RAZMIŠLJANJA OB ŠTUDIJU MATEMATIČNIH VSEBIN

Martin Raič

26. oktober 2021

Kazalo

UVOD

Pričujoča razmišljanja so nastala iz raznovrstnih vprašanj, ki so se mi porodila ob študiju matematičnih vsebin. Včasih se mi stvari niso zdele jasne. Včasih se mi je notacija, ki je v veljavi, zazdela nekorektna. Včasih so se mi določene definicije ali rezultati zazdele kot zajec iz klobuka in sem na vsak način hotel vedeti, kaj tiči v ozadju. Včasih se mi je zazdel čuden tudi vrstni red podajanja. Kakor koli, zazdelo se mi je, da bi se dalo povedati ali napisati bolje, kot sem naletel.

Ne delam si utvar, da imam v vseh razmišljanjih prav. Najbrž niso vsa ravno posrečena in najbrž niti niso vsa matematično pravilna. Večinoma tudi niso dodelana do vseh podrobnosti – deloma zato, ker jih nisem utegnil izdelati, deloma pa tudi zato, ker bi se sicer zabrisalo bistvo. Seveda pa se v podrobnostih skrivajo številne pasti in se bo izkazalo, da se stvar ne da ali ne splača izvesti na predlagani način. Dobro tudi vem, da je predavateljev čas omejen, predlagana izvajanja pa so lahko potratna.

Razmišljanja so nastajala skozi razmeroma dolgo obdobje, zato je tudi njihov slog neenoten. Bralec tudi ne sme biti presenečen, če bo opazil, da so določena razmišljanja med seboj nekonsistentna.

Znaten del teh razmišljanj so v resnici zgolj povzetki s predavanj ali iz literature: zapisane so ideje, ki so se mi zdele ključne za to, da sem lahko snov razumel. Zato prenekateri zaključek za bralca ne bo pomenil nič novega, saj velja za splošno sprejetega.

Vseeno pa upam, da bo kakšno razmišljanje le prišlo prav: če ne v takšni obliki, kot je, ga bo bralec morda dodelal in tako dodelanega koristno uporabil. Tudi če se z razmišljanjem nikakor ne bo strinjal, se mu bo morda ob branju porodila kakšna druga dobra ideja. Če se bo kar koli od tega zgodilo, bo namen teh razmišljanj vsekakor dosežen.

Avtor

ANALIZA 1

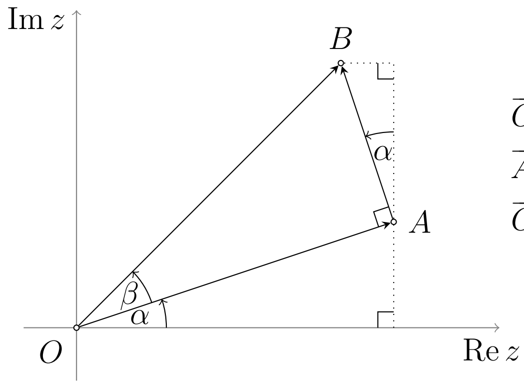
1. Množenje kompleksnih števil

Geometrijski pomen množenja kompleksnih števil je vsekakor treba pojasniti z geometrijsko konstrukcijo. Pripravno je, če kompleksna števila identificiramo z vektorji in uvedemo polarni zapis, a pri tem bo verjetno treba pripomniti, da sta sinus in kosinus definirana samo geometrijsko, v strogem smislu pa še ne (glej 5. razdelek). Nato povemo, da je kompleksno število oz. vektor $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ število oz. vektor $|z|$, zavrten za kot α v pozitivni smeri.

Pri množenju najprej razčistimo množenje z i, ki je rotacija za kot $\pi/2$ v pozitivni smeri. Za splošni primer pa pa za dani kompleksni števili $z = x + iy$ in $w = u + iv$ pišemo:

$$zw = uz + ivz$$

in narišemo skico:



$$\overrightarrow{OA} = uz$$
$$\overrightarrow{AB} = ivz$$
$$\overrightarrow{OA} = zw$$

Opazimo, da je vektor $\overrightarrow{OA} = uz$ vektor $u|z|$, zavrten za kot α v pozitivni smeri, vektor $\overrightarrow{AB} = ivz$ pa je vektor $iv|z|$, prav tako zavrten za kot α v pozitivni smeri. Torej je $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = zw$ vektor oz. kompleksno število $(u+iv)|z| = |z|w$, zavrteno za kot α v pozitivni smeri, kar je tudi vektor oz. kompleksno število $|z||w|$, zavrteno za kot $\alpha + \beta$ v pozitivni smeri.

2. Limite splošnejših zaporedij

Na vajah je smiselno omeniti alternativno definicijo limite zaporedja, pri kateri "od nekega n_0 naprej" zamenjamo z "za vse razen morda končno mnogo n-jev." Ta ugotovitev ne stane veliko časa. Tako lahko namesto $\lim_{n\to\infty}$ pišemo tudi kar $\lim_{n\in\mathbb{N}}$. Nauk je, da limita zaporedja ni odvisna od vrstnega reda členov.

Tako lahko gledamo limite funkcij na poljubnih števno neskončnih množicah, recimo dvojno indeksiranih zaporedij. A žal se izkaže, da je ta koncept premočan. Dvojno indeksirano zaporedje $a_{m,n} = 2^{-\max\{m,n\}}$ ima po tej definiciji res limito nič, zaporedje

$b_{m,n} = 2^{-\min\{m,n\}}$ pa po tej definiciji nima limite, čeprav je $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} b_{m,n} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} b_{m,n} = 0$.

Pač pa je limite dvojno indeksiranih zaporedij smiselno definirati tako, da so členi $a_{m,n}$ predpisano blizu limite, če je $m \ge m_0$ in $n \ge n_0$. Tako limito bi lahko označili z $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}$, $\lim_{(m,n)\to(\infty,\infty)}$ ali kar $\lim_{m,n\to\infty}$. Iz $\lim_{m,n\to\infty} a_{m,n} = a$ potem sledi tudi $\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = a$. Podobno definiramo tudi limite zaporedij, indeksiranih z več indeksi.

Ta koncept limite je smiselno omeniti, ker ustreza konceptu limite funkcij več spremenljivk. Z njim pa lahko tudi elegantno formuliramo definicijo Riemannovega integrala, ki je posplošen v obeh krajiščih: ni treba omeniti vmesne točke.

3. Primerjava geometrijskega in potenčnega zaporedja

Pomemben rezultat je, da za $0 \le q < 1$ in poljuben $r \in \mathbb{R}$ velja $\lim_{n\to\infty} n^r q^n = 0$. To dokažemo v dveh korakih: najprej s pomočjo kvocientov pokažemo, da je ustrezno zaporedje omejeno, nakar z ustrezno spremembo q-ja dokažemo še, da gre proti 0.

4. Vrste in vsote

Dobro bi bilo definirati tudi vsote po poljubnih množicah. To olajša dokazovanje nekaterih izrekov iz teorije vrst, ki jih potrebujemo tudi pri teoriji mere. Nekaj klasične teorije vrst bi bilo vendar treba povedati že prej: potrebujemo, da je absolutno konvergentna vrsta konvergentna.

S pojmom *vrsta* je tu mišljen zapis vsote po zaporedju, torej recimo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Vrsta je konvergentna, če je konvergentno zaporedje delnih vsot. Pojem *vsota* pa se tu nanaša na seštevanje po poljubnih množicah, ki nimajo nujno strukture urejenosti. Vsota je lahko *definirana* ali pa ne.

Prav pride, če že tu začnemo govoriti o dvojnosti $[0,\infty]$ ali $\mathbb{R}$, ki jo imamo ves čas pri teoriji mere. Tako bi za poljubno množico N definirali:

- Za nabor števil $p_k \in [0,\infty]$, $k \in N$, naj bo $\sum_{k\in N} p_k := \sup\{\sum_{k\in K} p_k \,;\, K \text{ končna}\}$. To vedno obstaja kot element množice $[0,\infty]$. Možnost $p_k = \infty$ pride prav pri dvojnih vsotah.
- Za nabor realnih števil $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in N$, pa naj bo vsota $\sum_{k\in N} a_k$ definirana kot realno število in enaka a natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka končna množica $K \subseteq N$, da za poljubno končno množico L s $K \subseteq L \subseteq N$ velja $\left|\sum_{k\in L} a_k - a\right| < \varepsilon$.

Nato bi izpeljali:

- Za nabor $p_k \in [0,\infty]$, $k \in N$, je $\sum_{k\in N} p_k < \infty$ natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka končna množica $K \subseteq N$, da je $\sum_{k\in N\setminus K} p_k < \varepsilon$.

- Za nabor $p_k \geq 0$, $k \in N$, je vsota $\sum_{k\in N} p_k$ definirana kot realno število natanko tedaj, ko je $\sum_{k\in N} p_k < \infty$. Vrednosti po obeh definicijah sta enaki.
- Za nabor $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in N$, je vsota $\sum_{k\in N} a_k$ definirana kot realno število in enaka a natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka končna množica $K \subseteq N$, da je $\left|\sum_{k\in K} a_k - a\right| < \varepsilon$ in $\sum_{k\in N\setminus K} |a_k| < \varepsilon$. Če je torej vsota $\sum_{k\in N} a_k$ definirana kot realno število, je tudi $\sum_{k\in N} |a_k| < \infty$. V čem je problem pri dokazu obrata?
- Če je $p_k \in [0,\infty]$ in je $\sum_{k\in N} p_k < \infty$, so vsa števila p_k končna in kvečjemu števno mnogo jih je različnih od nič. Tako se problematika vsot po poljubnih množicah zreducira na vsote po števnih množicah, to pa so v osnovi vrste.
- Za dano zaporedje $p_1, p_2, \ldots \geq 0$ je $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k < \infty$ natanko tedaj, ko je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ konvergentna. Vrednosti vsote in vrste sta enaki.
- Za dano zaporedje $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ je vsota $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ definirana kot realno število natanko tedaj, ko je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna. Vrednosti vsote in vrste sta enaki.
- Za $a_k \in \mathbb{R}$ je vsota $\sum_{k\in N} a_k$ definirana kot realno število natanko tedaj, ko je $\sum_{k\in N} |a_k| < \infty$. Tu potrebujemo redukcijo na vrste!
- V absolutno konvergentnih vrstah lahko vrstni red seštevanja menjamo po mili volji.
- Če sta K in L disjunktni množici in $p_k \in [0,\infty]$, $k \in K \cup L$, je $\sum_{k\in K\cup L} p_k = \sum_{k\in K} p_k + \sum_{k\in L} p_k$.
- Če sta K in L disjunktni množici in $a_k \in \mathbb{R}$, vsota $\sum_{k\in K\cup L} a_k$ obstaja kot realno število natanko tedaj, ko kot realno število obstajata obe vsoti $\sum_{k\in K} a_k$ in $\sum_{k\in L} a_k$. V tem primeru je $\sum_{k\in K\cup L} a_k = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in L} a_k$.
- Linearnost vsot po množicah (tu bi morda zoptimizirali in najprej pokazali za realne, nato pa za pozitivne vsote).
- Naj bodo N_α, $\alpha \in A$, paroma disjunktne množice z unijo N in naj bodo dana števila $p_k \in [0,\infty]$, $k \in N$. Tedaj je $\sum_{k\in N} p_k = \sum_{\alpha\in A} \sum_{k\in N_\alpha} p_k$.
- Naj bodo N_α, $\alpha \in A$, paroma disjunktne množice z unijo N in naj bodo dana števila $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in N$. Če je $\sum_{k\in N} |a_k| = \sum_{\alpha\in A} \sum_{k\in N_\alpha} |a_k| < \infty$, so kot realna števila definirana vse vsote $\sum_{k\in N} a_k$, $\sum_{k\in N_\alpha} a_k$ in $\sum_{\alpha\in A} \sum_{k\in N_\alpha} a_k$ ter velja $\sum_{k\in N} a_k = \sum_{\alpha\in A} \sum_{k\in N_\alpha} a_k$.

  Skica dokaza ujemanja enojne in dvojne vsote. Obstaja končna množica $K \subseteq N$, za katero je $\sum_{k\in N\setminus K} |a_k| < \varepsilon$. Tedaj je tudi množica $B := \{\alpha \in A \,;\, N_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$ končna. Če torej definiramo $L := \bigcup_{\alpha\in B} N_\alpha$, velja $\sum_{k\in L} a_k = \sum_{\alpha\in B} \sum_{k\in N_\alpha} a_k$. Ker je $K \subseteq L$, je tudi $\sum_{k\in N\setminus L} |a_k| = \sum_{\alpha\in A\setminus B} \sum_{k\in N_\alpha} |a_k| < \varepsilon$.

5. Trigonometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije izhajajo iz geometrije, geometrijskih pojmov pa dostikrat ni prav preprosto prevesti v objekte, s katerimi se računa. Kako bi recimo eksaktno definirali kot? Lahko ga definiramo z dolžino loka na enotski krožnici, a za ta namen je treba poznati integral in še kaj.

Nastane torej vprašanje, kako trigonometrijske funkcije definirati eksaktno, obenem pa čim bolj preprosto, pri tem pa obdržati povezavo z geometrijo. Odgovor na to ni enoznačen.

5.1 Računska definicija z deljenjem pravega kota

Ta možnost je zelo tesno povezana z 'naivno' geometrijsko definicijo sinusa in kosinusa in zanjo ne potrebujemo dosti predznanja, le realno eksponentno funkcijo. Je pa razmeroma dolgovezna.

- Povemo geometrijsko definicijo in opozorimo, da geometrijskih pojmov ni vselej lahko prevesti v računske objekte. Kot primer damo kot. Nato povemo, da je kote smiselno povezati s števili, a da se izkaže, da ni najbolj naravno recimo polnega kota povezati s številom 1, temveč z obsegom enotske krožnice. Nadalje rečemo, da se po zgodovinskem dogovoru polovica obsega enotske krožnice označi s π (ker je to razmerje med obsegom in *premerom*). To število torej ustreza iztegnjenemu kotu. Obenem pa povemo, da strogo gledano dolžine loka sploh še nismo definirali in da to zahteva zelo veliko priprave, zato bomo število π strogo raje definirali drugače, šele kasneje, ko bomo v stanju definirati dolžino loka, pa bomo dokazali, da se definiciji ujemata. Geometrija bo torej služila le kot opora.
- Postavimo aksiom, da je $\cos 0 = 1$ in $\sin 0 = 0$.
- Postavimo aksiom, da obstaja tako število π, da je $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ in $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ter da je $\cos\varphi \in [0, 1]$ in $\sin\varphi \in [0, 1]$ za vse $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Geometrijsko izpeljemo adicijska izreka za sinus in kosinus in ju postavimo za aksioma.
- Izpeljemo lihost sinusa in sodost kosinusa.
- Postavimo aksiom, da sta sinus in kosinus zvezni funkciji.
- Izpeljemo identiteto:

  $$\cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta) = \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right).$$

  Iz te identitete, privzetih vrednosti v $\frac{\pi}{2}$ in zveznosti s pomočjo eksponentne funkcije izpeljemo identiteto $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

- Izpeljemo formuli za polovične kote v obliki:
$$\cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1+\cos\varphi}{2}\,,\qquad \sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{2}\,.$$
- Izpeljemo, da sta sinus in kosinus z zgornjimi aksiomi natančno določena z izbiro števila π, in opozorimo, da še vedno nismo izpeljali, da sploh obstajata.
- Prvi korak k dokazu obstoja: za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ definiramo funkciji $c_n, s_n\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ induktivno po naslednjih predpisih:
  - $c_n(0) := 1, \quad s_n(0) := 0;$
  - $c_0(1) := 0, \quad s_0(1) := 1;$
  - $c_{n+1}(1) := \sqrt{\frac{1+c_n(1)}{2}}, \quad s_{n+1}(1) := \sqrt{\frac{1-s_n(1)}{2}};$
  - $c_n(k+1) := c_n(k)\,c_n(1) - s_n(k)\,s_n(1), \quad s_n(k+1) := s_n(k)\,c_n(1) - c_n(k)\,s_n(1);$ $k \in \mathbb{N}$.

  Ni težko videti, da te zveze enolično določajo funkcije c_n in s_n. Nadalje:
  - Opazimo, da za $k \in \mathbb{N}$ velja tudi $c_n(k-1) = c_n(k)\,c_n(1) + s_n(k)\,s_n(1)$ in $s_n(k-1) = s_n(k)\,c_n(1) - c_n(k)\,s_n(1)$.
  - Funkcije c_n in s_n razširimo po sodosti oziroma lihosti.
  - Opazimo, da razvoja izrazov $c_n(k+1)$ in $s_n(k+1)$ veljata za vse $k \in \mathbb{Z}$.
  - Z indukcijo izpeljemo, da za vse $k \in \mathbb{Z}$ in $l \in \mathbb{N}$ velja $c_n(k+l) = c_n(k)\,c_n(l) - s_n(k)\,s_n(l)$ in $s_n(k+l) = s_n(k)\,c_n(l) - c_n(k)\,s_n(l)$.
  - Opazimo, da slednji zvezi veljata za vse $k, l \in \mathbb{Z}$.
  - Z indukcijo po n dokažemo, da je $c_n^2(1) + s_n^2(1) = 1$.
  - Z indukcijo po k ter uporabo sodosti in lihosti dokažemo, da je $c_n^2(k)+s_n^2(k) = 1$ za vse $k \in \mathbb{Z}$.
  - Opazimo, da je $c_n(1) = c_{n+1}(2)$, nato pa (z uporabo pozitivnosti) še, da je $s_n(1) = s_{n+1}(2)$.
  - Z uporabo adicijskih izrekov in sodosti oziroma lihosti izpeljemo, da je $c_n(k) = c_{n+1}(2k)$ in $s_n(k) = s_{n+1}(2k)$ za vse $k \in \mathbb{Z}$.
  - Z indukcijo izpeljemo, da je $c_n(k) = c_{n+r}\big(2^r k\big)$ in $s_n(k) = s_{n+r}\big(2^r k\big)$ za vse $k \in \mathbb{Z}$ in vse $r \in \mathbb{N}$.

  Tako lahko sinus in kosinus konsistentno definiramo na množici števil D oblike $k\,2^n\frac{\pi}{2}$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$ in $n \in \mathbb{N}_0$, in sicer kot:
$$\cos\left(k\,2^n\frac{\pi}{2}\right) := c_n(k)\,,\qquad \sin\left(k\,2^n\frac{\pi}{2}\right) := s_n(k)\,.$$
  Ti funkciji očitno zadoščata adicijskima izrekoma in zvezi $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

- Ocenimo:

$$\begin{aligned}\bigl|\sin(\varphi+\delta)-\sin\varphi\bigr| &= \bigl|\sin\varphi(\cos\delta-1)+\cos\varphi\sin\delta\bigr| \le \bigl|\cos\delta-1\bigr|+|\sin\delta|\,,\\ \bigl|\cos(\varphi+\delta)-\cos\varphi\bigr| &= \bigl|\cos\varphi(\cos\delta-1)-\sin\varphi\sin\delta\bigr| \le \bigl|\cos\delta-1\bigr|+|\sin\delta|\,,\end{aligned}$$

  od koder sledi enakomerna zveznost sinusa in kosinusa na množici D. Tako ju lahko po zveznosti razširimo na celo realno os. Seveda se ohranita adicijska izreka in formula za vsoto kvadratov.

- Z indukcijo dokažemo, da za vse $n \in \mathbb{N}_0$ in vse $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n$ velja $\cos\bigl(k\,2^{-n}\frac{\pi}{2}\bigr) \ge 0$ in $\sin\bigl(k\,2^{-n}\frac{\pi}{2}\bigr) \ge 0$. Pri tem pri kosinusu uporabimo razvoj razlike, pri sinusu pa razvoj vsote. Iz zveznosti sledi, da za vse $\varphi \in \bigl[0, \frac{\pi}{2}\bigr]$ velja $\cos\varphi \ge 0$ in $\sin\varphi \ge 0$. Ker je $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, veja tudi $\cos\varphi, \sin\varphi \in [0, 1]$. Tako smo preverili vse aksiome razen zveznosti.

- Iz adicijskih izrekov in nenegativnosti sledi, da je na intervalu $\bigl[0, \frac{\pi}{2}\bigr]$ sinus naraščajoča, kosinus pa padajoča funkcija.

- Za $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ izpeljemo:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} \ge \sqrt{\cos\varphi}\,,$$

  torej $\cos\bigl(2^{-n}\varphi\bigr) \ge (\cos\varphi)^{2^{-n}}$.

- Iz $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ dobimo $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, torej:

$$\cos\left(2^{-n}\frac{\pi}{2}\right) \ge \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2^{-n+1}} = 2^{-2^{-n}}\,.$$

- Iz formule za vsoto kvadratov sledi, da je $\cos\varphi \le 1$ za vse φ. Sledi $\lim_{n\to\infty}\cos\bigl(2^{-n}\frac{\pi}{2}\bigr) = 1$, zaradi monotonosti in sodosti pa je tudi $\lim_{\varphi\to 0}\cos\varphi = 1$. Iz formule za vsoto kvadratov pa sledi še $\lim_{\varphi\to 0}\sin\varphi = 0$.

- Torej sta sinus in kosinus zvezna v 0. Iz adicijskih izrekov sledi, da sta zvezni povsod. S tem so izpolnjeni vsi aksiomi.

- Narišemo majhen kot in vidimo, da geometrija da vedeti, da je majhen kot približno enak svojemu sinusu. Tako se zdi, da je:

$$\lim_{\varphi\downarrow 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1\,.$$

  Formalno pa ravnamo tako, da najprej definiramo zaporedje:

$$a_n := \frac{\sin\bigl(2^{-n}\frac{\pi}{2}\bigr)}{2^{-n}\frac{\pi}{2}}\,.$$

Iz sinusa dvojnega kota dobimo zvezo:

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{\cos\left(2^{-n}\frac{\pi}{2}\right)}$$

in ocenimo:

$$a_{n-1} \le a_n \le 2^{2^{-n}} a_{n-1} \, .$$

Dobimo, da je zaporedje a_n naraščajoče, iz ocene:

$$a_n \le 2^{2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-n}} a_0 = \frac{4}{\pi}$$

pa dobimo, da je tudi navzgor omejeno, torej ima limito.

- Spomnimo, da je definicija sinusa in kosinusa odvisna od izbire števila π. V resnici bi morali tako pisati $\cos_\pi$ in $\sin_\pi$ ter še $a_n^{(\pi)}$. Iz aksiomov sledi, da za poljubna $\pi, \rho > 0$ in vse $t \in \mathbb{R}$ velja $\sin_\pi(\pi t) = \sin_\rho(\rho t)$, torej $\pi \lim_{n\to\infty} a_n^{(\pi)} = \rho \lim_{n\to\infty} a_n^{(\rho)}$.

  Število π izberemo tako, da je $\lim_{n\to\infty} a_n^{(\pi)} = 1$. Poudarimo, da je tako na računski ravni, iz geometrije pa vidimo, da je tako izbrano število π prav razmerje med obsegom in premerom kroga.

- Za prehod k funkcijski limiti najprej za $0 \le \alpha, \beta \le 2^{-n}\frac{\pi}{2}$ iz adicijskega izreka izpeljemo:

  $$2^{-2^{-n}}(\sin\alpha + \sin\beta) \le \sin(\alpha+\beta) \le \sin\alpha + \sin\beta \, .$$

  Naj bo zdaj $\varphi = k\,2^{-m}$, kjer je $k = 0, 1, 2, \ldots, 2^{m-n} - 1$. Vsako tako število lahko zapišemo v obliki $\varphi = \sum_{r=n+1}^{m} b_r 2^{-r}\frac{\pi}{2}$, kjer je $b_r \in \{0,1\}$. Z indukcijo lahko izpeljemo:

  $$2^{-2^{-n-1}-2^{-n-2}-\cdots-2^{-m}} \sum_{r=n+1}^{m} \sin\left(b_r 2^{-r}\frac{\pi}{2}\right) \le \sin\varphi \le \sum_{r=n+1}^{m} \sin\left(b_r 2^{-r}\frac{\pi}{2}\right)$$

  oziroma:

  $$2^{-2^{-n}} \sum_{r=n+1}^{m} a_r b_r 2^{-r}\frac{\pi}{2} \le \sin\varphi \le \sum_{r=n+1}^{m} a_r b_r 2^{-r}\frac{\pi}{2} \, ,$$

  kar lahko nadalje ocenimo z:

  $$2^{-2^{-n}} a_{n+1}\varphi \le \sin\varphi \le \varphi \, .$$

  Po zveznosti to velja za vse $\varphi \in \left[0, 2^{-n}\frac{\pi}{2}\right]$. Uporabimo še lihost sinusa in dobimo:

  $$\lim_{\varphi\to 0} \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 1 \, .$$

- Iz prejšnje limite lahko izpeljemo odvod in vse ostalo. Kasneje, ko z integralom definiramo ločno dolžino, lahko izpeljemo, da je obseg enotske krožnice enak 2π.

5.2 Definicija s kompleksno eksponentno funkcijo

Gre za to, da sinus in kosinus (realnega) kota definiramo kot:

$$\cos\varphi := \operatorname{Re}\exp(\varphi i)\,, \qquad \sin\varphi := \operatorname{Im}\exp(\varphi i)\,.$$

A za ta namen je treba najprej definirati kompleksno eksponentno funkcijo. Posledično je dobro, če se prej pove teorijo vrst, tudi v kompleksnem. Teorija vrst je zelo v pomoč, brez nje so izpeljave dosti bolj tehnične. Dovolj je poznati splošno teorijo vrst, ni treba poznati Taylorjeve vrste.

A kompleksne eksponentne funkcije ni dobro definirati z vrsto. En razlog je, da je to hud zajec iz klobuka, če v Taylorjevo vrsto še nismo razvili realne eksponentne funkcije. Drug razlog pa je, da se iz vrste ne vidi povezava z geometrijo.

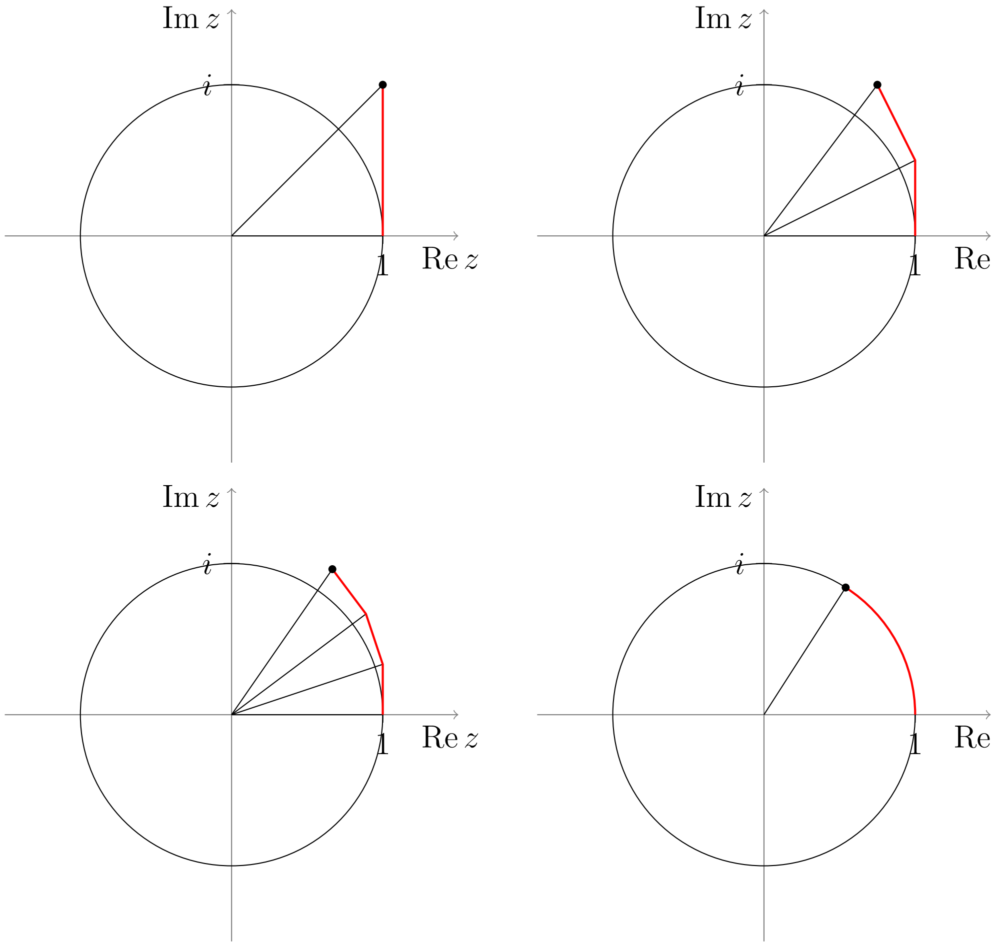
Kompleksno eksponentno funkcijo je smiselno definirati z limito:

$$\exp(z) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\,,$$

ki ima dobro motivacijo v obrestno-obrestnem računu. Sinus in kosinus potem dobita naslednjo obliko:

$$\cos\varphi = \operatorname{Re}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\varphi i}{n}\right)^n\,, \qquad \sin\varphi = \operatorname{Im}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\varphi i}{n}\right)^n\,.$$

Ta oblika ima dokaj jasno povezavo z geometrijo, saj točko $\cos\varphi + i\sin\varphi$ dobimo kot limito naslednje geometrijske konstrukcije:



(glej 1. razdelek).

Kompleksno eksponentno funkcijo, definirano s pomočjo limite, pa se verjetno najbolj splača čimprej prevesti na vrsto. Tako takoj dobimo tudi vrsti za sinus in kosinus. Konvergence zaporedja:

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{z^k}{k!}$$

proti vrednosti eksponentne vrste ni tako težko dokazati, saj najprej poiščemo tak N, da je vsota $\sum_{k=N}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$ majhna, nato pa lahko uporabimo konvergenco posameznih produktov:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \quad ; \quad k=0,1,\ldots,N-1$$

proti 1. Za izpeljavo formule $\exp(z+w)=\exp(z)\exp(w)$ se splača uporabiti teorijo vrst, iz vrste pa zlahka dobimo tudi limito $\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x}=1$, od koder sledi tudi $\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\varphi}=1$.

Iz formule $\exp(z+w)=\exp(z)\exp(w)$ takoj dobimo adicijska izreka, malenkost težje pa je izpeljati identiteto $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$. Za ta namen ocenimo:

$$\left|1+\frac{\varphi i}{n}\right|^n = \left(1+\frac{\varphi^2}{n^2}\right)^{n/2} \le \left[\exp\left(\frac{\varphi^2}{n^2}\right)\right]^{n/2} = \exp\left(\frac{\varphi^2}{2n}\right),$$

kar gre proti 1, ko gre n proti neskončno.

Končno je treba definirati še število π in izpeljati osnovne lastnosti, kot so predznak, intervali naraščanja in padanja ter periodičnost. To storimo v naslednjih korakih:

- Iz vrste za $\cos\varphi$, ki je pri $\varphi = 2$ od drugega člena naprej alternirajoča, dobimo, da je $\cos 2 < 0$.
- Število π definiramo kot dvakratnik prve ničle kosinusa na pozitivni polosi (za ta namen seveda potrebujemo zveznost funkcijske vrste).
- Iz adicijskih izrekov dobimo periodičnost.
- Iz formule za sinus dvojnega kota dobimo, da je $\sin\pi = 0$. Nato pa opazimo, da sinus ne more imeti ničle pred π. Za dovolj majhne kote je namreč pozitiven, zato ima prvo ničlo $\varphi_0 > 0$. Spet po formuli za sinus dvojnega kota pa je tedaj $\sin\frac{\varphi_0}{2} = 0$ ali $\cos\frac{\varphi_0}{2} = 0$. Ker je φ_0 prva sinusova ničla, a ker ima kosinus prvo ničlo pri $\frac{\pi}{2}$, mora biti $\varphi_0 = \pi$.
- Tako dobimo, da za $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ velja $\cos\varphi > 0$ in $\sin\varphi > 0$.
- Končno iz adicijskega izreka najprej dobimo, da je kosinus na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ padajoča funkcija, nato pa iz formule za vsoto kvadratov in pozitivnosti še, da je sinus naraščajoča funkcija.

6. Cantorjev diagonalni proces

Cantorjev diagonalni proces se navadno šteje za tehniko dokazovanja. Precej primerov, pri katerih se ta tehnika uporablja, pa je možno prevesti na naslednji rezultat (no, smiselno pa je to najprej nekajkrat zares uporabiti kot tehniko dokazovanja, šele nato pa formulirati rezultat).

Izrek 6.1. *Naj bo A_i, $i \in I$, družina podmnožic množice $\mathbb{N}$, kjer je I končna ali števno neskončna množica. Za vsako končno podmnožico $J \subseteq I$ naj bo presek $\bigcap_{i\in J} A_i$ neskončen. Tedaj obstaja taka neskončna podmnožica $M \subseteq \mathbb{N}$, da je za vsak $i \in I$ množica $M \setminus A_i$ končna.*

Dokaz. Če je množica I končna, je izrek trivialen, saj lahko vzamemo kar $M := \bigcap_{i\in I} A_i$ in je potem $M \subseteq A_i$ za vsak $i \in I$. Zato smemo privzeti, da je kar $I = \mathbb{N}$.

Za vsak $i \in \mathbb{N}$ je množica $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i$ neskončna, zato lahko pišemo:

$$B_i := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i = \{m_{i1}, m_{i2}, \ldots\},$$

kjer je $m_{i1} < m_{i2} < \ldots$. Definirajmo:

$$M := \{m_{11}, m_{22}, \ldots\}.$$

Najprej bomo pokazali, da je množica M neskončna, torej da so vsa števila m_{ii} različna. Če je namreč $j > i$, je $B_j \subseteq B_i$ in zaradi urejenosti mora biti potem $m_{jj} \geq m_{ij} > m_{ii}$. Torej je množica M res neskončna. Nadalje za $j \geq i$ velja $m_{jj} \in A_j \subseteq A_i$, zato je $\{m_{ii}, m_{i+1,i+1}, \ldots\} \subseteq A_i$, torej je $M \setminus A_i \subseteq \{m_{11}, \ldots m_{i-1,i-1}\}$, kar je končna množica. S tem je dokaz končan. ∎

Opomba. Zgornji izrek ne drži za vsako množico I. Razdelimo množico $\mathbb{N}$ na bloke $B_1, B_2, \ldots$, kjer je:

$$B_k = \left\{ \frac{k(k-1)}{2} + 1,\ \frac{k(k-1)}{2} + 2,\ \ldots\ \frac{k(k+1)}{2} \right\}.$$

Množica $\mathbb{N}$ je disjunktna unija blokov B_k in posamezen blok B_k ima natanko k elementov.

Vzemimo zdaj za I množico vseh zaporedij $a_1, a_2, \ldots$, za katere je $a_k \in B_k$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Nadalje za $i = (a_1, a_2, \ldots)$ definirajmo $A_i := \mathbb{N} \setminus \{a_1, a_2, \ldots\}$. Tedaj ima posamezna množica $A_i \cap B_k$ natanko $k - 1$ elementov. Če je torej $J \subseteq I$ množica z j elementi, ima $\bigcap_{j \in J} A_j \cap B_k$ vsaj $k - j$ elementov. Brž ko je torej $k > j$, je presek $\bigcap_{j \in J} A_j \cap B_k$ neprazen, torej je množica $\bigcap_{j \in J} A_j$ neskončna.

Naj bo $M \subseteq \mathbb{N}$ poljubna neskončna množica. Pokazali bomo, da obstaja tak $i \in I$, da je množica $M \setminus A_i$ neskončna. Vzemimo namreč $i = (a_1, a_2, \ldots)$, pri katerem je a_k prvi element množice $M \cap B_k$, če je le-ta neprazna, sicer pa naj bo a_k prvi element bloka B_k. Brž ko je $M \cap B_k \neq \emptyset$, je tudi množica $(M \setminus A_i) \cap B_k$ neprazna. Ker je M neskončna, se to zgodi za neskončno mnogo indeksov k, torej je množica $M \setminus A_i$ res neskončna. Družina A_i, $i \in I$, torej ne zadošča zgornjemu izreku.

7. Razširitev po enakomerni zveznosti

Ta izrek je zelo smiselno omeniti, saj z njegovo pomočjo zlahka definiramo potence – ni treba čarati z urejenostjo.

8. Funkcije, spremenljivke in diferenciali

Pojem diferenciala je zelo zmuzljiv, zato se ga često vpelje le kot sintaktični del izrazov brez trdnega matematičnega pomena, torej ne kot samostojen matematični objekt. Po drugi strani pa se z diferenciali veliko računa kot s samostojnimi matematičnimi objekti. Z njimi si pomagamo pri substituciji v integral, z njimi rešujemo diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami. Diferenciali so nepogrešljivi v tehniški in nasploh v uporabni matematiki. Zato je zelo smiselno, da se mu že od začetka da trden matematični pomen in se ga predstavi kot samostojen objekt. Uvesti bi ga kazalo, brž ko prvič pride prav, to pa je pri verižnem pravilu za odvajanje.

Intuitivni in zgodovinski pomen diferenciala je ‘majhna sprememba spremenljivke’: vsak diferencial se nanaša na določeno spremenljivko. To pomeni, da moramo, če želimo trden pomen pripisati diferencialu, to storiti tudi za pojem spremenljivke. Ni dovolj, če rečemo, da je to nekaj, kar ima določeno vrednost, saj to, da ima spremenljivka recimo vrednost 42, nima neposredne zveze z njenim diferencialom.

Spremenljivke, na katere apliciramo diferencial, je smiselno definirati kot *funkcije*. Vendar pa nas za te funkcije *ne zanima v prvi vrsti, kako slikajo*: zanimajo nas samo povezave med njimi, ki pa jih izrazimo s funkcijami, za katere predpišemo, kako slikajo. Domeno (definicijsko območje) funkcij (ki je za funkcije v isti formuli skupna) lahko *prikrijemo*. Tak koncept se uporablja tudi v teoriji verjetnosti, kjer običajno prikrijemo prostor izidov Ω.

Tako bi funkcije razdelili v dve skupini: tiste z eksplicitno domeno in tiste s prikrito domeno. Ta ločitev pa ne bi bila v matematičnem smislu: oboje bi bile funkcije, torej enoten matematični objekt. Ločitev bi bila glede na *rabo*. To bi bilo dobro ilustrirati s kakšnim inženirskim zgledom.

Funkcije s prikrito domeno bi lahko formalizirali kot formalne funkcijske izraze: izraz nad abecedo bi bil par, sestavljen iz k-mestne funkcije naštetja k (lahko enakih) črk te abecede. k-terico izrazov bi lahko z leve komponirali s k-mestno funkcijo. *Interpretacija*, ki bi vsaki črki priredila realno funkcijo, pa bi iz izrazov naredila funkcije. Diferencial izraza bi bil odvisen od interpretacije. Je pa vprašanje, koliko je o tem smiselno govoriti študentom prvega letnika. Vse spodnje se zato nanaša na že interpretirane izraze.

Oba pogleda na funkcije bi ločili v pisavi:

- Za funkcije z eksplicitno domeno bi uporabljali običajno notacijo: označevali bi jih z f, g ali h. Kompozitum takih funkcij bi označili s krogcem: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, odvod pa s črtico: f'.
- Za funkcije s prikrito domeno pa bi tipično uporabljali črke s konca abecede, tako kot za spremenljivke. Ker nas ne zanima, kako slikajo, jih ni smiselno komponirati med seboj. Pač pa jih je smiselno z leve komponirati s funkcijami z eksplicitno domeno. Namesto $f \circ x$ bi pisali $f(x)$. Rezultat je seveda funkcija s prikrito domeno. Tako pišemo tudi pri slučajnih spremenljivkah v teoriji verjetnosti.
- Včasih pride prav, da se dogovorimo, da x označuje identiteto. V tem primeru je ekvivalentno reči 'funkcija f' in 'funkcija $f(x)$'.
- Pri funkcijah s prikrito domeno bi drugače označevali praslike: za edino točko, ki je praslika točke a, bi namesto $x^{-1}(a)$ pisali recimo $[x = a]$, za praslike množic pa bi namesto $x^{-1}(\{a\})$, $x^{-1}(A)$ in $x^{-1}((-\infty, a])$ pisali $\{x = a\}$, $\{x \in A\}$ in $\{x \le a\}$.
- Odvode funkcij s prikrito domeno bi pisali z diferenciali: namesto x' bi pisali $\mathrm{d}x$. Kot matematični pojem torej diferencial ne bi bil nič drugega kot *odvod*, le drugače bi bil pisan. Dobro pa je povedati, da to zgodovinsko gledano izhaja iz majhne spremembe.
- Če je $y = f(x)$, je po verižnem pravilu $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$, torej $f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Diferencialni količnik bi bil tako dejansko deljenje funkcij. Ta račun bi bilo spet treba prikazati v luči majhnih sprememb in tudi takole: če ne vemo, kako x in y slikata, ne moremo

poznati $\mathrm{d}x$ in $\mathrm{d}y$, tudi če poznamo njuni vrednosti. Pač pa, če poznamo funkcijsko odvisnost med njima, poznamo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Verižno pravilo v tem zapisu dejansko postane krajšanje ulomkov, seveda pa ga je treba prej izpeljati.

- Integral funkcije označuje znak $\int$ – tudi za funkcije z eksplicitno domeno. Tako je popolnoma legitimno pisati $\int f = F + C$. A formula za uvedbo nove spremenljivke narekuje, da se navadno poslužimo drugačne pisave. Iz *verižnega pravila* sledi ekvivalenca $F' = f \iff \int f = F + C \iff \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, ki velja ne glede na to, kako slika x. Tako zapis $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ ne bi označeval le integrala funkcije f, temveč integral cele družine kompozitumov funkcije f z drugimi funkcijami, pomnoženih z odvodi teh funkcij. V tem zapisu bi bila uvedba nove spremenljivke avtomatična: v računu:
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(t))\,\mathrm{d}x = \int f(g(t))\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t$$
bi v vseh integralih nastopala *ista* funkcija, le drugače bi bila zapisana.

- Slabost tega koncepta se pokaže pri določenem integralu, saj ni a priori določeno, kaj so meje. Če rečemo, da se meje nanašajo na točke, kjer evaluiramo funkcijo, ki jo integriramo, to velja pri zapisu $\int_a^b f$, ne velja pa pri zapisu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, saj se meji a in b nanašata na vrednosti funkcije/spremenljivke x, ne pa na vrednosti, kjer funkcijo $f(x)$ evaluiramo; slednje sploh niso predpisane. Zapis $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bi torej morali pojmovati kot zlorabo notacije, saj bi morali v resnici pisati $\int_{[x=a]}^{[x=b]} f(x)\,\mathrm{d}x$ ali kvečjemu $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Če torej v integrandu nastopa diferencial, bi se dogovorili, naj se integrand vedno zaključi z množenjem z diferencialom in naj se neposredno zapisane meje integrala nanašajo na spremenljivko, na katero se nanaša končni diferencial.

Na tipičnem začetnem tečaju analize se pogosto zažuga, da mora biti pri substituciji v določeni integral funkcijska zveza med staro in novo spremenljivko monotona. To pa je lahko včasih nerodno. V računu:
$$\int_0^3 \frac{x^3 - 4x + 2}{x^4 - 8x^2 + 8x + 2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_2^{35} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{4}\ln\frac{35}{2}$$
se vpelje nova spremenljivka $t = x^4 - 8x^2 + 8x + 2$. Ker t ni monotona funkcija spremenljivke x, naj ta račun ne bi bil legitimen. Lahko ga naredimo legitimnega tako, da integral razdelimo na intervale, kjer je ta funkcija monotona. Taki intervali obstajajo, nerodno pa je, da jih je težko eksplicitno izračunati – meje so ničle polinoma $x^3 - 4x + 2$, kjer nastopi sloviti *casus irreducibilis* – Cardanove formule potrebujejo kompleksni tretji koren, za katerega pa je treba v realnem spet rešiti enačbo tretje stopnje.

Vendar pa delitev na podintervale ni prav nič potrebna: v končni fazi dobimo na koncu isto, ne glede na to, na koliko podintervalov razdelimo. Zato je zelo smiselno, da za tem stoji splošnejši rezultat. Ena možnost je, da izpeljemo splošnejši izrek o substituciji v določeni integral, kjer prehodna funkcija ni nujno monotona – glej 25. razdelek. A izpeljati ni treba niti tega, saj je povsem legitimen naslednji račun:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \left(x \mapsto \frac{x^3-4x+2}{x^4-8x^2+8x+2}\right) &= \int_{x=0}^{x=3} \frac{x^3-4x+2}{x^4-8x^2+8x+2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{t=2}^{t=35} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \\ &= \int_2^{35} \left(t \mapsto \frac{1}{t}\right) = \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{35}{2}\,.\end{aligned}$$

V prvem integralu je x vezana (pomožna) spremenljivka, v drugem pa je x funkcija, za katero nas ne zanima, kako slika. Podobno je s t v zadnjem in predzadnjem integralu. Edino, kar je pomembno, je zveza med funkcijama x in t: račun je legitimen, ker obstajata realni funkciji x in t, ki sta definirani na določenih intervalih in izpolnjujeta naslednje pogoje:

- Velja $t = x^4 - 8x^2 + 8x + 2$.
- Obstajata točki, kjer je $x = 0$ in $x = 3$.
- Na celem definicijskem območju je $t > 0$.

Sklep: s stališča teorije so diferenciali odveč, saj so to le odvodi: vse bi lahko pisali tudi brez njih. Obnesejo pa se zato, ker ni vedno jasno, po kateri spremenljivki odvajamo oz. integriramo. V računu, kjer nastopajo diferenciali, so le-ti odvodi po isti referenčni spremenljivki, a ni pomembno, katera je to, saj račune zapišemo tako, da so neodvisni od izbire referenčne spremenljivke.

Razmisliti velja, ali naj namignemo, da odvod oz. diferencial v dani točki, ki je število, identificiramo z linearno preslikavo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki je tudi linearna preslikava, ki najbolje aproksimira ustrezno premaknjeno funkcijo. To seveda potrebujemo pri funkcijah več spremenljivk, a identifikacijo lahko naredimo tudi takrat.

Obvezno bi bilo treba omeniti, da v matematiki obstaja več konceptov diferenciala. Ko torej naletimo na diferencial, moramo vedno razčistiti, za katere vrste diferencial gre. Že v Riemann–Stieltjesovem integralu $\int f\,\mathrm{d}g$ diferencial $\mathrm{d}g$ ni več odvod funkcije g, temveč konstitutivni del zapisa tega integrala. Če pa je g zvezno odvedljiva, lahko zapis $\int f\,\mathrm{d}g$ interpretiramo bodisi kot Riemannov bodisi kot Stieltjesov integral in seveda se vrednosti iz obeh interpretacij ujemata.

9. Integracija racionalnih funkcij

Zadeva se da izpeljati brez kompleksnih funkcij na naslednji način:

- Izrek o razcepu na parcialne ulomke: če sta Q_1 in Q_2 tuja polinoma in je P nižje stopnje kot $Q_1 Q_2$, obstajata taka polinoma P_1 in P_2, da velja:

$$\frac{P}{Q_1 Q_2} = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2}$$

kjer je P_1 nižje stopnje kot Q_1 in P_2 nižje stopnje kot Q_2.

Skica dokaza: Ker sta polinoma Q_1 in Q_2 tuja, prav gotovo obstajata polinoma P_1 in P_2, za katera velja zgornja enačba, a standardna konstrukcija z Evklidovim algoritmom nam ne zagotavlja pogoja o stopnji. Le-tega dosežemo z deljenjem. Ta korak lahko posplošimo na poljubne evklidske kolobarje (glej tudi pri Algebri 2).

- Integracija racionalnih funkcij, katerih imenovalci razpadejo na same linearne faktorje (te točke sicer v končni fazi ne potrebujemo, je pa odlična motivacija za naslednjo točko).

- Izrek o integraciji racionalne funkcije, katere imenovalec je potenca polinoma s samimi enostavnimi faktorji: če je Q tak polinom (tj. tuj proti Q') in ima P manjšo stopnjo kot Q^r, obstajata tak R, ki ima manjšo stopnjo kot Q^{r-1}, in S, ki ima manjšo stopnjo kot Q, da velja:

$$\int \frac{P}{Q^r}\,\mathrm{d}x = \frac{R}{Q^{r-1}} + \int \frac{S}{Q}\,\mathrm{d}x$$

  Skica dokaza: Dovolj je dokazati za primer, ko ima P manjšo stopnjo kot Q. To pa dokažemo z indukcijo po r. V indukcijskem koraku moramo izpeljati:

$$\int \frac{P}{Q^r}\,\mathrm{d}x = \frac{R}{Q^{r-1}} + \int \frac{S}{Q^{r-1}}\,\mathrm{d}x$$

  kar je ekvivalentno:

$$\frac{P}{QQ'} = \frac{R'}{Q'} - \frac{(r-1)R}{Q} + \frac{S}{Q'}$$

  To pa sledi iz izreka o razcepu na parcialne ulomke.

- Izrek Ostrogradskega.

10. Taylorjeva vrsta

Menim, da je lepše in splošneje, če ostanek najprej izpeljemo v integralski obliki. To namreč lahko naredimo korak za korakom, namesto da iz klobuka potegnemo Taylorjev polinom.

Najprej bi kazalo še enkrat spomniti na pomen Lagrangeovega izreka: vrednost funkcije f v točki x lahko ocenimo, če poznamo njeno vrednost v točki a, njen odvod med x in a pa znamo primerno oceniti.

Isto oceno pa lahko izpeljemo tudi iz Newton–Leibnizeve formule. Idejo Taylorjeve formule bi prikazali kot iteracijo Newton–Leibnizeve formule, ki jo je lažje iterirati kot Lagrangeov izrek. Po dvakratni uporabi tako dobimo:

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \\ = f(a) + \int_a^x \left(f'(a) + \int_a^t f''(s)\,ds \right) \mathrm{d}t = \\ = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \int_a^t f''(s)\,ds\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Tako bi lahko iterirali poljubnokrat in bi že lahko dobili pravilo, kako iz vrednosti funkcije f in njenih prvih n odvodov ter ocene $(n+1)$-tega odvoda med a in x ocenimo vrednost funkcije f v točki x. Vendar pa je pisanje z večkratnimi integrali nepregledno in tu nastopi še ena zelo pomembna ideja, ki jo kaže zelo poudariti. Z integracijo per partes namreč lahko nekatere večkatne integrale zapišemo kot enkratne. To pride v poštev še večkrat, npr. pri reševanju Sturm–Liouvilleovih problemov. V našem primeru, če postavimo:

$$g(t) := \int_a^t f''(s)\,\mathrm{d}s$$

velja:

$$\begin{aligned} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = tg(t)\Big|_a^x - \int_a^x tg'(t)\,\mathrm{d}t = \\ = xg(x) - \int_a^x tf''(t)\,\mathrm{d}t = \\ = \int_a^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Podobno lahko izpeljemo tudi formulo poljubnega reda.

In kako iz tega izpeljemo ostanek v klasični obliki? Odgovor nam da uteženi izrek o srednji vrednosti. Za strogo pozitivno utež se da le-ta izpeljati iz klasičnega izreka o srednji vrednosti s substitucijo v določeni integral. Če utež ni strogo pozitivna, pa se zadeva seveda limitira (potrebujemo, da ima vsako zaporedje na kompaktnem intervalu vsaj eno stekališče).

Klasični izrek o srednji vrednosti se da interpretirati kot Lagrangeov izrek. Tako velja poudariti, da tudi Taylorjeva formula ničtega reda ni nič drugega kot Lagrangeov izrek.

11. Polnost

Polnost metričnega prostora pomeni, da je vsako Cauchyjevo zaporedje konvergentno. Včasih pa pride prav tudi dejstvo, da je dovolj zahtevati, da ima vsako Cauchyjevo zaporedje stekališče, torej da za zaporedje $x_1, x_2, \ldots$ obstaja taka točka x, da za vsako njeno okolico U obstaja neskončno mnogo indeksov n, za katere je $x_n \in U$. Točka x je avtomatično tudi limita zaporedja.

12. Banachovo skrčitveno načelo in iteracija

Jasno je, da Banachovo skrčitveno načelo vodi do iteracije. Dobro pa je povedati, da je marsikdaj tudi obratno: najprej imamo dano iteracijo, z Banachovim skrčitvenim načelom pa dokažemo, da le-ta skonvergira. Tako bo morda slušatelj zaslutil daljnosežnost tega izreka.

Recimo, da iščemo določeno točko x^* v nekem metričnem prostoru M. Na voljo imamo začetni približek x_0 in preslikavo $g\colon M \to M$, ki iz približka x naredi domnevno boljši približek $g(x)$. Smiselno je, da je x^* negibna točka take preslikave. Če je g skrčitev na M, po Banachovem skrčitvenem načelu iteracija $x_{n+1} = g(x_n)$ skonvergira proti želeni točki x^*.

Če torej iščemo točko z določeno lastnostjo in uspemo dokazati, da ima točka x to lastnost natanko tedaj, ko je negibna točka preslikave g, sledi, da je x^* edina točka s to lastnostjo.

Marsikdaj x^* iščemo kot rešitev določene enačbe, recimo $f(x) = a$. Z algebrajskimi prijemi jo lahko prevedemo na enačbo $g(x) = x$ (npr. enačbi prištejemo $x - a$). To je včasih bolj, včasih pa manj uspešno. Prava ideja pa je, da je x izhodiščni, $g(x)$ pa novi, tipično boljši približek rešitve enačbe. Novi približek lahko dobimo tako, da za izhodiščni približek x poiščemo preslikavo $\xi \mapsto F(\xi, x)$, ki je približek preslikave f in ki se v x ujema z f, torej $F(x, x) = f(x)$. Približek mora biti tak, da znamo učinkovito rešiti enačbo $F(\xi, x) = a$ na spremenljivko ξ. Tako $g(x)$ definiramo kot rešitev te enačbe, torej zahtevamo, da velja $F\bigl(g(x), x\bigr) = a$.

Brž ko je x negibna točka preslikave g, mora veljati $f(x) = F(x, x) = F\bigl(g(x), x\bigr) = a$, torej je x rešitev dane enačbe. Če pa ima enačba $F(\xi, x) = a$ za vsak x natanko eno rešitev na ξ, velja tudi obratno: brž ko je $f(x) = a$, je x negibna točka preslikave g. Če torej dokažemo še, da je g skrčitev, sledi, da ima enačba $f(x) = a$ eno samo rešitev in da lahko le-to dobimo z iteracijo $x_{n+1} = g(x)$.

To izvajanje je treba ilustrirati, sicer bo bržkone šlo skozi eno uho noter in skozi drugo ven. Odlična ilustracija je Newtonova metoda iskanja ničel funkcije f: dobimo jo tako, da $f(\xi)$ pri začetnem približku x aproksimiramo z $F(\xi, x) = f(x) + f'(x)(\xi - x)$.

Isti premislek deluje tudi pri Picard–Lindelöfovem eksistenčnem izreku za rešitve navadnih diferencialnih enačb prvega reda (tudi za sisteme). Če iščemo funkcijo y, ki reši diferencialno enačbo $y'(x) = H\bigl(x, y(x)\bigr)$ pri začetnem pogoju $y(x_0) = y_0$, za metrični prostor postavimo prostor vseh zveznih funkcij y, za katere je $y(x_0) = y_0$. V tem prostoru rešujemo enačbo $f(y) = 0$, kjer je $f(\eta) = \eta' - \bigl(x \mapsto H\bigl(x, \eta(x)\bigr)\bigr)$ (y in η tu obravnavamo kot funkciji, za katero nas *zanima*, kako slikata: $f(\eta)$ torej ne označuje kompozituma $f \circ \eta$, temveč je f operator na prostoru funkcij). Za približek y funkcijo $f(\eta)$ aproksimiramo z $F(\eta, y) := \eta' - \bigl(x \mapsto H\bigl(x, y(x)\bigr)\bigr)$. Tako lahko enačbo $F(\eta, y) = 0$ preprosto rešimo z integracijo, ki natančno ustreza koraku pri standardnem dokazu Picard–Lindelöfovega izreka. Začetni približek je seveda konstanta y_0.

ALGEBRA 1

13. Determinante

Determinanto definiramo kot multilinearni antisimetrični funkcional recimo na stolpcih matrike. Z razcepom matrike na elementarne matrike (ki imajo le diagonalce in kvečjemu še en element) dokažemo enoličnost. Obstoj pa dokažemo s konstrukcijo s poddeterminantami.

Če je E elementarna, A pa poljubna kvadratna matrika, iz multilinearnosti in antisimetričnosti sledi $\det(AE) = \det(A)\det(E)$. Od tod pa brž sledi še:

$$\begin{aligned} \det(E_1 \dots E_n) &= \det(E_1) \dots \det(E_n) \\ \det(AB) &= \det(A)\det(B) \\ \det(A^T) &= \det(A) \end{aligned}$$

14. Gaussova eliminacija

Pomembno je vedeti, da Gaussov postopek pride prav tako po vrsticah kot tudi po stolpcih. V obeh primerih je cilj zgornje trikotna matrika. To pa, če želimo delati le po vrsticah oziroma stolpcih, ni vedno dovolj. Če delamo po vrsticah, mora biti v vsaki naslednji vrstici vsaj ena vodilna vrstica več, če pa delamo po stolpcih, mora biti v vsakem naslednjem stolpcu vsaj ena zaključna ničla manj (tako da vsak vektor prinese kaj novega).

Dobro je vedeti, kaj preobrazbe, ki jih delamo, ohranjajo. Preobrazbe po vrsticah ohranjajo vse linearne zveze med stolpci, preobrazbe po vrsticah pa linearno ogrinjačo stolpcev. Seveda lahko zapišemo tudi ustrezno različico za vrstice, a vektorje po dogovoru vedno predstavimo s stolpci.

Preobrazbe lahko izrazimo tudi v matrični obliki: vrstično preobrazbo lahko zapišemo kot levo množenje, stolpčno preobrazbo pa kot desno množenje z neko matriko. Zato vrstična preobrazba bločne matrike $[X \mid Y]$ ohranja vsako zvezo oblike $Y = XA$, stolpčna preobrazba bločne matrike $\left[\frac{X}{Y}\right]$ pa ohranja vsako zvezo oblike $Y = AX$. Slednje je zelo dobro vedeti in je seveda mogoče izpeljati tudi drugače, brez predstavitve preobrazbe kot množenja z matriko.

15. Hkratno računanje jedra in slike

To gre zelo elegantno z Gaussovo eliminacijo po stolpcih. Začnemo z blokom $\left[\frac{I}{A}\right]$, pri eliminaciji pa v kanonično obliko pretvorimo matriko A. Neničelni stolpci nove spodnje matrike predstavljajo bazo slike, stolpci nad ničelnimi stolpci pa bazo jedra matrike A.

16. Jordanova kanonična forma

Menim, da je potrebno dati določeno motivacijo, zakaj gledamo prav korenske podprostore. Zadevo bi lahko izvedli na naslednji način, pri katerem stvar najprej dokažemo na razmeroma nekonstruktiven način. To ni ovira, ker iz rezultata zlahka izpeljemo eksplicitno konstrukcijo.

Lastne vrednosti pri tem konceptu pridejo same iz sebe, iz linearnih faktorjev minimalnega polinoma. Ali jih uvedemo že prej, je stvar okusa: morda je celotno poglavje brez predhodno definiranih lastnih vrednosti preobloženo. Podobno je s polinomi na matrikah. Vsekakor pa menim, da se šele tu skriva prava motivacija za Cayley–Hamiltonov izrek. Le-tega namreč za izpeljavo Jordanovega razcepa ne potrebujemo, z njegovo pomočjo pa ga zlahka dokažemo.

Osnovna ideja je, da endomorfizem razbijemo na direktno vsoto endomorfizmov s čim enostavnejšo strukturo. Pri tem definiramo pojem invariantnega podprostora. Konstruktivno izpeljemo najmanjši invariantni podprostor, ki pripada danemu vektorju, in pri tem ugotovimo, da je pametno gledati polinome na matrikah.

Polinome na matrikah je na prvi pogled najenostavneje definirati kot funkcije na matrikah. Toda v tem primeru je potrebno definirati vse računske operacije na njih (najdlje se zapletemo z lemo o deljenju). Druga možnost pa je, da polinome na matrikah gledamo kot funkcijski račun (bilinearno preslikavo, ki vsak par *realna* funkcija – matrika preslika v matriko) z običajnimi zahtevami: kompozitum konstantne funkcije in matrike je ustrezna konstanta, pomnožena z identično matriko, kompozitum identične funkcije matrike je slednja matrika, kompozitum produkta funkcij in matrike pa je produkt ustreznih kompozitumov. Lema o deljenju s tem odpade, res pa je, da je zato potrebno dokazati obstoj in enoličnost funkcijskega računa. Toda funkcijski račun prej ali slej uvedemo za splošnejše funkcije in zdi se mi, da je prav, da se ga v tem duhu definira že na polinomih.

Izpeljemo neeksplicitno različico Cayley–Hamiltonovega izreka, in sicer, da za vsak endomorfizem na končnorazsežnem prostoru obstaja polinom, ki ga uniči. To lahko storimo v dveh različicah. “Požrešna” različica temelji na opažanju, da potence endomorfizma slej ko prej postanejo linearno odvisne. Pri natančnejši različici pa stopnjo polinoma omejimo s stopnjo prostora. To dokažemo z indukcijo, pri čemer pri indukcijskem koraku najprej izberemo neki neničeln vektor in gledamo najmanjši invariantni podprostor, ki ga vsebuje. Nato uporabimo indukcijsko predpostavko na kvocientnem podprostoru. V nadaljevanju potrebujemo le “požrešno” različico.

Opazimo naslednje: če polinoma P in Q uničita matriko, jo uniči tudi njun največji skupni delitelj R (potrebujemo, da obstajata taka polinoma M in N, da je $R = MP+NQ$). Tako lahko definiramo minimalni polinom (ki je dejansko najmanjši glede na relacijo deljivosti in zato do konstantnega faktorja enolično določen).

Izpeljemo naslednjo trditev: če sta P in Q tuja polinoma in produkt PQ uniči endomorfizem A, sta $\ker P(A)$ in $\ker Q(A)$ invariantna podprostora, cel prostor pa je njuna direktna vsota (na preseku že enica uniči matriko A). Trditev zlahka posplošimo na produkt več paroma tujih polinomov.

Minimalni polinom razcepimo na linearne faktorje. Tako endomorfizem razcepimo na direktno vsoto endomorfizmov korenskih podprostorov, vsak izmed njih pa je vsota skalarnega endomorfizma in nilpotenta. Poseben pomen v korenskih podprostorih imajo *lastni podprostori*.

V praksi minimalni polinom konstruiramo nekoliko drugače. Konstrukcija temelji na opažanju, je število λ lastna vrednost danega endomorfizma natanko tedaj, ko je ničla njegovega minimalnega polinoma. Torej se ničle minimalnega polinoma ujemajo z ničlami karakterističnega polinoma. To je tudi pravi čas za dokaz Cayley–Hamiltonovega izreka (za vajo pa lahko izpeljemo še njegov neposredni dokaz z determinantami).

Nadaljevanje je standardno, raziskati je potrebno le še strukturo nilpotentov. Najprej bi mogoče kar udarili s shemo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
v_{1r_1} & \to & \cdots & \to & v_{12} & \to & v_{11} & \to & 0 \\
v_{2r_2} & \to & \cdots & \to & v_{22} & \to & v_{21} & \to & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
v_{kr_k} & \to & \cdots & \to & v_{k2} & \to & v_{k1} & \to & 0
\end{array}$$

kjer puščice predstavljajo preslikovanje z ustreznim niplotentom, ki ga označimo recimo z B. Nato formuliramo izrek, ki trdi, da obstaja taka tovrstna shema, da je $v_{11}, \ldots v_{1r_1}$, $v_{21}, \ldots v_{2r_2}$, $\ldots v_{k1}, \ldots v_{kr_k}$ baza celega prostora, ki jo imenujemo Jordanova baza. Ogledamo si še matriko, ki v tej bazi pripada našemu nilpotentu.

Ključ do dokaza Jordanovega izreka za nilpotente je naslednja lema: če je B, $V_j = \ker(B^j)$ in $U \subseteq V_i$ podprostor, za katerega je $U \cap V_{j-1} = \{0\}$, je B na U injektivna in velja tudi $B(U) \cap V_{j-2} = \{0\}$, vse pod pogojem, da je $j \geq 2$. Rezultat zlahka dokažemo.

Jordanov razcep torej konstruiramo na naslednji način:

1. S pomočjo karakterističnega polinoma določimo lastne vrednosti.

2. Za vsako lastno vrednost λ poiščemo baze korenskih prostorov, ki se dopolnjujejo. To najlažje storimo z Gaussovo eliminacijo po stolpcih. Začnemo z blokom $\left[\dfrac{I}{B}\right]$, kjer je $B = A - \lambda I$. Z Gaussovo eliminacijo po stolpcih matriko B preoblikujemo v ustrezno zgornje trikotno matriko, tako da dobimo njeno jedro in sliko. Nato spodnji blok preslikamo (z leve pomnožimo) z matriko B, dobljeni blok dopišemo spodaj in zdaj le-tega preoblikujemo z Gaussovo eliminacijo. Tako nadaljujemo, dokler se število ničelnih stolpcev ne ustali.

   S tem smo konstruirali razcep $X = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r \oplus W$, kjer je X cel prostor, $V_k = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k = \ker B^k$ in $W = \operatorname{im} B^r = \operatorname{im} B^{r+1}$. Po zgoraj omenjeni lemi je za vsak $k \geq 2$ preslikava B injektivna na U_k ter velja $BU_k \subseteq V_{k-1}$ in $BU_k \cap V_{k-2} = \{0\}$, kjer vzamemo še $V_0 = \{0\}$. Od tod sledi tudi, da je $\dim U_k \leq \dim U_{k-1}$.

   Iz slednjega opažanja sledi, da je r v resnici stopnja ustrezne ničle minimalnega polinoma. Če namreč konstrukcijo nadaljujemo v nedogled, namreč iz $\dim U_{r+1} = 0$ sledi $\dim U_k = 0$ za vse $k > r$. Torej je za vse take k tudi $V_k = V_r$ in vse potence endomorfizma B so injektivne na W.

3. Razcep $U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ preoblikujemo v razcep $U_1' \oplus \cdots \oplus U_r'$, kjer bo še vedno za vse $k = 1, \ldots r$ veljalo $V_k = U_1' \oplus \cdots \oplus U_k'$, poleg tega pa bo $BU_k' \subseteq U_{k-1}'$ (po lemi mora biti preslikava B injektivna tudi na prostorih $U_2', \ldots U_r'$). Začnemo tako, da postavimo $U_r' := U_r$. Nato podprostor BU_r' z baznimi vektorji podprostora U_{r-1} dopolnimo do prostora, ki bo prav tako komplement prostora V_{r-2} v prostoru V_{r-1} (v matriko najprej zapišemo preslikano bazo prostora U_r', nato tekočo bazo prostora V_{r-2} in nazadnje bazo prostora U_{r-1}, nakar naredimo Gaussa po vrsticah). Dobljeni prostor definiramo kot U_{r-1}'. Postopek nadaljujemo, dokler ne pridemo do $U_1' = U_1 = V_1$.

   Pri zgornji konstrukciji dobivamo baze prostorov U_k', ki jih sestavljajo vektorji dveh tipov: prvi so slike vektorjev iz U_{k+1}' (za $k < r$), drugi pa sploh ne pripadajo sliki nilpotenta B. Združena baza prostora V_r ima lastnost, da se vsak njen element preslika bodisi v nič bodisi v kak drug element te baze. Torej ima matrika B na prostoru V_r v tej bazi, če jo primerno uredimo, že Jordanovo kanonično formo.

ANALIZA 2

17. Diferencialni račun v več spremenljivkah

Pri parcialnih odvodih je često zmeda, kaj pomeni določen parcialni odvod, ker pač pišemo spremenljivke, ne pa zaporednih številk komponent (kar je v resnici tudi dosti nazorneje). Seveda pa je potrebno povedati, kaj stvar v resnici pomeni.

Spremenljivke je smiselno gledati kot funkcije iz neke mnogoterosti v realna števila (ne zanima nas v prvi vrsti, kako slikajo, zanimajo pa nas funkcijske zveze med njimi). Pri parcialnem odvajanju moramo odvod po določeni spremenljivki vedno gledati v kontekstu ostalih, ki jih mora biti natanko toliko, kot je dimenzija mnogoterosti, pa še nabor njihovih diferencialov ne sme biti izrojen. Če uvajamo nove spremenljivke, lahko oznaka za odvisno spremenljivko ostane enaka, v kolikor gre za isto mnogoterost ali pa tudi za podmnogoterost. V pisavi pač zožitve za podmnogoterosti zanemarimo, čeravno se jih moramo zavedati. Primer:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Tu imamo opravka z dvorazsežno mnogoterostjo in enorazsežno podmnogoterostjo (oznaka za totalni diferencial se pač uporablja za enorazsežne mnogoterosti). Spremenljivke u, x in y slikajo iz cele mnogoterosti, spremenljivka t pa le iz podmnogoterosti. Kjer je ob spremenljivkah u, x in t parcialni diferencial, jih gledamo kot funkcije iz cele mnogoterosti, kjer je totalni diferencial (d), pa v resnici gledamo njihove zožitve na podmnogoterost (a to v pisavi brez škode zanemarimo).

Jezik mnogoterosti je za študente precej abstrakten, zato bi ga bilo potrebno študentom ustrezno približati. Verjetno bi bili zelo pripravni zgledi iz fizike (vzamemo npr. pot delca po prostoru, pri kateri zraven gledamo še hitrost; vzamemo lahko npr. tudi sistem dveh delcev ali pa kakšen mehanizem).

Za primer, ko diferenciali niso zloženi v diferenčne količnike, bi bilo smiselno povedati, kaj v resnici so. Diferencial (d) preslikave v dani točki je linearna preslikava med pripadajočima tangentnima prostoroma. Diferenčni količnik med navadnima diferencialoma tudi pri funkcijah več spremenljivk ni le sintaktični konstrukt: lahko ga gledamo kot kvocient, če za linearni preslikavi $A\colon X \to Y$ in $B\colon X \to U$ definiramo njun kvocient:

$$C := \frac{A}{B}$$

kot tisto preslikavo $U \to Y$, za katero je $A = CB$, torej kot "spust" preslikave A po preslikavi B. Tako definiran kvocient obstaja natanko tedaj, ko je $\ker V \subseteq \ker A$, in je enoličen, če je B surjektivna. Če je B obrnljiva, velja $C = AB^{-1}$.

Glede na zgoraj povedano lahko torej gledamo diferencialni količnik:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

ki seveda ne obstaja vedno. Če je x skalarna funkcija, zgoraj omenjeni diferencialni količnik obstaja, brž ko je y odvedljiva funkcija x-a (funkcijsko gledano, $y = f \circ x$) in se ujema z odvodom, natančneje, s kompozitumom z x (velja torej $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f' \circ x$, kjer endomorfizme na enorazsežnih prostorih identificiramo s skalarji).

Lahko pa je x tudi *vektorska* funkcija, a če želimo imeti enoličnost, število njenih komponent (dimenzija kodomene) ne sme presegati dimenzije domene. Tako definiran diferencialni količnik ustreza Jacobijevi matriki.

Pri parcialnih odvodih pa moramo biti pazljivejši. Vsak parcialni odvod po neki spremenljivki moramo gledati v kontekstu ostalih spremenljivk. Za linearne preslikave $A\colon X \to Y$, $B\colon X \to U$ in $C\colon X \to V$ definiramo *kvocient A po B v kontekstu preslikave C* na naslednji način:

$$\frac{A}{B}[C] := \frac{A}{(B, C)}\,\iota_1\,,$$

kjer je (B, C) linearna preslikava iz X v $U \times V$, ki x preslika v (Bx, Cx), ι_1 pa je preslikava iz U v $U \times V$, ki u preslika v $(u, 0)$. Strogo gledano je tako pisava:

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

pomanjkljiva: potrebno bi bilo pisati npr.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}[\mathrm{d}y]\,.$$

18. Lagrangeovi multiplikatorji

Lagrangeova funkcija:

$$L(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_i\, g_j(x_1, \dots, x_n)$$

se lahko zdi kot zajec iz klobuka, a za to ni nobene potrebe, saj se da lepo razložiti. V primeru, ko vezi niso izrojene, namreč velja, da je točka, ki leži na podmnogoterosti, ki jo določajo vezi $g_1, \dots, g_m$, stacionarna točka funkcije f vezano na $g_1, \dots, g_m$ (kar pomeni, da je odvod funkcije f na tangentnem prostoru te podmnogoterosti enak nič) natanko tedaj, ko obstajajo taki $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, da je to stacionarna točka funkcije F (globalno, ne vezano, kar pomeni, da je odvod funkcije F v celoti enak nič). Lagrangeova funkcija torej funkcijo f *popravi* tako, da točke, ki so vezano stacionarne, postanejo globalno stacionarne.

Funkcijo F smo v prejšnjem odstavku obravnavali le kot funkcijo spremenljivk $x_1, \dots, x_n$, medtem ko so bili $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ parametri. A tudi te lahko obravnavamo kot funkcije. Točka $(x_1, \dots, x_n)$, ki leži *kjer koli* na definicijskem območju funkcije f, je namreč stacionarna točka funkcije f vezano na $g_1, \dots, g_m$ (kar seveda vključuje tudi, da leži na ustrezni podmnogoterosti) natanko tedaj, ko obstajajo taki $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, da je točka $(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ stacionarna točka funkcije F.

Opomba. Pri interpretaciji, kjer so $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ parametri, so lahko na desni strani vezi poljubne konstante, torej lahko pišemo $g_j(x_1, \dots, x_n) = a_j$. Pri interpretaciji, kjer so tudi $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ spremenljivke, pa morajo biti na desni strani ničle.

19. Izrek o inverzni preslikavi

Tipičen dokaz tega izreka temelji na Banachovem skrčitvenem načelu. Ta argument je dober, vendar pa z njim ni dobro nastopiti prekmalu, sicer je to zajec iz klobuka. Smiselno je iti na naslednji način:

- Diferenciabilna preslikava je lokalno približno linearna.
- Za neizrojene linearne preslikave je znano, kako jih obrnemo.
- Če rešujemo enačbo $f(x) = y$ in imamo na voljo približek x_0, približna linearnost preslikave f v x_0 da še en, tipično boljši približek $x_0 - \big(\mathrm{d}f(x_0)\big)^{-1}\big(f(x_0) - y\big)$. Iteriranje tega postopka vodi do Newtonove metode, ki tipično deluje odlično, včasih pa tudi zgreši.
- Povemo, da se izkaže, da imamo lažji nadzor nad situacijo, če Newtonovo metodo spremenimo tako, da na vsakem koraku uporabimo odvod kar v začetnem približku. Naslednji približek torej definiramo kot $x_{n+1} = g_y(x_n)$, kjer je $g_y(x) := x - \big(\mathrm{d}f(x_0)\big)^{-1}\big(f(x) - y\big)$. To lahko razumemo kot nerodno različico Newtonove metode.
- Opazimo, da za vsak y točka x reši enačbo $f(x) = y$ natanko tedaj, ko je negibna točka preslikave g_y; slednje pa je izpolnjeno, brž ko je x limita zgornje iteracije. Tako dobimo strogi dokaz lokalne bijektivnosti: obstaja tak $r > 0$, da je preslikava g_y na $\bar{K}(x_0, r)$ Lipschitzeva s konstanto $1/2$ (ne glede na y). Nadalje obstaja taka okolica V točke $y_0 = f(x_0)$, da $g_y(x_0)$ leži v $K(x_0, r/2)$ za vse $y \in V$. Za take y preslikava g_y kroglo $\bar{K}(x_0, r)$ preslika vase. Po Banachovem skrčitvenem načelu ima enačba $f(x) = y$ na $\bar{K}(x_0, r)$ natanko eno rešitev. Tako f okolico $f^{-1}(V)$ točke a bijektivno preslika na okolico V točke y_0.
- Diferenciabilnost inverzne preslikave se da izpeljati iz diferenciabilnosti preslikave f (glej komentarje k izreku o implicitni funkciji).
- Newtonova metoda je sicer naravnejša in tipično učinkovitejša, a za dokaz, da je preslikava $x \mapsto x - \big(\mathrm{d}f(x)\big)^{-1}\big(f(x) - y\big)$ skrčitev, potrebujemo tudi, da je *odvod* preslikave f Lipschitzev.

Izrek o inverzni preslikavi pa je tudi poseben primer izreka o implicitni preslikavi. Neposreden dokaz slednjega izreka ni nič dosti težji od zgornjega dokaza, zato je morda celo smiselno najprej dokazati izrek o implicitni preslikavi, izrek o inverzni preslikavi pa navesti kot njegovo neposredno posledico. A tudi če se odločimo za to možnost, je vseeno smiselno najprej formulirati izrek o inverzni preslikavi, nato izrek o implicitni preslikavi ter končno dokazati najprej drugega in potem prvega.

20. Izrek o implicitni preslikavi

Ko formuliramo izrek o implicitni preslikavi, se je dobro malo ustaviti in ga primerjati z izrekom o inverzni preslikavi. Zato je dobro imeti konsistentno notacijo. Tu bomo izrek formulirali takole: naj bosta $D \subseteq \mathbb{R}^m$ in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ odprti množici in $F\colon D \times A \to \mathbb{R}^n$ diferenciabilna preslikava. Vzemimo $t_0 \in D$, $x_0 \in A$ in $y_0 := F(t_0, x_0)$. Dokazati moramo, da obstajajo taka okolica W točke t_0, taka okolica U točke x_0 in taka preslikava $\varphi\colon W \to U$, da za poljubna $t \in W$ in $x \in U$ velja $F(t,x) = y_0$ natanko tedaj, ko je $x = \varphi(t)$.

Pri primerjavi z izrekom o inverzni preslikavi je dobro narediti naslednje:

- Pri izreku o inverzni preslikavi imamo opravka z enačbo $f(x) = y$, ki jo rešujemo na x. Vemo, da imamo pri $y = y_0$ rešitev $x = x_0$, zanima nas rešitev za okoliške y. Pri izreku o implicitni preslikavi pa ne perturbiramo desne strani y, temveč funkcijo f. Opravka imamo torej z enačbo $F(t,x) = y_0$, ki jo spet rešujemo na x (za še nazornejšo primerjavo lahko pišemo $f_t(x) = F(t,x)$ – indeks seveda ne označuje parcialnega odvoda). Vemo, da imamo pri $t = t_0$ rešitev $x = x_0$, zanima nas rešitev za okoliške t.

- Dobro je razumeti, kaj dobimo, če poskušamo izrek o implicitni preslikavi dokazati z izrekom o inverzni preslikavi in kaj zmanjka. Pri dani enačbi $F(t,x) = y_0$ in izhodiščni točki (t_0, x_0), za katero je $F(t_0, x_0) = y_0$, nam izrek o inverzni preslikavi za vsak t, za katerega velja, da je F v okolici točke (t, x_0) zvezno diferenciabilna po x in je ustrezni odvod neizrojen, zagotavlja obstoj take okolice U_t točke x_0 in take okolice V_t točke $F(t, x_0)$, da preslikava $x \mapsto F(t,x)$ prvo bijektivno preslika na drugo. Rešitev enačbe $F(t,x) = y_0$ je zagotovljena, če okolica V_t pokriva vrednost y_0. Tega pa nam izrek o inverzni preslikavi sam po sebi ne zagotavlja in to je dodana vrednost izreka o implicitni preslikavi.

- Dobro je omeniti, da je izrek o implicitni preslikavi posplošitev izreka o inverzni preslikavi: slednjega lahko izpeljemo, če postavimo $F(t,x) = f(x) - t$ in $y_0 = 0$. Tako lahko izreka o inverzni preslikavi niti ni treba dokazati posebej. Dokaz izreka o implicitni preslikavi ni dosti težji od dokaza izreka o inverzni preslikavi, glej spodaj.

Izrek o implicitni preslikavi lahko dokažemo na vsaj tri načine.

Prvi način: uporabimo izrek o inverzni preslikavi na sestavljeni preslikavi $(t,x) \mapsto \big(t, F(t,x)\big)$. To je vsekakor pametno, če nimamo dosti časa. Bodo pa slušatelji dokaz izreka o inverzni funkciji bolje dojeli, če se pri dokazu izreka o implicitni preslikavi vsaj malo skličemo nanj – glej spodaj.

Drugi način: v osnovi uporabimo izrek o inverzni preslikavi za preslikave $x \mapsto F(t,x)$, ko t preteče določeno okolico. Toda izrek o inverzni preslikavi v običajni formulaciji ne zagotavlja okolice v kartezijskem produktu, zato se skličemo na naslednji pomožni rezultat:

Trditev 20.1. *Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica, $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ diferenciabilna preslikava, $x_0 \in A$ in $y_0 = f(x_0)$. Naj bo $s > 0$ in $\big\|I - \big(\mathrm{d}f(x_0)\big)^{-1}\mathrm{d}f(x)\big\| \le 1/2$ za vse $x \in \bar{K}(x_0, s)$. Tedaj za vse $y \in \mathbb{R}^n$, za katere je $\big\|\big(\mathrm{d}f(x_0)\big)^{-1}(y - y_0)\big\| < s/2$, obstaja natanko en $x \in K(x_0, s)$, za katerega je $f(x) = y$.*

Če se vrnemo k formulaciji izreka o implicitni preslikavi, iz lastnosti zveznosti sledi, da obstajata taka okolica W točke t_0 in tak $s > 0$, da je $\big\|I - \big(F_x(t, x_0)\big)^{-1}F_x(t,x)\big\| \le 1/2$

za vse $t \in t_0$ in vse $x \in \bar{K}(x_0, s)$. Poleg tega lahko okolico W določimo tudi tako, da za vse $t \in W$ velja $\left\|\left(F_x(t, x_0)\right)^{-1}\left(y_0 - F(t, x_0)\right)\right\| < s/2$ (pozor: zdajšnji y_0 ustreza y v trditvi, y_0 v trditvi pa ustreza zdajšnji $F(t, x_0)$). Tako dobimo, da za vsak $t \in W$ obstaja natanko en $x \in K(x_0, s)$, za katerega je $F(t, x) = y_0$. Tega proglasimo za $\varphi(t)$.

Tretji način: dokažemo neposredno. V primerni okolici točke (t_0, x_0) je preslikava F približno linearna – velja:

$$F(t, x) = y_0 + F_t(t_0, x_0)(t - t_0) + F_x(t_0, x_0)(x - x_0) + R(t - t_0, x - x_0)\,, \tag{20.1}$$

kjer gre $\frac{\|R(t-t_0, x-x_0)\|}{\|t-t_0\|+\|x-x_0\|}$ proti nič, ko gre t proti t_0 in x proti x_0. Če je torej t blizu t_0, je torej (poleg x_0) prvi približek za x, ki reši enačbo $F(t, x) = y_0$, točka:

$$x_1 := x_0 - \left(F_x(t_0, x_0)\right)^{-1}\left(F(t, x_0) - y_0\right).$$

Še drugače, velja $x_1 = H(y, y_0)$, kjer je $H(t, x) := x - \left(F_x(t_0, x_0)\right)^{-1}\left(F(t, x) - y_0\right)$. Nato je smiselno iterirati: $x_{n+1} := H(t, x_n)$. Želeno vrednost $\varphi(t)$ je smiselno iskati kot limito približkov x_n.

Opazimo, da je $F(t, x) = y_0$ natanko tedaj, ko je x negibna točka preslikave $x \mapsto H(t, x)$, torej je smiselno pomisliti na Banachovo skrčitveno načelo. In res je $H_x(t_0, x_0) = 0$, torej obstajata taka $r > 0$ in $s > 0$, da je $\left\|H_x(t, x)\right\| \le 1/2$ za vse $t \in K(t_0, r)$ in $x \in \bar{K}(x_0, s)$. Torej za poljubna $x', y'' \in \bar{K}(x_0, s)$ velja $\left\|H(t, x') - H(t, x'')\right\| \le \frac{1}{2}\|x' - x''\|$, brž ko je $t \in K(t_0, r)$ in $x', x'' \in \bar{K}(x_0, s)$. Ni pa še rečeno, da preslikava $x \mapsto H(t, x)$ zaprto kroglo $\bar{K}(x_0, s)$ preslika vase.

Preslikava $x \mapsto H(t_0, x)$ je zvezna in x_0 je njena negibna točka, zato lahko r izberemo tako,da za vse $t \in K(t_0, r)$ velja $H(t, x) \in K(x_0, s/2)$. Potem pa za vse $x \in \bar{K}(x_0, s)$ velja $\left\|H(t, x) - x_0\right\| \le \left\|H(t, x) - H(t, x_0)\right\| + \left\|H(t, x_0) - x_0\right\| < \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \frac{s}{2} \le s$, torej preslikava $x \mapsto H(t, x)$ zaprto kroglo $\bar{K}(x_0, s)$ preslika v odprto kroglo $K(x_0, s)$, brž ko je $t \in K(t_0, r)$. Tako vidimo, da je res skrčitev na $\bar{K}(b, s)$. Po Banachovem skrčitvenem načelu ima tam natanko eno negibno točko, ta pa mora ležati v $K(x_0, s)$. Z drugimi besedami, za vse $t \in K(t_0, r)$ ima enačba $F(t, x) = y_0$ v krogli $K(x_0, s)$ natanko eno rešitev. To proglasimo za $\varphi(t)$.

Opomba. Skrčitvi iz drugega in tretjega načina nista enaki: pri skrčitvi iz drugega načina smo uporabili odvod $F_x(t, x_0)$, medtem ko smo pri tretjem načinu uporabili odvod $F_x(t_0, x_0)$. Skrčitev iz drugega načina je torej enojno, iz tretjega načina pa dvojno nerodna različica Newtonove metode.

Tako pri drugem kot pri tretjem načinu je treba dokazati še diferenciabilnost preslikave φ. To pa vidimo iz zveze (20.1). Če je $x = \varphi(t)$, torej $F(t, x) = y_0$, velja:

$$x - x_0 = -\left(F_x(t_0, x_0)\right)^{-1}\left(F_t(t_0, x_0)(t - t_0) + R(t - t_0, x - x_0)\right)$$

Nato najprej pokažemo, da obstaja taka konstanta K, da za vse primerne t in x velja $\|x - x_0\| \le K\|t - t_0\|$, nato pa lahko diferenciabilnost izpeljemo iz ocen za R ter $\|t - t_0\|$ in $\|x - x_0\|$.

21. Večrazsežni posplošeni integrali

Posplošeni integral funkcije $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se tipično definira kot limita $\lim_{a\to\infty} \int_{[-a,a]^n} f$, kjer gre a po pozitivnih realnih ali celo samo po naravnih številih. To gre v primeru, ko ima f končen integral absolutne vrednosti. A dodana vrednost posplošenega integrala je drugje, recimo pri integralu:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Za posplošitev takih primerov definicija z limito po kockah ni dobra. Ni recimo skladna s transformacijami, saj obstoja posplošenih integralov $\int f$ in $\int f \circ g\,|Jg|$ nista ekvivalentna niti tedaj, ko je g avto-difeomorfizem prostora $\mathbb{R}^n$. Poleg tega pa je treba ločeno obravnavati singularnosti.

Ena možna rešitev bi bila z izčrpanji. Izčrpanje množica M je zaporedje $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ z unijo M. Posplošeni integral funkcije f po množici M *glede na njeno izčrpanje* $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ bi bila limita $\lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f$ ob dodatni zahtevi $\lim_{n\to\infty} \int_{M_{n+1}\setminus M_n} |f| = 0$ (tako se izognemo temu, da bi obstajal integral sinusa po $[0,\infty)$ glede na izčrpanje z množicami $[0, 2\pi n]$).

Izčrpanja imajo pomanjkljivost, da izključujejo neodvisnost različnih koncev limitne množice, recimo pri dvakratnem posplošenem integralu $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kjer želimo, da gredo lahko meje za vsako spremenljivko neodvisno proti limitnim mejam. To bi lahko rešili tako, da bi izčrpanja indeksirali po usmerjenih množicah, tako kot posplošena zaporedja.

Definicija. *Posplošeno izčrpanje* množice M je neprazna družina množic $(M_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$, kjer je $\mathscr{A}$ usmerjena množica, tj. delno urejena množica z lastnostjo, da za poljubna $\alpha, \beta \in \mathscr{A}$ obstaja tak $\gamma \in \mathscr{A}$, da je $\gamma \succeq \alpha$ in $\gamma \succeq \beta$. Zahtevamo še naslednje:

- Če je $\alpha \preceq \beta$ je tudi $M_\alpha \subseteq M_\beta$.
- Za vsak $\alpha \in \mathscr{A}$ obstaja tako zaporedje $\alpha = \alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq \cdots$, da je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_{\alpha_n} = M$.

Posplošeno izčrpanje bomo imenovali tudi neprazno družino $\mathscr{A}$ podmnožic množice M, ki ima števno poddružino, ki pokrije M in pri kateri za poljubna $\alpha, \beta \in \mathscr{A}$ obstaja tak $\gamma \in \mathscr{A}$, da je $\gamma \succeq \alpha \cup \beta$. V tem primeru za relacijo urejenosti na $\mathscr{A}$ vzamemo kar inkluzijo in za $\alpha \in \mathscr{A}$ definiramo $M_\alpha = \alpha$.

Opomba. Ker množica $\mathscr{A}$ ni prazna, zagotovo obstaja tako zaporedje $\alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq \cdots$, da je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_{\alpha_n} = M$.

Definicija. Število I je *posplošeni integral* funkcije f po množici M *glede na njeno poplošeno izčrpanje* $(M_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$, če za vsako zaporedje $\alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq \cdots$, za katero je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_{\alpha_n} = M$, velja $\lim_{n\to\infty} \int_{M_{\alpha_n}} f = I$.

Zgledi:

- *Integral po intervalu* (a,b)*, posplošen na obeh krajiščih*: $\mathscr{A} = \{(u,v)\,;\, a < u \le v < b\}$, $(u',v') \succeq (u,v)$, če je $u' \le u$ in $v' \ge v$, $M_{(u,v)} = [u,v]$.
- *Cauchyjeva glavna vrednost*: $\mathscr{A} = (0,1]$, $a \succeq b$, če je $a \le b$, $M_\alpha = [-1,-a) \cup (a,1]$.

- *Konvergenca po do določene mere ohlapnih kroglah*: če z B_r označimo odprto, z $\bar{B}_r$ pa zaprto kroglo okoli izhodišča s polmerom kroglo s polmerom r, vzemimo za $\mathscr{A}$ družino merljivih množic α, za katere obstaja tak r, da je $B_r \subseteq \alpha \subseteq \bar{B}_{r+1}$.

Opomba. Ni nujno, da posplošujemo Riemannov integral po podmnožicah prostora $\mathbb{R}^n$. Lahko posplošujemo tudi Lebesgueov integral po poljubnem merljivem prostoru ali še kakšen drug integral.

Trditev 21.1. *Če je posplošeni integral funkcije f po množici M glede na njeno poplošeno izčrpanje $(M_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ enak I, velja tudi $\lim_{\alpha\to}\int_{M_\alpha} f = I$, tj. za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\alpha \in \mathscr{A}$, da za poljuben $\beta \succeq \alpha$ velja $\left|\int_{M_\beta} f - I\right| < \varepsilon$.*

Dokaz. Pa recimo, da velja nasprotno, tj. obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak $\alpha \in \mathscr{A}$ obstaja tak $\beta \succeq \alpha$, da je $\left|\int_{M_\beta} f - I\right| \geq \varepsilon$. Vzemimo zaporedje $\alpha_1 \preceq \alpha_2 \preceq$, za katero je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_{\alpha_n} = M$. Po predpostavki obstaja tak $\beta_1 \succeq \alpha_1$, da je $\left|\int_{M_{\beta_1}} f - I\right| \geq \varepsilon$. Zaradi usmerjenosti obstaja tak $\gamma_2 \in \mathscr{A}$, da je $\gamma_2 \succeq \beta_1$ in $\gamma_2 \succeq \alpha_2$. Potem pa spet obstaja tak $\beta_2 \succeq \gamma_2$, da je $\left|\int_{M_{\beta_2}} f - I\right| \geq \varepsilon$. Tako nadaljujemo in dobimo zaporedje $\alpha_1 \preceq \beta_1 \preceq \alpha_2 \preceq \beta_2 \preceq \cdots$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je $\left|\int_{M_{\beta_n}} f - I\right| \geq \varepsilon$, velja pa tudi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_{\beta_n} = M$. To pa pomeni, da I ni posplošen integral funkcije f po M glede na dano posplošeno izčrpanje. ∎

Trditev 21.2. *Če sta $(M_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ in $(M_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{B}}$ posplošeni izčrpanji množice M, $\mathscr{A} \supseteq \mathscr{B}$, urejenost na $\mathscr{B}$ inducirana z urejenostjo na $\mathscr{A}$ in če je I posplošeni integral funkcije f po množici M glede na njeno poplošeno izčrpanje $(M_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$, je I tudi posplošeni integral funkcije f po množici M glede na izčrpanje $(M_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{B}}$.* ∎

Trditev 21.3. *Vzemimo Lebesgueov integral. Če je $\int_M |f| < \infty$, je $\int_M f$ posplošeni integral funkcije f po M glede na vsako posplošeno izčrpanje množice M.* ∎

Trditev 21.4. *Vzemimo spet Lebesgueov integral. Naj bo M merljiv prostor in naj bo dana družina merljivih podmnožic $\mathscr{B}$, ki je zaprta za merljive podmnožice in končne unije ter ki ima števno poddružino, ki pokrije M. Naj bo f taka funkcija, da je $\int_B |f| < \infty$ za vse $B \in \mathscr{B}$. Če ima f posplošeni integral po posplošenem izčrpanju $\mathscr{B}$, je tudi $\int_M |f| < \infty$.*

Dokaz. Naj bo I posplošeni integral po posplošenem izčrpanju $\mathscr{B}$. Po trditvi 21.1 obstaja taka množica $B \in \mathscr{B}$, da za vsak $C \in \mathscr{B}$, za katerega je $C \supseteq B$, velja $\left|\int_C f - I\right| < 1$. Ker je $\mathscr{B}$ zaprta za števne unije, obstaja zaporedje $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots$ z unijo M. Definirajmo množice:

$$
\begin{aligned}
B^+ &:= \{x \in B \,;\, f(x) \geq 0\}\,, & B_n^+ &:= \{x \in B_n \,;\, f(x) \geq 0\}\,, & C_n^+ &:= B \cup B_n^+\,,\\
B^- &:= \{x \in B \,;\, f(x) < 0\}\,, & B_n^- &:= \{x \in B_n \,;\, f(x) < 0\}\,, & C_n^- &:= B \cup B_n^-\,.
\end{aligned}
$$

Vse te množice pripadajo $\mathscr{B}$, saj je le-ta zaprta za podmnožice in končne unije. Ker je $C_n^+ \supseteq B$, je $\left|\int_{C_n^+} f - I\right| < 1$. Nadalje je C_n^+ disjunktna unija množic $B^+ \cup B_n^+$ in B^-, torej je:

$$
\left|\int_{C_n^+} f - I\right| = \left|\int_{B^+\cup B_n^+} f + \int_{B^-} f - I\right| < 1\,,
$$

od koder sledi:

$$\int_{B^+\cup B_n^+} f_+ = \int_{B^+\cup B_n^+} f < \left|\int_{B^-} f\right| + |I| + 1\,.$$

Ker je M unija naraščajočega zaporedja množic $B^+\cup B_n^+$, je potem po izreku o monotoni konvergenci tudi:

$$\int_M f_+ < \left|\int_{B^-} f\right| + |I| + 1\,.$$

Podobno dobimo za $\int_M f_-$ in rezultat sledi. ∎

22. Krivulje v prostoru

Najprej bi definirali parametrizirano krivuljo kot zvezno preslikavo $I \to \mathbb{R}^n$, kjer je I interval na realni osi (odprt ali zaprt, omejen ali neomejen). Krivulji $\varphi\colon\ I \to \mathbb{R}^n$ in $\psi\colon\ J \to \mathbb{R}^n$ sta ekvivalentni z isto orientacijo, če obstaja taka strogo naraščajoča surjekcija $g\colon\ J \to I$, da je $\psi = \varphi \circ g$. Neparametrizirana (a orientirana) krivulja je ekvivalenčni razred glede na zgornjo relacijo.

Točka na parametrizirani krivulji je točka na intervalu I. Točka na neparametrizirani krivulji pa je preslikava α, ki slika iz množice vseh možnih parametrizacij, tako da vsako parametrizacijo $\varphi\colon\ I \to \mathbb{R}^n$ preslika v neko točko na intervalu I. Poleg tega mora za poljubno parametrizacijo $\varphi\colon\ I \to \mathbb{R}^n$ in poljubno strogo naraščajočo surjekcijo $g\colon\ J \to I$ veljati enačba $\alpha(\varphi) = g\big(\alpha(\varphi \circ g)\big)$.

Množici točk na krivulji bi lahko rekli *fazni prostor*. Fazni prostor orientirane krivulje je linearno urejen. Fazni prostor krivulje, ki ne seka same sebe, lahko gledamo kar kot množico točk v $\mathbb{R}^n$.

Povedati bi bilo treba še, kdaj je krivulja sklenjena, morda pa bi bilo dobro, če bi definirali še prav nov objekt sklenjene krivulje, ki bi bil spet ekvivalenčni razred neparametriziranih krivulj (vseeno je, kje se krivulja začne in kje konča). Za ta namen bi bilo potrebno definirati "rotacijo" intervala.

Pomemben je pojem *spremenljivke*. Spremenljivko definiramo kot preslikavo iz faznega prostora v realna števila. Tako lahko račune, ki temeljijo na spremenljivkah namesto na funkcijah, kar je često dosti preglednejše (pomislimo le na uvedbe novih spremenljivk), gledamo matematično korektno. Na ta način ne razlikujemo odvisnih in neodvisnih spremenljivk. Spremenljivke x, y in z niso nič drugega kot koordinatne projekcije.

Definiciji neparametrizirane krivulje in točke na njej sta precej zapleteni. Lahko se jima izognemo, če se omejimo na krivulje, ki ne sekajo samih sebe. Za integralni račun je to povsem dovolj. Pri preučevanju geometrijskih lastnosti (kot je npr. ukrivljenost) pa je mnogo lepše, če zadevo obravnavamo v splošnem.

23. Spremljajoči trieder

Univerzitetnim študentom velja poudariti, da gre v resnici za Gram–Schmidtov postopek. Računanje binormalnega vektorja s pomočjo $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$ je neke vrste bližnjica v trirazsežnem prostoru.

24. Prva in druga fundamentalna forma

Pri univerzitetnih študentih je dobro povedati, da je vredno gledati skalarni produkt, ki ga na nosilnem prostoru parametrične množice definira prva fundamentalna forma. Potisk tega skalarnega produkta na tangentno ravnino se namreč ujema z zožitvijo običajnega skalarnega produkta na to ravnino. Morda je dobro na ta način celo definirati prvo fundamentalno formo – kot kvadratno formo, ki definira povlek zožitve običajnega skalarnega produkta.

To je pomembno zaradi ukrivljenosti. Če ukrivljenost gledamo na vektorjih tangentne ravnine, je ukrivljenost v posamezni smeri na tej ravnini enaka vrednosti ustrezne kvadratne forme na pripadajočem enotskem vektorju. Zato sta tudi glavni smeri vselej pravokotni. Druga fundamentalna forma je povlek slednje kvadratne forme na nosilni prostor parametrične množice. Ukrivljenost v posamezni smeri na nosilnem prostoru parametrične množice je torej vrednost druge fundamentalne forme na pripadajočem vektorju, ki je enotski glede na skalarni produkt, definiran s prvo fundamentalno formo. To se ujema z razmerjem med drugo in prvo fundamentalno formo.

S stališča teorije se torej stvari obnašajo dosti lepše, če jih gledamo na tangentni ravnini. Če pa želimo kaj izračunati, jih moramo navadno povleči na parametrično množico, zato moramo stvari preučiti tudi tam.

25. Integralni račun in enomestne diferencialne forme

Naslednji pojmi so zelo povezani in tako bi jih bilo tudi dobro spredavati:

- Riemann–Stieltjesov integral;
- krivuljni integral vektorskega polja;
- enomestne diferencialne forme.

Riemann–Stieltjesov integral definiramo kot limito Riemann–Stieltjesovih vsot:

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}g := \lim \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\big(g(t_k) - g(t_{k-1})\big)\,, \tag{25.1}$$

kjer je $a, b \in \mathbb{R}$, f in g sta realni funkciji na intervalu od a do b oz. od b do a, zaporedje $a = t_0, \tau_1, t_1, \tau_2, \ldots, t_{n-1}, \tau_{n-1}, t_n = b$ je monotono, limita pa je definirana glede na to, da gre $\max_{1 \le k \le n} |t_k - t_{k-1}|$ proti nič.

Če je g identiteta, se integral prevede na navadni Riemannov integral $\int f$.

Naravna situacija, ko Riemann–Stieltjesov integral obstaja, je, ko je f zvezna, g pa ima omejeno totalno variacijo. Takrat lahko limito vzamemo malo bolj na široko: točke t_k in τ_k lahko uidejo izven intervala od a do b oz. od b do a in tudi ni več nujno, da τ_k leži med t_{k-1} in t_k. Velja, da je integral še vedno limita vsot (25.1), če:

- se točke t_k in τ_k nahajajo na fiksnem intervalu na realni osi;
- je število menjav predznakov razlik $t_k - t_{k-1}$ omejeno s fiksnim številom;
- gresta $\max_k |t_k - \tau_k|$ in $\max_k |\tau_k - t_{k-1}|$ proti nič.

Drugi pogoj odgovarja delitvi intervala na končno mnogo podintervalov, a kaj dosti splošneje ne moremo iti, saj se ne moremo kar poljubno sprehajati okoli nezveznosti integratorja g.

Pri delu z Riemann–Stieltjesovim integralom prideta prav naslednja dva rezultata.

Reparametrizacija. Privzemimo:

- Naj bo Φ zvezna funkcija, definirana na intervalu od α do β oz. od β do α, ki samo končno mnogokrat zamenja naraščanje in padanje.
- Naj definicijsko območje funkcij f in g vsebuje zalogo vrednosti funkcije Φ.
- Naj bo $\Phi(\alpha) = a$ in $\Phi(\beta) = b$

Tedaj velja:

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \Phi)\, \mathrm{d}(g \circ \Phi) = \int_a^b f\, \mathrm{d}g\,.$$

Rezultat lahko zapišemo tudi s funkcijami s prikrito domeno:

$$\int_A^B f(u)\, \mathrm{d}g(u) = \int_a^b f\, \mathrm{d}g\,.$$

Tu je A točka, kjer je $u = a$, B pa točka, kjer je $u = b$.

Uvedba novega integratorja: če je Ψ zvezno odvedljiva na intervalu od a do b oz. od b do a (tj. zvezna na zaprtem intervalu, odvedljiva na odprtem intervalu, odvod pa se da zvezno razširiti na zaprti interval), velja:

$$\int_a^b f\, \mathrm{d}(\Psi \circ g) = \int_a^b f \cdot (\Psi' \circ g)\, \mathrm{d}g\,.$$

To lahko pišemo tudi v obliki:

$$\int_A^B u\, \mathrm{d}\Psi(v) = \int_A^B u\, \Psi'(v)\, \mathrm{d}v\,,$$

kjer je A točka, kjer je $v = a$, B pa točka, kjer je $v = b$.

Zelo dobrodošla lastnost obeh rezultatov je, da za nobeno od funkcij Φ ali Ψ ni potrebno, da je monotona, s čimer se tako pogosto žuga na začetnih tečajih analize. Med drugim, če je v integralu $\int_a^b f\, \mathrm{d}g$ funkcija g zvezno odvedljiva, lahko g zapišemo kot kompozitum $g \circ \mathrm{id}$

in dobimo, da se Riemann-Stieltjesov integral $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ ujema z navadnim Riemannovim integralom $\int_a^b fg'$.

Pojem Riemann–Stieltjesovega integrala pride zelo prav pri krivuljnem integralu. Najprej kot poseben primer definiramo krivuljni integral funkcije po funkciji. Krivulje je ugodno gledati s parametrizacijo vred, saj tako vključimo tudi krivulje, ki sekajo same sebe. Kasneje lahko še vedno vpeljemo ustrezne ekvivalenčne razrede ali pa celo verige.

Krivuljo najsplošnejše predstavimo kar kot preslikavo γ, ki slika iz intervala na realni osi v določeno množico M (dopustna je torej tudi Peanova krivulja). V osnovnem primeru privzamemo, da je interval kar zaprt interval $[a, b]$. Za funkciji $u, v \colon M \to \mathbb{R}$ definiramo:

$$\int_\gamma u \, \mathrm{d}v := \int_a^b (u \circ \gamma) \, \mathrm{d}(v \circ \gamma) \, .$$

Integral prav gotovo obstaja, če je $u \circ \gamma$ zvezna, $v \circ \gamma$ pa ima omejeno totalno variacijo.

Pri delu z novim integralom pridejo prav naslednji trije rezultati.

Reparametrizacija. Privzemimo:

- Naj bo $\Phi \colon [\alpha, \beta] \to [\hat{a}, \hat{b}]$ zvezna funkcija, ki samo končno mnogokrat zamenja naraščanje in padanje.
- Naj bo $\Phi(\alpha) = a$ in $\Phi(\beta) = b$.
- Naj se da γ razširiti do zvezne funkcije iz $[\hat{a}, \hat{b}]$ v M, za katero velja, da je $u \circ \hat{\gamma}$ zvezna, $v \circ \hat{\gamma}$ pa ima omejeno totalno variacijo.

Tedaj velja:

$$\int_{\hat{\gamma} \circ \Phi} u \, \mathrm{d}v = \int_\gamma u \, \mathrm{d}v \, .$$

Poleg tega je tudi $u \circ \hat{\gamma} \circ \Phi$ zvezna, $v \circ \hat{\gamma} \circ \Phi$ pa ima omejeno totalno variacijo. Rezultat nam torej pove, da je integral neodvisen od parametrizacije krivulje, sledi pa neposredno iz reparametrizacije osnovnega Riemann–Stieltjesovega integrala.

Prenos: če je $F \colon M \to N$ zvezna preslikava in je $u \circ F \circ \gamma$ zvezna, $v \circ F \circ \gamma$ pa ima omejeno totalno variacijo, velja:

$$\int_{F \circ \gamma} u \, \mathrm{d}v = \int_\gamma (u \circ F) \, \mathrm{d}(v \circ F) \, .$$

Krivulja $F \circ \gamma$ je *potisk* krivulje γ, funkciji $u \circ F$ in $v \circ F$ pa sta *povleka* funkcij u in v vzdolž preslikave F.

Uvedba nove spremenljivke: če funkcija v slika v določen zaprt interval I in če je $\Psi \colon I \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva na I, velja:

$$\int_\gamma u \, \mathrm{d}(\Psi \circ v) = \int_\gamma u \cdot (\Psi' \circ v) \, \mathrm{d}v \, .$$

Ta rezultat je prikladno zapisati tudi tako, da v obravnavamo kot funkcijo, za katero nas ne zanima, kako slika:

$$\int_\gamma u \, \mathrm{d}\Psi(v) = \int_\gamma u \, \Psi'(v) \, \mathrm{d}v \, .$$

A diferencial je tu del zapisa integrala, ne odvod.

Zadnji rezultat nam da misliti, da bi prišlo prav, če bi ga lahko interpretirali kar kot enakost $u \, \mathrm{d}\Psi(v) = u \, \Psi'(v) \, \mathrm{d}v$, ki bi bila posledica enakosti $\mathrm{d}\Psi(v) = \Psi'(v) \, \mathrm{d}v$. No, če je M gladka mnogoterost, funkcija v pa zvezno diferenciabilna, zapis $\mathrm{d}v$ pomeni tudi odvod funkcije v, ki je enomestna diferencialna forma ali ekvivalentno prerez kotangentnega svežnja. Prereze kotangentnega svežnja je možno množiti z zveznimi funkcijami in tako dobimo, da bi bili lahko vsi izrazi pod integralom enomestne diferencialne forme. Definirati je treba le še integral take forme. Če je ω enomestna diferencialna forma, njen integral po krivulji γ definiramo kot:

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b (\omega \circ \gamma) \cdot \gamma' = \int_a^b \Big(t \mapsto \omega\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t) \Big) \, .$$

Odvod γ' preslikave γ je tu preslikava iz intervala $[a, b]$ v tangentni prostor mnogoterosti M. Za krivuljo γ zdaj privzamemo, da je zvezno odvedljiva (v določeni meri bi se sicer dalo posplošiti na lokalno Lipschitzeve preslikave).

Če je u zvezna, v pa zvezno diferenciabilna funkcija, lahko zapis $\int_\gamma u \, \mathrm{d}v$ zdaj interpretiramo bodisi kot krivuljni integral funkcije u po funkciji g bodisi kot integral forme $u \, \mathrm{d}v$. Oba integrala se ujemata, ker se Riemann–Stieltjesov integral po zvezno odvedljivi funkciji ujema z navadnim Riemannovim integralom.

Podobno kot pri Riemann–Stieltjesovem integralu in krivuljnem integralu funkcije po funkciji imamo tudi tu standardne rezultate, ki zadevajo komponiranje.

Reparametrizacija: če je $\Phi\colon [\alpha, \beta] \to [\hat{a}, \hat{b}]$ zvezno odvedljiva funkcija s $\Phi(\alpha) = a$ in $\Phi(\beta) = b$, γ pa se da razširiti do zvezno odvedljive funkcije iz $[\hat{a}, \hat{b}]$ v M, velja kar:

$$\int_{\hat{\gamma} \circ \Phi} \omega = \int_\gamma \omega \, .$$

Prenos: za zvezno diferenciabilno preslikavo $F\colon M \to N$ in formo ω na N definiramo *povlek* forme ω vzdolž F, ki je forma na M:

$$(F^*\omega)(x)\eta := \omega\big(F(x)\big) \, \mathrm{d}F(x)\eta \, .$$

Poleg tega pa še potisk krivulje γ vzdolž F, torej $F \circ \gamma$, bolj ilustrativno označimo z $F_*\gamma$. Tedaj velja:

$$\int_{F_*\gamma} \omega = \int_\gamma F^*\omega \, .$$

Uvedba nove spremenljivke pa pri formah nima smisla. Še drugače povedano, če krivuljni integral funkcije po funkciji gledamo kot integral ustrezne forme, je uvedba nove spremenljivke avtomatizem.

Če je γ krivulja v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$, lahko integral enomestne diferencialne forme definiramo nekoliko splošneje – kot limito:

$$\lim \sum_{k=1}^{n} \omega\big(\gamma(\tau_i)\big)\big(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\big)\,,$$

ko je $a = t_0 \le \tau_1 \le t_1 \le \tau_2 \le \cdots \le t_{n-1} \le \tau_n \le t_n = b$ in gre $\max_{1 \le k \le n}(t_k - t_{k-1})$ proti nič. Zdaj je za krivuljo γ dovolj zahtevati, da ima omejeno totalno variacijo – še tega ni treba, da je zvezna. Limito lahko gledamo tudi širše – podobno kot pri osnovnem Riemann–Stieltjesovem integralu. Seveda veljata tudi reparametrizacija in prenos.

Enomestne diferencialne forme na podmnožicah evklidskega prostora lahko identificiramo kar z vektorskimi polji, in sicer tako, da vektorskemu polju R priredimo formo:

$$\omega(x)\eta := \langle R(x), \eta\rangle\,.$$

Tako tudi krivuljni integral vektorskega polja dobimo kot poseben primer integrala enomestne diferencialne forme.

Vse skupaj se zdi precej zapleteno in velja premisliti, v kolikšni meri bi predavali na ta način. So pa krivuljni integrali enomestnih diferencialnih form odlično izhodišče za integrale večmestnih form, saj je tu določene abstraktne pojme, kot je diferencialna forma, vendar lažje doumeti, kot če bi neposredno uvedli večmestne forme.

26. Holomorfne funkcije

Analitičnost in holomorfnost. Menim, da bi bilo v začetku smiselno, če bi analitičnost in holomorfnost definirali posebej. Pojem analitičnosti izvira iz zgodovine pojma funkcije. Včasih npr. funkcije, ki racionalna števila preslika v 1, iracionalna pa v 0, niso šteli za funkcije. Smiselno bi se bilo vprašati, kaj bi bile "naravne" funkcije. Tako bi množico analitičnih funkcij na nekem območju definirali kot najmanjšo množico, ki vsebuje vse funkcije, ki jih dobimo z osnovnimi računskimi operacijami, in ki je zaprta za enakomerno konvergenco po kompaktih. Holomorfnost pa definiramo kot kompleksno odvedljivost. Presenetljivo se izkaže, da se pojma ujemata. Že takoj na začetku bi bilo potrebno povedati, da je Cauchy-Riemannov sistem izredno močna lastnost (kot bomo kmalu dokazali).

Integriranje holomorfnih funkcij po parametru. Pri ugotovitvi, da je vsota holomorfnih funkcij tudi holomorfna, bi veljalo (brez natančnega dokazovanja) omeniti, da to pod primernimi pogoji velja tudi za neskončno vrsto in integral: če je funkcija $f(z,t)$ holomorfna v z, je tudi integral $\int f(z,t)\,dt$ holomorfna funkcija. To dejstvo je zelo pomembno pri razumevanju Cauchyjeve integralske formule in kasneje pri analitičnosti Laplaceovih transformirank (študentom pač omenimo, da se bo to dejstvo kasneje večkrat izkazalo za zelo pomembno).

Cauchyjeva integralska formula. Gre za eno izmed najbolj ključnih lastnosti holomorfnih funkcij. Dobro jo je prikazati tudi kot dejstvo, da lahko vsako holomorfno funkcijo na omejenem območju sestavimo iz funkcij $z \mapsto 1/(z-a)$. To da recipročni vrednosti kot holomorfni funkciji poseben pomen.

Formulo je smiselno izpeljati v naslednjem slogu. Za vsako zvezno funkcijo f velja:

$$f(z) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi r} \oint_{|\zeta - z| = r} f(\zeta)\, \mathrm{d}s$$

kjer je na desni strani krivuljni integral prve vrste po ζ ($\mathrm{d}s$ je diferencial loka). Pri holomorfnih funkcijah pa lahko slednji integral zapišemo tudi kot kompleksni krivuljni integral:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta$$

Naprej gremo po standardni poti: upoštevamo ničelnost kompleksnega krivuljnega integrala in naredimo limito, ko gre r proti 0.

Iz Cauchyjeve integralske formule takoj sledi princip maksima in enoličnost v notranjosti. Ko enkrat to ugotovimo, bi bilo smiselno Cauchyjevo integralsko formulo predstaviti kot dejstvo, da lahko vsako holomorfno funkcijo na nekem omejenem območju sestavimo iz funkcij $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z)$, ki so zato v tem smislu fundamentalne holomorfne funkcije. Zato ima tudi vsaka holomorfna funkcija vse lastnosti, ki jih imajo fundamentalne funkcije $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z)$ in so zaprte za integriranje (neskončna gladkost, razvoj v potenčno vrsto). Na tem mestu tudi izpeljemo, da se pojma holomorfnosti in analitičnosti ujemata.

Res je, da zgoraj izpeljana Cauchyjeva formula ni najsplošnejša, menim pa, da jo pričujoča izpeljava zelo dobro ilustrira. Takoj nato lahko seveda na standardni način izpeljemo splošnejšo različico z ovojnim številom.

Celoštevilskost ovojnega števila. Ključna stvar, ki se gleda pri izpeljavi celoštevilskosti ovojnega števila, je izraz:

$$\exp\left(\int_C \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}\right)$$

V Rudinu se vrednost slednjega izraza izpelje z logaritemskim odvajanjem. Menim, da je bolje, če bi se zadeva izpeljala neposredno, kar z Riemannovimi vsotami.

27. Vektorska analiza

Smiselno bi bilo, če bi pri klasičnih vektorskih operatorjih, kot so gradient, divergenca in rotor, omenili notacijo, ki jo uporabljajo fiziki:

$$\operatorname{grad} f = \underline{\nabla}\, f\,, \quad \operatorname{div} \underline{u} = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}\,, \quad \operatorname{rot} \underline{u} = \underline{\nabla} \times \underline{u}$$

Ta notacija ima dve prednosti: da nam misliti, da so slednje operacije neodvisne od baze, poleg tega pa z njeno pomočjo bistveno lažje razumemo identitete, kot je:

$$\underline{\Delta} = \operatorname{grad} \operatorname{div} - \operatorname{rot} \operatorname{rot}$$

ki temelji na enakosti za dvojni vektorski produkt. Na nivoju Analize 2 je sicer slednjo identiteto še vedno potrebno dokazati na roko, a to lahko damo študentom za domačo nalogo ali pa dokažemo na vajah. Za eleganten dokaz zgornje identitete moramo namreč divergenco in rotor matematično korektno definirati s pomočjo običajnega skalarnega in vektorskega produkta, kar pa ni tako preprosto. To lahko storimo tako, da nablo definiramo kot element tenzorskega produkta prostora $\mathbb{R}^3$ in prostora diferencialnih operatorjev 1. reda na skalarnih poljih (zadošča že prostor smernih odvajanj). Poleg tega je prostor vektorskih polj naravno izomorfen tenzorskemu produktu prostora $\mathbb{R}^3$ in prostora vseh skalarnih polj. Tako lahko definiramo:

$$\underline{\nabla} := \underline{i} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \underline{j} \otimes \frac{\partial}{\partial y} + \underline{k} \otimes \frac{\partial}{\partial z}$$

Nato za poljuben diferencialni operator D, skalarno polje f ter vektorja $\underline{x}$ in $\underline{y}$ definiramo:

$$\begin{aligned}
(\underline{x} \otimes D)f &:= \underline{x} \otimes (Df) \\
(\underline{x} \otimes D) \cdot (\underline{y} \otimes f) &:= (\underline{x} \cdot \underline{y})(Df) \\
(\underline{x} \otimes D) \times (\underline{y} \otimes f) &:= (\underline{x} \times \underline{y}) \otimes (Df)
\end{aligned}$$

Seveda pa slednje daleč presega okvir Analize 2.

Menim pa, da je zelo pomembno, da divergenco karakteriziramo tudi kot ustrezno limito ploskovnih integralov. Le-ta namreč zelo dobro ilustrira idejo pojma divergence, poleg tega pa ni težko iz nje izpeljati Gaussovega izreka, ki je prav tako fundamentalen. Menim, da je Gaussov izrek potrebno izpeljati neposredno z delitvami območja, ne pa tako kot v Vidavu.

Iz karakterizacije divergence s ploskovnimi integrali seveda takoj sledi neodvisnost od baze. Od tod pa sledi tudi, da je od baze neodvisen Laplaceov operator ($\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$).

ALGEBRA 2

28. Kolobarji

Vrstni red podajanja dela teorije:

- Cel kolobar, obseg ulomkov.
- Nerazcepen element, praelement.
- Vsak praelement je nerazcepen, obratno pa ni nujno res.
- Faktorizacija, Gaussov kolobar.
- Ideali.
- Definicija praideala (motivacija s praelementi). Maksimalni ideali.
- Karakterizacija praidealov in maksimalnih idealov s faktorskimi kolobarji. Vsak maksimalni ideal je praideal.
- Glavni ideali, glavni kolobarji.
- Za poljuben element a glavnega kolobarja so naslednje trditve ekvivalentne:
    1. a je nerazcepen.
    2. (a) je maksimalen ideal.
    3. (a) je praideal.
    4. a je praelement.
- Glavni kolobar ustreza principu naraščajočih verig idealov.
- Vsak glavni kolobar je Gaussov, obratno ni nujno res.
- Evklidski kolobarji (naravnejša definicija z dobro osnovanimi množicami).
- Vsak evklidski kolobar je glavni, obratno ni nujno res.
- Izrek o razcepu na parcialne ulomke v obsegu ulomkov evklidskega kolobarja (tuji faktorji v imenovalcu, pravi ulomki).

ANALIZA 3

29. Picard–Lindelöfov eksistenčni izrek

Standardni dokaz tega izreka gre tako, da diferencialno enačbo skupaj z začetnim pogojem prevedemo na integralsko enačbo, nakar uporabimo Banachovo skrčitveno načelo. To lahko motiviramo tako, da najprej zapišemo iteracijo, s pomočjo katere dobimo rešitev: če imamo dano enačbo $y'(x) = H\big(x, y(x)\big)$ in približek y, naslednji približek dobimo kot funkcijo η, ki reši enačbo $\eta'(x) = H\big(x, y(x)\big)$. To naravno vodi do integralske enačbe. Glej tudi 12. razdelek.

30. Eksistenčni izrek za diferencialne enačbe v implicitni obliki

Pri več časa in boljših študentih bi bilo pošteno narediti teorijo še za enačbe $M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$, kjer bi rešitve iskali kot integralske krivulje. Tako bi bile navpične točke take kot vse druge – rešitve enačbe $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$ bi bile cele krožnice. Lokalni eksistenčni izrek bi veljal, brž ko bi bili funkciji M in N na določeni odprti množici D zvezno diferenciabilni in nikjer obe hkrati enaki nič.

To se da zlahka posplošiti na mnogoterosti: za vsak gladek prerez projektivnega svežnja lokalno obstaja 1-podmnogoterost, ki gre skozi dano točko na mnogoterosti in je taka, da se v vsaki točki, skozi katero gre, njen tangentni prostor ujema z ustreznim enorazsežnim podprostorom, ki je vrednost prereza projektivnega svežnja v tej točki. To takoj sledi iz klasičnega lokalnega eksistenčnega izreka, če uporabimo primeren lokalni homeomorfizem: usklajenost s prerezom projektivnega svežnja na n-mnogoterosti se prevede na sistem $n-1$ navadnih diferencialnih enačb.

Bolj zanimiva pa je posplošitev globalnega eksistenčnega izreka. Tu se namreč izkaže, da ne potrebujemo več Lipschitzevega pogoja, zato pa pridejo na plan druge težave. Predvsem 1-mnogoterost ne ustreza več kot objekt, ki ga iščemo. To se zelo lahko vidi pri iracionalnem toku na torusu, kjer je ustrezni prerez projektivnega svežnja zelo krotek.

Primeren objekt bi bil ekvivalenčni razred imerzij iz realne osi v mnogoterost, kjer sta imerziji i in j ekvivalentni, če obstaja tak difeomorfizem Φ na $\mathbb{R}$, da je $j = i \circ \Phi$. Tak ekvivalenčni razred ustreza 1-podmnogoterosti, če so njegovi elementi tudi gladke vložitve. Imerzija oz. ekvivalenčni razred ustreza danemu prerezu projektivnega svežnja, če za vsako točko velja, da je slika tangentnega prostora element vrednosti prereza projektivnega svežnja v ustrezni točki.

Globalnost eksistenčnega izreka interpretiramo tako, da obstaja *maksimalni* ekvivalenčni razred, ki ustreza danemu prerezu. Ekvivalenčni razred je maksimalen, če imerzije, ki so njegovi elementi, nimajo limit niti proti neskončno niti proti minus neskončno. Iz tega izključimo rob mnogoterosti: vse mnogoterosti jemljemo brez roba, ne privzamemo pa, da so kompaktne.

Kot primer vzemimo diferencialno enačbo $\mathrm{d}y = y^2\,\mathrm{d}x$, ki jo gledamo na $\mathbb{R}^2$. Maksimalna rešitev, ki gre skozi točko $(0, 1)$, je krivulja (1-podmnogoterost) $y = 1/(1-x)$, $x < 1$.

Dejstvo, da za $x \geq 1$ ni nobene točke na tej krivulji, ni v nasprotju s tovrstno formulacijo globalnega eksistenčnega izreka, saj ne iščemo funkcije koordinate x. Pomembno je, da se po krivulji lahko v nedogled sprehajamo naprej in nazaj.

Taka globalna rešitev obstaja, brž ko je prerez projektivnega svežnja gladek, tj. zvezno diferenciabilen. Gre torej za zelo naraven rezultat. Skica dokaza:

- Za vsako točko na mnogoterosti obstaja odprta okolica, kjer skozi vsako točko obstaja globalna rešitev v zgornjem smislu. To vidimo iz klasičnega globalnega eksistenčnega izreka: lokalno je vsaka zvezno diferenciabilna funkcija Lipschitzeva.
- Obstaja torej pokritje mnogoterosti iz odprtih množic, kjer skozi vsako točko obstaja globalna rešitev. To pokritje pa lahko zmanjšamo na lokalno končno pokritje, saj je mnogoterost parakompakten prostor. To pokritje je tudi števno (tj. končno ali števno neskončno), saj je mnogoterost po definiciji 2-števen prostor. Označimo to pokritje z $\mathscr{U}$. Njegove elemente enumeriramo.
- Maksimalno imerzijo konstruiramo induktivno: začnemo z okolico iz pokritja $\mathscr{U}$, ki vsebuje izhodiščno točko, in pripadajočo globalno rešitev v tej okolici. To rešitev orientiramo. Nato nadaljujemo naprej in nazaj takole: če rešitev na ustreznem koncu nima limite v celotni mnogoterosti, smo za tisti konec zaključili. Če pa ima limito, poiščemo globalno rešitev v elementu pokritja $\mathscr{U}$, ki vsebuje to limito in ima najmanjši indeks. To rešitev združimo s prejšnjo. Rešitev torej, dokler je možno, na obeh koncih podaljšujemo.
- Na vsakem koncu – naprej ali nazaj v času – se lahko podaljšanje konča ali pa nadaljuje v nedogled. V vsakem primeru pa lahko vse rešitve združimo v enotno rešitev.
- Dobljena enotna rešitev je maksimalna, tj. na nobenem koncu nima limite. Ločimo dva primera. Če je ustreznih indeksov (za naprej ali nazaj v času) končno mnogo, obstaja zadnja okolica, ki se je priključila. Toda če je okolica zadnja gledano recimo naprej v času, to pomeni, da pripadajoča rešitev na tej okolici naprej v času nima limite na celotni mnogoterosti, to pa potem ne more veljati niti za enotno rešitev. Če pa je ustreznih indeksov neskončno mnogo in obstaja limita enotne rešitve, je le-ta tudi limita izbranih točk v ustreznih elementih pokritja. To pa je v nasprotju z lokalno končnostjo pokritja.

Ta izvajanja bi se dala verjetno posplošiti na kvazilinearne sisteme parcialnih diferencialnih enačb: namesto izhodiščne točke vzamemo m-razsežno podmnogoterost (lahko pa tudi ekvivalenčni razred imerzij) in prav tako prerez projektivnega svežnja. Iščemo ustrezen ekvivalenčni razred imerzij ranga $m + 1$. Dokaz tovrstne posplošitve pa ni premočrten in morda so zanjo še kakšne ovire.

ANALIZA 4

31. Sturm–Liouvilleova teorija

Od kod dobimo Greenovo funkcijo? To ni nič drugega kot družina rešitev ustrezne diferencialne enačbe (z obojestranskimi robnimi pogoji) za distribucije delta. Saj ne bi bilo treba formalno razložiti cele teorije distribucij: distribucijo delta bi predstavili kot formalni odvod indikatorja poltraka. Ideja je v tem, da lahko vsako funkcijo dobimo tako, da zložimo distribucije delta. Ker so Sturm–Liouvilleovi operatorji linearni, isto velja tudi za rešitve diferencialne enačbe.

32. Potencialna teorija

Nekaj lastnosti harmoničnih funkcij lahko izpeljemo zelo hitro in nazorno. Najprej izpeljemo izrek o povprečju:

$$f(x) = \frac{1}{m_{n-1}(S^{n-1})} \int_{S^{n-1}} f(x + rs) \, \mathrm{d}S(s)$$

kjer je f harmonična funkcija, m_{n-1} pa $(n-1)$-razsežna Lebesgueova mera. Začeli bi s tem, da zgornja formula velja v limiti, ko gre r proti 0. Mogoče ne bi bilo slabo malo razglabljati o napaki, ki je že na prvi pogled nižjega velikostnega reda kot pri splošni odvedljivi funkciji (čeprav si s tem ne moremo prav dosti pomagati). Nato pa iz Gaussovega izreka izpeljemo, da je odvod desne strani po r enak 0, zato zgornja formula velja natančno. Iz tega potem takoj sledi princip maksima. Tako smo eno izmed ključnih lastnosti izpeljali brez posebnega truda in dosti nazorno.

Iz principa maksima sledi, da je harmonična funkcija na omejenem območju enolično določena z vrednostmi na robu. To je dober povod za Dirichletovo nalogo.

Na tem mestu ne bi bilo slabo omeniti povezave s holomorfnimi funkcijami. Gradient harmonične funkcije je natančno vektorsko polje brez izvirov in vrtincev. Holomorfna funkcija pa je vektorsko polje z naslednjo lastnostjo: če mu zamenjamo komponenti, dobimo polje brez izvirov in vrtincev.

Dirichletovo nalogo rešimo s potencialom dvojnega sloja. Ne bi bilo slabo omeniti, da to pomeni, da lahko vsako harmonično funkcijo na omejenem območju sestavimo iz fundamentalnih rešitev.

TEORIJA MERE

33. Izrek o monotoni konvergenci

Dokaz tega izreka je v tipičnem učbeniku kratek, a se je skozenj težko pregristi – glavne ideje se težko razumejo. Poleg tega pa je treba paziti na neskončnost. Zato bi bilo smiselno dokaz malo razdeliti.

Spomnimo se, da je Lebesgueov integral funkcije iz merljivega prostora M v $[0, \infty]$ definiran kot:

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{s \in S_f} \int s \, \mathrm{d}\mu \,, \tag{33.1}$$

kjer je S_f množica vseh enostavnih funkcij $s\colon\ M \to [0, \infty]$, za katere je $s \le f$.

Lema 33.1. *Naj bo $f\colon\ M \to [0, \infty)$ merljiva funkcija. Tedaj je tudi:*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{s \in T_f} \int t \, \mathrm{d}\mu \,,$$

kjer je T_f množica vseh enostavnih funkcij $t\colon\ M \to [0, \infty)$, za katere za vsak $x \in M$ velja bodisi $t(x) = 0$ bodisi $t(x) < f(x)$.

Skica dokaza. Označimo $a := \int_{s \in S_f} \int s \, \mathrm{d}\mu$. Očitno je $\sup_{t \in T_f} \int f \, \mathrm{d}\mu \le a$. Treba je le še dokazati, da za vsak $b < a$ obstaja taka funkcija $t \in T_f$, da je $\int t \, \mathrm{d}\mu \ge b$ (in smemo privzeti, da je $a > 0$). Ločimo tri primere:

- *f je končna, tj. $f(x) < \infty$ za vse $x \in M$.* V tem primeru lahko za t vzamemo funkcijo cs, kjer je c primerna konstanta, s pa funkcija iz S_f, za katero je $\int s \, \mathrm{d}\mu > b$.
- *f je skoraj gotovo končna, tj. $\mu\{x \in M \,;\, f(x) = \infty\} = 0$.* V tem primeru ustreza funkcija t, prirejena funkciji $\tilde{f}(x) := f(x) \, \mathbf{1}\big(f(x) < \infty\big)$.
- *f je neskončna na množici s strogo pozitivno mero.* V tem primeru lahko za t vzamemo indikator množice, kjer je f neskončna, pomnožen s primernim faktorjem.

■

Naj bo zdaj $f_1 \le f_2 \le \ldots$ zaporedje merljivih funkcij iz M v $[0, \infty]$, ki po točkah konvergira k f. Označimo $a := \lim_{n \to \infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu$. Iz definicije (33.1) hitro sledi, da je $a \le \int f \, \mathrm{d}\mu$. Po lemi za dokaz nasprotne neenakosti zadošča pokazati, da je $\int t \, \mathrm{d}\mu \le a$ za vsako funkcijo $t \in T_f$. To storimo s pomočjo množic:

$$A_n := \{x \in M \,;\, t(x) \le f_n(x)\} \,,$$

ki tvorijo naraščajoče zaporedje z unijo M (tu je ključno, da je $t \in T_f$), in mero $\nu(B) := \int f \, \mathbf{1}_B \, \mathrm{d}\mu$.

34. Fatoujeva lema

Pri Fatoujevi lemi se marsikdo lovi, v katero smer je obrnjena neenakost, dobro pa jo je tudi motivirati (tako kot nasplošno vse). Zelo smiselno je začeti z neenakostma:

$$\int \min\{f, g\}\, \mathrm{d}\mu \le \min\left\{\int f\, \mathrm{d}\mu,\ \int g\, \mathrm{d}\mu\right\},$$
$$\int \max\{f, g\}\, \mathrm{d}\mu \ge \max\left\{\int f\, \mathrm{d}\mu,\ \int g\, \mathrm{d}\mu\right\},$$

ki ju lahko povemo tudi tako, da minimum in maksimum močneje delujeta *znotraj* kot zunaj integrala. To lahko takoj posplošimo na infimum in supremum števne družine funkcij. Če neenakost zapišemo za infimume in repe zaporedja funkcij ter uporabimo izrek o monotoni konvergenci, dobimo Fatoujevo lemo.

Obvezno je treba tudi razložiti, zakaj stvar ne velja za $\limsup$. Razlog je seveda ta, da infimumi repov tvorijo naraščajoče, supremumi pa padajoče zaporedje, zato na slednjih ne moremo uporabiti izreka o monotoni konvergenci. V resnici lahko pri $\limsup$ neenakost velja v obe smeri.

35. Izrek o dominirani konvergenci

Ključna stvar je, da razumemo, zakaj je dominiranost smiselna predpostavka. To bi bilo smiselno najprej utemeljiti na Fatoujevi lemi:

- Najprej s protiprimerom pokažemo, da Fatoujeva lema za realne funkcije v splošnem ne velja.
- Potem rečemo, da lahko Fatoujevo lemo vseeno razširimo na zaporedje funkcij, ki imajo dominirane negativne dele.
- Za zaporedje funkcij, ki imajo dominirane pozitivne dele, pa velja različica Fatoujeve leme za $\limsup$.
- Izrek o dominirani konvergenci takoj sledi iz obeh prej omenjenih posplošitev Fatoujeve leme.

36. Lebesgueov integral vektorskih funkcij

Popolnoma neposredno in brez posebnega dodatnega dela je možno definirati Lebesgueov integral merljivih preslikav iz merljivega v Fréchetov prostor, ki imajo zalogo vrednosti v neki separabilni množici (ki je lahko odvisna od preslikave). Te preslikave tvorijo algebro in so zaprte za limite zaporedij po točkah. Tako lahko Lebesgueov integral definiramo že od vsega začetka, stopnja splošnosti pa je odvisna od predznanja slušateljev (pri vseh bi šlo z $\mathbb{R}^n$, pri večini pa z normiranim prostorom).

Najprej definiramo Lebesgueov integral enostavnih merljivih preslikav v poljuben vektorski prostor. Pri vajenih slušateljih lahko pišemo:

$$\int s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{v \in V} v \, \mu\big(s^{-1}(\{v\})\big) \, .$$

Sledi naslednji rezultat: če je s enostavna merljiva preslikava iz merljivega prostora v poljubno množico A in $f\colon A \to V$ poljubna preslikava, velja:

$$\int f \circ s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{a \in A} f(a) \, \mu\big(s^{-1}(\{a\})\big) \, .$$

Ta rezultat je osnova za kasnejši dokaz izreka o substituciji v Lebesgueov integral, iz njega pa sledi tudi aditivnost integrala (direkten dokaz aditivnosti je približno enako težak kot dokaz zgornjega splošnejšega rezultata). Iz aditivnosti tudi sledi monotonost: $f \le g \Rightarrow \int f \, \mathrm{d}\mu = \int g \, \mathrm{d}\mu$.

Pomembna lastnost zgornjega integrala je tudi, da, če je d translacijsko invariantna metrika na V, velja:

$$d\left(\int s \, \mathrm{d}\mu, \int t \, \mathrm{d}\mu\right) \le \int d\big(s(x), t(x)\big) \, \mu(\mathrm{d}x) \, . \tag{36.1}$$

Nato naredimo pripravo na definicijo Lebesgueovega integrala poljubnih merljivih funkcij. V začetku precej strogo ločimo funkcije v $[0, \infty]$ in funkcije v V. Najprej je potrebno pokazati, da se dajo oboje aproksimirati z enostavnimi funkcijami. Pri funkcijah v $[0, \infty]$ moramo kot ponavadi pokazati, da obstaja naraščajoče zaporedje, ki po točkah konvergira k posamezni funkciji. Pri preslikavah v separabilne podmnožice Fréchetovega prostora pa moramo pokazati, da za vsako merljivo funkcijo f obstaja zaporedje funkcij f_n, ki po točkah konvergira k f in za katero velja $d\big(f_n(x), f(x)\big) \le d\big(f_1(x), f(x)\big)$ za vsak x in vsak $n \in \mathbb{N}$. Aproksimiramo lahko na naslednji način: če je $\{v_1, v_2, \dots\}$ števna povsod gosta množica, definiramo $s_n(x) := v_k$, kjer je k najmanjši indeks v $\{1, \dots n\}$, za katerega je točka v_k med točkami $v_1, \dots v_n$ najbližja točki x.

Zdaj smo nared, da definiramo Lebesgueov integral. Najprej se čisto po standardnem postopku posvetimo funkcijam v $[0, \infty]$ in definiramo:

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{0 \le s \le f \\ s \text{ enostavna}}} \int s \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Spet po standardu pokažemo, da pri enostavnih funkcijah obe definiciji sovpadata, nakar dokažemo monotonost, izrek o monotoni konvergenci, aditivnost, oceni $\sup \int \le \int \sup$ in $\inf \int \ge \int \inf$ ter Fatoujevo lemo. Nato dokažemo še izrek o monotoni konvergenci navzdol in Fatoujevo lemo za dominirana zaporedja in $\limsup$. Pri tem je treba vpeljati pojma sumabilnosti in dominiranosti (dominiranost definiramo za družino funkcij).

Lebesgueov integral funkcij v Fréchetov prostor pa, kot smo že omenili, definiramo neposredno, brez posredovanja linearnih funkcionalov. Definiramo ga posebej kot limito integralov ustreznih enostavnih funkcij. Spet potrebujemo sumabilnost in dominiranost:

- merljiva funkcija f, ki slika v Fréchetov prostor, je *sumabilna*, če je funkcija $x \mapsto \int d\bigl(f(x), 0\bigr)$ sumabilna;
- družina sumabilnih funkcij $\{f_\alpha \,;\, \alpha \in A\}$ je *dominirana*, če je družina $\bigl\{d\bigl(f_\alpha(x), f_\beta(x)\bigr) \,;\, \alpha, \beta \in A\bigr\}$ dominirana.

Opazimo, da za vsako sumabilno funkcijo f, ki slika v separabilno podmnožico Fréchetovega prostora, obstaja *dominirano* zaporedje enostavnih funkcij, ki po točkah konvergira k f. Nadalje potrebujemo še naslednjo trditev.

Trditev 36.1. *Naj bo $s_1, s_2, \ldots$ dominirano zaporedje enostavnih funkcij iz merljivega v Fréchetov prostor, ki po točkah konvergira proti sumabilni funkciji f. Tedaj je tudi zaporedje integralov $\int s_n \,\mathrm{d}\mu$ konvergentno; če je $f = 0$, je $\lim_{n\to\infty} \int s_n \,\mathrm{d}\mu = 0$.*

Dokaz. Če so izpolnjeni pogoji prvega dela izreka, lahko ocenimo:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \sup_{m,n\ge N} d\left(\int s_m \,\mathrm{d}\mu, \int s_n \,\mathrm{d}\mu\right) &\le \lim_{N\to\infty} \sup_{m,n\ge N} \int d\bigl(s_m(x), s_n(x)\bigr)\, \mu(\mathrm{d}x) \le \\ &\le \lim_{N\to\infty} \int \sup_{m,n\ge N} d\bigl(s_m(x), s_n(x)\bigr)\, \mu(\mathrm{d}x) \le \\ &\le \int \lim_{N\to\infty} \sup_{m,n\ge N} d\bigl(s_m(x), s_n(x)\bigr)\, \mu(\mathrm{d}x) = \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Torej je zaporedje integralov Cauchyjevo in zato konvergentno. Če pa je še $f = 0$, lahko ocenimo:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} d\left(\int s_n \,\mathrm{d}\mu, 0\right) &\le \limsup_{n\to\infty} \int d\bigl(s_n(x), 0\bigr)\, \mu(\mathrm{d}x) \le \\ &\le \int \lim_{n\to\infty} d\bigl(s_n(x), 0\bigr)\, \mu(\mathrm{d}x) = \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

torej zaporedje integralov konvergira proti nič. ■

Zdaj lahko končno dobro definiramo Lebesgueov integral preslikav v Fréchetove prostore. Iz te definicije in izreka o monotoni konvergenci se vidi, da na preseku sovpada z definicijo Lebesgueovega integrala funkcij v $[0, \infty]$.

Ko smo enkrat v popolnosti definirali Lebesgueov integral, najprej dokažemo nekaj drobnarij: aditivnost, monotonost, oceni $\sup \int \le \int \sup$ in $\inf \int \ge \int \inf$ in še oceno (36.1). Nato je na vrsti izrek o dominirani konvergenci, ki sledi iz ocene:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} d\left(\int s_n \,\mathrm{d}\mu, \int f \,\mathrm{d}\mu\right) &\le \limsup_{n\to\infty} \int d\bigl(s_n(x), f(x)\bigr)\, \mu(\mathrm{d}x) \le \\ &\le \int \lim_{n\to\infty} d\bigl(s_n(x), f(x)\bigr)\, \mu(\mathrm{d}x) = \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Pomemben je tudi izrek o substituciji v Lebesgueov integral.

Ta postopek se obnese zlasti, če želimo takoj delati z Lebesgueovimi integrali vektorskih funkcij (npr. pri slučajnih vektorjih). Zdi se, da ni toliko primeren, če kasneje delamo le z integrali realnih ali kompleksnih funkcij: pri definiciji integrala imamo dvojno, pri izreku o dominirani konvergenci pa kar trojno delo. A slušatelji bi se vsaj naučili, kaj pomeni dominiranost, ki je zelo pomemben pojem.

Vso stvar pa lahko najbrž naredimo tudi brez definicije integrala funkcij v $[0, \infty]$: integral funkcije v Fréchetov prostor definiramo kot limito integralov enostavnih funkcij, ki k ciljni funkciji konvergirajo po točkah in ki glede na pripadajočo integralsko normo tvorijo Cauchyjevo zaporedje (funkcija bi bila po definiciji integrabilna, če tako zaporedje obstaja). Poprej za motivacijo izpeljemo, da je vsaka funkcija, ki ima zalogo vrednosti v separabilni množici, limita enostavnih funkcij po točkah. Pokažemo še protiprimer z $n\,\mathbf{1}(0 < x < 1/n)$. Sledijo naslednje ugotovitve:

- Če zaporedje enostavnih funkcij po točkah konvergira proti nič in je Cauchyjevo v integralski normi, tudi zaporedje integralov konvergira proti nič (kar težko dokazati z golimi rokami).
- Integral je dobro definiran in razširitev integrala enostavnih funkcij (takoj sledi iz prejšnjega opažanja).
- Izrek o substituciji, aditivnost novega integrala.
- Pri realnih funkcijah monotonost in izrek o monotoni konvergenci, in sicer z razširitvijo za neskončne vrednosti integrala pri funkcijah v $[0, \infty)$ (tj. če zaporedje enostavnih funkcij s_n po točkah narašča proti f, je f integrabilna natanko tedaj, ko je zaporedje integralov funkcij s_n konvergentno).
- f je integrabilna natanko tedaj, ko ima zalogo vrednosti v separabilni množici in ko je $x \mapsto d\big(f(x), 0\big)$ integrabilna. (???)
- Izrek o dominirani konvergenci (glej zgoraj).
- Prostor integrabilnih funkcij je poln, brž ko je poln prostor, v katerega slikajo.

Ves postopek je potrebno preveriti in ovrednotiti težavnost posameznih korakov.

37. Osnovne neenakosti L^p prostorov

Za izpeljave osnovnih neenakosti (Jensenove, Hölderjeve in Minkowskega) je bolje, da niso čisto izpiljene; bolje je, da se najprej pove ideja. Tako bi človek (morda naivno) pričakoval, da študentje dobijo predstavo, za kaj gre, ne pa, da se izpeljava potegne iz klobuka. Glej naslednji prispevek.

38. Pogojno matematično upanje

Pogojno matematično upanje lahko vpeljemo na več načinov, vsak ima svoje prednosti in slabosti.

- *Neposredno kot Radon–Nikodymov odvod.* Tehnično je to najlažje, aditivnost je očitna, ni pa takoj intuitivno jasno, zakaj gre tako.
- *Kot integral identitete po pogojni porazdelitvi.* Če to karakterizacijo dovolj poudarimo pri brezpogojnem matematičnem upanju, je intuitivno jasneje kot prejšnja definicija. Intuitivno razumljivejše so tudi pogojne različice ostalih karakteristik, npr. variance. Seveda pa se je treba potruditi, da se dokaže obstoj pogojnih porazdelitev. In brž je treba izpeljati tudi matematična upanja funkcij, da se lahko recimo dokaže aditivnost.
- *Kot Lebesgueov integral slučajne spremenljivke po regularni pogojni verjetnosti.* Ta pot je najbližje izvirni definiciji brepogojnega matematičnega upanja. Zelo slaba stran tega načina pa je, da regularna pogojna verjetnost morda sploh ne obstaja nujno (glej naslednji prispevek). Če pa že obstaja, se je za dokaz potrebno zelo potruditi. No, obstaja na perfektnih prostorih, vendar je treba presneto premisliti, ali se obnese študente begati z njimi že na tej točki.

TOPOLOGIJA

39. Vpeljava topologije s sistemi okolic

Topologija se da vpeljati na veliko načinov. Poleg vpeljave po definiciji s konceptom odprte množice verjetno najbolj prav prideta še vpeljava z bazo in podbazo. Zanimiva je vpeljava z operatorjem Kuratowskega, vendar se zdi, da se ne uporablja prav pogosto. Velikokrat pa pride prav vpeljava topologije s sistemi okolic. Čeprav lahko iz sistemov okolic hitro dobimo bazo topologije, pride vpeljava s sistemi okolic vendar tolikokrat prav, da jo je, če čas dopušča, smiselno formulirati kot ločen rezultat.

Spomnimo se, da je U okolica točke x v določenem topološkem prostoru, če obstaja taka odprta množica V, da je $x \in V \subseteq U$. Nadalje se spomnimo, da je množica V odprta natanko tedaj, ko za vsak $x \in V$ obstaja taka okolica U točke x, da je $U \subseteq V$. V zvezi z okolicami sta pomembna naslednja dva koncepta:

- *Filter* okolic točke x, ki je družina *vseh* okolic te točke. V tem prispevku bomo to družino označili z $\mathcal{N}(x)$.
- *Bazični (fundamentalni) sistem* okolic točke x, ki je taka družina $\mathcal{N}_{\mathrm{b}}(x)$ okolic točke x, da je vsaka odprta množica W, ki vsebuje x, tudi nadmnožica neke množice $U \in \mathcal{N}_{\mathrm{b}}(x)$.

Vpeljava topologije s filtrom okolic ni problematična. Prav namreč hitro opazimo, da filtri okolic zadoščajo naslednjim lastnostim:

(F1) Za vsak x je družina $\mathcal{N}(x)$ neprazna.

(F2) Za vsak $U \in \mathcal{N}(x)$ je $x \in U$.

(F3) Če je $U \in \mathcal{N}(x)$ in $V \supseteq U$, je tudi $V \in \mathcal{N}(x)$.

(F4) Če je $U \in \mathcal{N}(x)$ in $V \in \mathcal{N}(x)$, je tudi $U \cap V \in \mathcal{N}(x)$.

(F5) Za vsak $U \in \mathcal{N}(x)$ obstaja tak $V \in \mathcal{N}(x)$, da je $V \subseteq U$ in $V \in \mathcal{N}(y)$ za vse $y \in V$.

Nekoliko več dela terja ugotovitev, da za vsako neprazno množico X in vsak nabor sistemov množic $\mathcal{N}(x) \subseteq 2^X$, $x \in X$, ki zadošča aksiomom (F1)–(F5), obstaja natanko ena topologija na X, v kateri za vsako točko $x \in X$ velja, da je $\mathcal{N}(x)$ filter okolic točke x. Aksiomi (F1)–(F5) torej *karakterizirajo* filtre okolic.

Pri splošnih bazičnih sistemih okolic pa ni videti tako preprostega sistema aksiomov, ki bi jih karakteriziral. Težave so z modifikacijo aksioma (F5), ki narekuje, da mora vsaka okolica dane točke iz sistema obvezno vsebovati tudi neko odprto okolico te točke. Te težave pa ni, če se omejimo na bazične sisteme *odprtih* okolic. Le-ti so karakterizirani z naslednjimi lastnostmi:

(BO1) Za vsak x je družina $\mathcal{N}_{\mathrm{b}}(x)$ neprazna.

(BO2) Za vsak $U \in \mathcal{N}_{\mathrm{b}}(x)$ je $x \in U$.

(BO3) Če je $U \in \mathcal{N}_{\mathrm{b}}(x)$ in $y \in U$, obstaja tak $V \in \mathcal{N}_{\mathrm{b}}(y)$, da je $V \subseteq U$.

(BO4) Če je $U \in \mathcal{N}_{\mathrm{b}}(x)$ in $V \in \mathcal{N}_{\mathrm{b}}(x)$, obstaja tak $W \in \mathcal{N}_{\mathrm{b}}(x)$, da je $W \subseteq U \cap V$.

Natančneje, vsak nabor baznih sistemov okolic vseh točk zadošča aksiomom (BO1)–(BO4) in za vsako neprazno množico X in vsak nabor sistemov množic $\mathcal{N}_\mathrm{b}(x) \subseteq 2^X$, $x \in X$, ki zadošča aksiomom (BO1)–(BO4), obstaja natanko ena topologija na X, v kateri za vsako točko $x \in X$ velja, da je $\mathcal{N}_\mathrm{b}(x)$ bazični sistem odprtih okolic točke x.

Topologijo sicer lahko vpeljemo tudi z naborom splošnih bazičnih sistemov okolic. Vzemimo neprazno množico X in nabor sistemov množic $\mathcal{N}_\mathrm{b}(x) \subseteq 2^X$, ki zadošča naslednjim aksiomom:

(B1) Za vsak x je družina $\mathcal{N}_\mathrm{b}(x)$ neprazna.

(B2) Za vsak $U \in \mathcal{N}_\mathrm{b}(x)$ je $x \in U$.

(B3) Če je $U \in \mathcal{N}_\mathrm{b}(x)$, obstaja tak $V \in \mathcal{N}_\mathrm{b}(x)$, da za vsak $y \in V$ obstaja tak $W \in \mathcal{N}_\mathrm{b}(y)$, da je $W \subseteq V$.

(B4) Če je $U \in \mathcal{N}_\mathrm{b}(x)$ in $V \in \mathcal{N}_\mathrm{b}(x)$, obstaja tak $W \in \mathcal{N}_\mathrm{b}(x)$, da je $W \subseteq U \cap V$.

Tedaj spet obstaja natanko ena topologija na X, v kateri za vsako točko $x \in X$ velja, da je $\mathcal{N}_\mathrm{b}(x)$ bazični sistem okolic točke x. Ni pa res, da vsak nabor bazičnih sistemov okolic vseh točk v danem topološkem prostoru zadošča tem aksiomom. Natančneje, zadošča aksiomom (B1), (B2) in (B4), ne pa nujno tudi aksiomu (B3).

Aksiom (BO3) je preprostejši od aksioma (B3), poleg tega pa vsak nabor sistemov množic, ki zadošča aksiomom (B1)–(B4), vsebuje nabor sistemov množic, ki zadošča aksiomom (BO1)–(BO4) in porodi isto topologijo. Zato je vpeljava topologije z naborom splošnih bazičnih sistemov okolic (to je na podlagi aksiomov (B1)–(B4)) nekoliko nerodna in bi jo bilo smiselno dati le za vajo.

Za podrobnosti glej npr. trditev 1.2.5 in izrek 1.4.11 v:

[1] T. B. Singh: *Introduction to Topology.* Springer, 2019.

40. Kompaktno-odprta topologija

Kompaktno-odprta topologija ni ideja, ki se porodi sama po sebi, zato jo je, kolikor le čas dopušča, dobro primerno motivirati in uvesti postopoma. Tukaj je predstavljena ena od možnih poti do te topologije.

V teoriji množic lahko preslikave iz $X \times Y$ v Z naravno identificiramo s preslikavami, ki slikajo iz X v množico preslikav iz Y v Z. Drugače povedano, obstaja naravna bijekcija med $Z^{X \times Y}$ in $(Z^Y)^X$, in sicer preslikavi $f \in Z^{X \times Y}$ ustreza preslikava $F \in (Z^Y)^X$, definirana po predpisu:

$$F(x)(y) := f(x, y)\,. \tag{40.1}$$

Takoj nastane vprašanje, ali gre to tudi v topološki kategoriji, torej ali je zgoraj opisana identifikacija tudi bijekcija med $\mathcal{C}(X \times Y, Z)$ in $\mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$. Z drugimi besedami, vprašanje je, ali za poljubni preslikavi $f \in Z^{X \times Y}$ in $F \in (Z^Y)^X$, povezani prek (40.1), velja naslednja ekvivalenca:

$$f \text{ zvezna} \iff F \text{ slika v } \mathcal{C}(Y, Z) \text{ in je tudi sama zvezna}\,. \tag{40.2}$$

Del odgovora je očiten: če je f zvezna, F zagotovo slika v prostor zveznih funkcij, saj za vsak $x \in X$ velja, da je preslikava $F(x)\colon\ y \mapsto f(x,y)$ zvezna. Preostanek odgovora pa je odvisen od tega, kakšno topologijo uvedemo na množici $\mathcal{C}(Y,Z)$.

Ni rečeno, da za fiksna topološka prostora Y in Z sploh obstaja topologija na $\mathcal{C}(Y,Z)$, pri kateri ekvivalenca (40.2) velja za vse možne topološke prostore X. Prav tako ni očitna enoličnost: če je X enoelementni prostor, je ustrezna vsaka topologija na $\mathcal{C}(Y,Z)$. Jasno pa je, da se v (40.2) implikacija v desno ohrani, če topologijo na $\mathcal{C}(Y,Z)$ zamenjamo s šibkejšo, implikacija v levo pa se ohrani, če topologijo na $\mathcal{C}(Y,Z)$ zamenjamo z močnejšo.

Poskusimo z nekaj znanimi topologijami. Najprej $\mathcal{C}(Y,Z)$ opremimo s produktno topologijo, torej najšibkejšo topologijo, v kateri je evaluacija $g \mapsto g(y)$ zvezna za vse $y \in Y$. Preslikava $F\colon\ X \to \mathcal{C}(Y,Z)$ je tedaj zvezna natanko tedaj, ko je za vsak $y \in Y$ zvezna preslikava $x \mapsto F(x)(y)$. A če je $f \in Z^{X\times Y}$ zvezna in F pripadajoča preslikava iz $(Y^Z)^X$, je za vsak $y \in Y$ zvezna tudi preslikava $x \mapsto f(x,y) = F(x)(y)$, torej je F zvezna. Dokazali smo, da, če $\mathcal{C}(Y,Z)$ opremimo s produktno topologijo, v (40.2) velja implikacija v desno.

Žal pa v slednjem primeru ne velja nujno implikacija v levo. Le-ta namreč ne velja za preslikavo $f\colon\ X \times Y \to Z$, ki ni zvezna, vendar pa je preslikava $y \mapsto f(x,y)$ zvezna za vsak x in preslikava $x \mapsto f(x,y)$ zvezna za vsak y. Taka je npr. funkcija:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}\ ;\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ ;\ (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

pri čemer $X := Y := Z := \mathbb{R}$ opremimo z običajno topologijo.

Kaže torej, da je produktna topologija na $\mathcal{C}(Y,Z)$ nekoliko prešibak kandidat. Pri naslednjem poskusu se omejimo na primer, ko je Z metrični prostor, in $\mathcal{C}(Y,Z)$ opremimo z enakomerno topologijo, to je topologijo, pri kateri za vsako funkcijo $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ množice:

$$N(g,\varepsilon) := \{h \in \mathcal{C}(Y,Z)\ ;\ \sup_{y\in Y} d(g(y),h(y)) < \varepsilon\}\ ; \quad \varepsilon > 0$$

tvorijo bazični sistem odprtih okolic funkcije f. Pokažimo, da v tem primeru v (40.2) velja implikacija v levo. Vzemimo torej preslikavo $f \in Z^{X\times Y}$ in pripadajočo preslikavo $F \in (Y^Z)^X$. Privzemimo, da F slika v $\mathcal{C}(Y,Z)$ in da je zvezna glede na enakomerno topologijo. To pomeni, da za vsak $x_0 \in X$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka okolica U točke x_0, da za vsak $x \in U$ velja $F(x) \in N(F(x_0),\varepsilon)$, torej $\sup_{y\in Y} d(f(x_0,y), f(x,y)) < \varepsilon/2$. Vzemimo še $y_0 \in Y$. Ker je preslikava $F(x_0)$ zvezna v y_0, obstaja taka okolica V točke y_0, da za vsak $y \in V$ velja $d(f(x_0,y_0), f(x_0,y)) < \varepsilon/2$. Sledi, da za poljuben $(x,y) \in U \times V$ velja $d(f(x_0,y_0), f(x,y)) < \varepsilon$. To pa pomeni, da je preslikava f zvezna v (x,y), od koder zaključimo, da v (40.2) velja implikacija v levo.

Žal pa podobno kot prej, če $\mathcal{C}(Y,Z)$ opremimo z enakomerno topologijo, v (40.2) ne velja nujno implikacija v desno. Kot protiprimer lahko vzamemo npr. funkcijo $f(x,y) := xy$, kjer spet $X := Y := Z := \mathbb{R}$ opremimo z običajno topologijo oziroma metriko. Funkcija f je očitno zvezna, medtem ko, brž ko je $x \neq x_0$, velja $\sup_{y\in Y} d(f(x_0,y), f(x,y)) = \sup_{y\in\mathbb{R}} |(x_0 - x)y| = \infty$.

Implikacija v desno v (40.2) (in z njo celotna ekvivalenca) pa vseeno velja, če $\mathcal{C}(Y, Z)$ opremimo z enakomerno topologijo in je prostor Y *kompakten*. Naj bo namreč $f \in Z^{X \times Y}$ zvezna preslikava s pripadajočo preslikavo $F \in (Z^Y)^X$. Dokazati moramo, da za vsak $x_0 \in X$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka okolica U točke x_0, da za vsak $x \in U$ velja $F(x) \in N(F(x_0), \varepsilon)$, torej $\sup_{y \in Y} d(f(x_0, y), f(x, y)) < \varepsilon$. Za vsak $y_0 \in Y$ obstajata taka okolica U_{y_0} točke x_0 in taka okolica V_{y_0} točke y_0, da za poljubna $x \in U_{y_0}$ in $y \in V_{y_0}$ velja $d(f(x_0, y_0), f(x, y)) < \varepsilon/2$. Množice V_{y_0}, $y_0 \in Y$, tvorijo pokritje prostora Y, ki ima končno podpokritje $V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}$. Množica $U := U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ je še vedno okolica točke x_0. Vzemimo zdaj poljubni točki $x \in U$ in $y \in Y$. Točka y je element neke množice V_{y_i}, točka x pa pripada U_{y_i}, potem pa velja $d(f(x_0, y), f(x, y)) \le d(f(x_0, y), f(x_0, y_i)) + d(f(x_0, y_i), f(x, y)) < \varepsilon$. Torej je $\sup_{y \in Y} d(f(x_0, y), f(x, y)) = \max_{y \in Y} d(f(x_0, y), f(x, y)) < \varepsilon$, to pa je bilo treba dokazati.

Dejstvo, da implikacija v desno v (40.2) vseeno velja, če $\mathcal{C}(Y, Z)$ opremimo z enakomerno topologijo in je prostor Y kompakten, nam da navdih za vpeljavo *kompaktno-enakomerne* topologije. To je topologija, pri kateri za vsako funkcijo $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ množice:

$$\tilde{N}(g, K, \varepsilon) := \{h \in \mathcal{C}(Y, Z)\ ;\ \sup_{y \in K} d(g(y), h(y)) < \varepsilon\}\ ; \quad \varepsilon > 0,\ K \subseteq Y,\ K \text{ kompaktna}$$

tvorijo bazični sistem odprtih okolic funkcije f. Če je prostor Y kompakten, ni težko videti, da se ta topologija ujema z enakomerno topologijo.

Kompaktno-enakomerna topologija pa se da preprosto posplošiti tudi na splošne topološke prostore: če je Z splošen topološki prostor, je ustrezna posplošitev kar topologija na $\mathcal{C}(Y, Z)$, ki ima za podbazo množice:

$$G(K, W) := \{f \in \mathcal{C}(Y, Z)\ ;\ f(K) \subseteq U\}\,,$$

pri čemer K preteče vse kompaktne množice v Y, W pa preteče vse odprte množice v Z. Tej topologiji pravimo *kompaktno-odprta* topologija.

V primeru, ko je Z metrični prostor, se kompaktno-odprta topologija ujema s kompaktno-enakomerno topologijo. Če namreč vzamemo podbazično okolico $G(K, W)$ funkcije g, sta kompaktna množica $G(K, W)$ in zaprta množica $Z \setminus W$ disjunktni, torej sta oddaljeni za neki $\varepsilon > 0$. Tedaj pa je $\tilde{N}(g, K, \varepsilon) \subseteq G(K, W)$. Tako vidimo, da je kompaktno-enakomerna topologija močnejša od kompaktno-odprte. Obratno, naj bo $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$, $K \subseteq Y$ kompaktna in $\varepsilon > 0$. Za vsak $y_0 \in K$ definirajmo $V_{y_0} := \{y \in K\ ;\ d(g(y_0), g(y)) < \varepsilon/3\}$ in $K_{y_0} := \{y \in K\ ;\ d(g(y_0), g(y)) \le \varepsilon/3\}$. Množica V_{y_0} je odprta, množica K_{y_0} pa zaprta podmnožica množice K, torej je kompaktna. Množica V_{y_0}, $y_0 \in K$, tvorijo odprto pokritje množice K, torej obstaja končno podpokritje $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$. Če z $B(z, r)$ označimo odprto kroglo okoli z s polmerom r, trdimo, da je $g \in \bigcap_{i=1}^n G(K_{y_i}, B(g(y_i), 2\varepsilon/3)) \subseteq \tilde{N}(g, K, \varepsilon)$. Najprej se spomnimo, da za vsak i in vsak $y \in K_i$ velja $d(g(y_i), g(y)) \le \varepsilon/3 < 2\varepsilon/3$, torej je $g \in G(K_{y_i}, B(g(y_i), 2\varepsilon/3))$. Vzemimo zdaj $h \in \bigcap_{i=1}^n G(K_i, B(g(y_i), 2\varepsilon/3))$ in naj bo $y \in K$. Obstaja tak i, da je $y \in V_{y_i}$. Ker je tedaj tudi $y \in K_i$ in $h \in G(K_i, B(g(y_i), 2\varepsilon/3))$, je $d(g(y_i), h(y)) < 2\varepsilon/3$. Ker je $y \in V_i$, je $d(g(y_i), g(y)) < \varepsilon/3$. Sledi $d(g(y), h(y)) < \varepsilon$. Ker to velja za vsak $y \in K$, je res $\bigcap_{i=1}^n G(K_{y_i}, B(g(y_i), \varepsilon/3)) \subseteq \tilde{N}(g, K, \varepsilon)$. Kompaktno-odprta topologija je torej posplošitev kompaktno-enakomerne topologije.

Če prostor $\mathcal{C}(Y,Z)$ opremimo s kompaktno-odprto topologijo, v (40.2) velja implikacija v desno. Argument je praktično isti kot pri kompaktno-enakomerni topologiji. Vzemimo spet zvezno preslikavo $f \in Z^{X\times Y}$ in pripadajočo preslikavo $F \in (Z^Y)^X$. Dovolj je dokazati, da za vsak $x_0 \in X$, vsako kompaktno množico $K \subseteq Y$ in vsako odprto množico $W \subseteq Z$, za katero velja $F(x_0)(K) \subseteq W$, torej $f(x_0, y) \in W$ za vse $y \in K$, obstaja taka okolica U točke x_0, da za vsak $x \in U$ velja $F(x)(K) \subseteq W$, torej $f(x,y) \in W$ za vse $x \in U$ in vse $y \in K$. Za vsak $y_0 \in K$ obstajata taka okolica U_{y_0} točke x_0 in taka okolica V_{y_0} točke y_0, da za poljubna $x \in U_{y_0}$ in $y \in V_{y_0}$ velja $f(x,y) \in W$. Množice V_{y_0}, $y_0 \in Y$, tvorijo pokritje množice K, ki ima končno podpokritje $V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}$. Množica $U := U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ je še vedno okolica točke x_0. Vzemimo zdaj poljubni točki $x \in U$ in $y \in K$. Točka y je element neke množice V_{y_i}, točka x pa pripada U_{y_i}, potem pa velja $f(x,y) \in W$, to pa je bilo treba dokazati.

Če prostor $\mathcal{C}(Y,Z)$ opremimo s kompaktno-odprto topologijo, v (40.2) velja implikacija v levo pod dodatno predpostavko, da je prostor Y lokalno kompakten v smislu, da ima vsaka točka $y \in Y$ bazični sistem kompaktnih okolic. Vzemimo spet zvezno preslikavo $f \in Z^{X\times Y}$ in pripadajočo preslikavo $F \in (Z^Y)^X$. Privzemimo, da F slika v $\mathcal{C}(Y,Z)$ in da je zvezna glede na kompaktno-odprto topologijo. Dokazati moramo, da za vsako odprto množico $W \subseteq Z$ in za vsak par $(x_0, y_0) \in X \times Y$, za katerega je $f(x_0, y_0) \in W$, obstajata taka okolica U točke x_0 in taka okolica V točke y_0, da za vsak $x \in U$ in vsak $y \in V$ velja $f(x,y) \in W$. Ker je $F(x_0)$ zvezna, je praslika $F(x_0)^{-1}(W) = \{y \in Y \;;\; f(x_0,y) \in W\}$ odprta okolica točke y_0. Ker je Y lokalno kompakten, obstaja kompaktna okolica K točke y_0, ki je vsebovana v $F(x_0)^{-1}(W)$. Torej je $F(x_0)(K) \subseteq W$ oziroma $F(x_0) \in G(K,W)$. Ker je F zvezna v x_0, obstaja taka okolica U točke x_0, da za vsak $x \in U$ velja $F(x) \in G(K,W)$. Če torej vzamemo $V := K$, za vsak $y \in V$ velja $F(x)(y) = f(x,y) \in W$, to pa je bilo treba dokazati.

Sklep: če je prostor Y lokalno kompakten, je kompaktno-odprta topologija na $\mathcal{C}(Y,Z)$ topologija, pri kateri zveznost preslikave $f \in Z^{X\times Y}$ sovpada z zveznostjo ustrezne preslikave $F \in (Y^Z)^X$.

Za več o kompaktno-odprti topologiji glej npr. razdelka 11.2 in 11.3 v knjigi:

[1] T. B. Singh: *Introduction to Topology.* Springer, 2019.

41. Povsod in nikjer goste množice

Znano je, da je podmnožica A topološkega prostora X:

- *povsod gosta*, če je $\overline{A} = X$;
- *nikjer gosta*, če je $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$.

To pripelje do dikcije 'A je nikjer gosta', ki je v slovenščini zelo nenaravna (v nasprotju z angleščino ali nemščino). Lahko pa bi definirali, da je A *gosta v* x, če je $x \in \operatorname{Int} \overline{A}$. Povsod goste množice so tako natančno tiste, ki so goste v vseh točkah, nikjer goste pa so tiste, ki niso goste v nobeni točki.

42. Definicija simplicialne homologije

Verjetno se splača naprej definirati neorientirano homologijo. Prav tako je smiselno orientirano homologijo vpeljati z orientiranimi simpleksi, nato pa se je potrebno malo ustaviti pri operatorju roba. Začnemo z:

$$\partial(a_0 a_1 \ldots a_n) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i \, a_0 \ldots \widehat{a_i} \ldots a_n$$

nakar obstaja le en nabor koeficientov ε_i, pri katerih je zgornji operator dobro definiran, se modulo 2 ujema z neorientiranim robom in pri katerem je $\varepsilon_0 = 1$.

Dobro bi bilo omeniti, da lahko simplicialno homologijo definiramo tudi brez pojma orientacije – preprosto vzamemo prost modul nad urejenimi simpleksi. Tu je nekaj malega dela. Naj bo C verižni kompleks iz urejenih simpleksov in C^{o} verižni kompleks iz orientiranih simpleksov. Med njima imamo naravno kvocientno projekcijo π, za katero velja $\pi\partial = \partial\pi$. Zato je $\pi(Z(C)) \subseteq Z(C^{\mathrm{o}})$ in $\pi(B(C)) \subseteq B(C^{\mathrm{o}})$. Torej kvocientna projekcija π inducira preslikavo $\pi_*\colon\ H(C) \to H(C^{\mathrm{o}})$.

Zdaj moramo pokazati, da je π_* izomorfizem. Pri tem je nekaj dela. Glavna ideja bi bilo naslednje opažanje: očitno je vsak element c, za katerega je $\pi c = 0$, vsota elementov oblike $\sigma + \sigma'$, pri katerih od simpleksa σ do simpleksa σ' pridemo zgolj s transpozicijo sosednih oglišč. Če je zdaj σ pravo lice nekega drugega simpleksa, je le-tega, ki ga označimo s τ, možno izbrati tako, da je $\sigma + \sigma' = \partial(\tau + \tau')$, kjer od τ do τ' spet preidemo s transpozicijo oglišč.

43. Vezni homomorfizem

Menim, da ga je smiselno že spočetka uvesti na abstraktnih verižnih kompleksih, ni pa mogoče dobro že poprej uvesti pojma eksaktnosti. Vrstni red podajanja snovi, ki po mojem dobro motivira poslušalca in tudi utrdi pravkar definirane pojme:

- Za verižni kompleks C in podkompleks C_0 pogledamo, kaj so cikli v C/C_0. Ugotovimo, da le-ti ustrezajo tistim elementom v C, ki imajo rob v C_0.
- Ugotovimo, da je ustrezni robni element v C_0 določen do $B(C_0)$ natančno in da pripada $Z(C_0)$. Tako imamo definirano preslikavo iz $Z(C/C_0)$ v $H(C_0)$.
- Izračunamo jedro dobljene preslikave: to je natančno $Z(C)$.
- Definiramo vezni homomorfizem $\partial_*\colon\ H(C/C_0) \to H(C_0)$; iz prejšnje točke sledi, da je njegovo jedro natanko slika prostora $H(C)$ glede na preslikavo, ki jo inducira kvocientna projekcija.
- Sedaj definiramo eksaktnost in kot prvi zgled pokažemo zaporedje $0 \to C_0 \to C \to C/C_0 \to 0$, nato pa definiramo dolgo eksaktno zaporedje, za katerega pokažemo, da je res eksaktno.

- Pokažemo, da je vsako kratko eksaktno zaporedje izomorfno kratkemu eksaktnemu zaporedju iz prejšnje točke. Tako lahko vsakemu kratkemu eksaktnemu zaporedju priredimo dolgo eksaktno zaporedje.

ANALIZA NA MNOGOTEROSTIH

Glej tudi naslednjo spletno stran.
A pozor: orientacija, inducirana na robu mnogoterosti, tam ni v redu!

44. Večmestne diferencialne forme in vnanji produkt

Diferencialne forme in vnanji produkt ($\wedge$) so nepogrešljivi v sodobni analizi na mnogoterostih, a kako jih prav motivirati? Dobra motivacija je orientiran volumenski element, ta pa mora nastopiti skupaj z integracijo.

Večrazsežne diferencialne forme in njihovo integracijo je smiselno prikazati kot koncept, ki posploši tako klasični večrazsežni integral kot tudi krivuljni integral enomestnih form. Pri klasičnem n-razsežnem integralu:

$$\int_B f = \int_{(t_1,\ldots,t_n)\in B} f(t_1,\ldots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$$

so $t_1, t_2, \ldots, t_n$ le pomožne spremenljivke, diferenciali pa nesamostojen del pisave integrala. Želeli bi uvesti nov integral, ki bi se odlikoval po naslednjem:

- Definiran bi bil na mnogoterostih.
- Spremenljivke $t_1, t_2, \ldots, t_n$ bi bile funkcije. Posledično bi bila uvedba novih spremenljivk avtomatična.
- Izraz $f(t_1,\ldots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n$ bi bil samostojen objekt, poseben primer *n-mestne forme*.

Izhodišče bi bila lahko formula za substitucijo v integral: če sta A in B odprti množici v $\mathbb{R}^n$ in je $\Psi\colon\ A \to B$ difeomorfizem, velja:

$$\int_B f = \int_A (f\circ\Psi)\,|\det\mathrm{d}\Psi|\,. \tag{44.1}$$

Črka d tu označuje odvod funkcije, ki je linearna preslikava iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^n$.

Na tem mestu ni odveč spomniti, kaj stoji v ozadju zgornje formule. Če je namreč C endomorfizem na $\mathbb{R}^n$, je $|\det C|$ volumen paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $Ce_1, Ce_2, \ldots, Ce_n$, kjer so $e_1, e_2, \ldots, e_n$ standardni bazni vektorji. Na tem mestu lahko tudi definiramo orientacijo neizrojenega paralelepipeda, ki ni nič drugega kot ena izmed dveh vrednosti – 'pozitivna' in 'negativna'. Nato definiramo predpis, ki vsakemu paralelepipedu, izbranemu oglišču in naboru vektorjev $w_1, w_2, \ldots, w_n$, ki ga iz tega oglišča napenjajo, priredimo orientacijo skladno s predznakom determinante matrike, ki ima za stolpce vektorje $w_1, w_2, \ldots w_n$, izražene v stadardni bazi. Tako lahko rečemo, da je $\det C$ vokumen paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji $Ce_1, Ce_2, \ldots, Ce_n$, predznačen skladno z orientacijo, ki jo določa vrstni red vektorjev $Ce_1, \ldots, Ce_n$. Difeomorfizem torej na posamezni povezani komponenti definicijskega območja *ohrani oriantacijo*, če je determinanta njegovega diferenciala tam pozitivna, in jo *obrne*, če je negativna.

Pri integralu funkcije ene spremenljivke je v veljavi zapis z diferencialom, pri katerem postane substitucija avtomatizem. V 8. razdelku je podana tudi interpretacija tega zapisa, po kateri spremenljivko, po kateri integriramo, interpretiramo kar kot funkcijo, diferencial pa kot njen odvod. To se da posplošiti tudi na večrazsežne integrale. Če namreč vpeljemo oznaki:

$$\mathrm{d}_\wedge \Psi := \det \mathrm{d}\Psi \quad \text{in} \quad \mathrm{d}_\vee \Psi := |\mathrm{d}_\vee \Psi| \,, \tag{44.2}$$

lahko formulo (44.1) prepišemo v obliki:

$$\int_B f = \int_B \big(t \mapsto f(t)\big) = \int_{t \in B} f(t)\, \mathrm{d}_\vee t \,.$$

V drugem integralu t označuje vezano (pomožno) spremenljivko, tako da sta prvi in drugi integral eno in isto. V tretjem integralu pa t označuje funkcijo, za katero nas ne zanima, kako slika, in temu primeren je tudi zapis. Če je zdaj s še ena funkcija in velja $t = \Psi(s)$, kjer je Ψ difeomorfizem, velja:

$$\int_{t \in B} f(t)\, \mathrm{d}_\vee t = \int_{\Psi(s) \in B} f\big(\Psi(s)\big)\, |\det \mathrm{d}\Psi(s)|\, \mathrm{d}_\vee s \,.$$

To je videti kot drugače pisana formula (44.1), v resnici pa sta oba integranda enaka, saj velja:

$$\mathrm{d}_\wedge t = \det \mathrm{d}\big(\Psi(s)\big) = \det\big(\mathrm{d}\Psi(s)\, \mathrm{d}s\big) = \det \mathrm{d}\Psi(s) \det \mathrm{d}s = \det \mathrm{d}\Psi(s)\, \mathrm{d}_\wedge s \,,$$

torej tudi:

$$\mathrm{d}_\vee t = \big|\det \mathrm{d}\Psi(s)\big|\, \mathrm{d}_\vee s \,.$$

Vse velja ob dogovoru, da ima znak za diferencial, ki označuje odvod, prednost pred evaluacijo oz. komponiranjem: $\mathrm{d}\Psi(s)$ pomeni $(\mathrm{d}\Psi)(s)$.

Ta zapis se da lepo posplošiti na integracijo po mnogoterostih. Če je $B \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, γ preslikava iz B v množico M, u funkcija na M, v pa vektorska funkcija iz M v $\mathbb{R}^n$ in če je $u \circ \gamma$ zvezna, $v \circ \gamma$ pa zvezno diferenciabilna, definiramo:

$$\int_\gamma u\, \mathrm{d}_\wedge v := \int_B (u \circ \gamma)\, \mathrm{d}_\wedge (v \circ \gamma) \quad \text{in} \quad \int_\gamma u\, \mathrm{d}_\vee v := \int_B (u \circ \gamma)\, \mathrm{d}_\vee (v \circ \gamma) \,. \tag{44.3}$$

V obeh definicijah sta znaka $\mathrm{d}_\wedge$ in $\mathrm{d}_\vee$ na levih straneh del zapisa integrala, na desnih straneh pa $\mathrm{d}_\wedge$ označuje determinanto odvoda, $\mathrm{d}_\vee$ pa njeno absolutno vrednost. Ta dva integrala imata znane lastnosti, poznane že pri krivuljnih integralih.

Reparametrizacija ne glede na orientacijo: če je $\Phi\colon\ A \to B$ difeomorfizem, velja:

$$\int_{\gamma \circ \Phi} u\, \mathrm{d}_\vee v = \int_\gamma u\, \mathrm{d}_\vee v \,.$$

Reparametrizacija z menjavo predznaka glede na orientacijo: če je $\Phi\colon\ A \to B$ difeomorfizem, ki ohrani orientacijo, velja:

$$\int_{\gamma\circ\Phi} u\,\mathrm{d}_\wedge v = \int_\gamma u\,\mathrm{d}_\wedge v\,,$$

če pa Φ obrne orientacijo, velja:

$$\int_{\gamma\circ\Phi} u\,\mathrm{d}_\wedge v = -\int_\gamma u\,\mathrm{d}_\wedge v\,,$$

Prenos: če je $B \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta množica ter če so dane preslikavi $\gamma\colon\ B \to M$ in $F\colon\ M \to N$, funkcija $u\colon\ N \to \mathbb{R}$ in vektorska funkcija $v\colon\ N \to \mathbb{R}^n$, pri čemer je $u \circ F \circ \gamma$ zvezna, $v \circ F \circ \gamma$ pa zvezno diferenciabilna, velja:

$$\int_{F\circ\gamma} u\,\mathrm{d}_\wedge v = \int_\gamma (u\circ F)\,\mathrm{d}_\wedge(v\circ F) \quad\text{in}\quad \int_{F\circ\gamma} u\,\mathrm{d}_\vee v = \int_\gamma (u\circ F)\,\mathrm{d}_\vee(v\circ F)\,.$$

Uvedba nove spremenljivke: če v slika v odprto množico U in je je $\Psi\colon\ U \to \mathbb{R}^n$ zvezno diferenciabilna preslikava, velja:

$$\int_\gamma u\,\mathrm{d}_\wedge\big(\Psi(v)\big) = \int_\gamma \big(u\cdot \mathrm{d}_\wedge\Psi(v)\big)\,\mathrm{d}_\wedge v \quad\text{in}\quad \int_\gamma u\,\mathrm{d}_\vee\big(\Psi(v)\big) = \int_\gamma \big(u\cdot \mathrm{d}_\vee\Psi(v)\big)\,\mathrm{d}_\vee v\,. \tag{44.4}$$

Funkcije na M tu pišemo kot funkcije s prikrito domeno. V integralih na desni prva pojavitev znaka $\mathrm{d}_\wedge$ oz. $\mathrm{d}_\vee$ označuje determinanto odvoda oz. njeno absolutno vrednost – tako kot v (44.2).

Formula za uvedbo nove spremenljivke spet daje misliti, da bi bila lahko v integralih $\int_\gamma u\,\mathrm{d}_\wedge v$ in $\int_\gamma u\,\mathrm{d}_\vee v$ izraza $u\,\mathrm{d}_\wedge v$ in $u\,\mathrm{d}_\vee v$ samostojna objekta, integranda v (44.4) pa bi bila enaka. Kakšna objekta bi to lahko bila? Tak objekt bi moral vsebovati vso relevantno informacijo o u in v, sprejeti pa bi moral informacijo o γ.

Vsebovanost in sprejemanje informacije je smiselno lokalizirati – povedati po točkah iz množice M. To lahko naredimo, če je M *gladka mnogoterost*, γ in v zvezno diferenciabilni preslikavi, u pa zvezna funkcija. Dimenzija mnogoterosti M je lahko različna od dimenzije evklidskega prostora, iz katerega slika γ in v katerega slika v. V tem primeru lahko definicijo integrala (44.3) prepišemo v obliki:

$$\int_\gamma u\,\mathrm{d}_\wedge v = \int_B (u\circ\gamma)\det\big((\mathrm{d}v\circ\gamma)\mathrm{d}\gamma\big) = \int_B \Big(t\mapsto u\big(\gamma(t)\big)\det\big(\mathrm{d}v\big(\gamma(t)\big)\,\mathrm{d}\gamma(t)\big)\Big)$$

oziroma:

$$\int_\gamma u\,\mathrm{d}_\vee v = \int_B (u\circ\gamma)\,\big|\det\big((\mathrm{d}v\circ\gamma)\mathrm{d}\gamma\big)\big| = \int_B \Big(t\mapsto u\big(\gamma(t)\big)\,\big|\det\big(\mathrm{d}v\big(\gamma(t)\big)\,\mathrm{d}\gamma(t)\big)\big|\Big)\,.$$

Za vsako točko $x \in M$ mora torej objekt, ki bi ga integrirali, vsebovati informacijo o $u(x)$ in $\mathrm{d}v(x)$, sprejeti pa mora informacijo o $\mathrm{d}\gamma(t)$, če je $x = \gamma(t)$. Tako je smiselno objekt definirati kot funkcijo, ki sprejme dva argumenta: točko $x \in M$ in linearno preslikavo C iz $\mathbb{R}^n$ v tangentni prostor mnogoterosti M v x. Seveda mora biti to zvezna funkcija, kar preciziramo tako, da je to prerez ustreznega svežnja. Vlakno tega svežnja v dani točki sestavljajo funkcionali na linearnih preslikavah iz $\mathbb{R}^n$ v tangentni prostor v tej točki. Integral takšnega prereza Λ definiramo kot:

$$\int_\gamma \Lambda := \int_B \Big(t \mapsto \Lambda\big(\gamma(t), \mathrm{d}\gamma(t)\big) \Big) . \tag{44.5}$$

Če postavimo:

$$\Lambda(x, C) := u(x) \det\big(\mathrm{d}v(x) C\big) ,$$

velja $\int_\gamma u \, \mathrm{d}_\wedge v = \int_\gamma \Lambda$. Če pa postavimo:

$$\Lambda(x, C) := u(x) \left|\det\big(\mathrm{d}v(x) C\big)\right| ,$$

velja $\int_\gamma u \, \mathrm{d}_\vee v = \int_\gamma \Lambda$. To pomeni, da lahko izraz $u \, \mathrm{d}_\wedge v$ identificiramo s prerezom, ki par (x, C) preslika v $u(x) \det\big(\mathrm{d}v(x) C\big)$, izraz $u \, \mathrm{d}_\vee v$ pa s prerezom, ki (x, C) preslika v $u(x) \left|\det\big(\mathrm{d}v(x) C\big)\right|$. To pa lahko naredimo tudi ločeno: diferencial $\mathrm{d}_\wedge v$ *definiramo* kot prerez, ki (x, C) preslika v $\det\big(\mathrm{d}v(x) C\big)$, diferencial $\mathrm{d}_\vee v$ pa kar kot $|\mathrm{d}_\wedge v|$. Prereze pa lahko vedno množimo s funkcijami:

$$(u\Lambda)(x, C) := u(x) \, \Lambda(x, C) .$$

Prostor prerezov je torej modul nad kolobarjem funkcij. Tako so zdaj u, $\mathrm{d}_\wedge v$ in $\mathrm{d}_\vee v$ samostojni objekti, integrala $\int_\gamma u \, \mathrm{d}_\wedge v$ in $\int_\gamma u \, \mathrm{d}_\vee v$, definirana v (44.3), pa se ujemata z integraloma prerezov, definiranima v (44.5).

Nastane vprašanje, ali ima integral prereza prav tako ustreza reparametrizaciji, povleku in uvedbi nove spremenljivke. Tu imata smisel le še reparametrizacija in prenos. S slednjo lastnostjo ni težav:

Prenos: če definiramo *povlek* prereza vzdolž preslikave F kot:

$$(F^*\Lambda)(x, C) := \Lambda\big(F(x), \mathrm{d}F(x) \, C\big) ,$$

in potisk $F \circ \gamma$ bolj ilustrativno označimo z $F_*\gamma$, velja:

$$\int_{F_*\gamma} \Lambda = \int_\gamma F^*\Lambda .$$

Reparametrizacija pa ni sama po sebi umevna. Zatakne se že pri tem, da nastopa v dveh oblikah: ne glede na orientacijo in z menjavo predznaka glede na orientacijo. Pri prvi se morata za poljuben difeomorfizem $\Phi\colon A \to B$, ujemati integral:

$$\int_\gamma \Lambda = \int_B \Big(t \mapsto \Lambda\big(\gamma(t), \mathrm{d}\gamma(t)\big) \Big) = \int_A \Big(s \mapsto \Lambda\big(\gamma(\Phi(s)), \mathrm{d}\gamma(\Phi(s))\big) \left|\det \mathrm{d}\Phi(s)\right| \Big)$$

in integral:

$$\int_{\gamma\circ\Phi}\Lambda = \int_A\Big(s\mapsto\Lambda\big(\gamma(\Phi(s)),\mathrm{d}(\gamma\circ\Phi)(s)\big)\Big) = \int_A\Big(s\mapsto\Lambda\big(\gamma(\Phi(s)),\mathrm{d}\gamma(\Phi(s))\,\mathrm{d}\Phi(s)\big)\Big)\,.$$

Tako dobimo, da mora za vsak avtomorfizem $D\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ veljati:

$$\Lambda(x,CD)=\Lambda(x,C)\,|\det D|\,. \tag{44.6}$$

Pri reparametrizaciji z menjavo predznaka glede na orientacijo pa se omejimo na difeomorfizme, ki bodisi v celoti ohranijo bodisi v celoti obrnejo orientacijo (če difeomorfizem slika med nepovezanimi množicami, je možno tudi, da ne velja ne eno ne drugo). Naj bo $\Phi\colon\ A\to B$ tak difeomorfizem. Označimo $\varepsilon=1$, če Φ ohrani orientacijo, in $\varepsilon=-1$, če jo obrne. Tedaj se morata ujemati integral:

$$\int_\gamma\Lambda=\int_B\Big(t\mapsto\Lambda\big(\gamma(t),\mathrm{d}\gamma(t)\big)\Big)=\varepsilon\int_A\Big(s\mapsto\Lambda\big(\gamma(\Phi(s)),\mathrm{d}\gamma(\Phi(s))\big)\det\mathrm{d}\Phi(s)\Big)$$

in integral:

$$\varepsilon\int_{\gamma\circ\Phi}\Lambda=\varepsilon\int_A\Big(s\mapsto\Lambda\big(\gamma(\Phi(s)),\mathrm{d}(\gamma\circ\Phi)(s)\big)\Big)=\varepsilon\int_A\Big(s\mapsto\Lambda\big(\gamma(\Phi(s)),\mathrm{d}\gamma(\Phi(s))\,\mathrm{d}\Phi(s)\big)\Big)\,.$$

Tako dobimo, da mora za vsak avtomorfizem $D\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ veljati:

$$\Lambda(x,CD)=\Lambda(x,C)\,\det D\,. \tag{44.7}$$

Na tem mestu je dobro povedati, da nam repametrizacija omogoča definicijo integrala kar po celotni mnogoterosti, torej brez predpisane preslikave γ, če se dimenzija mnogoterosti ujema z dimenzijo evklidskega prostora, iz katerega slikajo preslikave, ki jih sprejme prerez. Vzamemo namreč atlas iz lokalnih parametrizacij $\gamma_\alpha\colon\ D_\alpha\to U_\alpha$, kjer so U_α odprte podmnožice mnogoterosti M, D_α pa odprte podmnožice v $\mathbb{R}^n$ ali $(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}$ (v naslednjem razdelku bomo videli, zakaj tako nenavadna izbira). Nadalje naj bo $(u_\alpha)_\alpha$ razčlenitev enote, podrejena temu pokritju. Če prerez Λ zadošča enakosti (44.6), lahko njegov integral po mnogoterosti M definiramo kot:

$$\int_M\Lambda=\sum_\alpha\int_{\gamma_\alpha}u_\alpha\Lambda\,.$$

Seveda mora biti definicija neodvisna od atlasa in razčlenitve enote. To vidimo tako, da vzamemo še eno razčlenitev enote in nato produktno razčlenitev enote. Tako dobimo dve enako indeksirani vsoti. Da se seštevanci ujemajo, vidimo iz reparametrizacije.

Če pa prerez Λ zadošča enakosti (44.7), je smiselno definirati le integral po orientirani mnogoterosti. Orientacijo določa atlas, pri katerem vse prehodne preslikave ohranjajo orientacijo (na robu moramo paziti, da vzamemo vsakič isti polprostor, npr. $(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}$). Integal nato definiramo tako kot prej.

Funkcionali na linearnih preslikavah iz $\mathbb{R}^n$ v abstrakten vektorski prostor enake dimenzije z lastnostma (44.6) in (44.7) se dajo lepo karakterizirati.

Trditev 44.1. *Naj bo V n-razsežen vektorski prostor in naj bo λ funkcional na linearnih preslikavah iz $\mathbb{R}^n$ iz V. Naslednji trditvi sta ekvivalentni:*

(A) *Za poljubno linearno preslikavo $C\colon \mathbb{R}^n \to V$ in poljuben endomorfizem $D\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ velja $\lambda(CD) = \lambda(C)\det D$.*

(B) *Obstaja taka linearna preslikava $Q\colon V \to \mathbb{R}^n$, da za vsako linearno preslikavo $C\colon \mathbb{R}^n \to V$ velja $\lambda(C) = \det(QC)$.*

Poleg tega sta ekvivalentni tudi naslednji trditvi:

(A′) *Za poljubno linearno preslikavo $C\colon \mathbb{R}^n \to V$ in poljuben endomorfizem $D\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ velja $\lambda(CD) = \lambda(C)\,|\det D|$.*

(B′) *Obstajata tak $q \in \mathbb{R}$ in taka linearna preslikava $Q\colon V \to \mathbb{R}^n$, da za vsako linearno preslikavo $C\colon \mathbb{R}^n \to V$ velja $\lambda(C) = q\,|\det(QC)|$.*

Dokaz. Implikaciji (B) ⇒ (A) in (B′) ⇒ (A′) sta očitni. Za dokaz implikacije (A) ⇒ (B) pa izberimo linearni izomorfizem $Q_0\colon V \to \mathbb{R}^n$. Velja:

$$\lambda(C) = \lambda\big(Q_0^{-1}Q_0C\big) = \lambda\big(Q_0^{-1}\big)\det(Q_0C)$$

Če je $D\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ matrika z determinanto $\lambda\big(Q_0^{-1}\big)$, preslikava $Q := DQ_0$ zadošča zahtevi (B).

Podobno dokažemo implikacijo (A′) ⇒ (B′): izberimo linearni izomorfizem $Q\colon V \to \mathbb{R}^n$ in velja:

$$\lambda(C) = \lambda\big(Q^{-1}QC\big) = \lambda\big(Q^{-1}\big)\,|\det(QC)|\,.$$

■

Funkcionale na linearnih preslikavah iz $\mathbb{R}^n$ v vektorski prostor V pa lahko identificiramo z n-mestnimi funkcionali na V, tako da linearno preslikavo $C\colon \mathbb{R}^n \to V$ identificiramo z n-terico $(Ce_1, Ce_2, \ldots, Ce_n)$, kjer so $e_1, \ldots, e_n$ standardni enotski vektorji v $\mathbb{R}^n$. Tako lahko n-mestnemu funkcionalu $\phi\colon V^n \to \mathbb{R}$ priredimo funkcional na linearnih preslikavah po predpisu:

$$\lambda(C) = \phi(Ce_1, Ce_2, \ldots, Ce_n) \tag{44.8}$$

in ta identifikacija je bijekcija. Prek nje dobi lastnost (44.7) še lepšo karakterizacijo.

Trditev 44.2. *Naj bo V vektorski prostor. Dan naj bo funkcional $\phi\colon V^n \to \mathbb{R}$, ki mu priredimo funkcional λ po predpisu (44.8). Oglejmo si naslednji lastnosti:*

(A) *λ zadošča pogoju (44.7).*

(B) *ϕ je n-linearen in antisimetričen.*

Vedno velja (B) $\Rightarrow$ (A)*, implikacija* (A) $\Rightarrow$ (B) *pa velja, če je prostor* V *največ* n*-razsežen. Nadalje, če je prostor* V *manj kot* n*-razsežen, lastnosti* (A) *zadošča samo ničeln funkcional.*

Opomba. Če je ϕ n-linearen in simetričen, ne zadošča pogoju (44.6) (razen če je ničeln). Identifikacija z n-mestnimi funkcionali je tako dosti bolj smiselna za funkcionale, ki zadoščajo pogoju (44.7). To je lahko dober razlog, zakaj je smiselno gledati orientacijo.

Dokaz trditve 44.2 bo temeljil na naslednjem znanem rezultatu.

Izrek 44.3. *Naj bo* $n \in \mathbb{N}$*. Vsak funkcional na matrikah velikosti* $n \times n$ *je* n*-linearen in antisimetričen kot funkcional na stolpcih matrike natanko tedaj, ko matriko preslika v njeno determinanto, pomnoženo z neko konstanto.* ■

Dokaz trditve 44.2.

Prvi korak: velja (B) $\Rightarrow$ (A). Oglejmo si funkcional, ki matriko $T = [t_{ij}]_{i,j}$ preslika v $\phi\big(\sum_{i=1}^n t_{i1}\xi_i, \sum_{i=1}^n t_{i2}\xi_i, \ldots, \sum_{i=1}^n t_{in}\xi_i\big)$. Ker je ϕ n-linearen in antisimetričen, to velja tudi za ustrezni funkcional, definiran na stolpcih matrike T, torej mora po izreku 44.3 veljati $\phi\big(\sum_{i=1}^n t_{i1}\xi_i, \sum_{i=1}^n t_{i2}\xi_i, \ldots, \sum_{i=1}^n t_{in}\xi_i\big) = q \det T$ za neko konstanto c. A če vstavimo $T = I$, dobimo, da mora biti $q = \phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Drugi korak: če je $\dim V = n$*, velja* (A) $\Rightarrow$ (B). Če velja (A), najprej opazimo, da se po trditvi 44.1 funkcional λ izraža v obliki $\lambda(C) = \det(QC)$, kjer je $Q\colon V \to \mathbb{R}^n$ linearna preslikava. Če vzamemo n-terico vektorjev $v_1, \ldots, v_n \in V$ in ji priredimo linearno preslikavo $C\colon \mathbb{R}^n \to V$, ki vektor e_j preslika v v_j, je j-ti stolpec matrike endomorfizma QC natančno določen z vektorjem v_j in preslikava, ki vektorju priredi ustrezen stolpec, je linearna. Ker je determinanta kot funkcional na stolpcih matrike n-linearna in antisimetrična, mora biti to tudi ϕ.

Tretji korak: funkcional z lastnostjo (A)*, je ničeln, brž ko je* $\dim V < n$*.* V tem primeru so namreč poljubni vektorji $\xi_1, \ldots, \xi_n$ linearno odvisni, torej je možno za določen k izraziti $\xi_k = \sum_{i;i\neq k} c_i\xi_i$. Tedaj velja $\phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \phi\big(\sum_{i=1}^n t_{i1}\xi_i, \sum_{i=1}^n t_{i2}\xi_i, \ldots, \sum_{i=1}^n t_{in}\xi_i\big)$, kjer je $t_{ii} = 1$ in $t_{ik} = c_i$ za $i \neq k$, vse ostale komponente matrike T pa so enake nič. Ker ima taka matrika determinanto nič, mora biti $\phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0$. ■

Glede na (44.8) lahko torej namesto prerezov, ki zadoščajo enakosti (44.7), gledamo prereze svežnja, čigar vlakna so n-linearni antisimetrični funkcionali na tangentnem prostoru v tej točki. Tovrstnim prerezom bomo rekli *n-mestne diferencialne forme*. Če je ω taka forma, ki se identificira s prerezom Λ, velja:

$$\lambda(x, C) = \omega(x; Ce_1, Ce_2, \ldots, Ce_n)\,.$$

Enomestne diferencialne forme ustrezajo prerezom kotangentnega svežnja. Če je torej v funkcija na mnogoterosti, njen diferencial $\mathrm{d}v$ identificiramo z enomestne diferencialno formo ω prek zveze $\omega(x;\xi) = \mathrm{d}v(x)\xi$.

V skladu z definicijo integrala prereza integral diferencialne forme po preslikavi $\gamma\colon B \to M$ definiramo kot:

$$\int_\gamma \omega := \int_B \Big(t \mapsto \omega\big(\gamma(t);\ \mathrm{d}\gamma(t)e_1, \mathrm{d}\gamma(t)e_2, \ldots, \mathrm{d}\gamma(t)e_n\big)\Big)$$

ali v bolj klasičnem zapisu:

$$\int_\gamma \omega := \int_B \omega\left(\gamma(t);\ \frac{\partial\gamma}{\partial t_1}(t), \frac{\partial\gamma}{\partial t_2}(t), \ldots, \frac{\partial\gamma}{\partial t_n}(t)\right).$$

Seveda velja reparameterizacija z menjavo predznaka glede na orientacijo: če difeomorfizem Φ orientacijo v celoti ohrani, velja $\int_{\gamma\circ\Phi} \omega = \int_\gamma \omega$, če pa jo v celoti obrne, velja $\int_{\gamma\circ\Phi} \omega = -\int_\gamma \omega$. To nam omogoča tudi definicijo integrala forme po celotni orientirani mnogoterosti.

Podobno kot povlek prereza lahko definiramo povlek forme po predpisu:

$$F^*\omega(x;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = \omega\big(F(x); \mathrm{d}F(x)\xi_1, \mathrm{d}F(x)\xi_2, \ldots, \mathrm{d}F(x)\xi_n\big)$$

in velja:

$$\int_\gamma F^*\omega = \int_{F_*\gamma} \omega\,.$$

Pomembno je vedeti, kateri diferencialni formi ustreza diferencial $\mathrm{d}_\wedge v$, ki smo ga definirali kot prerez, ki (x, C) preslika v:

$$\det\big(\mathrm{d}v(x)C\big) = \begin{vmatrix} \mathrm{d}v_1(x)Ce_1 & \mathrm{d}v_1(x)Ce_2 & \cdots & \mathrm{d}v_1(x)Ce_n \\ \mathrm{d}v_2(x)Ce_1 & \mathrm{d}v_2(x)Ce_2 & \cdots & \mathrm{d}v_2(x)Ce_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{d}v_n(x)Ce_1 & \mathrm{d}v_n(x)Ce_2 & \cdots & \mathrm{d}v_n(x)Ce_n \end{vmatrix},$$

kjer so $v_1, \ldots, v_n$ komponente vektorske funkcije v. To ustreza diferencialni formi:

$$\omega(x;\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = \begin{vmatrix} \mathrm{d}v_1(x)\xi_1 & \mathrm{d}v_1(x)\xi_2 & \cdots & \mathrm{d}v_1(x)\xi_n \\ \mathrm{d}v_2(x)\xi_1 & \mathrm{d}v_2(x)\xi_2 & \cdots & \mathrm{d}v_2(x)\xi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{d}v_n(x)\xi_1 & \mathrm{d}v_n(x)\xi_2 & \cdots & \mathrm{d}v_n(x)\xi_n \end{vmatrix}.$$

To pa lahko zapišemo še malo drugače. Za nabor linearnih funkcionalov $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ na istem vektorskem prostoru V definirajmo n-mestni funkcional:

$$(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n)(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) := \begin{vmatrix} \phi_1(\xi_1) & \phi_1(\xi_2) & \cdots & \phi_1(\xi_n) \\ \phi_2(\xi_1) & \phi_2(\xi_2) & \cdots & \phi_2(\xi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n(\xi_1) & \phi_n(\xi_2) & \cdots & \phi_n(\xi_n) \end{vmatrix}.$$

Z drugimi besedami, če funkcionale $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ sestavimo v linearno preslikavo $\phi\colon V \to \mathbb{R}^n$, je $(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n)(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ volumen paralelepipeda, ki ga napenjajo vektorji

$\phi(\xi_1), \phi(\xi_2), \ldots, \phi(\xi_n)$, predznačen skladno z orientacijo, ki jo določa ta vrstni red vektorjev.

Ni težko preveriti, da je funkcional $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n$ n-linearen in antisimetričen. Če to operacijo ustrezno razširimo še na diferencialne forme, dobimo, da prerez $\mathrm{d}_\wedge v$ ustreza diferencialni formi $\mathrm{d}v_1 \wedge \mathrm{d}v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$.

Pisava $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n$ namiguje na to, da se da n-mestna operacija dobiti iz dvomestne. Dejansko lahko za m-mestni funkcional ϕ in n-mestni funkcional ψ definiramo $(m+n)$-mestni funkcional $\phi \wedge \psi$ tako, da je dobljena dvomestna operacija asociativna in da za poljubne enomestne linearne funkcionale $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots, \phi_n$ velja:

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \cdots \wedge \phi_n = (\cdots((\phi_1 \wedge \phi_2) \wedge \phi_3) \wedge \cdots) \wedge \phi_n \,. \tag{44.9}$$

Za ta namen razpišimo determinanto v definiciji leve strani:

$$(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n)(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, \phi_1(\xi_{\pi(1)})\, \phi_2(\xi_{\pi(2)}) \cdots \phi_n(\xi_{\pi(n)}) \,.$$

Z S_n smo označili množico vseh permutacij na $\{1, 2, \ldots, n\}$ (torej simetrično grupo), $\operatorname{sgn}(\pi)$ pa označuje predznak permutacije, torej 1, če je permutacija π soda, in -1, če je liha. Če zdaj za m-mestni funkcional ϕ in n-mestni funkcional ψ definiramo $(m+n)$-mestni funkcional $\phi \wedge \psi$ po predpisu:

$$\begin{aligned}&(\phi \wedge \psi)(\xi_1, \ldots, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_{m+n}) := \\ &\quad := \sum_{\pi \in S_{m+n}} \operatorname{sgn}(\pi)\, \phi(\xi_{\pi(1)}, \xi_{\pi(2)}, \ldots, \xi_{\pi(m)})\, \psi(\xi_{\pi(m+1)}, \xi_{\pi(m+2)}, \ldots, \xi_{\pi(m+n)}) \,.\end{aligned}$$

se da preveriti naslednje:

- Če sta ϕ in ψ multilinearna in antisimetrična, je to tudi $\phi \wedge \psi$.
- Velja asociativnost: $(\phi \wedge \psi) \wedge \chi = \phi \wedge (\psi \wedge \chi)$.
- Če je ϕ m-mesten, ψ pa n-mesten, velja $\psi \wedge \phi = (-1)^{mn} \phi \wedge \psi$. Faktor pride od parnosti permutacije, ki zamenja sosedna bloka dolžin m in n.
- Za enomestne linearne funkcionale $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \ldots, \phi_n$ velja zveza (44.9).

45. Zunanji diferencial in Stokesov izrek

Za to snov je dobro, da študenti slišijo vsaj za Greenovo formulo in Gaussov izrek, sicer jih bo težko motivirati. Za začetek je treba prav motivirati zunanji diferencial forme. Dobra motivacija sta gradient in divergenca: oboje je možno prikazati kot limito integralov po robovih določenih območij okoli dane točke.

Nato povemo, da bomo zunanji diferencial $(n-1)$-mestne forme ω definirali kot n-mestno formo $\mathrm{d}\omega$, torej bomo morali definirati:

$$\mathrm{d}\omega(x; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \,.$$

Tukaj je nekaj zlorabe notacije, saj to ne bo diferencial funkcije na svežnju n-mestnih diferencialnih form, kar bi bila preslikava:

$$(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \zeta) \mapsto \mathrm{d}\big((y, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \mapsto \omega(y; \eta_1, \ldots, \eta_{n-1})\big)(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})\eta\,.$$

Prav tako v primeru, ko forma ω živi kar na $\mathbb{R}^m$ in so vsi tangentni prostori enaki, to ne bo preslikava:

$$(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \zeta) \mapsto \mathrm{d}\big(y \mapsto \omega(y; \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})\big)(x)\zeta\,.$$

Kot je že bilo nakazano, bomo diferencial motivirali z integrali po robovih določenih območij. Glede tega imamo vsaj dve smiselni možnosti: takoj definirati integral forme po orientirani mnogoterosti (kar je najelegantneje z razčlenitvijo enote) ali pa že od začetka dopuščati formalno seštevanje območij v verige ali podobne objekte. Tu se bomo držali slednje možnosti. Najprej vsako gladko preslikavo $\gamma\colon D \to M$, kjer je D območje v $\mathbb{R}^n$, M pa gladka mnogoterost, identificiramo s funkcionalom, ki neskončno gladko formo ω preslika v integral $\int_\gamma \omega$. Če je γ splošen linearni funkcional na formah, $\int_\gamma \omega$ preprosto pomeni njegovo evaluacijo na ω.

Rob najprej definiramo za kvader. Naj bo $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Za gladko preslikavo $\gamma\colon Q \to M$ najprej definiramo preslikave:

$$\begin{aligned}\gamma_k^+(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) &:= \gamma(t_1, \ldots, t_{k-1}, b, t_k, \ldots, t_n)\,,\\ \gamma_k^-(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) &:= \gamma(t_1, \ldots, t_{k-1}, a, t_k, \ldots, t_n)\,.\end{aligned}$$

Vse te preslikave identificiramo z ustreznimi funkcionali na formah, nakar definiramo *rob* preslikave γ kot funkcional:

$$\partial\gamma := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (\gamma_k^+ - \gamma_k^-)\,. \tag{45.1}$$

Predznake razložimo s tem, da za γ_1^+ dobimo pozitivno orientacijo in da ima cikel dolžine k predznak $(-1)^{k-1}$. Poleg tega pa se izkaže, da je tako definirani operator aditiven, kar je dovolj ilustrirati za preprost dvodimenzionalen primer. Splošna aditivnost pride kasneje sama od sebe.

Vzemimo točko $t \in Q$ ter označimo $x := \gamma(t)$ in $\xi_k := \mathrm{d}\gamma(t)e_k$ (v klasični notaciji $\frac{\partial\gamma}{\partial t_k}(x)$). Naj bo M kar podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^m$. Z aproksimacijo z diferenciali se da videti, da v primeru, ko so razlike $b_k - a_k$ majhne, približno velja:

$$\int_{\partial\gamma} \omega \approx \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \mathrm{d}\big(y \mapsto \omega(y; \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)\big)(x)\xi_k\,. \tag{45.2}$$

Dokaza ni treba izdelati, saj služi le kot navdih za definicijo zunanjega diferenciala forme, ki živi v $\mathbb{R}^m$:

$$\mathrm{d}\omega(x; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \mathrm{d}\big(y \mapsto \omega(y; \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)\big)(x)\xi_k\,. \tag{45.3}$$

Opazimo, da je to še vedno diferencialna forma, in sicer n-mestna. Ključna je antisimetričnost, ki ni tako očitna. Izpeljati se da še nekaj osnovnih lastnosti:

- $\mathrm{d}^2 = 0$;
- če je ω_1 k-mestna diferencialna forma, je $\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \mathrm{d}\omega_2$;
- $\mathrm{d}(u \, \mathrm{d}v_1 \wedge \mathrm{d}v_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}v_n) = \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v_1 \wedge \mathrm{d}v_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}v_n$.

Zunanji diferencial smo definirali po navdihu, ki je izhajal iz približne enakosti (45.2). Tej enakost pa lahko damo novo, eksaktno podobo: s pomočjo Fubinijevega izreka in Newton–Leibnizeve formule izpeljemo, da je:

$$\int_{\partial\gamma} \omega = \int_{\gamma} \mathrm{d}\omega \,. \tag{45.4}$$

To formulo je dobro ilustrirati v eni, dveh in treh dimenzijah. Tam dobimo klasične rezultate.

- *Newton–Leibnizeva formula*:

  $$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) \, \mathrm{d}x \,.$$

  Privzemimo $a < b$. Če definiramo ničmestno formo $\omega = f$ in preslikavo $\gamma(t) = t$, definirano na $[a, b]$, velja $\mathrm{d}\gamma = (* \mapsto b) - (* \mapsto a)$, torej se integral na levi ujema z integralom $\int_{\mathrm{d}\gamma} \omega$. Nadalje je $\mathrm{d}\omega(p; \xi) = f'(p)\xi$. Če x označuje identiteto na realni osi, je torej $\mathrm{d}\omega = f'(x) \, \mathrm{d}x$ in integral na desni se ujema z integralom $\int_\gamma \mathrm{d}\omega$.

- *Greenova formula.* Naj bo $a_\mathrm{x} < b_\mathrm{x}$ in $a_\mathrm{y} < b_\mathrm{y}$. Označimo $Q := [a_\mathrm{x}, b_\mathrm{x}] \times [a_\mathrm{y} \times b_\mathrm{y}]$. Naj bosta še X in Y dovolj gladki funkciji na Q. Po Greenovi formuli je:

  $$\oint_{\partial Q} (X \, \mathrm{d}x + Y \, \mathrm{d}y) = \int_Q \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \,.$$

  Levi integral je po klasični definiciji treba razumeti kot:

  $$\int_{a_\mathrm{y}}^{b_\mathrm{y}} \big(Y(b_\mathrm{x}, y) - Y(a_\mathrm{x}, y) \big) \, \mathrm{d}y - \int_{a_\mathrm{x}}^{b_\mathrm{x}} \big(Y(x, b_\mathrm{y}) - Y(x, a_\mathrm{y}) \big) \, \mathrm{d}x \,.$$

  Če definiramo enomestno formo $\omega = X \, \mathrm{d}x + Y \, \mathrm{d}y$, torej $\omega(p; \alpha) = X(p)\langle \alpha \, , \, e_\mathrm{x} \rangle + Y(p)\langle \alpha \, , \, e_\mathrm{y} \rangle$, in z γ označimo identiteto na Q, je levi integral enak $\int_{\partial\gamma} \omega$. Preverimo še, da je desni integral enak $\int_\gamma \mathrm{d}\omega$. Izračunajmo:

  $$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(p; \xi, \eta) &= \mathrm{d}\big(q \mapsto \omega(q; \eta)\big)(p)\xi - \mathrm{d}\big(q \mapsto \omega(q; \xi)\big)\eta = \\ &= \mathrm{d}X(p)\xi\langle \eta \, , \, e_\mathrm{x} \rangle + \mathrm{d}Y(p)\xi\langle \eta \, , \, e_\mathrm{y} \rangle - \mathrm{d}X(p)\eta\langle \xi \, , \, e_\mathrm{x} \rangle - \mathrm{d}Y(p)\eta\langle \xi \, , \, e_\mathrm{y} \rangle \,. \end{aligned}$$

  Upoštevamo, da je $\mathrm{d}U(p)\alpha = \frac{\partial U}{\partial x}(p)\langle \alpha \, , \, e_\mathrm{x} \rangle + \frac{\partial U}{\partial y}(p)\langle \alpha \, , \, e_\mathrm{y} \rangle$, in po krajšem računu dobimo:

  $$\mathrm{d}\omega(p; \xi, \eta) = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \big(\langle \xi \, , \, e_\mathrm{x} \rangle \langle \eta \, , \, e_\mathrm{y} \rangle - \langle \xi \, , \, e_\mathrm{y} \rangle \langle \eta \, , \, e_\mathrm{x} \rangle \big) \,,$$

  torej $\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, kar pomeni, da je desni integral res enak $\int_\gamma \mathrm{d}\omega$.

- *Gaussov izrek.* Naj bo $a_\mathrm{x} < b_\mathrm{x}$, $a_\mathrm{y} < b_\mathrm{y}$ in $a_\mathrm{z} < b_\mathrm{z}$. Označimo $Q := [a_\mathrm{x}, b_\mathrm{x}] \times [a_\mathrm{y} \times b_\mathrm{y}] \times [a_\mathrm{z} \times b_\mathrm{z}]$. Naj bodo še X, Y in Z dovolj gladke funkcije na Q. Gaussov izrek pravi:

$$\oint_{\partial Q} (X N_\mathrm{x} + Y N_\mathrm{y} + Z N_\mathrm{z}) \, \mathrm{d}P = \int_Q \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .$$

V levem integralu količine N_x, N_y in N_z označujejo komponente normalnega vektorja, usmerjenega navzven, torej je treba ta integral razumeti kot:

$$\begin{aligned} \int_{[a_\mathrm{y}, b_\mathrm{y}] \times [a_\mathrm{z}, b_\mathrm{z}]} & \big(X(b_\mathrm{x}, y, z) - X(a_\mathrm{x}, y, z) \big) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, + \\ & + \int_{[a_\mathrm{x}, b_\mathrm{x}] \times [a_\mathrm{z}, b_\mathrm{z}]} \big(X(x, b_\mathrm{y}, z) - X(x, a_\mathrm{y}, z) \big) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z \, + \\ & + \int_{[a_\mathrm{x}, b_\mathrm{x}] \times [a_\mathrm{y}, b_\mathrm{y}]} \big(X(x, y, b_\mathrm{z}) - X(x, y, a_\mathrm{z}) \big) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, . \end{aligned}$$

Če definiramo dvomestno formo:

$$\omega = X \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Y \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + Z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = X \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - Y \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + Z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \, ,$$

torej:

$$\begin{aligned} \omega(p; \alpha, \beta) = X(p) & \big(\langle \alpha \, , \, e_\mathrm{y} \rangle \langle \beta \, , \, e_\mathrm{z} \rangle - \langle \alpha \, , \, e_\mathrm{z} \rangle \langle \beta \, , \, e_\mathrm{y} \rangle \big) \, + \\ & + Y(p) \big(\langle \alpha \, , \, e_\mathrm{z} \rangle \langle \beta \, , \, e_\mathrm{x} \rangle - \langle \alpha \, , \, e_\mathrm{x} \rangle \langle \beta \, , \, e_\mathrm{z} \rangle \big) \, + \\ & + Z(p) \big(\langle \alpha \, , \, e_\mathrm{x} \rangle \langle \beta \, , \, e_\mathrm{y} \rangle - \langle \alpha \, , \, e_\mathrm{y} \rangle \langle \beta \, , \, e_\mathrm{z} \rangle \big) \end{aligned}$$

in z γ označimo identiteto na Q, je levi integral enak $\int_{\partial\gamma} \omega$. Preverimo še, da je desni integral enak $\int_\gamma \mathrm{d}\omega$. Po malo daljšem računu dobimo:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(p; \xi, \eta, \zeta) &= \mathrm{d}\big(q \mapsto \omega(q; \eta, \zeta) \big)(p) \xi - \mathrm{d}\big(q \mapsto \omega(q; \xi, \zeta) \big) \eta + \mathrm{d}\big(q \mapsto \omega(q; \xi, \eta) \big) \zeta = \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \begin{vmatrix} \langle \xi \, , \, e_\mathrm{x} \rangle & \langle \eta \, , \, e_\mathrm{x} \rangle & \langle \zeta \, , \, e_\mathrm{x} \rangle \\ \langle \xi \, , \, e_\mathrm{y} \rangle & \langle \eta \, , \, e_\mathrm{y} \rangle & \langle \zeta \, , \, e_\mathrm{y} \rangle \\ \langle \xi \, , \, e_\mathrm{z} \rangle & \langle \eta \, , \, e_\mathrm{z} \rangle & \langle \zeta \, , \, e_\mathrm{z} \rangle \end{vmatrix} \, , \end{aligned}$$

torej je $\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \partial x \wedge \partial y \wedge \partial z$, kar pomeni, da je desni integral res enak $\int_\gamma \mathrm{d}\omega$.

Sedaj lahko operator ∂ definiramo na splošnih funkcionalih na neskončno gladkih formah, in sicer *predpišemo* $\int_{\partial\gamma} \omega := \int_\gamma \mathrm{d}\omega$. Formula (45.4) pove, da se na preslikavah iz kvadrov v $\mathbb{R}^m$ slednji in predhodni operator d ujemata.

Ena izmed ključnih lastnosti zunanjega diferenciala je naslednji rezultat.

Trditev 45.1. *Zunanji diferencial komutira s povlekom – velja:*

$$\mathrm{d}F^* \omega = F^* \mathrm{d}\omega \tag{45.5}$$

Dokaz. Naj bo ω $(n-1)$-mestna diferencialna forma. Velja:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}F^*\omega(x;\xi_1,\dots,\xi_n) = \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\mathrm{d}\big(\tilde{x}\mapsto F^*\omega(\tilde{x};\xi_1,\dots,\xi_{k-1},\xi_{k+1},\dots,\xi_n)(x)\xi_k\big) = \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\mathrm{d}\Big(\tilde{x}\mapsto \omega\big(F(\tilde{x});\mathrm{d}F(\tilde{x})\xi_1,\dots,\mathrm{d}F(\tilde{x})\xi_{k-1},\mathrm{d}F(\tilde{x})\xi_{k+1},\dots,\mathrm{d}F(\tilde{x})\xi_n\big)\Big)(x)\xi_k\,.
\end{aligned}$$

Z uporabo verižnega pravila dobimo:

$$\mathrm{d}F^*\omega(x;\xi_1,\dots,\xi_n) = \sum_{k=1}^n A_k + \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} B_{jk}\,,$$

kjer je:

$$\begin{aligned}
A_k = (-1)^{k-1}\mathrm{d}\Big(y\mapsto \omega\big(y;\mathrm{d}F(\tilde{x})\xi_1,\dots,\mathrm{d}F(\tilde{x})\xi_{k-1},\mathrm{d}F(\tilde{x})\xi_{k+1},\dots,\mathrm{d}F(\tilde{x})\xi_n\big)\Big)\big(F(x)\big)\times \\
\times\,\mathrm{d}F(x)\xi_k
\end{aligned}$$

in nadalje za $j<k$:

$$\begin{aligned}
B_{jk} = (-1)^{k-1}\omega\Big(F(x);\mathrm{d}F(x)\xi_1,\dots,\mathrm{d}F(x)\xi_{j-1},\mathrm{d}^2_\vee F(x;\xi_j,\xi_k), \\
\mathrm{d}F(x)\xi_{j+1},\dots,\mathrm{d}F(x)\xi_{k-1},\mathrm{d}F(x)\xi_{k+1},\dots,\mathrm{d}F(x)\xi_n\Big)\,,
\end{aligned}$$

za $j>k$ pa:

$$\begin{aligned}
B_{jk} = (-1)^{k-1}\omega\Big(F(x);\mathrm{d}F(x)\xi_1,\dots,\mathrm{d}F(x)\xi_{k-1},\mathrm{d}F(x)\xi_{k+1},\dots,\mathrm{d}F(x)\xi_{j-1}, \\
\mathrm{d}^2_\vee F(x;\xi_j,\xi_k),\mathrm{d}F(x)\xi_{j+1},\dots,\mathrm{d}F(x)\xi_n\Big)\,.
\end{aligned}$$

Z $\mathrm{d}^2_\vee F(x;\xi_j,\xi_k)$ smo tu označili drugi diferencial, ki je simetrična forma in seveda ni enak $\mathrm{d}^2=0$. Z upoštevanjem antisimetrčnosti dobimo, da je $B_{kj}=-B_{jk}$, torej je:

$$\mathrm{d}F^*\omega(x;\xi_1,\dots,\xi_n) = \sum_{k=1}^n A_k = F^*\mathrm{d}\omega(x;\xi_1,\dots,\xi_n)\,.$$

■

Zveza (45.5) nam omogoča, da ta zunanji diferencial prek lokalnih kart oz. parametrizacij razširimo na forme na mnogoterostih: predpis pride neodvisen od lokalne parametrizacije. Formula (45.4) zdaj razširi definicijo operatorja ∂ še na funkcionale na gladkih formah na mnogoterostih. S pomočjo povleka dobimo, da je ta operator tudi v tem kontekstu razširitev predhodnega operatorja, definiranega za preslikave iz kvadrov.

Posplošitev formule (45.3) na mnogoterosti ni tako očitna, saj se tangentni prostor s točko lahko spreminja, z njim pa so se prisiljeni spreminjati tudi tangentni vektorji. Če želimo formulo posplošiti, moramo namesto fiksnih vektorjev ξ_k gledati vektorska polja, pri njih pa dobimo dodaten člen z Liejevim oklepajem – glej dokaz trditve 45.1.

Zdaj se lahko posvetimo orientiranim mnogoterostim: orientacija je določena z atlasom, pri katerem imajo prehodne preslikave pozitivne Jacobijeve determinante. Orientirana mnogoterost prenese orientacijo tudi na rob, in sicer tako, da lokalne parametrizacije iz podmnožic $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ zožimo na $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. To je konsistentno z (45.1) in (45.3) – tu je treba paziti!

Stokesov izrek pravi, da tudi za orientirano podmnogoterost N s pravilno orientiranim robom ∂N velja enakost:

$$\int_{\partial N} \omega = \int_N \mathrm{d}\omega \,. \tag{45.6}$$

Ta izrek dokažemo tako, da s pomočjo razčlenitve enote formo ω razbijemo na vsoto form ω_α, pri čemer je vsaka forma ω_α skoncentrirana na sliki neke lokalne parametrizacije $\gamma_\alpha \colon\ D_\alpha \to M$. Še več, privzeti smemo, da je D_α odprta okolica nekega zaprtega kvadra Q_α, $\gamma_\alpha^* \omega$ pa ima nosilec v notranjosti tega kvadra, vse bodisi v $\mathbb{R}^n$ bodisi v zaprtem polprostoru, ki je eden izmed polprostorov, s katerimi je določen Q. V obeh primerih je $\int_N \mathrm{d}\omega = \int_{\gamma'} \mathrm{d}\omega$ in $\int_{\partial N} \omega = \int_{\partial\gamma'} \omega$, kjer je γ' zožitev preslikave γ na Q. Stokesov izrek tako sledi iz formule (45.4).

TEORETIČNO RAČUNALNIŠTVO

46. Računska zahtevnost

Tradicionalni pristop je, kot kaže, videti nekako takole:

- Algoritem kar enačimo s Turingovim strojem.
- Pri traku ločimo *tračno* in *vhodno* abecedo, pri čemer je vhodna abeceda podmnožica tračne. Tračno sestavljajo znaki, ki jih lahko stroj zapisuje na trak. Ta abeceda ima še odlikovan *prazni znak*, ki ni element vhodne abecede.
- Problem enačimo s preslikavo, ki slika iz množice nepraznih končnih zaporedij znakov vhodne abecede. Preslikava lahko slika v množico zaključnih stanj glave stroja (pri odločitvenih problemih), lahko pa slika tudi v množico (obojesmernih) zaporedij tračne abecede, pri katerih je le končno mnogo znakov nepraznih. Lahko slika tudi v množico parov zaključnih stanj in zaporedij.
- Vhod posredujemo stroju tako, da ga zapišemo v celice traku od položaja glave proti desni, v preostale celice pa zapišemo prazni znak. Turingov stroj rešuje dani problem, če se pri vseh možnih vhodih ustavi, njegov izhod pa je skladen s stanjem, v katerega preslikava preslika vhod.
- Računsko (časovno ali prostorsko) zahtevnost algoritma, tj. Turingovega stroja, definiramo kot funkcijo dolžine vhoda – gre za maksimalno število operacij oziroma maksimalno odmik glave po vseh možnih vhodih dane dolžine.
- Problem pripada danemu zahtevnostnemu razredu, ki je navzdol konveksna družina funkcij $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, če obstaja Turingov stroj, ki rešuje ta problem, njegova računska zahtevnost pa pripada izbranemu razredu.

Pomisleki:

- Je prav, da se problem kar enači z množico dopustnih vhodov? Recimo, da rešujemo problem trgovskega potnika in bi radi za dani utežen graf odločili, ali obstaja obhod s ceno manj od 42. Utežen graf predstavimo recimo kot končno zaporedje ničel in enic, pri čemer se nobeden od teh dveh znakov ne šteje kot prazen. Toda ni nujno, da vsako zaporedje ničel in enic zares predstavlja utežen graf. Zakaj bi se moral naš Turingov stroj nujno ustaviti (in to po predpisano omejenem številu korakov), tudi če vhod ne sploh predstavlja uteženega grafa? S programerskega stališča je to seveda več kot zaželeno, toda ali se moramo s tem ukvarjati tudi v teoriji? Če je tako, bi morala imeti glava pri odločitvenih problemih pravzaprav tri zaključna stanja – DA, NE in NESMISELNO. Nadalje bi morala računska zahtevnost, ki velja za izhoda DA in NE, veljati tudi za izhod NESMISELNO.

- V praksi se navadno sicer res izkaže, da je preverjanje, ali vhod res predstavlja željeni objekt, lažje delo od reševanja problema. Toda ali je to dobro s konceptualnega, teoretičnega stališča?
- Dolžina vhoda ni vedno tisto, kar dojemamo kot velikost problema: vhod, ki pripada grafu z n vozlišči, je v splošnem reda velikosti n^2. Dokler smo pri zahtevnostnih razredih dovolj grobi, recimo da nas zanima polinomska zahtevnost, je to v tem primeru sicer v redu. Kaj pa, če želimo linearno zahtevnost ločiti od kvadratične?

Predlog rešitve:

- Računsko (časovno, prostorsko ali tudi kombinirano) zahtevnost Turingovega stroja bi definirali kot funkcijo vhoda. Ta slika iz množice vseh možnih vhodov v množico $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ali še splošneje kar v $[0, \infty]$ (če prostor in čas utežimo z realnimi števili). Dopuščamo torej tudi možnost, da se stroj nikoli ne ustavi. Ni se treba ubadati s praznimi znaki in tudi ni treba ločevati vhodne in tračne abecede.
- Matematični problem bi definirali z bolj abstraktnimi matematičnimi objekti – bil bi preslikava iz neke množice, npr. množice grafov, v neko drugo množico – pri odločitvenih problemih bi bila to množica $\{0, 1\}$.
- Za izbrani matematični problem bi definirali sprejemljive pare posredniških preslikav: vhodna posredniška preslikava bi matematični vhod, npr. graf, preslikala v začetno stanje Turingovega stroja (tj. stanje traku in glave), izhodna pa bi končno stanje stroja preslikala v matematični izhod. Pri odločitvenih problemih bi recimo izhodna posredniška funkcija stanja stroja, pri katerih je glava v stanju DA, preslikala v 1, stanja stroja, pri katerih je glava v stanju NE, pa v 0.

  Sprejemljivost posredniških preslikav je seveda delikatna zadeva: tu se v resnici na drug način pokažejo težave tradicionalnega pristopa. Ideja je, da sta posredniški preslikavi sprejemljivi, če sta dovolj preprosti: vhodna posredniška preslikava ne sme biti že kar rešitev problema. A ne bi bilo treba določiti *vseh* možnih sprejemljivih parov posredniških preslikav – dovolj bi bil le en par, potem pa bi lahko ugotavljali ekvivalentnost.
- Rekli bi, da Turingov stroj ob dani vhodni in izhodni posredniški preslikavi rešuje dani problem, če se stroj ustavi pri vseh začetnih stanjih iz zaloge vrednosti vhodne posredniške preslikave (drugje pa ne nujno) in če se problem kot preslikava ujema s kompozitumom vhodne posredniške preslikave, preslikave, ki izhaja iz Turingovega stroja, in izhodne posredniške preslikave.
- Računsko zahtevnost reševanja problema z danim Turingovim strojem bi spet definirali kot funkcijo vhoda, torej kar kot kompozitum vhodne posredniške preslikave in računske zahtevnosti Turingovega stroja.
- Rekli bi, da problem pripada danemu zahtevnostnemu razredu, če obstaja Turingov stroj, ki (ob sprejemljivih posredniških preslikavah) rešuje dani problem, računska zahtevnost reševanja problema z njim pa pripada danemu zahtevnostnemu razredu.