FUNKCIJA GAMA

Martin Raič

Glavnina napisana 8. februarja 1999.
Datum zadnje spremembe: 21. november 2018

Povzetek

V tem prispevku bomo predstavili funkcijo gama, ki je naravna posplošitev pojma faktoriele na realna in celo kompleksna števila. Predstavitev pa ne bo najbolj jedrnata, kar jih je možnih. Ne gre namreč samo za to, da bralec izve, kaj je funkcija gama in kaj so njene osnovne lastnosti, temveč tudi, da dobi vtis, da tako preprosto *mora* biti. Tako bo marsikakšna izpeljava sicer nekoliko daljša, toda, vsaj upam, manj suhoparna in bolj zanimiva za bralca.

1. Definicija funkcije gama

Kako bi funkcijo $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ki številu n priredi produkt:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n\,,$$

smiselno razširili na (skoraj) vsa realna števila? O tem problemu sta že v začetku 18. stoletja razmišljala Bernoulli[1] in Goldbach[2], dokončno pa ga je razrešil Euler[3].

Smiselno je, da ima nova funkcija čim več lastnosti faktoriele. Lastnost, ki skupaj z definicijo $1! := 1$ popolnoma karakterizira faktorielo, je rekurzivna formula:

$$n! = (n-1)!\,n\,.$$

Smiselno bi bilo, da taka formula velja tudi za našo funkcijo, ki bo posplošitev faktoriele. Iz formule se vidi, da naše funkcije ne bo smiselno definirati za vsa realna števila, saj bi po zgornji zvezi dobili:

$$(-1)! = \frac{0!}{0}\,.$$

Tovrstna posplošitev je znana kot *funkcija gama* in se označi z veliko grško črko gama (ime in oznaka sta Legendrova[4]). V primerjavi s faktorielo je funkcija gama zamaknjena za ena v desno, tako da nedefiniranost faktoriele pri -1 ustreza singularnosti funkcije gama pri 0. Za funkcijo Γ je smiselno zahtevati:

(G1) $\Gamma(1) = 1$

(G2) Za vsak x, za katerega sta vrednost $\Gamma(x)$ in $\Gamma(x+1)$ definirani, naj velja $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

Brž ko ima funkcija Γ zgornji lastnosti in je definirana na naravnih številih, tam velja $\Gamma(n) = (n-1)!$. Ni težko videti, da obstaja funkcija s tema dvema lastnostma, definirana na $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$: izberimo poljubno funkcijo $f\colon\ (0,1] \to \mathbb{R}$, za katero je $f(1) = 1$. Tedaj obstaja natančno ena funkcija $\Gamma\colon\ \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\} \to \mathbb{R}$, ki ima zgornji lastnosti in za katero velja $\Gamma|_{(0,1]} = f$.

Naša funkcija še vedno ni natančno določena. Kako čim naravneje izbrati funkcijo f? Ena od možnih poti do odgovora se skriva v obnašanju pri velikih vrednostih. Logaritmirajmo našo funkcijo, saj je z vsotami navadno lažje delati kot s produkti. Označimo:

$$\psi_0(x) := \ln \Gamma(x)$$

(nekoliko čudna izbira oznake bi dobila smisel kasneje). Ta funkcija ima analogni lastnosti:

(L1) $\psi_0(1) = 0$

(L2) Za vsak x, za katerega so vrednosti $\psi_0(x)$, $\psi_0(x+1)$ in $\ln x$ definirane, naj velja $\psi_0(x+1) = \psi_0(x) + \ln x$.

[1] Daniel Bernoulli (1700–1782), švicarski matematik in fizik
[2] Christian Goldbach (1609–1764), nemški matematik
[3] Leonhard Euler (1707–1783), švicarski matematik
[4] Adrien-Marie Legendre (1752–1833), francoski matematik

Sledi:
$$\psi_0(a+k) = \psi_0(a) + \ln a + \ln(a+1) + \cdots + \ln(a+k-1)\,.$$
Če je a velik v primerjavi s k, so logaritmi števil od a do $a+k-1$ približno enaki. Po Lagrangeovem izreku za vsak $r \geq 0$ velja:
$$\ln(a+r) = \ln a + \frac{r}{\xi_r}\,,$$
kjer je $a \leq \xi_r \leq a+r$. Sledi:
$$\ln a \leq \ln(a+r) \leq \ln a + \frac{r}{a}$$
oziroma:
$$\psi_0(a) + k\ln a \leq \psi_0(a+k) \leq \psi_0(a) + k\ln a + \frac{k(k-1)}{2a}\,.$$
Sledi:
$$\lim_{a\to\infty}\bigl(\psi_0(a+k) - \psi_0(a) - k\ln a\bigr) = 0 \tag{1.1}$$
oziroma:
$$\lim_{a\to\infty}\frac{\Gamma(a+k)}{a^k\,\Gamma(a)} = 1\,. \tag{1.2}$$
Po domače povedano, logaritem naše funkcije je asimptotično ploščat, vsaj če gledamo vrednosti, ki se razlikujejo za predpisano celo število. Toda za našo funkcijo pričakujemo, da bo definirana vsaj na nekem pozitivnem poltraku. Zato je povsem smiselno pomisliti, da bi lahko zgornja enačba veljala kar za vse *realne* k. Spet po domače povedano, na poljubni mreži z razponom 1 se logaritem funkcije z lastnostjo (G2) v okolici velikega števila a obnaša približno kot premica s strmino $\ln a$. Smiselno je zahtevati, da je to res tudi na realnih številih.

Z zgornjo zahtevo ter lastnostma (G1) in (G2) je funkcija Γ natančno določena, brž ko definicijsko območje vsebuje določen poltrak (M,∞). Pišimo namreč $a = n+1$, kjer n teče po naravnih številih. Dobimo:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+x+1)}{n!\,(n+1)^x} = 1\,.$$
Ker je $\Gamma(n+x+1) = x(x+1)\cdots(x+n)\,\Gamma(x)$, od tod sledi:
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+1)^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,.$$
Torej lahko s tem definiramo funkcijo gama. Definicija deluje tudi za kompleksen argument.

Definicija. *Funkcija gama* je limita:
$$\Gamma(z) := \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}\,. \tag{1.3}$$

Opomba. Zgornja definicija je Gaussova[5] in je enakovredna izvirni Eulerjevi definiciji z neskončnim produktom:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{z}\right)^n}{1 + \frac{z}{n}} .$$

Opomba. Po tej definiciji je torej funkcija gama definirana za tiste z, kjer so vsi produkti $z(z+1)\cdots(z+n)$, $n \in \mathbb{N}$, različni od nič in zgornja limita obstaja. Funkcija gama torej ne bo definirana za $z \in \{0, -1, -2, \ldots\}$.

Opomba. Zgornjo definicijo lahko razumemo tudi že kot recept za izračun funkcije gama, če znamo učinkovito računati faktoriele. Izberemo namreč dovolj velik n in približno izračunamo:

$$\Gamma(n+1+z) \approx n!\, n^z ,$$

nato pa po lastnosti (G2) izračunamo:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} .$$

Funkcijo smo definirali neposredno z limito produktov, a do te definicije nas je popeljal logaritem. Ta bo prišel prav tudi kasneje, saj je, kot smo že omenili, z vsotami lažje delati kot s produkti. Logaritem pa v kompleksen ni enoličen pojem: isto kompleksno število ima neskončno mnogo logaritmov, ki se med seboj razlikujejo za večkratnike števila $2\pi i$. Če želimo logaritem definirati kot funkcijo, moramo kompleksno ravnino nekje prerezati. Če odrežemo poltrak $(-\infty, 0]$, dobimo *kanonični logaritem*. Vsako število $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ je možno zapisati v obliki $z = r\, e^{i\varphi}$, kjer je $r > 0$ in $-\pi < \varphi < \pi$. Kanonični logaritem tedaj definiramo kot:

$$\ln z := \ln r + i\varphi . \tag{1.4}$$

Podobno definiramo *kanonične potence*: če je z kot prej in w poljubno kompleksno število, definiramo:

$$z^w = e^{w \ln z} . \tag{1.5}$$

Opomba. Pri računanju s kanoničnimi logaritmi in potencami moramo biti previdni, saj ne velja nujno $\ln(z_1 + z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$ in $(z_1 z_2)^w = z_1^w + z_2^w$. Formuli pa vsekakor veljata, če je eno od števil z_1 in z_2 realno (kar pomeni tudi, da je pozitivno). Pač pa za vse $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ velja $\ln \frac{1}{z} = -\ln z$. Prav tako za vse $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ in vse $w \in \mathbb{C}$ velja $(1/z)^w = 1/z^w$.

DEFINICIJA. *Kanonični logaritem funkcije gama* je funkcija:

$$\psi_0(z) := \lim_{n\to\infty} \Big(\ln(n!) + z \ln n - \ln z - \ln(z+1) - \cdots - \ln(z+n) \Big) . \tag{1.6}$$

Opomba. Funkcija ψ_0 je definirana kvečjemu na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Iz zveznosti eksponentne funkcije sledi, da je, kjer je definirana funkcija ψ_0, definirana tudi funkcija gama in velja $\Gamma(z) = e^{\psi_0(z)}$. Za vsak $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ je torej število $\psi_0(z)$ logaritem števila $\Gamma(z)$. Ni pa nujno $\psi_0(z)$ *kanonični* logaritem števila $\Gamma(z)$ – glej trditev 1.4. Pojem kanoničnega

[5] Carl Friedrich Gauß (1777–1855), nemški matematik

logaritma se torej pri zgornji definiciji nanaša na funkcijo *v celoti*, ne na njene posamezne vrednosti. Zato te funkcije tudi nismo označili kar z $\ln \Gamma$, temveč smo vpeljali posebno oznako.

Če je vrednost $\Gamma(z)$ definirana, še ni rečeno, da je definirana tudi vrednost $\psi_0(z)$. Pač pa, če je $x > 0$ (torej $x \in \mathbb{R}$) ter je vrednost $\Gamma(x)$ definirana in ni enaka nič, lahko rečemo, da je definirana tudi vrednost $\psi_0(x)$ in velja $\psi_0(x) = \ln \Gamma(x)$. V tem primeru namreč računamo le z realnimi logaritmi.

Zanimivi so tudi odvodi kanoničnega logaritma funkcije gama. A če jih definiramo dobesedno na ta način, so definirani kvečjemu na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Zato raje govorimo o logaritemskih odvodih.

Definicija. *Funkcije poligama* so logaritemski odvodi kompleksni funkcije gama:

$$\psi_1(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \qquad \psi_m(z) := \psi_1^{(m-1)}(z).$$

Črtica in superskript v oklepaju tu označujeta kompleksni odvod.
Funkciji ψ_1 pravimo *funkcija digama*, funkciji ψ_2 pa *funkcija trigama*.

Opomba. Funkcije poligama so torej definirane povsod, kjer funkcija gama defnirana, nima ničel in je dovoljkrat kompleksno odvedljiva. Videli bomo, da je njihovo definicijsko območje večje od definicijskega območja funkcije ψ_0. Kjer pa je funkcija ψ_0 definirana (in dovoljkrat odvedljiva), je seveda $\psi_m(z) = \psi_0^{(m)}(z)$. Če je $\log \Gamma$ poljuben logaritem funkcije Γ, je prav tako $\psi_m(z) = (\log \Gamma)^{(m)}(z)$.

Opomba. Notacija v tem prispevku je nekoliko nestandardna – tipično se funkcija digama označuje s ψ_0 ali ψ, funkcija trigama s ψ_1 itd. Tu pa smo s ψ_0 označili sam kanonični logaritem funkcije gama in kot smo videli, je zanj smiselno uvesti posebno oznako.

Izrek 1.1.

(1) *Funkcija gama obstaja za vse $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ ter izpolnjuje pogoja (G1) in (G2).*

(2) *Funkcija gama je holomorfna in brez ničel, v točkah $0, -1, -2, \ldots$ pa ima pol prve stopnje.*

(3) *Kanonični logaritem funkcije gama, funkcija ψ_0, obstaja povsod na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, izpolnjuje pogoja (L1) in (L2), limita v (1.6) pa konvergira enakomerno po kompaktih v $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.*

(4) *Logaritemski odvodi funkcije gama se izražajo na naslednji način:*

$$\psi_1(z) = \lim_{n \to \infty} \left(\ln n - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \cdots - \frac{1}{z+n} \right),$$

$$\psi_m(z) = (-1)^m (m-1)! \left(\frac{1}{z^m} + \frac{1}{(z+1)^m} + \frac{1}{(z+2)^m} + \cdots \right) ;$$

$$m = 2, 3, 4, \ldots,$$

pri čemer limita in vrste konvergirajo enakomerno po kompaktih v $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Opomba. Iz točke (2) sledi, da je funkcija $1/\Gamma$ cela holomorfna funkcija, ki ima v $0, -1, -2, \dots$ ničle prve stopnje.

Opomba. Vrednosti funkcij poligama v točki 1 se izražajo z *Riemannovo funkcijo zeta*: velja $\psi_m(1) = (-1)^m (m-1)!\,\zeta(m)$.

Opomba. Z odvajanjem lastnosti (L2) dobimo rekurzivno zvezo za funkcije poligama:

$$\psi_m(z+1) = \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{z^m} + \psi_m(z)\,. \tag{1.7}$$

Argument z odvajanjem funkcije ψ_0 pokaže, da veljajo na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, zaradi zveznosti pa morajo veljati tudi na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Opomba. Iz izreka 1.1 pa ni očitno, da veljata zvezi (1.1) in (1.2), iz katerih izhaja izbrana definicija funkcije gama. Ti dve zvezi bomo v še malo splošnejši trditvi dokazali v 5. razdelku (glej trditev 5.5).

Preden gremo dokazat izrek 1.1, bomo navedli še dva rezultata, na katera se bomo oprli med dokazovanjem.

Trditev 1.2. *Obstaja limita:*

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

in velja $0 < \gamma < 1$.

Opomba. Zgornja limita je znana kot *Euler–Mascheronijeva*[6] *konstanta*; trditev pove, da je $\psi_1(1) = \Gamma'(1) = -\gamma$. Zaokroženo na deset decimalk pride $\gamma \doteq 0\dot{}5772156649$.

Dokaz trditve 1.2. Definirajmo:

$$\gamma_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k} - \ln\frac{k}{k-1}\right] = 1 + \left[\sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k}\right],$$

$$\gamma_n' := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \ln\frac{k+1}{k}\right] = -\sum_{k=1}^{n} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\right].$$

Če logaritem razvijemo v Taylorjevo[7] vrsto okoli 1 do vključno reda 1 in ostanek izrazimo v Lagrangeovi[8] obliki, dobimo:

$$\gamma_n = 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k - \vartheta_k)^2}\,, \qquad \gamma_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k + \vartheta_k')^2}\,,$$

[6] Lorenzo Mascheroni (1750–1800), italijanski matematik in pesnik

[7] Brook Taylor (1685–1731), angleški matematik

[8] Joseph Louis, comte de Lagrange, rojen kot Giuseppe Lodovico Lagrangia (1736-1813), italijanski matematik, mehanik in astronom, deloval v Franciji

kjer je $0 \le \vartheta_k, \vartheta'_k \le 1$. Ker vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergira, sta tudi zaporedji $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ in $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots$ konvergentni. Po definiciji je $\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n$, torej γ obstaja. Ker je zaporedje $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ padajoče in $\gamma_n < 1$, je tudi $\gamma < 1$. Ker je:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\gamma_n - \gamma'_n\right) = \lim_{n\to\infty} \Big(\ln(n+1) - \ln n\Big) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0\,,$$

pa je tudi $\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma'_n$. Ker je zaporedje $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots$ naraščajoče in $\gamma'_n > 0$, je tudi $\gamma > 0$. ■

Ključno sredstvo pri dokazovanju izreka 1.1 pa bo naslednji rezultat:

Trditev 1.3. *Dane naj bodo holomorfne funkcije $F_1, F_2, \dots D \to \mathbb{C}$, kjer je D neprazna odprta množica v $\mathbb{C}$. Označimo $f_n := F'_n$. Privzemimo še naslednje:*

- *Za določen $z_0 \in D$ naj bo zaporedje $F_1(z_0), F_2(z_0), \dots$ konvergentno.*
- *Zaporedje $f_1, f_2, \dots$ naj enakomerno po kompaktih konvergira proti neki funkciji $f\colon D \to \mathbb{C}$.*

Tedaj velja:

- *Zaporedje $F_1, F_2, \dots$ enakomerno po kompaktih konvergira proti neki funkciji $F\colon D \to \mathbb{C}$.*
- *Funkciji F in f sta holomorfni.*
- *Velja $f = F'$.* ■

Dokaz izreka 1.1.

Prvi korak: pokažimo, da funkcija Γ izpolnjuje pogoja (G1) in (G2) ter da funkcija ψ_0 izpolnjuje pogoja (L1) in (L2). Po definiciji je namreč:

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1\,.$$

Z logaritmiranjem dobimo še $\psi_0(1) = 0$. Nadalje za $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ velja:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \\
&= \frac{1}{z} \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z+1}}{(z+1)\cdots(z+n)(z+n+1)} \, \frac{z+n+1}{n} = \\
&= \frac{1}{z} \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z+1}}{(z+1)\cdots(z+n)(z+n+1)} = \\
&= \frac{\Gamma(z+1)}{z}\,.
\end{aligned}$$

Iz zgornjega računa sledi tudi, da je, brž ko je definirana vrednost $\Gamma(z+1)$ in je $z \neq 0$, definirana tudi vrednost $\Gamma(z)$.

Podobno za $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ velja:

$$
\begin{aligned}
\psi_0(z) &= \lim_{n\to\infty}\Big(\ln(n!) + z\ln n - \ln z - \ln(z+1) - \cdots - \ln(z+n)\Big) = \\
&= \lim_{n\to\infty}\bigg(\ln(n!) + (z+1)\ln n - \ln(z+1) - \cdots - \ln(z+n) - \ln(z+n+1) + \\
&\qquad\qquad + \ln\frac{z+n+1}{n}\bigg) - \ln z = \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\ln(n!) + (z+1)\ln n \ln(z+1) - \cdots - \ln(z+n) - \ln(z+n+1)\Big) - \ln z = \\
&= \psi_0(z+1) - \ln z\,.
\end{aligned}
$$

Iz zgornjega računa sledi tudi, da je, brž ko je definirana vrednost $\Gamma(z+1)$ in je $z \neq 0$, definirana tudi vrednost $\Gamma(z)$.

Morda se zdijo podvojeni računi odveč, a lastnosti (L2) ne moremo dobiti kar z logaritmiranjem lastnosti (G2), saj kanonični logaritem funkcije gama pri z ni nujno kanonični logaritem števila $\Gamma(z)$, poleg tega pa ne velja nujno $\ln(zw) = \ln z + \ln w$. Lahko bi sicer naredili obratno – izpeljali (G2) iz (L2), a to bi veljalo le na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Kasneje bi lahko izkoristili zveznost in razširili na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, a prej bi morali izpeljati, da je funkcija gama tam tudi definirana. Za izpeljavo tega pa je ključen dostavek h (G2), ki ne sledi iz izpeljave (L2).

Drugi korak: pokažimo, da vrste za ψ_m, iz točke (4) za $m = 2, 3, 4, \ldots$ konvergirajo enakomerno po kompaktih v $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Če je K tak kompakt, obstaja tak $M \in \mathbb{N}$, da za vse $z \in K$ velja $|z| \le M$. Pišimo:

$$
\frac{1}{z^m} + \frac{1}{(z+1)^m} + \frac{1}{(z+2)^m} + \cdots = \frac{1}{z^m} + \frac{1}{(z+1)^m} + \cdots + \frac{1}{(z+M)^m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z+M+k)^m}
$$

in ocenimo:

$$
\left|\frac{1}{(z+M+k)^m}\right| \le \frac{1}{(M+k-|z|)^m} \le \frac{1}{k^m}\,.
$$

Ker vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}$ konvergira, tudi vrsta za ψ_m konvergira enakomerno po K.

Če torej za $m = 2, 3, 4, \ldots$ in $n = 1, 2, 3, \ldots$ definiramo:

$$
\psi_{m,n}(z) := (-1)^m (m-1)!\left(\frac{1}{z^m} + \frac{1}{(z+1)^m} \cdots + \frac{1}{(z+n)^m} + \cdots\right),
$$

smo pravkar dokazali, da za vsak m zaporedje $\psi_{m,1}, \psi_{m,2}, \ldots$ konvergira enakomerno po kompaktih v $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$.

Tretji korak: definirajmo še:

$$
\psi_{1,n}(z) := \ln n - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \cdots - \frac{1}{z+n}\,,
$$

ter pokažimo, da tudi zaporedje $\psi_{1,1}, \psi_{1,2}, \ldots$ konvergira enakomerno po kompaktih v $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, da za vse $m = 1, 2, 3, \ldots$ velja $\lim_{n\to\infty} \psi_{m,n} = \psi_m$ in da so vse funkcije

ψ_m *holomorfne na* $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$. Najprej opazimo, da za vse $m,n=1,2,3,\ldots$ velja $\psi'_{m,n}=\psi_{m+1,n}$ in da so vse funkcije $\psi_{m,n}$ holomorfne na $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$. Nadalje je po trditvi 1.2 zaporedje $\psi_{1,1}(1),\psi_{1,2}(1),\ldots$ konvergentno. Vse zahtevano sledi po indukciji iz trditve 1.3.

Četrti korak: za $\Re(z)>0$ *in* $n=1,2,3,\ldots$ *definirajmo še:*

$$\psi_{0,n}(z):=\ln(n!)+z\ln n-\ln z-\ln(z+1)-\cdots-\ln(z+n)$$

ter pokažimo, da tudi zaporedje $\psi_{0,1},\psi_{0,2},\ldots$ *konvergira enakomerno po kompaktih v* $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, *da je limita* $\psi_0=\lim_{n\to\infty}\psi_{0,n}$ *holomorfna na tej množici in da tam velja* $\psi_1=\psi'_0$. Najprej opazimo, da obstaja:

$$\lim_{n\to\infty}\psi_{0,n}(1)=\lim_{n\to\infty}\big(\ln n-\ln(n+1)\big)=0$$

in da za vse n velja $\psi_{1,n}=\psi'_{0,n}$. Vse zahtevano zdaj spet sledi iz trditve 1.3. Tako smo dokazali točko (3) in tudi, da je funkcija gama definirana povsod na $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.

Peti korak: dokaz izreka do konca. Videli smo že, da je, če je definirana vrednost $\Gamma(z+1)$ in je $z\neq 0$, definirana tudi vrednost $\Gamma(z)$. Nadalje, če je $\Gamma(z+1)\neq 0$ in $z\neq 0$, je tudi $\Gamma(z)\neq 0$. Poleg tega iz (G2) sledi tudi, da je, če je D območje v $\mathbb{C}$, ki ne vsebuje izhodišča, in je Γ holomorfna na $\{z+1\ ;\ z\in D\}$, Γ holomorfna tudi na D. Ker je Γ na $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ definirana, holomorfna in brez ničel (saj je tam $\Gamma=e^{\psi_0}$), je vse to res tudi na $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$. Da ima v poljubni točki $-n$, kjer je $n\in\{0,1,2,\ldots\}$, pol prve stopnje, pa sledi iz zveze:

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}\ :$$

števec je za z v okolici točke $-n$ holomorfen in brez ničel, imenovalec pa ima pri $z=-n$ ničlo prve stopnje. S tem smo dokazali točki (1) in (2).

Za dokaz točke (4) je treba videti le še, da je $\Gamma'(z)/\,\Gamma(z)=\psi_1(z)$. Za $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ to sledi iz dejstva, da je $\Gamma(z)=e^{\psi_0(z)}$ in $\psi'_0(z)=\psi_1(z)$. Za preostanek definicijskega območja pa sledi iz zveznosti funkcij $\Gamma'/\,\Gamma$ in ψ_1. ∎

Trditev 1.4. *Obstaja tak* $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, *da je* $\Gamma(z)\in(-\infty,0)$ *(in torej* $\ln\Gamma(z)$ *ni definiran). Obstaja pa tudi tak* $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, *da je tudi* $\Gamma(z)\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$, *a* $\ln\Gamma(z)\neq\psi_0(z)$.

Dokaz. Po lastnosti (L2) za vsak $n\in\mathbb{N}$ velja:

$$\begin{aligned}\Im\,\psi_0(n\pm i)&=\Im\,\psi_0(1\pm i)+\Im\ln(1\pm i)+\Im\ln(2\pm i)+\cdots+\Im\ln(n-1\pm i)=\\&=\Im\,\psi_0(1\pm i)\pm\operatorname{arctg}1\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\pm\cdots\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{n-1}\,,\end{aligned}$$

kjer pri vseh $\pm$ izberemo isti znak. Ker vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{k}$ divergira, njeni členi pa gredo vseeno proti nič, obstaja tak n, da je $\Im\,\psi_0(n+i)>\pi$ in $\Im\,\psi_0(n-i)<-\pi$, obenem pa tudi $\Im\,\psi_0(n+i)/\pi$ ni celo število. To pomeni, da $\Gamma(n+i)=e^{\psi_0(n+i)}$ ni realno število, se pravi, da je definiran kanonični logaritem $\ln\Gamma(n+i)$. Ta pa ni enak $\psi_0(n+i)$, saj je po definiciji $\Im\ln\Gamma(n+i)<\pi$, medtem ko je $\psi_0(n+i)>\pi$.

Končno si oglejmo funkcijo $f(t):=\Im\,\psi_0(n+it)$. Ker je $f(-1)<-\pi$, $f(1)>\pi$ in je f zvezna, obstaja tak t, da je $f(t)=\pi$. Od tod pa sledi, da je $\Gamma(n+it)\in(-\infty,0)$. ∎

Iz izreka 1.1 sledi, da je funkcija ψ_0 na $(0,\infty)$ konveksna, saj velja:

$$\psi_0''(x) = \psi_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} > 0\,.$$

Ta lastnost pa tudi karakterizira funkcijo ψ_0. Velja namreč naslednji izrek.

Izrek 1.5. *Zožitev funkcije ψ_0 na $(0,\infty)$ je edina konveksna realna funkcija na $(0,\infty)$, ki zadošča tudi lastnostma (L1) in (L2). Z drugimi besedami, zožitev funkcije Γ na $(0,\infty)$ je edina funkcija iz $(0,\infty)$ v $(0,\infty)$, katere logaritem je konveksen in ki zadošča tudi lastnostma (G1) in (G2).*

Toda za holomorfne funkcije velja *princip identitete*: če se dve holomorfni funkciji, definirani na isti odprti povezani množici D, ujemata na neki podmnožici, ki ima v D stekališče, se morata ujemati povsod na D. Tako dobimo še naslednji okrepitvi obeh različic zgornjega izreka:

Posledica 1.6. *Naj bo D povezana odprta množica, za katero je $(0,\infty) \subseteq D \subseteq \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Tedaj je zožitev funkcije ψ_0 na D edina holomorfna funkcija, ki slika $(0,\infty)$ v $\mathbb{R}$, ki je na $(0,\infty)$ konveksna in ki tam zadošča tudi lastnostma (L1) in (L2).* ■

Posledica 1.7. *Naj bo D povezana odprta množica, za katero je $(0,\infty) \subseteq D \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$. Tedaj je zožitev funkcije Γ na D edina holomorfna funkcija, ki slika $(0,\infty)$ v $(0,\infty)$, katere logaritem je na $(0,\infty)$ konveksen in ki tam zadošča tudi lastnostma (G1) in (G2).* ■

DOKAZ IZREKA 1.5. Naj bo $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, ki zadošča lastnostma (L1) in (L2). Vzemimo $x > 0$ in $n \in \mathbb{N}$. Ker točka na grafu funkcije f, ki ima absciso $n+1+x$, leži pod premico, ki gre skozi točki z abscisama $n+1$ in $n+2$, velja:

$$f(n+1+x) \le (1-x) f(n+1) + x\, f(n+2)\,.$$

Iz lastnosti (L1) in (L2) sledi, da je $f(n) = \ln\bigl((n-1)!\bigr)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Sledi:

$$f(n+1+x) \le \ln(n!) + x \ln(n+1)\,.$$

Točka na grafu, ki ima absciso $n+1$, pa leži pod premico, ki gre skozi točki z abscisama n in $n+1+x$. Sledi:

$$f(n+1) \le \frac{x}{x+1} f(n) + \frac{1}{x+1} f(n+1+x)$$

oziroma:

$$f(n+1+x) \ge (x+1)\ln(n!) - x \ln\bigl((n-1)!\bigr) = \ln(n!) + x \ln n\,.$$

Dobimo:

$$x \ln n + \ln(n!) \le f(n+1+x) \le x \ln(n+1) + \ln(n!)\,.$$

Ko po večkratni uporabi lastnosti (L2) izrazimo $f(n+1+x)$ z $f(x)$, dobimo:

$$0 \leq f(x) + \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k) - x \ln n - \ln(n!) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Sledi:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln(n!) + x\ln n - \sum_{k=0}^{n}\ln(x+k)\right) = \psi_0(x)\,.$$

■

2. Integralska reprezentacija funkcije gama

Spomnimo se, da lahko faktorielo zapišemo tudi z integralom:

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = n!\,.$$

Zgornji integral pa nima smisla le za cele n. Brž ko je $\Re(z) > 0$, obstaja integral:

$$F(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Pravimo mu *Eulerjev integral druge vrste.*

Poleg tega obstaja tudi integral kompleksnega odvoda integranda:

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \ln t\,\mathrm{d}t$$

in ni se težko prepričati, da za vsako kompaktno množico $K \subseteq \{z \in \mathbb{C}\,;\,\Re(z) > 0\}$ velja:

$$\int_0^\infty \sup_{z\in K}\left|t^{z-1}e^{-t}\ln t\right|\mathrm{d}t < \infty\,.$$

Sledi, da je funkcija F holomorfna.

Očitno je $F(1) = 1$. Z integracijo per partes se hitro prepričamo, da funkcija F zadošča tudi lastnosti (G2). Nastane vprašanje, ali ni morda kar $F(z) = \Gamma(z)$. Po posledici 1.7 bo to res, brž ko bo F slikala $(0,\infty)$ v $(0,\infty)$, njen logaritem pa bo tam konveksen. Prva lastnost je očitna, druga pa je ekvivalentna pogoju, da za vse $0 < s < 1$ in $a, b \in (0,\infty)$ velja:

$$F\big((1-s)a + sb\big) \leq F(a)^{1-s} F(b)^s\,.$$

Naj bo $q := \frac{1}{s}$ in naj bo p konjugirani eksponent h q, torej $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oziroma $t = \frac{1}{q}$ in

$1 - t = \frac{1}{p}$. Tedaj po Hölderjevi[9] neenakosti velja:

$$\begin{aligned}F\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right) &= \int_0^\infty t^{a/p+b/q-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\infty t^{(a-1)/p}e^{-t/p}t^{(b-1)/q}e^{-t/q}\,\mathrm{d}t \le \\ &\le \left(\int_0^\infty \left(t^{(a-1)/p}e^{-t/p}\right)^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty \left(t^{(b-1)/q}e^{-t/q}\right)^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} = \\ &= F(a)^{1/p}F(b)^{1/q}\,,\end{aligned}$$

torej je funkcija $\ln F$ res konveksna. Sledi, da za vsak z, za katerega je $\Re(z) > 0$, velja:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Dobili smo *integralsko reprezentacijo funkcije gama.*

Integralska reprezentacija funkcije gama pa nam da tudi povezavo s *funkcijo beta*:

$$\mathrm{B}(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Temu integralu pravimo *Eulerjev integral prve vrste* in ima smisel za $\Re(z) > 0$ in $\Re(w) > 0$. Brez težav izpeljemo, da je funkcija beta simetrična. Nadalje velja:

$$\mathrm{B}(z+1,w) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^z (1-t)^{z+t-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Ta integral pa zdaj integriramo per partes, tako da prvi faktor odvajamo, drugega pa integriramo. Po krajšem računu dobimo naslednjo rekurzivno formulo:

$$\mathrm{B}(z+1,w) = \frac{z}{z+w}\,\mathrm{B}(z,w)\,.$$

S to rekurzivno formulo lahko funkcijo beta razširimo, tako da je definirana, brž ko je $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ in $\Re(w) > 0$. Zaradi simetrije velja tudi zveza:

$$\mathrm{B}(z,w+1) = \frac{w}{z+w}\,\mathrm{B}(z,w)\,.$$

Ta zveza velja tudi za razširjeno funkcijo beta in z njo lahko funkcijo beta definiramo za poljubna $z, w \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$. Ni se težko prepričati, da je tudi tako razširjena funkcija simetrična in holomorfna funkcija dveh spremenljivk.

Iz rekurzivne formule dobimo vrednosti funkcije beta za naravna števila:

$$\mathrm{B}(m,n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}\,.$$

[9] Otto Ludwig Hölder (1859-1937), nemški matematik

Nastane seveda vprašanje, ali velja splošnejša zveza:

$$\mathrm{B}(z,w) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}\,. \tag{2.1}$$

Zaradi dvojne holomorfnosti je to zvezo dovolj preveriti za primer, ko je $z > 0$ in $w > 0$. Definirajmo funkcijo $F\colon\ (0,\infty) \to (0,\infty)$ po predpisu:

$$F(x) := \frac{\mathrm{B}(x,y)\,\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}\,.$$

Neposredno iz integralske definicije funkcije beta sledi, da je $\mathrm{B}(1,y) = 1/y$. Od tod pa sledi, da je $F(1) = 1$. Iz rekurzivne zveze za funkcijo beta sledi zveza $F(x+1) = x\,F(x)$. Nadalje podobno kot pri funkciji Γ dobimo, da je za vsak y funkcija $x \mapsto \ln \mathrm{B}(x,y)$ konveksna na $(0,\infty)$. Od tod pa sledi, da je konveksna tudi funkcija $\ln F$. Po izreku 1.5 mora biti potem $F(x) = \Gamma(x)$, torej zveza (2.1) zares velja.

Iz zveze (2.1) takoj dobimo:

$$\Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big)^2 = \mathrm{B}\big(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\big) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t = \pi\,.$$

Dobimo pomembno enakost:

$$\Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}\,. \tag{2.2}$$

Tako zdaj vrednosti funkcije Γ poznamo pri vseh naravnih številih in številih, ki ležijo na polovici med dvema celima številoma.

3. Simetrija funkcije gama

Funkcija gama sicer ni ne soda ne liha, kljub temu pa ima, kot bomo videli, določeno simetrijo. Izraz $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)$ se namreč izraža kot elementarna funkcija. Po formuli (1.3) velja:

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z}{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}\,,\\
\Gamma(1-z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^{1-z}}{(1-z)(2-z)\cdots(n-z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-z}}{(1-z)\left(1-\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{n}\right)}\,.
\end{aligned}$$

Sledi:

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{1}{z\prod_{n=1}^\infty\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)}\,.$$

Izračunati je torej treba neskončni produkt:

$$F(z) := \prod_{n=1}^\infty \left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\,.$$

Navadno je z vsotami lažje delati kot s produkti, zato je funkcijo F smiselno logaritmirati. Toda potem imamo opravka z logaritmi binomov. Le-ti pa preidejo v racionalne funkcije, če jih odvajamo. Izračunali bomo torej logaritemski odvod funkcije F:

$$f(z) := \frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right) .$$

Zgornja vrsta enakomerno konvergira, ko z preteče kompaktno podmnožico množice $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, torej smo smeli členoma odvajati. Oglejmo si zdaj funkcijo:

$$g(z) := f(z) + \frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z-k} .$$

Ta funkcija je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ in periodična s periodo 1. Pri ničli (in zato pri vseh celih številih) ima pol stopnje 1 z residuom 1. Na poljubni množici oblike:

$$M_a := \{ z \in \mathbb{C} \mid |\Im(z) \geq a| \}, \quad a > 0$$

pa je funkcija g omejena. Naj bo namreč $z \in M_a$. Zaradi periodičnosti lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je $|\Re(z)| \leq \frac{1}{2}$. Tedaj velja:

$$\left| \frac{1}{z} \right| \leq \frac{1}{a} ,$$
$$\left| \frac{2z}{z^2 - n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} .$$

Sledi:

$$|g(z)| \leq \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} < \infty .$$

Iste lastnosti pa ima tudi naslednja funkcija:

$$h(z) := \pi \operatorname{ctg}(\pi z) .$$

Je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, periodična s periodo 1 in ker velja $\lim_{z\to 0} z h(z) = 1$, ima pri 0 (in zato pri vseh celih številih) pol stopnje 1 z residuom 1. Omejenost pa je dovolj dokazati na množicah:

$$M_a^+ := \{ z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \geq a \}, \quad a > 0 ,$$

saj je $h(\bar{z}) = \overline{h(z)}$. Naj bo $z \in M_a^+$. Tedaj velja:

$$|h(z)| = \left| \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \right| = \left| \frac{1 + e^{-2iz}}{1 - e^{-2iz}} \right| \leq \frac{1 + e^{-2a}}{1 - e^{-2a}} .$$

Oglejmo si zdaj razliko $h(z) - g(z)$. Zaradi ujemanja polov funkcij g in h je razlika cela analitična funkcija. Na množici M_1 je omejena. Omejena pa je tudi na množici vseh kompleksnih števil z, za katera je $0 \leq \Re(z) \leq 1$ in $|\Im(z)| \leq 1$, saj je ta množica kompaktna. Zaradi periodičnosti mora biti $g - h$ omejena na celi množici $\mathbb{C} \setminus M_1$, to pa pomeni, da je $g - h$ omejena na $\mathbb{C}$, torej je konstantna. Ker velja:

$$\lim_{z \to 0} \left(g(z) - \frac{1}{z} \right) = f(0) = 0 \,,$$
$$\lim_{z \to 0} \left(h(z) - \frac{1}{z} \right) = \lim_{z \to 0} \left(\pi \operatorname{ctg} \pi z - \frac{1}{z} \right) = 0 \,,$$

je ta konstanta v resnici kar 0, torej je $g = h$. Sledi:

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \,.$$

Od tod zdaj po rešitvi diferencialne enačbe dobimo:

$$F(z) = C \, \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} \,.$$

Ker je $F(1) = 1$, mora biti $C = 1$. Od tod najprej dobimo izražavo sinusa z neskončnim produktom:

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$$

in končno iskano *Eulerjevo formulo*:

$$\Gamma(z) \, \Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \,. \tag{3.1}$$

4. Produkt zaporednih vrednosti funkcije gama

Poleg naravnih števil in števil na polovici med dvema celima številoma se vrednosti funkcija gama tipično ne dajo izraziti z elementarnimi računskimi operacijami. Da pa se poenostaviti produkt:

$$\Gamma\left(\frac{z}{n}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right) .$$

Izrek 4.1. *Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ in poljubene $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1/n, -2/n, \ldots\}$ velja zveza:*

$$\Gamma\left(\frac{z}{n}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{z+n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \, \Gamma(z)}{n^{z - \frac{1}{2}}} \,. \tag{4.1}$$

Poleg tega, če je ψ_0 kanonični logaritem funkcije gama, definiran v (1.6)*, tudi za poljuben $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ velja zveza:*

$$\psi_0\left(\frac{z}{n}\right) + \psi_0\left(\frac{z+1}{n}\right) + \cdots + \psi_0\left(\frac{z+n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{2} \ln(2\pi) + \psi_0(z) - \left(z - \tfrac{1}{2}\right) \ln n \,. \tag{4.2}$$

Opomba. Za $n = 2$ je formula (4.1) znana kot *Legendrov obrazec*:

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}} \, \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) .$$

Dokaz izreka 4.1. Dovolj je dokazati zvezo (4.2). Iz nje namreč takoj sledi, da zveza (4.2) velja na $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, iz zveznosti pa dobimo, da velja tudi na $\mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$. Obratno ne bi mogli izpeljati, saj kanonični logaritem funkcije gama pri z ni nujno kanonični logaritem števila $\Gamma(z)$, poleg tega pa ne velja nujno $\ln(zw) = \ln z + \ln w$.

Definirajmo funkcijo f po predpisu:

$$\begin{aligned} f(z) = (z-1)\ln n + \psi_0\left(\frac{z}{n}\right) + \psi_0\left(\frac{z+1}{n}\right) + \cdots + \psi_0\left(\frac{z+n-1}{n}\right) - \\ - \psi_0\left(\frac{1}{n}\right) - \psi_0\left(\frac{2}{n}\right) - \cdots - \psi_0\left(\frac{n-1}{n}\right) = \\ = (z-1)\ln n + \psi_0\left(\frac{z}{n}\right) + \psi_0\left(\frac{z+1}{n}\right) + \cdots + \psi_0\left(\frac{z+n-1}{n}\right) - \ln P \,, \end{aligned}$$

kjer je:

$$P := \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right)$$

(z logaritmom tu ni težav, ker ga uporabimo na realnih številih). Krajši račun pokaže, da je $f(1) = 0$ in $f(z+1) = f(z) + \ln z$. Nadalje f slika $(0, \infty)$ v $\mathbb{R}$ in je tam konveksna funkcija. Po posledici 1.6 je potem $f(z) = \psi_0(z)$ za vse $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Izračunati moramo le še produkt P, ki ga z uporabo Eulerjeve formule 3.1 izrazimo s trigonometrijo:

$$P := \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \sqrt{\frac{\pi^{n-1}}{\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}} \,.$$

Izračunati je torej treba produkt zaporednih sinusov. Pri tem se poslužimo naslednjega trika: razcepimo v kompleksnem binom $z^n - 1$ na linearne faktorje. Dobimo:

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z - e^{2k\pi i/n}\right) .$$

Vstavimo $n = 1$ in dobimo:

$$\begin{aligned} n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{2k\pi i/n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - e^{2k\pi i/n}\right| = \\ = \sqrt{\prod_{k=1}^{n-1} \left(\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{2k\pi}{n}\right)} = \\ = \sqrt{\prod_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)} = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} \,. \end{aligned}$$

Torej velja:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} \qquad \text{in} \qquad P = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}\,.$$

Sledi:

$$\psi_0\left(\frac{z}{n}\right) + \psi_0\left(\frac{z+1}{n}\right) + \cdots + \psi_0\left(\frac{z+n-1}{n}\right) = \psi_0(z) + \ln P - (z-1)\ln n =$$
$$= \frac{n-1}{2}\ln(2\pi) + \psi_0(z)0\big(z - \tfrac{1}{2}\big)\ln n\,.$$

■

Opomba. V 6. razdelku si bomo ogledali, kaj se zgodi, ko gre n proti neskončno, in na podlagi tega izračunali integral kanoničnega logaritma funkcije gama na vodoravnem intervalu dolžine 1.

5. Asimptotično obnašanje funkcij gama in poligama

V tem razdelku si bomo ogledali, kako se obnašajo funkcije Γ in ψ_m v dvojih okoliščinah, in sicer:

- v okolici polov funkcije Γ, t. j. $0, -1, -2, \ldots$;
- ko gre realna komponenta argumenta proti plus neskončno.

To pomeni, da jih bomo v teh okoliščinah aproksimirali s preprostejšimi funkcijami.

Pojem aproksimacije ima zelo širok pomen. Tu se bomo omejili na aproksimacijo, pri kateri gre *relativna napaka* proti nič. Za to bomo uvedli posebno oznako.

Naj bosta f in g funkciji, ki slikata iz nekega topološkega prostora v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, in naj bo a točka v tem topološkem prostoru. Da gre relativna napaka pri aproksimaciji ene funkcije z drugo proti nič, ko gre x proti a, označimo z:

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)\,,$$

kar preprosto pomeni, da je:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.$$

Zapisu $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ pravimo *asimptotična zveza*. Le-te dostikrat gledamo konvergenco pod enim in istim pogojem (recimo ko gre x proti a). V tem primeru podpis pod znakom $\sim$ opustimo. Ker je asimptotična zveza v resnici limita, lahko predpišemo tudi še kakšen dodaten pogoj, ki se nanaša na konvergenco. Tako je smiselno reči, da asimptotična zveza velja enakomerno po še kakšni dodatni spremenljivki.

Pri tovrstnih asimptotičnih zvezah prideta prav naslednji dve opažanji:

Opažanje 5.1. *Asimptotične zveze $\sim$ lahko med seboj množimo in delimo: če je $f_1(x) \sim g_1(x)$ in $f_2(x) \sim g_2(x)$, je tudi $f_1(x)\,f_2(x) \sim g_1(x)\,g_2(x)$ in $f_1(x)/f_2(x) \sim g_1(x)/g_2(x)$.*

Opažanje 5.2. *Če je* $|f(x) - g(x)| \le h(x)$ *in* $\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{|g(x)|} = 0$, *je tudi* $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Ti dve opažanji veljata tudi za asimptotične zveze, za katere predpišemo, da veljajo enakomerno po dodatni spremenljivki.

5.1 Asimptotika pri polih

V tem podrazdelku se dogovorimo, da $\sim$ pomeni $\underset{z\to 0}{\sim}$.

Trditev 5.3. *Naj bo* $n \in \mathbb{N}_0$. *Tedaj je:*

(1) $\Gamma(z-n) \sim \dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{1}{z}$;

(2) $\psi_m(z-n) \sim \dfrac{(-1)^m (m-1)!}{z^m}$; $\quad m = 1, 2, 3, \ldots$

Dokaz.

(1): Z večkratno uporabo lastnosti (G2) dobimo:

$$\Gamma(z-n) = \frac{\Gamma(z+1)}{z(z-1)\cdots(z-n)}\,.$$

A ko gre z proti nič, je $\Gamma(z+1) \sim \Gamma(1) = 1$ in $z - k \sim -k$, brž ko je $k \ne 0$. Zahtevani rezultat sledi.

(2): Z večkratno uporabo zveze (1.7) dobimo:

$$\psi_m(z-n) = \psi_m(z+1) + (-1)^m\, m! \left(\frac{1}{z^m} + \frac{1}{(z-1)^m} + \cdots + \frac{1}{(z-n)^m}\right)$$

Ko gre z proti nič, so členi $\psi_m(z+1), \frac{1}{(z-1)^m}, \ldots, \frac{1}{(z-n)^m}$ omejeni, medtem ko gre člen $\frac{1}{z^m}$ čez vse meje. Zahtevani rezultat sledi. ■

5.2 Asimptotika funkcij poligama, ko gre realna komponenta proti plus neskončno

Kot je razvidno že iz naslova, bomo v tem podrazdelku gledali situacijo, ko gre realna komponenta proti plus neskončno. Poleg tega pa bomo za asimptotiko privzeli, da je enakomerna po kompaktih glede na imaginarno komponento. Tako bo oznaka $f(z) \sim g(z)$ pomenila, da za vsako kompaktno množico $K \subseteq \mathbb{R}$ kvocienti $f(x+iy)/g(x+iy)$ konvergirajo proti 1, ko gre x proti neskončno, in sicer enakomerno, ko y preteče K. Podobno se bo tudi oznaka lim (brez podpisa) nanašala na limito, ko gre realna komponenta spremenljivke z proti plus neskončno, konvergenca pa je enakomerna po imaginarni komponenti.

Trditev 5.4. *Velja:*

(1) $\lim\big(\psi_1(z) - \ln z\big) = 0$ *in* $\psi_1(z) \sim \ln z$;

(2) $\psi_m(z) \sim \dfrac{(-1)^m (m-2)!}{z^{m-1}}$; $\quad m = 2, 3, 4, \ldots$

Opomba. Oznaka ln se pri tu nanaša na kanonični logaritem, definiran v (1.4). Glede na to, da gre realna komponenta kompleksnega števila z proti plus neskončno, njegov kanonični logaritem od nekod naprej vedno obstaja.

Dokaz trditve 5.4. Asimptotiko bomo izpeljali tako, da bomo vsote:

$$S_{m,n}(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(z+k)^m}$$

aproksimirali z integrali:

$$J_{m,n}(z) := \int_0^{n+1} \frac{\mathrm{d}s}{(z+s)^m} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(z+k+t)^m} .$$

Velja:

$$\begin{aligned} S_{m,n}(z) - J_{m,n}(z) &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \left(\frac{1}{(z+k)^m} - \frac{1}{(z+k+t)^m} \right) = \\ &= m \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \int_0^t \frac{1}{(z+k+s)^{m+1}} \,\mathrm{d}s \,\mathrm{d}t = \\ &= m \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \int_s^1 \frac{1}{(z+k+s)^{m+1}} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}s = \\ &= m \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{1-s}{(z+k+s)^{m+1}} \,\mathrm{d}s . \end{aligned}$$

Brž ko je $\Re(z) \ge 0$ in $x \ge 0$, velja $|z+x| \ge \Re(z) + x$. Tako lahko za $\Re(z) > 0$ ocenimo:

$$\bigl|S_{m,n}(z) - J_{m,n}(z)\bigr| \le m \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{1}{\bigl(\Re(z)+k+s\bigr)^{m+1}} \,\mathrm{d}s = m\, J_{m+1,n}\bigl(\Re(z)\bigr) .$$

Integrali $J_{m,n}(z)$ se dajo izračunati, in sicer za $\Re(z) > 0$ velja:

$$\begin{aligned} J_{1,n}(z) &= \ln(z+n+1) - \ln z , \\ J_{m,n}(z) &= \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{z^{m-1}} - \frac{1}{(z+n+1)^{m-1}} \right) . \end{aligned}$$

Tako iz prejšnje ocene sledi:

$$\bigl|S_{m,n}(z) - J_{m,n}(z)\bigr| \le \frac{1}{\bigl(\Re(z)\bigr)^m} .$$

Zdaj se pa spomnimo, da je $\psi_1(z) = \lim_{n\to\infty}\bigl(\ln n - S_{1,n}(z)\bigr)$. Glede na to, da $\psi_1(z)$ primerjamo z $\ln z$, ima smisel oceniti:

$$\begin{aligned} \bigl|\ln n - S_{1,n}(z) - \ln z\bigr| &\le \bigl|J_{1,n}(z) - S_{1,n}(z)\bigr| + \bigl|\ln n - \ln z - J_{1,n}\bigr| \le \\ &\le \frac{1}{\Re(z)} + \bigl|\ln n - \ln z - J_{1,n}\bigr| = \\ &= \frac{1}{\Re(z)} + \bigl|\ln n - \ln(z+n+1)\bigr| . \end{aligned}$$

V limiti, ko gre n proti neskončno, pride:

$$\big|\psi_1(z) - \ln z\big| \le \frac{1}{\Re(z)}\,.$$

S tem je dokazana prva asimptotična zveza v (1), ki je celo enakomerna po $\Im(z)$, ko preteče *celo* realno os (ne le kompaktne množice). Ni težko videti, da je v istem smislu tudi $\lim \frac{1}{|\ln z|\,\Re(z)} = 0$. V skladu z opažanjem 5.2 sledi še druga asimptotična zveza v točki (1).

Funkcije $\psi_m(z) = (-1)^m(m-1)!\lim_{n\to\infty} S_{m,n}(z)$, $m = 2, 3, 4, \ldots$, pa primerjamo z $\frac{(-1)^m(m-2)!}{z^{m-1}}$. Torej bo smiselno oceniti:

$$\begin{aligned}\left|S_{m,n}(z) - \frac{1}{(m-1)\,z^{m-1}}\right| &\le \big|S_{m,n}(z) - J_{m,n}(z)\big| + \left|J_{m,n}(z) - \frac{1}{(m-1)\,z^{m-1}}\right| \le \\ &\le \frac{1}{\big(\Re(z)\big)^m} + \left|J_{m,n}(z) - \frac{1}{(m-1)\,z^{m-1}}\right| = \\ &= \frac{1}{\big(\Re(z)\big)^m} + \frac{1}{(m-1)|z+n+1|^{m-1}}\,.\end{aligned}$$

Pomnožimo z $(-1)^m(m-1)!$ in dobimo:

$$\left|(-1)^m(m-1)!\,S_{m,n}(z) - \frac{(-1)^m\,(m-2)!}{z^{m-1}}\right| \le \frac{(m-1)!}{\big(\Re(z)\big)^m} + \frac{(m-2)!}{|z+n+1|^{m-1}}\,.$$

V limiti, ko gre n proti neskončno, pride:

$$\left|\psi_m(z) - \frac{(-1)^m\,(m-2)!}{z^{m-1}}\right| \le \frac{(m-1)!}{\big(\Re(z)\big)^m}\,.$$

Če je $\Im(z)$ omejena (na kompaktno množico), v limiti od nekod naprej vedno velja $\Re(z) \ge \Im(z)$. Tedaj je tudi $\Re(z) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}|z|$. Zahtevana asimptotična zveza v točki (2) zdaj sledi iz opažanja 5.2. ■

5.3 Asimptotična logaritemska ploščatost funkcije gama

Definicija funkcije gama je temeljila na lastnosti (1.1), ki trdi, da je logaritem funkcije gama asimptotično ploščat. V izreku 1.1 smo sicer dokazali, da je definicija dobra, in izpeljali precej lastnosti funkcije. Med njimi pa ni bilo izhodiščne lastnosti (1.1). Le-to bomo dokazali zdaj v še malo splošnejši obliki.

Trditev 5.5. *Velja:*

$$\lim\Big(\psi_0(z+w) - \psi_0(z) - w\ln(z+h)\Big) = 0 \tag{5.1}$$

in

$$\frac{\Gamma(z+w)}{\Gamma(z)} \sim (z+h)^w\,, \tag{5.2}$$

pri čemer se oznaki lim *in* $\sim$ *tu nanašata na konvergenco, ko gre* $\Re(z)$ *proti plus neskončno in je enakomerna po kompaktnih množicah glede na* $\Im(z)$*,* $w \in \mathbb{C}$ *in* $h \in \mathbb{C}$*.*

Opomba. Seveda delamo s kanoničnim logaritmom in kanoničnimi kompleksnimi potencami, tako kot smo definirali v (1.4) in (1.5). Glede na to, da gre $\Re(z)$ proti neskončno, $\Im(z)$ in h pa sta omejena (na kompaktno množico), morajo od nekod naprej vedno obstajati.

Dokaz trditve 5.5. Asimptotična zveza (5.2) sledi iz (5.1), zato je dovolj dokazati slednjo. Ker sta w in h omejena, velja $\lim\Big(w\big(\ln(z+h)-\ln z\big)\Big)=0$, torej je dovolj dokazati konvergenco:

$$\lim\Big(\psi_0(z+w)-\psi_0(z)-w\ln z\Big)=0\,.$$

Taylorjev razvoj do vključno prvega odvoda z ostankom v integralski obliki nam da:

$$\psi_0(z+w)-\psi_0(z)-w\ln z=w\big(\psi_1(z)-\ln z\big)+w^2\int_0^1(1-t)\,\psi_2(z+tw)\,\mathrm{d}t\,.$$

Po točki (1) trditve 5.4 je $\lim\big(\psi_1(z)-\ln z\big)=0$, iz točke (2) pa sledi, da je tudi $\lim\psi_2(z)=0$ in s tem $\lim\psi_2(z+tw)=0$, enakomerno, ko w preteče kompaktno množico, t pa interval $[0,1]$. Rezultat sledi. ∎

5.4 Stirlingov obrazec

Trditev 5.5 nam ne da asimptotičnega obnašanja funkcije gama same po sebi. Za izpeljavo tega si bomo pomagali z integralsko reprezentacijo:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Ideja je, da s primerno substitucijo iz integrala izločimo "bistveni" del, preostane pa integral, v katerem integral konvergira, ko gre realna komponenta spremenljivke z proti plus neskončno. Glede na to, da se osredotočimo na integrand, v katerem nastopa $z-1$, je pripravneje pisati:

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty t^{z}e^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Oglejmo si najprej primer, ko je $z=x\in(0,\infty)$. Tedaj ima integrand pri $t=0$ vrednost 0, nato narašča in potem spet pada proti 0. Bistveni del integrala je okoli maksimuma. Za konvergenco integranda po ustrezni substituciji se zdi obetavno, če:

- je maksimum ves čas dosežen v isti točki;
- je maksimalna vrednost konstantna;
- je drugi odvod v maksimumu konstanten.

Hitro lahko izračunamo, da funkcija $t\mapsto t^xe^{-t}$ doseže svoj maksimum pri $t=x$. S substitucijo $s=t-x$ dosežemo, da je ves čas dosežen v izhodišču. Nadalje je maksimalna vrednost enaka $(x/e)^x$. To izpostavimo iz integrala. Dobimo:

$$\Gamma(x+1)=\left(\frac{x}{e}\right)^x\int_{-x}^\infty\left(1+\frac{s}{x}\right)^xe^{-s}\,\mathrm{d}s\,.$$

Zdaj je maksimalna vrednost integranda ves čas enaka 1. Krajši račun pokaže, da je:

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\right|_{s=0}\left[\left(1+\frac{s}{x}\right)^x e^{-s}\right] = -\frac{1}{x}\,.$$

Če je $s = cu$ in $f(s) = g(u) = f(cu)$, je $g''(u) = c^2 f''(cu)$. S substitucijo $s = u\sqrt{x}$ torej dosežemo, da je drugi odvod integranda v maksimumu ves čas enak -1. Dobimo:

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{\infty}\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}}\,\mathrm{d}u = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x}\int_{-\infty}^{\infty} g_x(u)\,\mathrm{d}u\,,$$

kjer je:

$$g_x(u) := \begin{cases} \left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-u\sqrt{x}} & ;\ u \ge -\sqrt{x} \\ 0 & ;\ \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunati moramo limito izraza $g_x(u)$, ko gre x proti neskončno. Izraz logaritmiramo, uvedemo substitucijo $x = y^{-2}$ in po L'Hôpitalovem pravilu izračunamo:

$$\lim_{x\to\infty}\ln g_x(u) = \lim_{x\to\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{u}{\sqrt{x}}\right) - \sqrt{x}\,u\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+uy)-uy}{y^2} = -\frac{u^2}{2}\,.$$

Torej je $\lim_{x\to\infty} g_x(u) = e^{-\frac{1}{2}u^2}$. To velja pri vsakem u, saj je v limiti u od nekod naprej vedno večji od $-\sqrt{x}$. Pokažimo še, da so izpolnjeni pogoji Lebesgueovega izreka o dominirani konvergenci. Za $t \le 0$ iz Taylorjevega razvoja dobimo oceno $\ln(1+t) \le 1+t-\frac{1}{2}t^2$, torej za $u \le 0$ velja ocena:

$$g_x(u) \le e^{-\frac{1}{2}u^2}\,.$$

Pravzaprav smo oceno izpeljali le za $-\sqrt{x} \le u \le 0$, toda za $u < \sqrt{x}$ je $g_x(u) = 0$ in ocena avtomatično velja. Za $t \ge 0$ pa logaritem ocenimo takole:

$$\ln(1+t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{1+s} \le \frac{t}{2}\left(1+\frac{1}{1+t}\right) = t - \frac{t^2}{2(1+t)}\,.$$

Upoštevali smo konveksnost funkcije $s \mapsto (1+s)^{-1}$ in tako integral ocenili s ploščino trapeza. Od tod dobimo, da za $u \ge 0$ velja:

$$g_x(u) \le e^{-\frac{u^2}{2(1+u/\sqrt{x})}} \le e^{-\frac{u^2}{2(u+1)}}\,.$$

Slednja ocena velja pri $x \ge 1$. Tako smo funkcije g_x enakomerno omejili s funkcijo, ki je gotovo integrabilna, saj za $u \ge 1$ velja $e^{-\frac{u^2}{2(u+1)}} \le e^{-\frac{u^2}{2(u+u)}} = e^{-u/4}$, integral $\int_1^\infty e^{-u/4}\,\mathrm{d}u$ pa obstaja. Sledi:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_x(u)\,\mathrm{d}u &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2}\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \sqrt{2}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}\,,\end{aligned}$$

Tako smo dobili asimptotično zvezo:

$$\Gamma(x+1) \underset{x\to\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}\,.$$

Upoštevamo (L1) in končno dobimo:

$$\Gamma(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \tag{5.3}$$

ali v logaritemski obliki:

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\psi_0(x) - x\ln x + x + \tfrac{1}{2}\ln x - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi)\Big) = 0\,.$$

Temu pravimo *Stirlingov*[10] *obrazec*, čeprav je to asimptotično zvezo odkril že de Moivre[11]. Asimptotika velja tudi v kompleksnem.

Izrek 5.6. *Če se oznaki* lim *in* $\sim$ *označuje konvergenco, ko gre* $\Re(z)$ *proti plus neskončno in je enakomerna po* $\Im(z)$*, velja:*

$$\Gamma(z) \sim \left(\frac{z}{e}\right)^z \sqrt{2\pi z} \tag{5.4}$$

in

$$\lim\Big(\psi_0(z) - z\ln z + z + \tfrac{1}{2}\ln z - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi)\Big) = 0\,. \tag{5.5}$$

Opomba. Kvadratni koren v kompleksnem je tu seveda mišljen kot kanonična kompleksna potenca, prav tako kot tudi $(z/e)^z$. Na pozitivnih realnih številih dobimo pozitivni koren.

Dokaz izreka 5.6. Pišimo $z = x+iy$ in zvezi (5.3) prištejmo naslednji primer zveze iz trditve 5.5:

$$\lim\Big(\psi_0(x+iy) - \psi_0(x) - iy\ln(x+iy)\Big) = 0\,.$$

Dobimo:

$$\lim\Big(\psi_0(x+iy) - iy\ln(x+iy) - x\ln x + x + \tfrac{1}{2}\ln x - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi)\Big) = 0\,.$$

Uredimo tako, da bo čimbolj podobno zahtevani zvezi:

$$\begin{aligned}\lim\Big(\psi_0(x+iy) - (x+iy)\ln(x+iy) + x + iy + \tfrac{1}{2}\ln(x+iy) - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) +{}\\ + x\big(\ln(x+iy) - \ln x\big) - iy + \tfrac{1}{2}\big(\ln(x+iy) - \ln x\big)\Big) = 0\,.\end{aligned}$$

Videti moramo le še, da lahko izločimo člene v drugi vrstici. Velja:

$$\lim\big(\ln(x+iy) - \ln x\big) = \lim\ln\frac{x+iy}{x} = 0$$

[10] James Stirling (1692–1770), škotski matematik
[11] Abraham de Moivre (1667–1754), francoski matematik, deloval v Angliji

(račun z logaritmom lahko naredimo, ker je eden od argumentov realen). Nadalje iz Taylorjevega razvoja do vključno prvega odvoda z ostankom v integralski obliki:

$$x\big(\ln(x+iy)-\ln x\big) = x\ln\frac{x+iy}{x} = x\ln\left(1+\frac{iy}{x}\right) = iy + y^2\int_0^1 \frac{(1-t)}{\left(1+\frac{ity}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

vidimo, da je tudi:

$$\lim\Big(x\big(\ln(x+iy)-\ln x\big)\Big) = 0\,.$$

Rezultat je dokazan. ∎

6. Raabejeva formula

Raabejeva[12] formula nam da izračun integrala:

$$\int_z^{z+1} \psi_0(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

kjer je ψ_0 kanonični logaritem funkcije gama. Tega bomo izračunali neposredno po definiciji integrala, s pomočjo Riemannovih[13] vsot. Če namreč v formuli (4.2):

$$\psi_0\left(\frac{z}{n}\right) + \psi_0\left(\frac{z+1}{n}\right) + \cdots + \psi_0\left(\frac{z+n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{2}\ln(2\pi) + \psi_0(z) - \left(z-\tfrac{1}{2}\right)\ln n$$

namesto z vstavimo nz in delimo z n, dobimo ravno Riemannovo vsoto za iskani integral:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left[\psi_0(z) + \psi_0\left(z+\frac{1}{n}\right) + \cdots + \psi_0\left(z+\frac{n-1}{n}\right)\right] &= \\ = \frac{n-1}{2n}\ln(2\pi) + \frac{\psi_0(nz)}{n} - \left(z-\frac{1}{2n}\right)\ln n\,.\end{aligned}$$

Pošljemo n proti neskončno in dobimo:

$$\int_z^{z+1} \psi_0(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\psi_0(nz)}{n} - z\ln n\right)\,.$$

Zdaj pa uporabimo logaritemsko obliko Stirlingovega obrazca – v zvezi (5.5) namesto z pišemo nz. Dobimo:

$$\lim\Big(\psi_0(nz) - nz(\ln n + \ln z) + nz + \tfrac{1}{2}(\ln n + \ln z) - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi)\Big) = 0\,.$$

To lahko delimo z n in dobimo:

$$\lim\left(\frac{\psi_0(nz)}{n} - z(\ln n + \ln z) + z\right) = 0\,.$$

[12] Joseph Ludwig Raabe (1801–1859), švicarski matematik, rojen v Galiciji (današnja Ukrajina)
[13] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), nemški matematik

oziroma:

$$\lim \left(\frac{\psi_0(nz)}{n} - z \ln n + \ln z) + z \right) = z(\ln z - 1)\,.$$

Sledi Raabejeva formula:

$$\int_z^{z+1} \psi_0(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) + z(\ln z - 1)\,.$$

Literatura

[1] L. Ahlfors: *Complex Analysis: an Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable.* McGraw-Hill, New York, 1979.

[2] G. M. Fichtenholz: *Differential- und Integralrechnung.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964.

[3] F. Križanič: *Temelji realne matematične analize.* DZS, Ljubljana, 1990.

[4] W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, 1976.