuščamo bralcu.

Trditev 3.1. *Potisk σ-algebre $\mathscr{S}$ na množici S prek preslikave f vsebuje natanko množice, ki se dajo zapisati v obliki $f(A) \cup N$, kjer je $A \in \mathscr{S}$ nasičena glede na f in $N \subseteq (f(S))^{\mathrm{c}}$.* ■

Opomba. Potisk pa ne vsebuje nujno slik vseh množic: naj bo $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ in $T = \{t_1, t_2\}$, $\mathscr{S}$ naj bo σ-algebra, generirana z $\{s_1\}$, ter naj bo $f(s_1) = f(s_2) = t_1$ in $f(s_3) = t_2$. Tedaj $f(\{s_1\}) = \{t_1\} \notin f_*\mathscr{S}$; v resnici je $f_*\mathscr{S} = \{\emptyset, T\}$.

Trditev 3.2. *Povlek σ-algebre $\mathscr{T}$ na množici T prek preslikave f vsebuje natanko nasičene množice, katerih slika pripada $\mathscr{T}$.* ■

Opomba. Velja $f^* f_* \mathscr{S} \subseteq \mathscr{S}$ in $f_* f^* \mathscr{T} \supseteq \mathscr{T}$.

Opomba. V teoriji verjetnosti pišemo $\sigma(X)$ za $X^* \mathscr{T}$, če je X slučajna spremenljivka, ki slika v merljiv prostor $(T, \mathscr{T})$.

Definicija. Naj bo $f\colon S \to T$ preslikava.

(1) *Potisk* mere μ, definirane na σ-algebri $\mathscr{S}$ na prostoru S, prek preslikave f je mera na $(T, f_* \mathscr{S})$, definirana po predpisu:

$$f_* \mu(B) := \mu\big(f^{-1}(B)\big) .$$

(2) *Povlek* mere ν, definirane na σ-algebri $\mathscr{T}$ na prostoru T, prek preslikave f je mera $f^* \nu$ na $(S, f^* \mathscr{T})$, ki ima lastnost, da je:

$$f^* \nu\big(f^{-1}(B)\big) = \nu(B)$$

za vse množice $B \in \mathscr{T}$.

Opomba. Če je X slučajna spremenljivka, ki slika v merljiv prostor $(T, \mathscr{T})$, je njena porazdelitev, ki jo često označujemo z $\mathscr{L}(X)$, *zožitev* potiska $X_* \mathbb{P}$ na σ-algebro $\mathscr{T}$.

Opomba. Potisk mere torej vedno obstaja, povlek pa ne nujno. Iz definicije je razvidno le, da je enolično določen.

Trditev 3.3. *Povlek mere ν, ki deluje na merljivem prostoru $(T, \mathscr{T})$, na množico S prek preslikave $f\colon S \to T$ obstaja natanko tedaj, ko ima $T \setminus f(S)$ notranjo mero nič. Z drugimi besedami, obstaja natanko tedaj, ko za vsako množico $N \in \mathscr{T}$, za katero je $f(S) \cap N = \emptyset$, velja $\nu(N) = 0$.*

Dokaz. Recimo najprej, da povlek obstaja. Vzemimo množico $N \in \mathscr{T}$, za katero je $f(S) \cap N = \emptyset$. Ker je tedaj $f^{-1}(N) = \emptyset$, mora biti $\nu(N) = f_* \nu\big(f^{-1}(N)\big) = f_* \nu(\emptyset) = 0$.

Recimo sedaj, da ima $T \setminus f(S)$ notranjo mero nič. Dokazati moramo, da za poljubni množici $B, C \in \mathscr{T}$, za kateri je $f^{-1}(B) = f^{-1}(C)$, velja $\nu(B) = \nu(C)$. Definirajmo $N := (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$. Ker je $f^{-1}(B) = f^{-1}(C)$, je $f^{-1}(N) = \emptyset$, torej $f(S) \cap N = \emptyset$, torej mora biti $\nu(N) = 0$ in zato $f^{-1}(B) = f^{-1}(C)$. ■

Naslednja lastnost je močnejša od tiste iz trditve in zato zadosten pogoj za obstoj povleka.

Definicija. Preslikava $f\colon S \to T$ je *skoraj surjektivna* glede na mero ν na σ-algebri $\mathscr{T}$ na T, če obstaja množica $N \in \mathscr{T}$, za katero je $\nu(N) = 0$ in $f(S) \cup N = T$.

Opomba. Vsaka preslikava f, ki slika iz merljivega prostora $(S, \mathscr{S})$, opremljenega z mero μ, je skoraj surjektivna glede na mero $f_* \mu$ (gledano na $f_* \mathscr{S}$).

Opomba. Če je f skoraj surjektivna glede na mero ν, ima $f(S)$ notranjo mero nič in zato obstaja povlek $f^*\nu$. Če je namreč $f(S) \cup N = T$ in $f(S) \cap N' = \emptyset$, je $N' \subseteq N$, torej tudi $\mu(N') = 0$, brž ko je $\mu(N) = 0$.

Če je torej X slučajna spremenljivka na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathbb{P})$ in je $Q_{X|Y}$ njena pogojna porazdelitev glede na slučajno spremenljivko $Y\colon (\Omega, \mathscr{F}) \to (T, \mathscr{T})$, je nabor povlekov:

$$Q_{\sigma(X)|Y}(y, G) = \Big(X^*\big(A \mapsto Q_{X|Y}(y, A)\big)\Big)(G) \tag{3.1}$$

regularna pogojna verjetnost na $\sigma(X)$ glede na Y.

Ta konstrukcija je seveda možna, brž ko je X skoraj surjektivna glede na vse mere $A \mapsto Q_{X|Y}(y, A)$, ko y preteče T. Ta pogoj pa se da še malo olajšati.

Trditev 3.4. *Naj bo $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor ter naj bosta $X\colon (\Omega, \mathscr{F}) \to (S, \mathscr{S})$ in $Y\colon (\Omega, \mathscr{F}) \to (T, \mathscr{T})$ slučajni spremenljivki. Če je X skoraj surjektivna glede na svojo porazdelitev in če ima pogojno porazdelitev $Q_{X|Y}$ glede na Y,*

(1) *obstaja taka množica $B \in \mathscr{T}$ s $\mathbb{P}(Y \in B) = 1$, da je X skoraj surjektivna glede na vse mere $A \mapsto Q_{X|Y}(y, A)$, ko y preteče B;*

(2) *obstaja regularna pogojna verjetnost $Q_{\mathscr{G}|Y}$ na $\mathscr{G} := \sigma(X)$ glede na Y, in sicer celo taka, da za vse y iz množice B iz prejšnje točke veljata zvezi* (1.2) *in* (3.1).

Dokaz. Ker je X skoraj surjektivna glede na svojo porazdelitev, obstaja taka množica $N \in \mathscr{T}$, da je $\mathbb{P}(X \in N) = 0$ in $X(\Omega) \cup N = T$. V skladu z (1.1) velja:

$$\mathbb{P}(X \in N) = \mathbb{E}\, Q_{X|Y}(Y, N)\,,$$

torej je $\mathbb{P}(Q_{X|Y}(Y, N) = 0) = 1$. Z drugimi besedami, če defiinramo $B := \{y \in T\ ;\ Q_{X|Y}(y, N) = 0\}$, je $B \in \mathscr{T}$ in $\mathbb{P}(Y \in B) = 1$. Za $y \in B$ je X skoraj surjektivna glede na mero $A \mapsto Q_{X|Y}(y, A)$. Ker je to res, za te y obstaja tudi povlek te mere na $\sigma(X)$, seveda prek X. Za te y torej v skladu z (3.1) definiramo mero $A \mapsto Q_{\mathscr{G}|Y}(y, A)$, za ostale y pa lahko vzamemo poljubno fiksno verjetnostno mero na $(S, \mathscr{S})$. Tako definirana funkcija $Q_{\mathscr{G}|Y}$ zadošča vsem zahtevam trditve. ∎

Videli smo torej, da regularna pogojna verjetnost na $\sigma(X)$ obstaja, brž ko je X skoraj surjektivna glede na svojo porazdelitev. To narekuje tudi naslednjo definicijo.

Definicija. Verjetnostni prostor $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ je *perfekten*, če je vsaka realna slučajna spremenljivka skoraj gotovo surjektivna glede na svojo porazdelitev.

Perfektnost je torej zadosten pogoj za eksistenco regularnih pogojnih verjetnosti na σ-algebrah, ki jih generirajo realne slučajne spremenljivke (z njimi pa tudi slučajne spremenljivke z vrednosti v Borelovih prostorih). V določenih primerih pa velja tudi obrat: videli bomo, da včasih iz obstoja regularne pogojne porazdelitve sledi skoraj gotova surjektivnost. Za ta namen bomo najprej uvedli pojem separacije in izpeljali pomožen rezultat

Definicija. Množica C *separira* točki x in y, če je bodisi $x \in C$ in $y \notin C$ bodisi $x \notin C$ in $y \in C$.

Družina podmnožic $\mathscr{C}$ množice T separira T, če za poljubni različni točki iz T obstaja množica $C \in \mathscr{C}$, ki ju separira.

Naslednji rezultat je v osnovi lema 1 v [2].

Trditev 3.5. *Naj bo $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ verjetnostni prostor, $(T, \mathscr{T})$ merljiv prostor in $Y\colon (\Omega, \mathscr{F}) \to (T, \mathscr{T})$ slučajna spremenljivka. Za vse $y \in T$ naj bo $\{y\} \in \mathscr{T}$ in obstaja naj končna ali števno neskončna množica $\mathscr{C}$, ki separira T. Nadalje naj bo $Q_{\mathscr{F}|Y}$ regularna pogojna verjetnost na $\mathscr{F}$ glede na Y. Tedaj obstaja množica $B \in \mathscr{T}$, za katero je $\mathbb{P}(Y \in B) = 1$ in $Q_{\mathscr{F}|Y}(y, \{Y = y\}) = 1$ za vse $y \in B$.*

Dokaz. Naj bo $C \in \mathscr{C}$. Definirajmo funkciji:

$$f_C(y) := Q_{\mathscr{F}|Y}(y, \{Y \notin C\})\, \mathbf{1}(y \in C)\,, \qquad g_C(y) := Q_{\mathscr{F}|Y}(y, \{Y \in C\})\, \mathbf{1}(y \notin C)\,.$$

V skladu z (1.1) velja:

$$\mathbb{E}\big[f_C(Y)\big] = \mathbb{P}(Y \notin C, Y \in C) = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{E}\big[g_C(Y)\big] = \mathbb{P}(Y \in C, Y \notin C) = 0\,.$$

Ker sta funkciji f in g nenegativni, je $\mathbb{P}(f_C(Y) > 0) = \mathbb{P}(g_C(Y) > 0) = 0$, torej $\mathbb{P}(f_C(Y) = 0) = \mathbb{P}(g_C(Y) = 0) = 1$. Če torej označimo $B_C := \{y\ ;\ f_C(y) = 0, g_C(y) = 0\}$, velja $\mathbb{P}(Y \in B_C) = 1$. Za vsak $y \in B_C \cap C$ velja:

$$Q_{\mathscr{F}|Y}(y, \{Y \in C\}) = 1 - Q_{\mathscr{F}|Y}(y, \{Y \notin C\}) = 1 - f_C(y) = 1$$

in za vsak $y \in B_C \setminus C$ velja:

$$Q_{\mathscr{F}|Y}(y, \{Y \notin C\}) = 1 - Q_{\mathscr{F}|Y}(y, \{Y \in C\}) = 1 - g_C(y) = 1\,.$$

Definirajmo $B := \bigcap_{C \in \mathscr{C}} B_C$. Naj bo $y \in B$. Za vsak $C \in \mathscr{C}$ definirajmo:

$$C_y := \begin{cases} C & ;\ y \in C \\ T \setminus C & ;\ y \notin C\,. \end{cases}$$

Ker $\mathscr{C}$ separira T, je $\bigcap_{C \in \mathscr{C}} C_y = \{y\}$. Nadalje je $Q_{\mathscr{F}|Y}(y, \{Y \in C_y\}) = 1$ za vsak $C \in \mathscr{C}$. Torej je:

$$Q_{\mathscr{F}|Y}(y, \{Y = y\}) = Q_{\mathscr{F}|Y}\left(y, \bigcap_{C \in \mathscr{C}} \{Y \in C_y\}\right) = 1\,.$$

■

Posledica 3.6. *Naj bodo $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, $(T, \mathscr{T})$ in Y kot prej, vključno z vsemi predpostavkami o merljivem prostoru $(T, \mathscr{T})$. Brž ko obstaja regularna pogojna verjetnost $Q_{\mathscr{F}|Y}$ na $\mathscr{F}$ glede na Y, je Y skoraj gotovo surjektivna glede na svojo porazdelitev.*

Dokaz. Naj bo B množica iz trditve in $y \in B$. Ker je $Q_{\mathscr{F}|Y}(y, \{Y = y\}) = 1$, $\{Y = y\}$ ne more biti prazna, zato je $y \in Y(\Omega)$. Torej je $B \subseteq Y(\omega)$. Z drugimi besedami, če definiramo $N := T \setminus B$, je $\mathbb{P}(Y \in N) = 0$ in $T = f(Y) \cup N$. ■

Posledica 3.7. *Naj bo $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ tak verjetnostni prostor, da za vsako realno slučajno spremenljivko Y obstaja regularna pogojna verjetnost na $\mathscr{F}$ glede na Y. Tedaj je $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ perfekten.*

Iz posledice 3.6 dobimo tudi protiprimer obstoja regularne pogojne verjetnosti.

Zgled 3.1. Enotski interval $I = (0, 1]$ opremimo z Borelovo σ-algebro $\mathscr{B}$ in Lebesgueovo mero m. Vzemimo množico $\Omega \subset I$, ki ima zunanjo Lebesgueovo mero 1 in notranjo Lebesgueovo mero strogo manjšo od 1 (torej ni Lebesgueovo merljiva). Z drugimi besedami, za vsako množico $N \in \mathscr{B}$, za katero je $\Omega \cap N = \emptyset$, velja $m(N) = 0$ in obstaja tako število $q < 1$, da za vsako množico $M \in \mathscr{B}$, za katero je $M \subseteq \Omega$, velja $m(M) \leq q$.

Naj bo $\mathscr{F}$ povlek Borelove σ-algebre $\mathscr{B}$ prek inkluzije $\Omega \hookrightarrow I$. Z drugimi besedami, velja $\mathscr{F} = \{B \cap \Omega\,;\, B \in \mathscr{B}\}$. Ker ima $I \setminus \Omega$ notranjo Lebesgueovo mero nič, po trditvi 3.3 obstaja tudi povlek Lebesgueove mere na Ω spet prek inkluzije $\Omega \hookrightarrow I$: označimo ga s $\mathbb{P}$. Z drugimi besedami, za vsako množico $B \in \mathscr{B}$ velja $m(B) = \mathbb{P}(B \cap \Omega)$. To pomeni tudi, da je $\mathbb{P}$ verjetnostna mera na $(\Omega, \mathscr{F})$.

Tako lahko inkluzijo $\Omega \hookrightarrow I$ gledamo kot slučajno spremenljivko na $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Označimo jo z Y. Ker je notranja mera množice Ω v I strogo manjša od 1, inkuzija Y ni skoraj gotovo surjektivna. Po drugi strani pa $\mathscr{B}$ vsebuje enoelementne množice $\{y\}$ in intervali z racionalnimi krajišči so števna družina množic iz $\mathscr{B}$, ki separira I. Potem pa po posledici 3.6 regularna pogojna verjetnost na $\mathscr{F}$ glede na Y ne more obstajati. $\square$

Zgornji protiprimer pa ne zadošča za morebiten negativen odgovor na naslednje vprašanje.

Odprto vprašanje. Ali za vsak verjetnostni prostor $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, vsako *realno* slučajno spremenljivko X na $(\Omega, \mathscr{F})$ in vsako σ-algebro $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}$ obstaja regularna pogojna verjetnost na $\sigma(X)$ glede na $\mathscr{H}$?

Literatura

[1] C. O. Christenson, W. L. Voxman: *Aspects of topology*, Marcel Dekker Inc., New York, 1977, Pure and applied Mathematics, Vol. 39.

[2] A. M. Faden: *The existence of regular conditional probabilities: necessary and sufficient conditions*, Ann. Probab. **13** (1985), 288–298.

[3] A. N. Shiryaev: *Probability*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 95, Springer-Verlag, New York, 1996.