# Algebra III - Abstraktna algebra, 01.12.2017.

**1.** (a) Dana je končna grupa reda $n$. Pokaži, da se vsak element te grupe pojavi natanko enkrat v vsaki vrstici in vsakem stolpcu Cayleyeve tabele te grupe.

(b) Dana je množica $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, P, Q, R\}$, in dana je binarna operacija $*$ definirana na množici $\mathcal{A}$, tako da je $(\mathcal{A}, *)$ grupa. Izpolni dano tabelo na desni strani tako, da bo $\mathcal{A}$ abelska grupa.

| * | A | B | C | D | P | Q | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | A | B | C | D | P | Q | R |
| B | B | | | | | R | |
| C | C | | | | R | | |
| D | D | | | R | | | |
| P | P | | R | | | | |
| Q | Q | R | | | | D | P |
| R | R | | | | | P | Q |

Re.

(a) Če je $ab = c$ in $ad = c$, potem $b = d$. Če je $ab = c$ in $gb = c$ potem $a = g$.

(b) Vsaka grupa praštevilskega reda je ciklična. Dana grupa je reda 7.

| * | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

$\cong$

| * | A | B | C | D | P | Q | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | A | B | C | D | P | Q | R |
| B | B | C | D | P | Q | R | A |
| C | C | D | P | Q | R | A | B |
| D | D | P | Q | R | A | B | C |
| P | P | Q | R | A | B | C | D |
| Q | Q | R | A | B | C | D | P |
| R | R | A | B | C | D | P | Q |

**2.** Naj bo $G = (\mathbb{Z}_{126}, +)$ dana grupa.

(a) Poišči vse možne rede elementov grupe $G$. Za vsakega od možnih redov podaj element grupe $G$, ki ima tak red.

(b) Za vsakega od možnih redov določi število elementov grupe $G$, ki imajo ta red.

(c) Določi število (cikličnih) podgrup grupe $G$, ki so reda 7 (odgovor obrazloži brez uporabe znane trditve s predavanja ali vaj).

Re.

(a) Grupa G lahko ima elemente reda: 1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126.

$$|0| = 1,\ |63| = 2,\ |42| = 3,\ |21| = 6,\ |18| = 7,\ |14| = 9,\ |9| = 14,\ |7| = 18,$$

$$|6| = 21,\ |3| = 42,\ |2| = 63,\ |1| = 126$$

(b) $\phi(1) = |U(1)| = 1$, $\phi(2) = |U(2)| = 1$, $\phi(3) = |U(3)| = 2$, $\phi(6) = |U(6)| = 2$, $\phi(7) = |U(7)| = 6$, $\phi(9) = |U(9)| = 6$, $\phi(14) = |U(14)| = 6$, $\phi(18) = |U(18)| = 6$, $\phi(21) = |U(21)| = 12$, $\phi(42) = |U(42)| = 12$, $\phi(63) = |U(63)| = 36$, $\phi(126) = |U(126)| = 36$.

(c) Če je $H = \{e, a, a^2, a^3, ..., a^7\}$ ciklična grupa reda 7 potem, so vsi elementi $\{a, a^2, a^3, ..., a^7\}$ reda 7. Kako je $\phi(7) = 6$ to obstaja samo ena podgrupa grupe $G$ reda 7.

**3.** Dana je simetrična grupa $S_5$ (grupa vseh permutacij množice $\{1, 2, 3, 4, 5\}$).

(a) Pokaži, da $S_5$ ni abelska.

(b) Določi število elementov reda 3 grupe $S_5$.

(c) Določi število elementov reda 2 grupe $S_5$

(d) Določi redove vseh $5! = 120$ elementov iz $S_5$.

Re.
(a) $(12), (13) \in S_5$, $(12)(13) = (132) \neq (123) = (13)(12)$.
(b) $\dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3} = 20$
(c) $\dfrac{5 \cdot 4}{2} + \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8} = 10 + 15 = 25$
(d) 1, 2, 3, 4, 5 in 6.

**4.** Naj bo $f : G \longrightarrow G'$ homomorfizem grup in $H \leq G$. Pokaži, da je

$$f(H) \leq G'.$$

Re.
$f(e) = e'$, $e' \in f(H)$, $a' \cdot b' = f(a) \cdot f(b) = f(ab) \in f(H)$, $a \cdot a^{-1} = e$,
$f(a) \cdot f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e) = e'$...

Več na http://osebje.famnit.upr.si/~penjic/